

УДК 517.5

А. А. Барышев, Д. С. Лукомский,  
С. Ф. Лукомский, Э. Х. Юзликеев

## БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ—ХААРА В ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЦВЕТОВОЙ ПАЛИТРЕ

Введение

Пусть  $(G, \dot{+})$  –  $p$ -ичная компактная группа,  $X$  – группа характеров,  $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  – основная цепочка подгрупп в  $G$ ,  $(G_n^\perp)$  – основная цепочка в  $X$ , состоящая из аннуляторов,  $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  – базисная последовательность в  $G$ ,  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  – система Радемахера. Рассмотрим задачу разложения цветного изображения в  $p$ -ичный ряд Фурье—Хаара на группе  $G$ . Исходное изображение будем трактовать как массив  $(\lambda_{a_0, a_1, \dots, a_n}^{(n+1)})_{a_j = \overline{0, p-1}}$ , состоящий из комплексных чисел. Векторы  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  определяют положение точки,  $\lambda_{a_0, a_1, \dots, a_n}^{(n+1)}$  – цвет этой точки. Разложим изображение  $\lambda_{a_0, a_1, \dots, a_n}^{(n+1)}$  в  $p$ -ичный ряд Фурье – Хаара, получим дискретный ряд  $S_{p^{n+1}}(x) = \sum_{l=0}^{p^{n+1}-1} c_l H_l(x)$ , в котором  $c_l$  – коэффициенты Фурье—Хаара,

$$H_l(x) = H_{jp^n+k}(x) = r_k^j(x \dot{-} q) \mathbf{1}_{G_k \dot{+} q}(x), j = \overline{1, p-1}, k = \overline{0, p^n-1}$$

функции Хаара [1], число  $k$  и элемент  $q$  связаны соотношением

$$q = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \dots \dot{+} a_{m-1} g_{m-1} \Leftrightarrow k = a_0 + a_1 p + \dots + a_{m-1} p^{m-1}.$$

Мы рассмотрим две задачи:

- 1) как по массиву  $(\lambda_{a_0, \dots, a_n}^{(n+1)})$  восстановить коэффициенты Фурье—Хаара,
- 2) как задать палитру цветов, используя 2 параметра ( $\text{Im } \lambda_{a_0, \dots, a_n}^{(n+1)}$  и  $\text{Re } \lambda_{a_0, \dots, a_n}^{(n+1)}$ ).

Быстрое  $p$ -ичное преобразование Фурье—Хаара. Сначала рассмотрим первую задачу. Запишем  $S_{p^{n+1}}(x)$  в виде:

$$S_{p^{n+1}}(x) = \sum_{l=0}^{p^n-1} c_l H_l(x) + \sum_{l=p^n}^{p^{n+1}-1} c_l H_l(x) = S_{p^n}(x) + \sum_{l=p^n}^{p^{n+1}-1} c_l H_l(x). \quad (1)$$

В этом случае

$$S_{p^{n+1}}(G_{n+1} \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} \dots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1} \dot{+} a_n g_n) = \lambda_{a_0, a_1, \dots, a_n}^{(n+1)},$$

$$S_{p^n}(G_n \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} \dots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1}) = \lambda_{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}}^{(n)},$$

$$H_l(G_{n+1} \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} \dots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1} \dot{+} a_n g_n) = \varepsilon_{a_n}^j c_{j, p^n, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}}.$$

Подставляя эти значения в (1), получаем при каждом наборе  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  систему уравнений

$$\lambda_{a_0, a_1, \dots, a_n}^{(n+1)} = \lambda_{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}}^{(n)} + \sum_{j=1}^{p-1} \varepsilon_{a_n}^j c_{j, p^n, a_0, \dots, a_{n-1}} \quad (2)$$

относительно неизвестных  $\lambda_{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}}^{(n)}, c_{1, p^n, a_0, \dots, a_{n-1}}, \dots, c_{p-1, p^n, a_0, \dots, a_{n-1}}$ . В системе (2)  $\varepsilon_{a_n} = e^{\frac{2\pi i}{p} a_n}$  – корни из (1) степени  $p$ . Найденным коэффициентам  $c_{j, p^n, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}}$  присваиваем векторные номера  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, j)$  и помещаем в  $n + 1$ -мерный массив коэффициентов Фурье – Хаара  $c(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}, j^+)$ . Значения  $\lambda_{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}}^{(n)}$  помещаем в  $n + 1$ -мерный массив  $\lambda(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}, 0)$  с номерами  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$ . Равенство (2) можно записать в виде условной схемы

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{a_0 a_1 \dots a_n}^{(n+1)} & \longrightarrow & \lambda_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}, 0}^{(n)} \\ & \searrow & c_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}, j^+}^{(n)} \end{array}$$

Таким образом, после 1-го шага получаем массив  $c^{(n)}(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}, j^+)$ , в котором элементы с номерами  $j_0, j_1, \dots, j_{n-1} = \overline{0, p-1}, j^+ = \overline{1, p-1}$  есть найденные коэффициенты Фурье–Хаара и массив значений  $\lambda^{(n)}(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}, 0)$ , в котором заданы элементы с номерами  $(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}, 0)$ . При этом множество векторов, с помощью которых происходит нумерация, преобразуется по аналогичной схеме

$$\begin{array}{ccc} (\{j_0, j_1, \dots, j_n\}) & \longrightarrow & \{(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}, 0)\} \\ & \searrow & \{(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}, j^+)\}. \end{array}$$

Повторяя эти рассуждения, получаем после  $n + 1$ -го шага схему для коэффициентов Фурье–Хаара

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_{a_0 a_1 \dots a_n}^{(n+1)} & \longrightarrow & \lambda_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}, 0}^{(n)} & \longrightarrow & \lambda_{a_0 a_1 \dots a_{n-2}, 0, 0}^{(n-1)} & \dots & \longrightarrow & \lambda_{0, 0, \dots, 0, 0}^{(0)} = c_0 \\ & \searrow & c_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}, j^+}^{(n)} & \searrow & c_{a_0 a_1 \dots a_{n-2}, j^+, 0}^{(n-1)} & & \searrow & c_{j^+, 0, \dots, 0, 0}^{(0)}. \end{array}$$

и аналогичную схему преобразования векторов, по которым идет нумерация

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{(j_0, j_1, \dots, j_n)\} & \longrightarrow & \{(j_0, \dots, j_{n-1}, 0)\} & \longrightarrow & \{(j_0, \dots, j_{n-1}, 0)\} & \dots & \longrightarrow & \{(0, 0, \dots, 0)\} \\
 & \searrow & & \searrow & & & \searrow & \\
 & & \{(j_0, \dots, j_{n-1}, j^+)\} & & \{(j_0, \dots, j_{n-1}, j^+)\} & & & \{(j^+, 0, \dots, 0)\}.
 \end{array}$$

Двухпараметрическая цветовая палитра. Цветное изображение задается функцией  $\varphi : (x, y) \mapsto (C_1, C_2, C_3)$ , где  $(x, y)$  – координаты пикселя,  $x = \overline{0, M}$ ,  $y = \overline{0, N}$ ,  $(C_1, C_2, C_3)$  – числа, определяющие цвет пикселя. В существующих палитрах обычно цвет определяется именно тремя числами. В палитре RGB:  $C_1$  – интенсивность красного,  $C_2$  – интенсивность зеленого,  $C_3$  – интенсивность синего. При использовании  $p$ -ичного преобразования Фурье–Хаара значения функции есть комплексные числа, т. е. пары  $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$  или  $(|z|, \arg z)$ . Поэтому напрямую применять преобразование Фурье–Хаара невозможно и надо от трех параметрической палитры перейти к двухпараметрической.

Считается, что для человеческого глаза наиболее естественной является палитра HSV (Hue, Saturation, Value). В палитре HSV:  $C_1 = H$  – оттенок,  $C_2 = S$  – насыщенность,  $C_3 = V$  – яркость. Причем  $H$  принимает целые значения  $H = \overline{0, 360}$ ,  $S$  и  $V$  выражаются в процентах, т. е.  $S$  и  $V \in [0, 100]$ . Будем считать, что  $S$  и  $V$  принимают целые значения.

Тогда отображение палитры HSV в двухпараметрическую можно задать формулой

$$\psi(HSV) = a + bi, \quad a = 360 * S + H, \quad b = V.$$

В этом случае  $0 \leq a \leq 36000 - 1$ ,  $0 \leq b \leq 100$ ,  $H = a \pmod{360}$ .

Если заменить  $a$  и  $b$  на значения

$$a = \frac{360 * S + H}{100}, \quad b = \frac{V}{100},$$

то их можно трактовать как аргумент (в градусной мере) и модуль комплексного числа  $\psi(HSV)$ . Рассмотренный алгоритм численно реализован в пакете «Математика».

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-00102).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лукомский С.Ф.* О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т.9, вып. 1. С.14–19.

## О КЛАССАХ ГРУППОИДОВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Множество бинарных отношений  $\Phi$ , замкнутое относительно некоторой совокупности  $\Omega$  операций над ними, образует алгебру  $(\Phi, \Omega)$ , называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения  $\subset$ . Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1, 2]. Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются *логическими*. Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Операция называется *диофантовой* [3], если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции допускают описания с помощью графов [3, 4]. Эквациональные и квазиэквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в [5, 6].

Для заданного множества  $\Omega$  операций над бинарными отношениями обозначим через  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subset\}$ ) класс алгебр (упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам отношений с операциями из  $\Omega$ . Пусть  $Q\{\Omega\}$  ( $Q\{\Omega, \subset\}$ ) — квазимногообразие и  $Var\{\Omega\}$  ( $Var\{\Omega, \subset\}$ ) — многообразие, порожденное классом  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subset\}$ ).

Следующие проблемы обычно рассматриваются при изучении различных классов алгебр отношений:

1. Найти базис тождеств многообразия  $Var\{\Omega\}$ . Выяснить, является ли это многообразие конечно базлируемым.
2. Найти базис квазитожеств квазимногообразия  $Q\{\Omega\}$ . Выяснить, является ли это квазимногообразие конечно базлируемым. Выяснить, является ли это квазимногообразие многообразием.
3. Найти систему элементарных аксиом для класса  $R\{\Omega\}$ . Выяснить, является ли этот класс конечно аксиоматизируемым. Выяснить, является ли этот класс квазимногообразием (многообразием).

Аналогичные проблемы формулируются для упорядоченных алгебр отношений.

Предметом нашего рассмотрения будут алгебры с одной бинарной диофантовой операцией. Рассмотрение бинарных операций над отношениями играет в алгебраической логике предикатов роль, аналогичную

роли бинарных булевых функций в пропозициональной логике высказываний. Поэтому естественен интерес к алгебраическим свойствам указанных операций. В общем случае алгебра отношений вида  $(\Phi, *)$ , где  $*$  – некоторая бинарная операция над отношением, образует группоид. Класс всех группоидов не имеет естественных представлений в виде алгебр бинарных отношений, поэтому с точки зрения теории группоидов представляет интерес рассмотрение группоидов, допускающих такое представление. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в [7, 8].

Упорядоченным группоидом  $(A, \cdot, \leq)$  назовем группоид  $(A, \cdot)$  с заданным на множестве  $A$  отношением порядка  $\leq$ , согласованным с операцией группоида. Элемент  $0$  называется нулевым элементом группоида (упорядоченного группоида), если  $0x = x0 = 0$  (и  $0 \leq x$ ) для любого  $x \in A$ .

Сосредоточим свое внимание на следующей бинарной операции над отношениями, определяемой следующим образом:

$$\rho * \sigma = \{(x, y) : (\exists z, w)(x, z) \in \rho \wedge (z, w) \in \sigma\}.$$

В работе [9] были найдены конечные базисы тождеств для многообразий  $Var\{*\}$  и  $Var\{*, \subset\}$ , то есть получено решение проблемы 1.

**Теорема 1.** *Группоид  $(A, \cdot)$  принадлежит многообразию  $Var\{*\}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$(xy)x = xy \quad (1), \quad (xy)y = xy \quad (2), \quad (xy)^2 = xy \quad (3), \quad x^2y = xy^2 = x^2y^2 \quad (4),$$

$$x^2(yz) = x^2(zy) \quad (5), \quad (x^2y)z = (x^2z)y \quad (6), \quad (xy^2)z = x(y^2z) \quad (7).$$

**Теорема 2.** *Упорядоченный группоид  $(A, \cdot, \leq)$  принадлежит многообразию  $Var\{*, \subset\}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1–7) и тождествам:*

$$x \leq x^2 \quad (8), \quad xy \leq x^2 \quad (9).$$

Формулируемые ниже результаты посвящены решению проблем (2) – (3) для рассматриваемого класса группоидов бинарных отношений.

**Теорема 3.** *Квазимногообразие  $Q\{*, \subset\}$  является многообразием, то есть  $Q\{*, \subset\} = Var\{*, \subset\}$ . Упорядоченный группоид  $(A, \cdot, \leq)$  принадлежит квазимногообразию  $Q\{*, \subset\}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1) – (9). Класс  $R\{*, \subset\}$  не является квазимногообразием. Упорядоченный группоид  $(A, \cdot, \leq)$  принадлежит классу  $R\{*, \subset\}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1) – (9) и следующим аксиомам:*

$$xy = 0 \Rightarrow yx = 0 \text{ (10); } y \neq 0 \Rightarrow xy^2 = x^2 \text{ (11).}$$

**Теорема 4.** *Квазимногообразие  $Q\{*\}$  не является многообразием и не имеет конечного базиса квазитожеств. Класс  $R\{*\}$  не может быть охарактеризован никакой конечной системой элементарных аксиом и не является квазимногообразием.*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 4. P. 73–89.
2. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. С. 188–189.
3. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Доклады РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
4. *Böner P., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
5. *Бредихин Д. А.* Эквиациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. математическая. 1993. № 3. С. 23–30.
6. *Бредихин Д. А.* О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
7. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. Vol. 54. P. 111–124.
8. *Bredikhin D. A.* Varieties of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87–192.
9. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов бинарных отношений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 93–98.

УДК 514.764

**А. В. Букушева**

### О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОЧТИ ПАРАКОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

**Аннотация.** Вводится понятие почти параконтактной эрмитовой структуры. Находятся условия, при которых почти параконтактная метрическая структура является почти параконтактной эрмитовой структурой.

Пусть  $X$  – гладкое многообразие нечетной размерности  $n$ ,  $\Xi(X)$  –  $C^\infty(X)$ -модуль гладких векторных полей на  $X$ . Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса  $C^\infty$ . *Почти параконтактной метрической структурой на  $X$*  называется совокупность  $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$  тензорных полей на  $X$ , где  $\varphi$  – тензор типа  $(1, 1)$ , называемый *структурным эндоморфизмом*,  $\vec{\xi}$  и  $\eta$  –

вектор и ковектор, называемые соответственно *структурным вектором* и *контактной формой*,  $g$  – (псевдо) риманова метрика [1]. При этом

$$\begin{aligned}\eta(\vec{\xi}) &= 1, \quad \varphi(\vec{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \varphi^2 \vec{X} = \vec{X} - \eta(\vec{X})\vec{\xi}, \\ g(\varphi \vec{X}, \varphi \vec{Y}) &= g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}), \quad \vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X).\end{aligned}$$

Кососимметрический тензор  $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi \vec{Y})$  называется *фундаментальной формой структуры*. Многообразию, на котором фиксирована почти параконтактная метрическая структура, называется *почти параконтактным метрическим многообразием*. В случае, когда  $\Omega = d\eta$ , почти параконтактная метрическая структура называется *параконтактной метрической структурой*. Почти параконтактная метрическая структура называется *нормальной*, если  $N_\varphi - 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ , где  $N_\varphi$  – кручение Нейенхейса, образованное тензором  $\varphi$ . Нормальная параконтактная метрическая структура называется *парасасакиевой структурой*. Будем говорить, что почти параконтактная метрическая структура *почти нормальная*, если выполняется условие  $N_\varphi - 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$ .

Почти нормальные почти параконтактные метрические пространства в дальнейшем будем называть *почти параконтактными эрмитовыми пространствами*. Различие в понятиях нормальной почти параконтактной метрической структуры и почти параконтактной эрмитовой структуры раскрывается следующей очевидной теоремой.

**Теорема 1.** *Почти параконтактная эрмитова структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:  $\omega(\varphi \vec{u}, \varphi \vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$ .*

Тензорное поле типа  $(p, q)$ , заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем *допустимым* (к распределению  $D$ ), если координатное представление поля в адаптированной карте  $K(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n$ ;  $a, b, c, e = 1, 2, \dots, n-1$ ) [2] имеет вид:  $t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$ .

Назовем допустимое тензорное поле *интегрируемым*, если в окрестности каждой точки многообразия  $X$  найдется адаптированная карта, относительно которой компоненты поля постоянны. Форма  $\omega = d\eta$  является одним из примеров интегрируемой допустимой тензорной структуры. Если распределение  $D$  интегрируемо, то всякая допустимая интегрируемая структура является интегрируемой структурой на многообразии  $X$ . Следующие две теоремы доказываются с использованием адаптированных координат.

**Теорема 2.** *Допустимая структура  $\varphi$  интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство  $P(N_\varphi) = 0$ .*

**Теорема 3.** Почти параконтактная метрическая структура является почти параконтактной эрмитовой структурой тогда и только тогда, когда допустимая структура  $\varphi$  интегрируема.

Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии  $D[3]$  понимается отображение  $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \rightarrow \Gamma D$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $\nabla_{f_1\vec{u}_1+f_2\vec{u}_2} = f_1\nabla_{\vec{u}_1} + f_2\nabla_{\vec{u}_2}$ ,
- 2)  $\nabla_{\vec{u}}f\vec{v} = f\nabla_{\vec{u}}\vec{v} + (\vec{u}f)\vec{v}$ ,

где  $\Gamma D$  – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения  $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c\vec{e}_c$ .

Кручение внутренней линейной связности  $S$  по определению полагается равным  $S(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - P[\vec{X}, \vec{Y}]$ . Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем  $S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c$ .

Пусть  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  – почти параконтактная метрическая структура. Имеет место следующая теорема:

**Теорема 4.** Пусть  $\nabla$  – внутренняя линейная связность без кручения, заданная на почти параконтактном метрическом многообразии  $X$ , тогда на  $X$  существует связность с кручением  $S(\vec{X}, \vec{Y}) = -\frac{1}{4}P(N_\varphi)(\vec{X}, \vec{Y})$ ,  $\vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma D$  совместимая с  $\varphi$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную внутреннюю связность  $\nabla$  на  $X$  без кручения. Определим допустимое тензорное поле  $Q(\vec{X}, \vec{Y})$  следующим образом:

$$4Q(\vec{X}, \vec{Y}) = (\nabla_{\varphi\vec{y}}\varphi)\vec{X} + \varphi((\nabla_{\vec{y}}\varphi)\vec{X}) + 2\varphi((\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{Y}),$$

где  $\vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma D$ . Рассмотрим внутреннюю линейную связность  $\tilde{\nabla}$ , определяемую равенством  $\tilde{\nabla}_{\vec{X}}\vec{Y} = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} + 4Q(\vec{X}, \vec{Y})$ .

Чтобы показать, что заданная связность совместима с  $\varphi$ , убедимся в справедливости равенства  $\tilde{\nabla}_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) = \varphi(\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y})$ . Проводя непосредственные вычисления, получаем:

$$4Q(\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = (\nabla_{\varphi\vec{y}}\varphi)\vec{X} + \varphi((\nabla_{\varphi\vec{y}}\varphi)\vec{X}) + 2\varphi((\nabla_{\vec{X}}\varphi) \circ \varphi\vec{Y}),$$

$$4\varphi Q(\vec{X}, \vec{Y}) = \varphi((\nabla_{\vec{y}}\varphi)\vec{X}) + (\nabla_{\vec{y}}\varphi)\vec{X} + 2(\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{Y},$$

Далее, получаем  $Q(\vec{X}, \varphi\vec{Y}) - \varphi Q(\vec{X}, \vec{Y}) = -(\nabla_{\vec{X}}\varphi)\vec{Y}$ .

Для кручения  $S(\vec{X}, \vec{Y})$  связности  $\tilde{\nabla}$  имеем:  $S(\vec{X}, \vec{Y}) = Q(\vec{X}, \vec{Y}) - Q(\vec{Y}, \vec{X})$ .

Расписывая последнее равенство, убеждаемся в справедливости теоремы. Следующая теорема является следствием теоремы 4.



**Теорема 5.** Почти параконтактное метрическое многообразие допускает внутреннюю связность  $\nabla$  без кручения такую, что  $\nabla^1\varphi = 0$ , тогда и только тогда, когда допустимая структура  $\varphi$  интегрируема.

**Доказательство.** Пусть  $\nabla$  - связность без кручения такая, что  $\nabla^1\varphi = 0$ . Если использовать эту  $\nabla$  в доказательстве теоремы 5, то получим:  $S(\vec{X}, \vec{Y}) = -\frac{1}{4}P(N_\varphi)(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$ ,  $\vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma D$ .

Добавляя к этому условию равенство  $\partial_n\varphi_b^a$ , получаем равенство  $P(N_\varphi)(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$ ,  $\vec{X}, \vec{Y} \in TX$ , что в силу теоремы 2 эквивалентно интегрируемости  $\varphi$ . Обратное — очевидно.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Alekseevsky D. V., Medori C., Tomassini A.* Maximally homogeneous para-CR manifolds // Ann. Global Anal. Geom. 2006. Vol.30, № 1. P. 1–27.
2. *Галаев С. В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
3. *Вагнер В. В.* Геометрия  $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. вып. 5. С. 173–255.

УДК 517.984

С. А. Бутерин, В. А. Юрко

### О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО ИНФОРМАЦИИ О ПЕРВОМ СОБСТВЕННОМ ЗНАЧЕНИИ

1. В статье доказываются теоремы типа Амбарцумяна для широкого класса дифференциальных операторов. Классическая теорема Амбарцумяна имеет дело с краевой задачей:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0, \quad q(x) \in L(0, \pi),$$

с вещественным потенциалом  $q$ . Пусть  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  – собственные значения (1). Если  $q(x) = 0$  почти всюду на  $(0, \pi)$ , то  $\lambda_n = n^2$ ,  $n \geq 0$ . Амбарцумян доказал обратное утверждение.

**Теорема 1.** Если  $\lambda_n = n^2$ ,  $n \geq 0$ , то  $q(x) = 0$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

Имеет место более общее утверждение, так как нет необходимости задавать весь спектр, достаточно иметь информацию о первом собственном значении. Точнее, теорема Амбарцумяна может быть сформулирована следующим образом.

**Теорема 2.** Если  $\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx$ , то  $q(x) = \lambda_0$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

В данной статье приводятся обобщения теоремы 2 на широкие классы краевых задач. Отметим, что некоторые частные обобщения теоремы 1 даны в [3–7], где требуется задание бесконечного спектра. Ниже мы покажем, что эти результаты являются весьма частными случаями теорем 3 и 5.

2. Рассмотрим краевую задачу  $L = L(q)$  для уравнения

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad q(x) \in L(0, \pi), \quad (2)$$

с вещественным  $q(x)$  и с произвольными самосопряженными краевыми условиями  $U_j(y) = 0$ ,  $j = 1, 2$ , и (если необходимо) с произвольными дополнительными условиями внутри интервала. В частности, это могут быть двухточечные краевые условия (распадающиеся или нераспадающиеся), многоточечные, интегральные и интегро-дифференциальные краевые условия. Можно дополнительно задавать, например, условия разрыва вида

$$y(\alpha_j + 0) = a_j y(\alpha_j - 0), \quad y'(\alpha_j + 0) = b_j y'(\alpha_j - 0) + c_j y(\alpha_j - 0), \\ j = \overline{1, m}, \quad \alpha_j \in (0, \pi),$$

или другие виды условий внутри интервала. Отметим, что формулировка и доказательства теоремы 3 не зависят от вышеупомянутых условий. Для удобства все условия для  $L$  кратко будем называть S-условиями. Итак,  $L$  порождается уравнением (2) и самосопряженными S-условиями. Краевая задача  $L$  является самосопряженной; ее спектр дискретный, вещественный и ограничен снизу. Пусть  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  ( $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ ) и  $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$  – собственные значения (с учетом кратностей) и собственные функции  $L$  соответственно. Обозначим  $(y, z) := \int_0^\pi y(x) \overline{z(x)} dx$ .

Наряду с  $L$  рассмотрим задачу  $\tilde{L} := L(\tilde{q})$  того же вида, но с другим потенциалом  $\tilde{q}$ . Условимся, что если некоторый символ  $a$  обозначает объект, относящийся к  $L$ , то  $\tilde{a}$  будет обозначать аналогичный объект для  $\tilde{L}$ , и  $\hat{a} := a - \tilde{a}$ .

Пусть  $\tilde{q}(x)$  известна и фиксирована. Например, можно взять  $\tilde{q}(x) \equiv 0$ .

**Теорема 3.** Пусть

$$\lambda_0 = \tilde{\lambda}_0 + \frac{(\hat{q}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)},$$

где  $\tilde{y}_0(x)$  – собственная функция  $\tilde{L}$  для  $\tilde{\lambda}_0$ . Тогда

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \lambda_0 - \tilde{\lambda}_0 \text{ почти всюду на } (0, \pi). \quad (3)$$

**Доказательство.** Так как

$$\frac{(\ell\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} = \frac{(\tilde{\ell}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} + \frac{((\ell - \tilde{\ell})\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} = \tilde{\lambda}_0 + \frac{(\hat{q}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} = \lambda_0,$$

то  $\tilde{y}_0(x)$  – собственная функция  $L$  для  $\lambda_0$ . В частности,  $-\tilde{y}_0''(x) + q(x)\tilde{y}_0(x) = \lambda_0\tilde{y}_0(x)$ , и мы приходим к (3).

Теорема доказана.

Отметим, что  $\tilde{\lambda}_0$  может быть как простым, так и кратным. Формулировка и доказательство не зависят от кратности.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих теорему 3.

**Пример 1.** Рассмотрим краевую задачу (1). Пусть  $\tilde{q}(x) \equiv 0$ . Тогда  $\tilde{\lambda}_0 = 0$ ,  $\tilde{y}_0(x) \equiv 1$ , и из теоремы 3 вытекает классическая теорема 2.

**Пример 2.** Рассмотрим краевую задачу:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Пусть  $\tilde{q}(x) \equiv 0$ . Тогда  $\tilde{\lambda}_0 = 1$ ,  $\tilde{y}_0(x) = \sin x$ , и теорема 3 приводит к следующему следствию.

**Следствие 1.** Если

$$\lambda_0 = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q(x) \sin^2 x \, dx,$$

то  $q(x) = \lambda_0 - 1$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

**Пример 3.** Рассмотрим краевую задачу:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y'(0) - hy(0) = y'(\pi) - hy(\pi) = 0.$$

Пусть  $\tilde{q}(x) \equiv 0$ . Тогда  $\tilde{\lambda}_0 = -h^2$ ,  $\tilde{y}_0(x) = e^{hx}$ , и получаем следующее следствие.

**Следствие 2.** Если

$$\lambda_0 = -h^2 + \frac{2h}{(e^{2h\pi} - 1)} \int_0^\pi q(x)e^{2hx} \, dx,$$

то  $q(x) = \lambda_0 + h^2$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

Отметим, что более слабые версии следствий 1, 2 можно найти в [4].

**Пример 4.** Рассмотрим краевую задачу:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y'(0) - hy(0) + hy(\pi) = y'(\pi) - hy(\pi) + hy(0) = 0.$$

Пусть  $\tilde{q}(x) \equiv 0$ . Тогда  $\tilde{\lambda}_0 = 0$ ,  $\tilde{y}_0(x) \equiv 1$ .

**Следствие 3.** Если  $\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx$ , то  $q(x) = \lambda_0$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

**Пример 5.** Рассмотрим периодическую краевую задачу:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi).$$

Пусть  $\tilde{q}(x) \equiv 0$ . Тогда  $\tilde{\lambda}_0 = 0$ ,  $\tilde{y}_0(x) \equiv 1$ .

**Следствие 4.** Если  $\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx$ , то  $q(x) = \lambda_0$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

**Пример 6.** Рассмотрим антипериодическую краевую задачу:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi).$$

Пусть  $\tilde{q}(x) \equiv 0$ . Тогда  $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{\lambda}_1 = 1$  (двукратное собственное значение) и  $\tilde{y}_0(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ . Теорема 3 дает следующее следствие.

**Следствие 5.** Пусть

$$\lambda_0 = 1 + \frac{2}{\pi(\alpha^2 + \beta^2)} \int_0^\pi q(x)(\alpha \sin x + \beta \cos x)^2 dx$$

при каких-либо фиксированных  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $|\alpha| + |\beta| > 0$  Тогда  $q(x) = \lambda_0 - 1$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

**3.** Аналогичные результаты верны и для других типов краевых задач. Для примера приведем здесь теоремы, относящиеся к дифференциальным операторам высших порядков и матричным операторам Штурма—Лиувилля.

Рассмотрим краевую задачу  $L_1$  для самосопряженного дифференциального уравнения:

$$\ell_1 y := i^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)} = \lambda y, \quad x \in (0, \pi),$$

с произвольными самосопряженными краевыми условиями. Обозначим через  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  и  $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$  собственные значения и собственные функции  $L_1$  соответственно. Пусть  $\tilde{L}_1$  — краевая задача того же вида, но с другим коэффициентом  $\tilde{p}_0(x)$ .

**Теорема 4.** Пусть

$$\lambda_0 = \tilde{\lambda}_0 + \frac{(\hat{p}_0 \tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0)},$$

где  $\tilde{y}_0(x)$  – собственная функция  $\tilde{L}_1$  для  $\tilde{\lambda}_0$ . Тогда  $p_0(x) = \tilde{p}_0(x) + \lambda_0 - \tilde{\lambda}_0$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

Рассмотрим краевую задачу  $L_0$  для матричного уравнения Штурма–Лиувилля

$$Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \quad Y = [y_k]_{k=\overline{1, m}},$$

$$Q(x) = [Q_{kj}]_{k, j=\overline{1, m}}, \quad Q = Q^*,$$

с произвольными самосопряженными краевыми условиями. Пусть  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  и  $\{Y_n(x)\}_{n \geq 0}$  – собственные значения и собственные функции  $L_0$  соответственно. Если  $Y = [y_k]_{k=\overline{1, m}}$ ,  $Z = [z_k]_{k=\overline{1, m}}$ , то положим  $(Y, Z) :=$

$$\sum_{k=1}^m \int_0^\pi y_k(x) \overline{z_k(x)} dx.$$

**Теорема 5.** Пусть

$$\lambda_0 = \tilde{\lambda}_0 + \frac{(\hat{Q} \tilde{Y}_0, \tilde{Y}_0)}{(\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_0)},$$

где  $\tilde{Y}_0(x)$  – собственная функция  $\tilde{L}_0$  для  $\tilde{\lambda}_0$ . Тогда  $(\hat{Q}(x) - \hat{\lambda}_0 I) \tilde{Y}_0(x) = 0$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

В частности, теорема 5 верна и для операторов Штурма–Лиувилля на произвольном компактном графе [8]. Однако для графа этот результат можно улучшить (см. ниже п. 4).

**Пример 7.** Рассмотрим краевую задачу:

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad Y'(0) = Y'(\pi) = 0.$$

Возьмем  $\tilde{Q}(x) \equiv 0$ . Тогда  $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{\lambda}_1 = \dots = \tilde{\lambda}_{m-1} = 0$ . Пусть  $\int_0^\pi Q_{ss}(x) dx = 0$ ,  $s = \overline{1, m}$ .

**Следствие 6.** Если  $\lambda_0 = 0$ , то  $Q(x) = 0$  почти всюду на  $(0, \pi)$ .

**4.** Пусть  $\Gamma$  – произвольный компактный граф с конечным числом вершин  $v_1, \dots, v_m$  и конечным числом ребер  $e_1, \dots, e_p$ . Очевидно, что  $1 \leq m \leq 2p$ . Параметризуем каждое ребро  $e_j$  параметром  $x = x_j \in [0, T_j]$ ,  $j = \overline{1, p}$ . При этом каждая вершина для содержащих ее ребер  $e_j$  может ассоциироваться как с 0, так и с  $T_j$ , а также с двумя

этими значениями одновременно (в последнем случае  $e_j$  – петля). Обозначим через  $R(v_k)$  множество ребер, содержащих вершину  $v_k$ . Тогда  $R(v_k) = R_0(v_k) \cup R_1(v_k)$ , где множество  $R_0(v_k)$  состоит из ребер, для которых  $v_k$  ассоциирована с 0, а  $R_1(v_k)$  – из ребер, для которых  $v_k$  ассоциирована с  $T_j$ . Отметим, что пересечение  $R_0(v_k) \cap R_1(v_k)$  может быть не пусто. Всякую функцию  $f$ , определенную на графе  $\Gamma$ , можно представить в виде вектора (но не вектор-функции)  $f = [f_j]_{j=\overline{1,p}}$ , где функция  $f_j = f_j(x)$ ,  $x \in [0, T_j]$ , определена на ребре  $e_j$ . Рассмотрим на графе  $\Gamma$  уравнение Штурма–Лиувилля

$$\ell_j y_j := -y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad 0 < x < T_j, \quad j = \overline{1,p}, \quad (4)$$

где функция  $q = [q_j]_{j=\overline{1,p}}$  называется потенциалом, причем  $q_j(x)$  – вещественнозначные функции, и  $q_j(x) \in L(0, T_j)$ . Пусть функция  $y = [y_j]_{j=\overline{1,p}}$  удовлетворяет стандартным условиям склейки:

$$y_{j_1}|_{v_k} = y_{j_2}|_{v_k} \quad \text{для всех } e_{j_1}, e_{j_2} \in R(v_k) \quad (\text{непрерывность}), \quad (5)$$

$$\sum_{e_j \in R_0(v_k)} y_j'(0) = \sum_{e_j \in R_1(v_k)} y_j'(T_j) \quad (\text{условие Кирхгофа}). \quad (6)$$

Заметим, что если  $v_k$  – граничная вершина (то есть  $\#R(v_k) = 1$ ), то условие (5) теряет смысл, а условие (6) является краевым условием Неймана.

Пусть  $\lambda_0$  – первое собственное значение краевой задачи (4)–(6). Имеет место следующее обобщение теоремы Амбарцумяна для графа.

**Теорема 6.** *Если*

$$\lambda_0 \sum_{j=1}^p T_j = \sum_{j=1}^p \int_0^{T_j} q_j(x) dx,$$

то  $q_j(x) = \lambda_0$  почти всюду на  $(0, T_j)$ ,  $j = \overline{1,p}$ .

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть случай  $\lambda_0 = 0$ . Покажем, что константа  $y = C$  ( $y_j(x) \equiv C$ ,  $j = \overline{1,p}$ ) является собственной функцией, соответствующей собственному значению  $\lambda_0 = 0$ . Согласно условию теоремы имеем

$$(\ell y, y) \geq 0, \quad (\ell C, C) = C^2 \sum_{j=1}^p \int_0^{T_j} q_j(x) dx = 0,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $L_2(\Gamma)$ , а  $\ell$  – оператор, соответствующий краевой задаче (4)–(6). Отсюда заключаем, что  $C$  – собственная

функция, соответствующая первому собственному значению. Подставляя в (4), приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ambarzumyan V.* Ueber eine Frage der Eigenwerttheorie // Zs.f.Phys. 1929. Vol. 53. P. 690–695.
2. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications //NOVA Science Publishers. New York, 2001.
3. *Yurko V. A.* The inverse spectral problem for differential operators with nonseparated boundary conditions. //J. Math. Anal. Appl. 2000. Vol.250. P. 266–289.
4. *Chern H.-H., Law C.-K., Wang H.-J.* Extensions of Ambarzumyan's theorem to general boundary conditions //J. Math. Anal. Appl. 2001. Vol. 263, №2. P. 333-342. (corrigendum: 2005 Vol.309, P. 764–768).
5. *Horvath M.* On a theorem of Ambarzumian // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 2001. Vol. 131., №4. P. 899–907.
6. *Carlson R.* Ambarzumian's theorem for trees. Electr //J. Diff. Eq. 2007. Vol. 142., 9p.
7. *Yang C.-F., Yang X.-P.* Some Ambarzumian-type theorems for Dirac operators. // Inverse Problems. 2009. Vol.25. 09012 (13pp).
8. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs //Journal of Inverse and Ill-Posed Proplems 2010. Vol.18, №3. P. 245–261.

УДК 511.3+519.4

**А. М. Водолазов**

### ЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД ОБОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ИДЕАЛОВ

Хорошо известно, что при расширении поля рациональных чисел происходит нарушение основной теоремы арифметики, которая утверждает об однозначности разложения целых чисел в произведении простых. Для восстановления этого свойства приходится рассматривать не числа, а идеалы и доказывается однозначность разложения в произведении простых идеалов. Существуют различные способы доказательства этого факта. Один из них предложен Золаторевым [1] и базируется на понятие  $p$ -делимости. С каждым простым числом кольца целых чисел связывается  $p$ -адическое нормирование и его пополнение  $\mathbb{Q}_p$  – поле  $p$ -адических чисел. Используя теорию нормирований, мы и докажем основную теорему Золаторева.

Пусть  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  – конечное расширение поля  $\mathbb{Q}$ . У поля  $\mathbb{Q}$  при фиксированном простом  $p$  можно определить  $p$ -адическое нормирование  $ord_p$ . Для любых  $x = \frac{a}{b}$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}$ , пусть  $a = p^r a_1$ ,  $(a_1, p) = 1$

и  $b = p^t b_1$ ,  $(b_1, p) = 1$ , тогда  $ord_p(x) = p^{r-t}$ . Функция  $\|x\|_p = p^{-ord(x)}$  является неархимедовой нормой поля  $\mathbb{Q}$ , то есть вместо неравенства треугольника  $\|(x+y)\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ , выполнено более сильное неравенство  $\|(x+y)\|_p \leq \max(\|x\|_p, \|y\|_p)$ .

Если  $\|\cdot\|$  – неархимедово нормирование поля  $k$ , то множество  $V = \{x \in k : \|x\| \leq 1\}$  образует кольцо и называется кольцом нормирования. В кольце  $V$  есть единственный максимальный идеал  $P = \{x \in k : \|x\| < 1\}$ . Если идеал  $P$  главный, т.е.  $P = (\pi)$ , то нормирование  $\phi$  называется *дискретным*.

Пусть  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  – конечное расширение поля  $\mathbb{Q}$ , то существуют продолжения  $p$ -адического нормирования  $\|\cdot\|_p$  поля  $\mathbb{Q}$  на  $K$ . Это такие нормирования  $\Phi$  поля  $K$ , что для всех  $x \in \mathbb{Q}$   $\varphi(x) = \|x\|_p$ . Продолжения  $p$ -адических нормирований существуют [3]. Нам понадобится лемма о соотношении всех продолжений  $p$ -адического нормирования.

**Лемма 1.[3].** Пусть  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  – конечное расширение поля  $\mathbb{Q}$  с нормированием  $\|\cdot\|_p$ , тогда

$$\prod_{\Phi_i | \|\cdot\|_p} (\Phi_i(x))^{N_{\Phi_i}} = \|N_{K|\mathbb{Q}}(x)\|_p$$

для любого  $x \in K$ .

В лемме произведение берется по всем продолжениям  $\Phi_i$  поля  $K$  нормирования  $\|\cdot\|_p$ .  $N_{\Phi_i} = [K_{\Phi_i} : \mathbb{Q}_p]$  – степень расширения пополнения  $K_{\Phi_i}$  поля  $K$  по норме  $\Phi_i$ , над полем  $\mathbb{Q}_p$  пополнением  $\mathbb{Q}$  по  $p$ -адической норме.  $N_{K|\mathbb{Q}}$  – алгебраическая норма поля  $K$  над  $\mathbb{Q}$  (произведение всех сопряженных элементов).

Пусть  $p$  – фиксированное простое число из  $\mathbb{Z}$ . Будем обозначать через  $\mathbb{Z}_p$  множество  $x$  из  $\mathbb{Q}_p$  таких, что  $\|x\|_p \leq 1$ . Кольцо  $\mathbb{Z}_p$  является локальным. Множество  $x \in \mathbb{Z}_p$  таких, что  $\|x\|_p < 1$  является его единственным максимальным идеалом.

**Определение.** Под  $p$ -целым элементом поля  $K$  мы будем понимать элемент  $x \in K$  такой, что

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

где  $a_i \in \mathbb{Z}_p$ .

С помощью неархимедовых нормирований можно получить описание  $p$ -целых элементов поля  $K$ .



Пусть  $v, V$  – локальные кольца с максимальными идеалами  $m, M$  соответственно. Будем говорить, что  $V$  лежит над  $v$ , если  $v \subset V$  и  $M \cap v = m$ . В этом случае имеется каноническое вложение  $v/m \subset V/M$ .

**Лемма 2.[3].** Пусть  $v$  – локальное кольцо, содержащееся в поле  $K$ . Элемент  $x$  из  $K$  тогда и только тогда является целым над  $v$ , когда  $x$  принадлежит всякому кольцу нормирования  $V$  поля  $K$ , лежащему над  $v$ .

**Лемма 3.** Кольцо  $p$ -целых элементов поля  $K$  совпадает с пересечением колец  $V_{p_i}$ , где  $V_{p_i} = \{x \in K : \Phi_{p_i}(x) \leq 1\}$ ,  $\Phi_{p_i}$  –  $i$ -тое продолжение на  $K$   $p$ -адического нормирования поля  $\mathbb{Q}$ , пересечение берется по всем продолжениям  $\|\cdot\|_p$ .

**Определение.** Говорят, что элемент  $a \in K$   $p$ -делится на  $b \in K$ , если  $\frac{a}{b}$  является  $p$ -целым.

Используя аппроксимационную теорему [3] и леммы 1–3, мы доказываем следующую теорему.

**Теорема.** Если для всех  $p$ -целых  $t$  поля  $K$   $N_{\mathbb{Q}}^K(1 + at)$  является целым  $p$ -адическим, то  $a$  –  $p$ -целое.

Из доказанной теоремы следует

**Теорема(Золотарева)[1].** Если для всех  $p$ -целых  $t$  поля  $K$

$$\|(N_{\mathbb{Q}}^K(z + p^\nu t))\|_p \leq \|(N_{\mathbb{Q}}^K(z))\|_p,$$

то  $p^\nu$   $p$ -делится на  $z$ .

**Доказательство**

Сначала преобразуем неравенство в теореме

$$\|N_{\mathbb{Q}}^K(z + p^\nu t)\|_p = \|N_{\mathbb{Q}}^K(z)\|_p \|N_{\mathbb{Q}}^K(1 + \frac{p^\nu}{z}t)\|_p,$$

$$\|N_{\mathbb{Q}}^K(1 + \frac{p^\nu}{z}t)\|_p \leq 1.$$

Последнее неравенство следует из предыдущей теоремы при  $a = \frac{p^\nu}{z}$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Чеботарев Н. Г. Об обосновании теории идеалов по Золотареву // Успехи математических наук. 1947. № 6. С. 52–67.
2. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М. : Наука, 1976.
3. Ленг С. Алгебра. М. : Мир, 1968.

## О МОНОТОННОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Рассмотрим обобщение известной задачи П. Л. Чебышева об аппроксимации функции алгебраическим полиномом фиксированной степени [1, с. 13]. Начнем с дискретного случая. Требуется отыскать решение задачи минимизации максимального по всем узлам дискретной сетки  $T = \{t_0 < \dots < t_N\}$  уклонения образов многозначного отображения  $\Phi(\cdot)$  от значений алгебраического полинома степени не выше  $n$ :

$$\rho(A) = \max_{k \in \overline{0, N}} \max f(A, k) \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \quad (1)$$

где  $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$ ,  $y_{2,k} \geq y_{1,k}$ ,  $k = \overline{0, N}$ ,  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ ,  $\rho_n(A, t_k) = a_0 + a_1 t_k + \dots + a_n t_k^n$ ,  $f(A, k) = \max\{y_{2,k} - \rho_n(A, t_k); \rho_n(A, t_k) - y_{1,k}\}$ ,  $\rho^* = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$ .

В целях исключения тривиального решения с использованием алгебраической интерполяции считаем  $N \geq n + 1$ .

Если  $y_k = y_{1,k} = y_{2,k}$ ,  $k = \overline{0, N}$ , задача (1) сводится к задаче П. Л. Чебышева [1]:

$$\max_{k \in \overline{0, N}} |y_k - \rho_n(A, t_k)| \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (2)$$

Несмотря на наличие широкого класса прикладных программ для приближенного решения задач оптимизации и возможности сведения задачи (1) к задаче линейного программирования, целесообразно найти оптимальный вычислительный алгоритм решения задачи, не увеличивающий объема вычислений, шаг за шагом приближающий к цели и на конечном шаге дающий точное решение.

Пусть  $y_{1,k} \neq y_{2,k}$  хотя бы для одного  $k \in \overline{0, N}$ . Базисом назовем упорядоченное множество  $(n + 2)$  точек вида  $\sigma = \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$ .

Амплитудными на базисе  $\rho$  назовем функции, определяемые формулами:

$$\varphi_{1-i}(\sigma, k) = \begin{cases} iy_{2,j_k} + (1-i)y_{1,j_k} & k - \text{четно,} \\ & k = \overline{0, n+1}, i = \overline{0, 1}, \\ iy_{1,j_k} + (1-i)y_{2,j_k} & k - \text{нечетно.} \end{cases} \quad (3)$$

Сформулируем для амплитудных функций дискретные задачи П. Л. Чебышева [1]:

$$\begin{aligned} \rho_i(A, \sigma) &= \max_{k=0, n+1} |\varphi_i(\sigma, k) - \rho_n(A, t_{j,k})| \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \\ \rho_i^*(\sigma) &= \min_{A \in R^{n+1}} \rho_i(A, \sigma) = \rho_i(A_i(\sigma), \sigma), i = 0, 1. \end{aligned} \quad (4)$$

По критерию решения дискретной задачи П. Л. Чебышева [1] для задач (4) однозначно определены числа  $h_0(\sigma)$  и  $h_1(\sigma)$ , удовлетворяющие равенствам:

$$h_i(\sigma) = (-1)^{k+i} (y_{1.5+0.5 \cdot (-1)^{k+i, j_k}(t_{j_k})} - \rho_n(A_i(\sigma), t_{j_k})), \quad k = \overline{0, n+1}, i = \overline{0, 1}. \quad (5)$$

Положим  $h_\beta(\sigma) := \max\{h_0(\sigma), h_1(\sigma)\}$ . В [2] доказано, что  $h_\beta(\sigma) > 0$ . Пусть  $m = \max_{k=0, N} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}$ ,  $M = \{k = 0, N : \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = m\}$ .

Из (1), (4) вытекают неравенства:

$$\rho(A) \geq m, \rho(A) \geq \rho_i(a, \sigma), \forall A \in R^{n+1}, i = \overline{0, 1}. \quad (6)$$

Используя (4), (6), заметим, что для любого базиса  $\sigma$  выполняется неравенство:  $\rho_i^* \leq \rho^* = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A), i = \overline{0, 1}$ , а если при этом известно, что задача (1) имеет единственное решение и  $\rho^* > m$ , то  $h_\beta(\sigma) \leq \rho^*$  [3].

В [4] предложена процедура решения задачи (1), включающая 3 этапа. В [3] этот алгоритм оптимизирован для частного случая задания исходных данных. Для общего случая задания исходных данных требуется показать, что указанный алгоритм позволяет монотонно увеличивать минимальное значение целевой функции текущей базисной амплитудной подзадачи до тех пор, пока не будет получено решение задачи или сделан вывод о его неединственности (при невозможности дальнейшего увеличения этого показателя). В последнем случае осуществляется поиск крайней точки множества решений [5].

Процедура решения задачи для случая, когда самых широких сегментов не менее чем  $(n+2)$ , изложена в [2]. Этот прием можно применять для более широкого класса задач – когда самых широких сегментов не менее чем  $(n+1)$ , а также для случая, когда заведомо известно, что решение задачи единственно.

Далее рассматриваем произвольный случай.

1. Пусть  $\{j_0 < \dots < j_n\} \subset M$ . Решаем относительно  $A$  систему

$$\rho_n(A, t_{j_l}) = \frac{y_{1,j_l} + y_{2,j_l}}{2}, \forall l \in \overline{0, n}$$

и проверяем равенство  $\rho(A) = m$ . Если оно выполняется, вектор  $A$  будет решением задачи (1). Если нет, переходим к шагу 2.

2. Решаем на текущем базисе  $\sigma = \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$  две подзадачи (4), применяя чебышевскую интерполяцию [1].

Заметим, ввиду (6), в качестве начального текущего базиса целесообразно выбирать такой, что  $\{j_0, \dots, j_{n+1}\} \cap M \neq \emptyset$ .

Анализируем возможность включения в базис узла  $t_{k_0}$ , для которого  $f(A_\beta(\sigma), k_0) = \max_{k=\overline{0, N}} f(A_\beta(\sigma), k)$ . Ясно, что  $f(A_\beta(\sigma), k_0) \geq h_\beta(\sigma)$ .

3. Пусть  $k_0$  удовлетворяет неравенству  $f(A_\beta(\sigma), k_0) \geq h_\beta(\sigma)$ . В таком случае переходим к новому базису  $\bar{\sigma} = \{\bar{t}_{j_0} < \dots < \bar{t}_{j_{n+1}}\} \subset T$  путем добавления в исходный базис  $\sigma$  узла  $t_{k_0}$  и исключения из него одного узла с условием, что новый базис таков, что при переходе от узла  $\bar{t}_{j_k}$  к узлу  $\bar{t}_{j_{k+1}}$ ,  $k = \overline{0, n+1}$ , изменяется знак разности между  $\Phi_{\bar{\sigma}}(\bar{\sigma}, \cdot)$  и значением алгебраического полинома  $\rho_n(A_\beta(\sigma), \cdot)$  в этом узле (по модулю эти отклонения одинаковы во всех узлах нового базиса, за исключением узла  $t_{k_0}$ , в котором эта величина больше).

После этого переходим ко 2-му шагу, выбрав в качестве нового текущего базиса  $\sigma$  базис  $\bar{\sigma}$ .

Указанная процедура преобразования базиса аналогична известному алгоритму Валле – Пуссена [1, с. 26] и подробно изложена в [2]. Там же доказано, что это преобразование приводит к выполнению неравенства  $h_\beta(\bar{\sigma}) > h_\beta(\sigma)$ , которое, ввиду [3] и (6), в случае единственности решения, позволяет монотонно перебирать базисы, что ускоряет процесс достижения равенства  $\rho^* = h_\beta(\sigma)$ .

4. Если  $f(A_\beta(\sigma), k_0) = h_\beta(\sigma)$ , то либо на текущем шаге получено решение исходной задачи, либо множество решений задачи (1) содержит бесконечно много элементов и его можно охарактеризовать, отыскав крайние точки [5].

Рассмотрим непрерывный случай. Пусть  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  – скалярные функции, определенные и непрерывные на отрезке  $[a; b] \neq \emptyset$  и  $y_1(t) \leq y_2(t)$ ,  $\forall t \in [a; b]$ ,  $\Phi(t) : R \rightarrow 2^R$  – многозначное отображение, образом которого в каждой точке отрезка  $t \in [a; b]$  является отрезок  $\Phi(t) = [y_1(t); y_2(t)]$ . Рассмотрим задачу:

$$\rho(A) := \max_{t \in [a; b]} \max\{y_2(t) - \rho_n(A, t), \rho_n(A, t) - y_1(t)\} \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (7)$$

В [6] доказано, что задача (7) имеет решение и получен критерий решения. Введем дискретизацию рассматриваемого отрезка  $[a; b]$ ,  $T = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ . Решая на текущей сетке дискретную

задачу проверяем, будет ли уклонение аппроксимирующего дискретную выборку полинома от исходного многозначного непрерывного отображения на  $[a; b]$  таким же, как и на множестве  $T$ . Если так, решение текущей дискретной задачи будет решением непрерывной задачи. В противном случае добавляем в сетку  $T$  одну из точек отрезка  $[a; b]$  максимального уклонения текущего аппроксимирующего полинома от исходного многозначного отображения. Процесс продолжаем до того момента, как будет получено точное решение, либо останавливаемся на приближенном решении при превышении числа узлов дискретной сетки наперед заданного значения. В непрерывном случае, даже при невозможности дальнейшего расширения указанным способом множества  $T$ , вывод о неединственности решения задачи (3) сделать нельзя [7].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
2. Выгодчикова И. Ю. О монотонном алгоритме решения задачи приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: сб. науч. тр. Вып. 6. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. С. 27–30.
3. Выгодчикова И. Ю. О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6, вып. (1) 2. С. 11–19.
4. Выгодчикова И. Ю. Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: сб. науч. тр. вып. 4. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002. С. 27–31.
5. Выгодчикова И. Ю. О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: сб. науч. тр. вып. 5. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. С. 15–18.
6. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: сб. науч. тр. Вып. 2. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. С. 13–15.
7. Дудов С. И., Выгодчикова И. Ю., Сорина Е. В. Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 7. С. 1175–1183.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

### О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ

Дается геометрическая интерпретация динамической системы с неинтегрируемой линейной связью. С помощью теоремы Нетер, продолженной на случай почти контактного пространства, предлагается метод построения первых интегралов неголономной гамильтоновой системы.

**Введение.** Динамические системы с одной неинтегрируемой линейной связью интерпретируются как неголономные гамильтоновы системы, заданные на векторном расслоении, допускающем естественное вложение в кокасательное расслоение пространства конфигураций. Как показано в настоящей работе, интересным с точки зрения приложения гамильтоновых систем к неголономной механике является исследование почти контактных структур  $(X, D, \eta, \vec{\xi})$ , для которых векторные расслоения  $(D, \pi, X)$  оснащены симплектической структурой, отличной от структуры, порождаемой формой  $\eta$ . В своих исследованиях мы следуем по В.В. Вагнеру [1], делая упор на использовании внутренней геометрии почти контактных пространств [2]. Основным объектом исследования являются неголономные гамильтоновы системы, уравнения которых в специальных координатах имеют следующий вид [1]:

$$\frac{dx^n}{dt} = -\Gamma_a^n \frac{dx^a}{dt}, \quad \frac{dx^a}{dt} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0. \quad (1)$$

Движение системы в рассматриваемом случае интерпретируется как движение точки в пространстве конфигураций по геодезической неголономного многообразия [1]. При интегрировании уравнений движения системы Вагнер использует геометрические свойства соответствующего неголономного многообразия, подбирая такую систему координат, в которой уравнения движения принимают наиболее простой вид. Опираясь на конструкции Вагнера и используя теорему Нетер [3], продолженную нами на неголономный случай, мы вычисляем первые интегралы, понижая, тем самым, размерность области определения гамильтоновой системы.

**2. Допустимые гамильтоновы системы.** Рассмотрим на гладком многообразии  $X$  почти контактную метрическую структуру  $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$  [2]. Пусть  $D$  – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой  $\eta$ ,  $D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$  – его оснащение. Будем называть распределение  $D$  распределением почти контактной метрической структуры. Рассмотрим, далее, векторное расслоение  $(D, \pi, X)$ , тотальное пространство  $D$  которого является гладким распределением контактной метрической структуры. В работе [4] было показано, что кривые, определяемые уравнениями (1), являются проекциями интегральных кривых векторного поля, названного *геодезической пульверизацией связности над распределением*. Хорошо известно, что в случае  $D = TX$  геодезическая пульверизация совпадает с гамильтоновой системой, естественным образом возникающей на касательном расслоении риманова многообразия. Существует несколько подходов к определению аналога

гамильтоновой системы – контактного гамильтонова векторного поля на многообразии с контактной метрической структурой [5]. В настоящей работе мы определяем аналог контактного гамильтонова векторного поля таким образом, чтобы введенное понятие имело смысл не только в случае контактной структуры.

Пусть  $K(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n; a, b, c, e = 1, 2, \dots, n - 1$ ) – адаптированная к распределению  $D$  карта [2] и пусть  $P : TX \rightarrow D$  – проектор, определяемый разложением  $TX = D \oplus D^\perp$ . Векторные поля  $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение  $D$ :  $D = \text{Span}(\vec{e}_a)$ . Таким образом, мы имеем на многообразии  $X$  неголономное поле базисов  $\vec{e}_\alpha = (\vec{e}_a, \partial_n)$  и соответствующее ему поле кобазисов  $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$ .

Пусть  $\Omega$  – допустимая [2] замкнутая внешняя 2-форма максимального ранга. В общем случае  $\Omega \neq \omega$ . Будем называть  $\Omega$  *допустимой симплектической структурой*. Под контактным гамильтоновым векторным полем, ассоциированным с функцией  $f$ , в [5] понималось единственное векторное поле  $\vec{u}$ , удовлетворяющее равенствам  $i_{\vec{u}}\eta = f, i_{\vec{u}}\omega = (\vec{\xi}f)\eta - df$ . Рассмотрим более общий случай, заменяя формулу  $\omega = d\eta$  на произвольную допустимую симплектическую структуру  $\Omega$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  – допустимая симплектическая структура,  $f$  – гладкая функция на многообразии  $X$ . Тогда существует единственное векторное поле  $\vec{u}$ , такое, что: 1)  $i_{\vec{u}}\eta = f$ , 2)  $i_{\vec{u}}\Omega = (\vec{\xi}f)\eta - df$ .

**Доказательство.** Искомое векторное поле однозначно определяется равенством

$$\vec{u} = \Omega^{ac}(\vec{e}_c f)\vec{e}_a + f\partial_n. \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части (2) назовем *допустимой гамильтоновой системой*.

Пусть теперь  $\nabla$  – внутренняя связность [2] почти контактного метрического многообразия с коэффициентами  $\Gamma_{bc}^a$ . На пространстве  $D$  векторного расслоения  $(D, \pi, X)$  каждой адаптированной карте  $K(x^\alpha)$  многообразия  $X$  соответствует сверхкарта  $\tilde{K}(\tilde{x}^\alpha, x^{n+a})$ , где  $x^{n+a}$  – координаты допустимого вектора в базисе  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ ,  $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha \circ \pi$ . Как показано в [2], задание внутренней связности  $\nabla$  влечет разложение распределения  $\check{D} = \pi_*^{-1}(D)$  в прямую сумму  $\check{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  – вертикальное распределение,  $HD$  – горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ab}^c x^{n+b} \partial_{n+c}$ .

Векторное поле  $\vec{S} \in \Gamma\check{D}$  на многообразии  $D$  назовем *полупульверизацией*, если выполняется условие  $\pi_*(\vec{S}_{\vec{v}}) = \vec{v}, \vec{v} \in D$ . Локальное пред-

ставление поля  $\vec{S}$  в адаптированных координатах имеет вид

$$\vec{S}(x^\alpha, x^{n+a}) = x^{n+a} \partial_a - x^{n+a} \Gamma_a^n \partial_n + S^{n+a} \partial_{n+a}.$$

Полупульверизацию  $\vec{S}$  будем называть *пульверизацией*, если удовлетворяет дополнительному условию  $[\vec{C}, \vec{S}] = \vec{S}$ , где  $\vec{C} = x^{n+a} \partial_{n+a}$  – поле Лиувилля на  $D$ .

**Теорема 2 [2].** *Внутренняя связность определяет пульверизацию  $\vec{S}$ , координатное представление которой имеет вид:  $\vec{S} = x^{n+a} \vec{\epsilon}_a$ , где  $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ab}^c x^{n+b} \partial_{n+c}$ .*

Следующая теорема указывает на возможность использования пульверизации в геометрии неголономной механики.

**Теорема 3 [4].** *Проекции интегральных кривых поля  $\vec{S}$  совпадают с геодезическими внутренней связности.*

**3. О первых интегралах допустимой гамильтоновой системы.** Пусть теперь  $(D, \pi, X)$  – векторное расслоение, где  $D \subset TX$ ,  $D = \text{Ker} \eta$ . Как обычно, мы полагаем, что  $TX = D \oplus D^\perp$ ,  $D^\perp$  – дополнительное одномерное распределение. Пусть, далее,  $\Omega$  – допустимая симплектическая форма и  $H$  – гамильтониан допустимой гамильтоновой системы  $\vec{x}$ . В частном случае, когда  $\partial_n H$ , в соответствии с (2) получаем:

$$i_{\vec{x}} \Omega = -dH. \quad (3)$$

Заметим, что обращение в нуль  $\partial_n H$  не зависит от выбора адаптированной системы координат. Допустимую гамильтонову систему (ДГС) для случая (3) будем называть проектируемой допустимой гамильтоновой системой (ПДГС). Теорема Дарбу обеспечивает существование такой адаптированной системы координат, относительно которой уравнения (3) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \partial_{m+i} H, & \frac{dx^{m+i}}{dt} &= -\partial_i H, \\ \frac{dx^n}{dt} &= \sum_{i=1}^m (-\Gamma_i^n \partial_{m+i} H + \Gamma_{m+i}^n \partial_i H). \end{aligned} \quad (4)$$

В равенстве (4)  $2m = n - 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Наряду с векторным расслоением  $(D, \pi, X)$  рассмотрим векторное расслоение  $(D^*, q, X)$ , слои  $D_x^*$  которого в каждой точке  $x$  состоят из допустимых 1-форм в соответствующей точке. Всякой адаптированной карте  $K(x^\alpha)$  многообразия  $X$  соответствует сверхкарта  $\tilde{K}$  на многообразии  $D^*$  такая, что



$\tilde{K}(\alpha_x) = (\tilde{x}^\alpha, p_a)$ , где  $p_a = \alpha_x(\vec{e}_a)$ ,  $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha \circ q$ ,  $\alpha_x \in D_x^*$ . Помимо голономных базисов  $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ ,  $\partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$ ,  $\partial_a = \frac{\partial}{\partial p^a}$  на  $D^*$  поле неголономных базисов  $\vec{E}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ ,  $\vec{E}_n = \partial_n$ ,  $\vec{E}_{n+a} = \partial_a$ . Векторные поля  $\vec{E}_a$ ,  $\vec{E}_{n+a}$  определяют локальную голономную систему координат в распределении  $\tilde{D}^* = q_*^{-1}(D)$ . Определим 1-форму  $\lambda$  с помощью равенства  $\lambda_\alpha(\vec{u}) = \alpha(q_*, \vec{u})$ ,  $\alpha \in D^*$ . В адаптированных координатах форма  $\lambda$  получает следующее координатное представление:  $\lambda = p_a dx^a$ . Её дифференциал  $\omega = d\lambda$  задает на  $D^*$  допустимую симплектическую структуру (допустимую к  $\tilde{D}^*$ ), для которой всякая адаптированная сверх карта является канонической:  $\omega = dP_a \wedge dx^a$ . Пусть  $D$  — почти контактное метрическое пространство. Рассмотрим на  $D^*$  гладкую функцию  $H = \frac{1}{2}g^{ab}P_aP_b$ . Ей будет соответствовать ДГС  $\vec{u}_H \in \Gamma\tilde{D}^*$  с компонентами  $u_H^a = \partial^a H$ ,  $u_H^{n+a} = -\partial_a H + \Gamma_a^n \partial_n H$ . Уравнения интегральных кривых поля  $\vec{u}_H$  примут вид

$$\dot{x}^a = \partial^a H, \quad \dot{P}_a = -\vec{E}_a H, \quad \dot{x}^n = -\Gamma_a^n \partial^a H. \quad (5)$$

По аналогии с голономным случаем векторное поле  $\vec{u}_H$  связано с геодезическим потоком. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** *Канонические проекции интегральных кривых геодезического потока являются допустимыми геодезическими для почти контактного метрического пространства с допустимой метрикой  $g_{ab}$ .*

**Доказательство.** Для случая, когда  $H = \frac{1}{2}g^{ab}P_aP_b$ , имеем

$$\partial^a H = g^{ab}P_a, \quad \partial_y H = \frac{1}{2}\partial_y g^{ab}P_aP_b. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем:

$$\dot{x}^a = g^{ab}P_b. \quad (7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{dP_a}{dt} &= -\vec{E}_a H = -(\partial_a H - \partial_n H \Gamma_a^n) = \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_a g^{bc} - \partial_n g^{bc} \Gamma_a^n)P_b P_c = -\frac{1}{2}(\vec{e}_a g^{bc})P_b P_c. \end{aligned} \quad (8)$$

Собирая вместе (6), (7), (8), получаем систему

$$\dot{x}^a = g^{ab}P_b, \quad \dot{P}_a = -\frac{1}{2}(\vec{e}_a g^{bc})P_b P_c, \quad \dot{x}^n = -g^{ab}P_b \Gamma_a^n. \quad (9)$$

Исключая из последней системы  $P_a$ , получаем уравнения (1), что и доказывает теорему. Пусть  $\vec{y} \in \Gamma D$  — векторное поле такое, что  $\partial_n y^a = 0$ . Тогда имеет место теорема.

**Теорема 5.** Существует и притом единственное векторное поле  $\vec{z} \in \Gamma T\tilde{D}^*$  такое, что  $q_*\vec{z} = \vec{y}$ ,  $L_{\vec{z}}\lambda = 0$ . Как следствие теоремы 5, получаем следующую теорему.

**Теорема 6.** Пусть  $\vec{v}$  — допустимая гамильтонова система на  $D^*$ , соответствующая замкнутой форме  $\mu$ . Тогда, если  $\mu(\vec{z}) = 0$ , где  $\vec{z} \in \Gamma T\tilde{D}^*$  такое, что  $q_*\vec{z} = \vec{y}$ ,  $L_{\vec{z}}\lambda = 0$ , то  $\lambda(\vec{z})$  — первый интеграл  $\vec{v}$ .

**Доказательство.** Имеем,  $d\lambda(\vec{v}, \vec{z}) = -\mu(\vec{z}) = \vec{v}\lambda(\vec{z}) - \vec{z}\lambda(\vec{v}) = \lambda([\vec{v}, \vec{z}]) = \vec{v}\lambda(\vec{z}) - (L_{\vec{z}}\lambda)(\vec{v}) = \vec{v}\lambda(\vec{z})$ . Что и доказывает теорему.

Для случая ПДГС аналогичный результат получен в [6].

**Пример.** Пусть пространство  $R^3$  является конфигурационным пространством движения материальной точки, подчиненного неголономной связи с кинетической энергией, задаваемой метрикой

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 + y^2 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Движение точки осуществляется по геодезическим допустимой связности к распределению  $D$ , порождаемому векторными полями  $\vec{e}_1 = \partial_1 - y\partial_3$ ,  $\vec{e}_2 = \partial_2$ . При этом векторное поле  $\partial_3$  определяет ортогональное оснащение  $D^\perp$  распределения  $D$ . Адаптированная система координат является ортонормированной, отсюда следует, что гамильтониан динамической системы с неинтегрируемой связью определяется равенством  $H(x, y, z, P_a) = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2)$ . Система (9) в нашем случае принимает вид

$$\dot{x} = P_1, \quad \dot{y} = P_2, \quad \dot{P}_a = 0, \quad \dot{z} = -yP_1. \quad (10)$$

Векторное поле  $\vec{y} = -y\partial_1 + x\partial_2$  в соответствии с теоремой 6 задает первый интеграл  $f = -yP_1 + xP_2$  системы (10).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. № 5. Р. 301–327.
2. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1979.
4. Галаев С. В., Гозман А. В. Обобщенные гамильтоновы системы на многообразиях с почти контактной метрической структурой // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2012. Вып. 14.
5. Pitis G. Hamiltonian Fields and Energy in Contact Manifolds // Intern. J. of Geometric Methods in Modern Physics. 2008. Vol. 1. 5(1). Р. 63–77.

6. *Иванченко И. П.* Обобщение теоремы Нетер на случай неголомомного многообразия // Математика. Механика: сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 59–62.

УДК 512.57

И. В. Глотова, П. А. Терехин

## ДОПОЛНЕНИЕ ИЗОМЕТРИИ ДО $C^*$ -АЛГЕБРЫ КУНЦА $\mathcal{O}_2$ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА

Пусть  $H$  – комплексное сепарабельное гильбертово пространство. Унитарный оператор  $W : H \rightarrow H$  называется *двусторонним сдвигом*, если существует вектор  $e \in H$  такой, что система  $\{W^n e\}_{n \in \mathbb{Z}}$  образует ортонормированный базис пространства  $H$ . Если  $e_n = W^n e$ , то  $W e_n = e_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Алгеброй Кунца  $\mathcal{O}_d$  (см. [1]) называется набор изометрий  $S_i : H \rightarrow H$ ,  $i = 0, \dots, d-1$ , для которых выполняются соотношения

$$S_i^* S_j = \delta_{ij} I, \quad i, j = 0, \dots, d-1, \quad \sum_{i=0}^{d-1} S_i S_i^* = I, \quad (1)$$

где  $I$  – тождественный оператор в  $H$ . Соотношения (1) показывают, что изометрии  $S_i$  имеют попарно ортогональные образы  $Im(S_i)$ , прямая сумма которых совпадает с  $H$ :  $\bigoplus_{i=0}^{d-1} Im(S_i) = H$ .

Далее рассмотрим случай  $d = 2$ , т.е. пару изометрий  $\{S_0, S_1\}$ , порождающую алгебру Кунца  $\mathcal{O}_2$ . Поставим вопрос о дополнении заданной изометрии  $S_0$  до алгебры Кунца  $\mathcal{O}_2$ , т.е. о нахождении изометрии  $S_1$ , для которой  $Im(S_0) \oplus Im(S_1) = H$ . Поскольку этот вопрос связан с построением всплесков на основе КМА (кратномасштабного анализа), то соответствующие изометрии удовлетворяют соотношению  $S_i W = W^2 S_i$ ,  $i = 0, 1$ , где  $W$  – оператор двустороннего сдвига. В качестве приложения следующей теоремы можно получить доказательство основной теоремы КМА. Следует отметить, что связь теории всплесков с алгебрами Кунца отмечалась в работе [2].

**Теорема.** Пусть  $W : H \rightarrow H$  – оператор двустороннего сдвига и изометрия  $S_0 : H \rightarrow H$  удовлетворяет соотношению  $S_0 W = W^2 S_0$ . Тогда найдется изометрия  $S_1 : H \rightarrow H$ , также удовлетворяющая соотношению  $S_1 W = W^2 S_1$  и такая, что пара  $\{S_0, S_1\}$  порождает алгебру Кунца  $\mathcal{O}_2$ .

**Доказательство.** Разложим вектор  $S_0e$  по базису  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ :  $S_0e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e_n$ . Тогда для любого  $m \in \mathbb{Z}$  будем иметь  $S_0e_m = S_0W^m e = W^{2m} S_0e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e_{n+2m}$ . Следствием изометричности оператора  $S_0$  являются равенства  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 2$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \bar{h}_{n-2m} = 0, m \neq 0$ . Определим оператор  $S_1$  на векторах базиса:  $S_1e_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \bar{h}_{1-n} e_{n+2m}$ . Вычислим скалярное произведение  $(S_1e_m, S_1e_l) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n (-1)^{n+2(m-l)} \bar{h}_{1-n} h_{1-n-2(m-l)} = \delta_{ml}$ . Это означает, что оператор  $S_1$  допускает продолжение до изометрии пространства  $H$ . По определению имеем  $S_1W^m e = W^{2m} S_1e$ , откуда  $S_1W e_m = S_1W^{m+1} e = W^{2(m+1)} S_1e = W^2 S_1W^m e = W^2 S_1e_m$  для всех  $m \in \mathbb{Z}$ . Поэтому  $S_1W = W^2 S_1$ . Теперь проверим ортогональность образов  $Im(S_0)$  и  $Im(S_1)$ . Для этого найдем  $(S_0e_m, S_1e_l) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n h_n h_{1-n-2(m-l)}$ . В последней сумме выполним замену индекса  $N = 1 - n - 2(m-l)$ . Получим:

$$(S_0e_m, S_1e_l) = -\frac{1}{2} \sum_{N \in \mathbb{Z}} (-1)^N h_{1-N-2(m-l)} h_N = -(S_0e_m, S_1e_l),$$

откуда  $(S_0e_m, S_1e_l) = 0$  для всех  $m, l \in \mathbb{Z}$ . Ортогональность  $Im(S_0)$  и  $Im(S_1)$  проверена. Осталось доказать, что  $Im(S_0) \oplus Im(S_1) = H$ . Предположим, что для вектора  $x \in H$  справедливы равенства  $(x, S_0e_m) = 0$  и  $(x, S_1e_m) = 0$  для всех  $m \in \mathbb{Z}$ . Покажем, что  $x = 0$ . Пусть  $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e_n$ .

Тогда

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \bar{h}_{n-2m} = 0, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n (-1)^n h_{1-n+2m} = 0. \quad (2)$$

Положим  $h(t) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{2\pi i n t}$ ,  $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{2\pi i n t}$  и заметим, что

$$2h(t) e^{2\pi i 2m t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2m} e^{2\pi i n t},$$

$$-2\bar{h}(t + \frac{1}{2}) e^{2\pi i (2m+1)t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \bar{h}_{1-n+2m} e^{2\pi i n t}.$$

Запишем соотношения ортогональности (2) в равносильном виде

$$\int_0^1 x(t) \bar{h}(t) e^{-2\pi i 2m t} dt = 0, \quad \int_0^1 x(t) h(t + \frac{1}{2}) e^{-2\pi i (2m+1)t} dt = 0.$$

Сделаем замену  $\tau = 2t$ . Получим:

$$\int_0^2 x(\frac{\tau}{2}) \bar{h}(\frac{\tau}{2}) e^{-2\pi i m \tau} d\tau = \int_0^1 (x(\frac{\tau}{2}) \bar{h}(\frac{\tau}{2}) + x(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}) \bar{h}(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2})) e^{-2\pi i m \tau} d\tau = 0$$

и аналогично

$$\int_0^1 \left( x\left(\frac{\tau}{2}\right)h\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right) - x\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right)h\left(\frac{\tau}{2}\right) \right) e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i m \tau} d\tau = 0.$$

Отсюда, учитывая 1-периодичность стоящих под знаком интеграла функций, находим:

$$\begin{cases} x\left(\frac{\tau}{2}\right)\bar{h}\left(\frac{\tau}{2}\right) + x\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right)\bar{h}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ x\left(\frac{\tau}{2}\right)h\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right) - x\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right)h\left(\frac{\tau}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

для почти всех  $\tau \in (0, 1)$ . Как мы сейчас увидим, определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{h}\left(\frac{\tau}{2}\right) & \bar{h}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ h\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right) & -h\left(\frac{\tau}{2}\right) \end{vmatrix} = -(|h\left(\frac{\tau}{2}\right)|^2 + |h\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right)|^2) = -1$$

отличен от нуля. Следовательно, система имеет только тривиальное решение  $x\left(\frac{\tau}{2}\right) = x\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$ , поэтому  $x(t) = 0$  для почти всех  $t \in (0, 1)$ , так что  $x = 0$ . Осталось убедиться в справедливости равенства  $|h\left(\frac{t}{2}\right)|^2 + |h\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)|^2 = 1$  для почти всех  $t \in (0, 1)$ . Действительно, имеем:

$$|h\left(\frac{t}{2}\right)|^2 + |h\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)|^2 = \frac{1}{4} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} (1 + (-1)^{n_1} (-1)^{n_2}) h_{n_1} \bar{h}_{n_2} e^{2\pi i (n_1 - n_2) t / 2}.$$

Полагая  $n_1 - n_2 = 2m$  и  $n = n_1$ , получаем:

$$|h\left(\frac{t}{2}\right)|^2 + |h\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \bar{h}_{n-2m} = 1.$$

Теорема доказана.

Пусть теперь  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  – ортогональный КМА в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$  и  $\varphi$  – масштабирующая функция (см. [3]). В качестве гильбертова пространства  $H$  возьмем  $V_0$ . Оператор  $Wf(x) = f(x - 1)$  задает двусторонний сдвиг в пространстве  $V_0$ , поскольку  $W^n \varphi(x) = \varphi(x - n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  – ортонормированный базис пространства  $V_0$ . Изометрический в пространстве  $V_0$  оператор  $S_0 f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)$  удовлетворяет соотношению  $S_0 W = W^2 S_0$ . По доказанной теореме существует оператор  $S_1$ , действующий в пространстве  $V_0$ , для которого пара  $\{S_0, S_1\}$  порождает алгебру Кунца. Поскольку  $Im(S_0) = V_{-1}$ , то  $Im(S_1) = V_0 \ominus V_{-1}$ . Положим  $\psi_0 = S_1 \varphi$ . Тогда  $\{W^{2n} \psi_0\}_{n \in \mathbb{Z}}$  – ортонормированный базис в  $V_0 \ominus V_{-1}$ . Так как оператор  $S_0$ , рассмотренный на всем пространстве  $L^2(\mathbb{R})$  обратим, то равенством  $\psi_0 = S_0 \psi$  корректно определена функция  $\psi \in V_1$ , удовлетворяющая уравнению  $\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \bar{h}_{1-n} \varphi(x - n)$ . Таким образом,

всплеск  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k)$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ , ассоциированный с масштабирующей функцией  $\varphi$ , может быть построен при помощи оператора  $S_1$ , дополнительного к оператору  $S_0$  в соответствии с теоремой.

*Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (проект № МД-1354.2013.1) и гранта РФФИ (проект № 13-01-00102).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Cuntz J.* Simple  $C^*$ -algebras generated by isometries // Commun. math. Phys. 1977. Vol. 57. P. 173–185.
2. *Bratteli O., Jorgensen P.* Isometries, shifts, Cuntz algebras and multiresolution wavelet analysis of scale  $N$  // Integr. equ. oper. theory. 1997. Vol. 28. P. 382–443.
3. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.*, Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005.

УДК 517.51

**Е. В. Гудошникова**

### ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОМ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работах [1] и [2] рассматривалась последовательность операторов:

$$L_n(f; x) = \frac{1}{g(z(x))^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \alpha_{k,n} \left[ \frac{z(x)}{\psi(z(x))} \right]^k,$$

где  $g(z)$  и  $\psi(z)$  - аналитические в круге  $|z| < a$ , принимающие положительные значения на  $[0; a]$ , такие, что на  $[0; a]$   $x\psi'(x) < \psi(x)$  и числа

$$\alpha_{0,n} = g(0)^n \text{ и } \alpha_{k,n} = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[ \left( g(z)^n \right)' \psi(z)^k \right]_{z=0}, \quad k = \overline{1, \infty}$$

неотрицательны, а  $z(x)$  - функция, обратная к функции

$$x(z) = \frac{z\psi(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Частными случаями операторов  $L_n$  являются многие хорошо известные операторы, например, операторы Саса – Миракьяна, Баскакова, Каталана. Кроме того, несложно указать пары функций  $g$  и  $\psi$  с требуемыми свойствами и получить новые последовательности операторов.

Были доказаны теоремы, из которых видно, что порядок приближения операторами  $L_n$  дифференцируемых функций по сути есть  $n^{-1/2}$ , дважды дифференцируемых –  $n^{-1}$  и для трижды и более раз дифференцируемых функций не улучшается.

В работе [3] для дважды дифференцируемых функций была рассмотрена последовательность операторов:

$$M_n(f; x) = L_n(f; x) - \frac{1}{2}L_n((t-x)^2; x)L_n(f''; x)$$

и было доказано, что

$$|M_n(f; x) - f(x)| \leq 2\frac{v(x)}{n}\omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right), \quad \text{где } v(x) = \frac{xg(x)}{z'(x)g'(x)}, \quad (1)$$

то есть порядок приближения дважды дифференцируемых функций операторами  $M_n$  лучше, чем операторами  $L_n$ . С другой стороны, из доказательства нетрудно увидеть, что порядок приближения операторами  $M_n$  трижды дифференцируемых функций не может быть лучше, чем  $n^{-3/2}$ .

По аналогии с операторами  $M_n$  для  $\nu$  раз дифференцируемых функций ( $\nu > 2$ ) рассмотрим последовательность операторов:

$$M_{n,\nu}(f; x) = L_n(f; x) - \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{1}{k!}L_n((t-x)^k; x)M_{n,\nu-k}(f^{(k)}; x),$$

$$M_{n,1}(f; x) = M_{n,2}(f; x) = L_n(f; x).$$

**Теорема.** *Если функция  $f$   $\nu$  раз дифференцируема, то*

$$|M_{n,\nu}(f; x) - f(x)| \leq n^{-\frac{\nu-1}{2}}\omega(f^{(\nu-1)}; \frac{1}{\sqrt{n}})C(\nu)W_\nu(x),$$

где  $C(\nu)$  – некоторая константа,  $W_\nu(x)$  – функция, которая может быть выражена через  $v(x)$ .

**Доказательство.** Применим метод математической индукции. Так как  $M_{n,3}(f; x) = M_n(f; x)$ , из неравенства (1) видно, что для  $\nu = 3$  утверждение теоремы выполняется. Для  $\nu \geq 3$  разложим  $f$  по формуле Тейлора и применим оператор  $L_n$ . Так как  $L_n(1; x) = 1$  и  $L_n(t-x; x) = 0$ , получаем:

$$M_{n,\nu}(f; x) - f(x) = \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{1}{k!}L_n((t-x)^k; x) \left[ f^{(k)}(x) - M_{n,\nu-k}(f^{(k)}; x) \right] +$$

$$+L_n(R_{n,\nu}; x), \quad (2)$$

где  $R_{n,\nu}(t; x) = \frac{1}{(\nu-1)!} [f^{(\nu-1)}(\xi) - f^{(\nu-1)}(x)] (t-x)^{\nu-1}$ ,  $\xi$  – точка между  $t$  и  $x$ .

Так как  $\frac{d}{dx} L_n(f; x) = \frac{n}{v(x)} L_n((t-x)f; x)$ , получаем

$$L_n((t-x)^k; x) = n^{-k+1} w_k(x), \quad \text{где } w_k(x) = v(x) w'_{k-1}(x), \quad w_2(x) = v(x). \quad (3)$$

По предположению индукции

$$\left| f^{(k)}(x) - M_{n,\nu-k}(f^{(k)}; x) \right| \leq n^{-\frac{\nu-k-1}{2}} \omega\left((f^{(k)})^{(\nu-k-1)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) C(k) W_{\nu-k}(x). \quad (4)$$

Так как  $|f^{(\nu-1)}(\xi) - f^{(\nu-1)}(x)| \leq \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \omega(f^{(\nu-1)}; \delta)$ , получаем, что

$$|L_n(R_{n,\nu}; x)| \leq \frac{1}{(\nu-1)!} \omega(f^{(\nu-1)}; \delta) \left[ L_n(|t-x|^{\nu-1}; x) + \frac{1}{\delta^2} L_n(|t-x|^{\nu+1}; x) \right].$$

Если  $\nu$  нечетное, то

$$L_n(|t-x|^{\nu-1}; x) = L_n((t-x)^{\nu-1}; x) = n^{-\nu+2} w_{\nu-1}(x)$$

$$\text{и для } \delta = \sqrt{\frac{v(x)}{n}} \quad \frac{1}{\delta^2} L_n(|t-x|^{\nu+1}; x) = \frac{1}{\delta^2} L_n((t-x)^{\nu+1}; x) = n^{-\nu+1} w'_\nu(x).$$

Если  $\nu$  четное, то

$$\begin{aligned} L_n(|t-x|^{\nu-1}; x) &= L_n((t-x)^{\nu-2} |t-x|; x) \leq \\ &\leq \sqrt{L_n((t-x)^{2\nu-4}; x)} \sqrt{L_n((t-x)^2; x)} = \\ &= \sqrt{n^{-2\nu+5} w_{2\nu-4}(x)} \sqrt{\frac{v(x)}{n}} = n^{-\nu+2} \sqrt{w_{2\nu-4}(x) v(x)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и } \frac{1}{\delta^2} L_n(|t-x|^{\nu+1}; x) &\leq \frac{1}{\delta^2} \sqrt{L_n((t-x)^{2\nu}; x)} \sqrt{L_n((t-x)^2; x)} = \\ &= \sqrt{L'_n((t-x)^{2\nu-1}; x)} = n^{-\nu+1} \sqrt{w'_{2\nu-1}(x)}. \end{aligned}$$

Следовательно, в любом случае

$$|L_n(R_{n,\nu}; x)| \leq n^{-\nu+2} \omega(f^{(\nu-1)}; \delta) C(\nu) W^*(x). \quad (5)$$

Из соотношений (2–5) следует утверждение теоремы.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гудошникова Е. В. Конструкция линейных положительных операторов // Математика. Механика : сб. науч. трудов. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып.9. С. 20–22.
2. Гудошникова Е. В. Конструкции ЛПО и их аппроксимативные свойства // Математика. Механика : сб. науч. трудов. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып.10. С. 18–20.
3. Гудошникова Е. В. Порядок приближения дифференцируемых функций классом линейных операторов // Математика. Механика : сб. науч. трудов. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып.11. С. 18–20.

УДК 517.984

М. Ю. Игнатъев

### ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

Пусть  $\Gamma$  – геометрический граф с вершиной  $v_1$  и ребрами  $r_0, r_1$ , где  $r_1$  – луч с началом в  $v_1$ ,  $r_0$  – цикл  $[v_1, v_1]$  длины  $\pi$ . Будем считать, что ребро  $r_0$  параметризовано параметром  $x_0 \in [0, \pi]$ , а  $r_1$  – параметром  $x_1 \in [0, \infty)$ . Функцию  $y$  на графе  $\Gamma$  будем трактовать как пару функций  $(y_0(x_0), y_1(x_1))$ .

На ребрах  $r_j, j = 0, 1$  рассмотрим дифференциальные уравнения:

$$\ell_0 y_0 := -y_0'' + q_0(x_0)y_0 = \rho^2 y_0, \quad (1)$$

$$\ell_1 y_1 := y_1^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} q_{1j}(x_1)y_1^{(j)} = \rho^n y_1, \quad (2)$$

где  $q_0 \in L(0, \pi)$  – вещественнозначная функция,  $n > 2$ ,  $q_{1j}$  – комплекснозначные, вообще говоря, функции, такие, что  $q_{1j}(x_1) \exp(\tau x_1) \in L(0, \infty)$  для некоторого  $\tau > 0$ . Пусть  $\Omega_\nu = \{\rho : \arg \rho \in (\frac{\nu-1}{n}\pi, \frac{\nu}{n}\pi)\}$  и  $\omega_k, k = \overline{1, n}$  – корни  $n$ -й степени из 1, упорядоченные таким образом, что  $\operatorname{Re}(\rho\omega_1) < \operatorname{Re}(\rho\omega_2) < \dots < \operatorname{Re}(\rho\omega_n)$  при  $\rho \in \Omega_\nu$ . Для  $k = \overline{2, n}$  определим решение типа Вейля  $\psi_k = (\psi_{k0}(x_0, \rho), \psi_{k1}(x_1, \rho))$  как функцию со следующими свойствами:

- 1)  $\psi_{k0}$  является решением уравнения (1),  $\psi_{k1}$  является решением уравнения (2);
- 2) выполнены условия склейки:

$$\psi_{k0}(0, \rho) = \psi_{k0}(\pi, \rho) = \psi_{k1}(0, \rho),$$

$$\begin{aligned}\psi'_{k0}(\pi, \rho) &= \psi'_{k0}(0, \rho) + \psi'_{k1}(0, \rho), \\ \psi_{k1}^{(\nu-1)}(0, \rho) &= 0, \nu = \overline{3, k};\end{aligned}$$

3) справедлива асимптотика:

$$\psi_{k1}(x_1, \rho) = \exp(\rho\omega_k x_1)(1 + o(1)), x_1 \rightarrow \infty.$$

Для  $k = 1$  определим  $\psi_{11}(x_1, \rho)$  как решение уравнения (2), нормированное асимптотикой  $\psi_{11}(x_1, \rho) = \exp(\rho\omega_1 x_1)(1 + o(1)), x_1 \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** При каждом  $\nu = \overline{1, 2n}$ ,  $k = \overline{1, n}$   $\psi_{k1}(x_1, \rho)$  голоморфна в  $\Omega_\nu \setminus \Lambda_{k\nu}$  и непрерывна в  $\overline{\Omega}_\nu \setminus \Lambda_{k\nu}$ , где  $\Lambda_{k\nu}$  – некоторое не более чем счетное подмножество  $\overline{\Omega}_\nu$ , не имеющее конечных предельных точек. При  $\rho \rightarrow 0$  справедлива оценка  $\psi_{k1}(x_1, \rho) = O(\rho^{-N})$ , где  $N$  – некоторое целое число.

Определим матрицу  $\Psi(x_1, \rho)$ :  $\Psi_{\nu k} := \psi_{k1}^{(\nu-1)}$ ,  $k, \nu = \overline{1, n}$ .

**Теорема 2.** Существует  $\rho_*$  такое, что:

1)  $\Lambda_{k\nu} \cap \Lambda_{m\nu} \cap \{|\rho| > \rho_*\} = \emptyset$ ;

2) для любого  $\rho_0 \in \Lambda_\nu \cap \{|\rho| > \rho_*\}$ , где  $\Lambda_\nu := \bigcup_{k=1}^n \Lambda_{k\nu}$  существует единственная строго верхнетреугольная матрица  $\alpha(\rho_0)$  такая, что

$$\Psi(x_1, \rho) (I - (\rho - \rho_0)^{-1} \alpha(\rho_0))$$

ограничена в окрестности  $\rho_0$ .

**Лемма 1.** При  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\rho \in G_{\nu, \delta} := \{\rho \in \overline{\Omega}_\nu : \text{dist}(\rho, \Lambda_\nu) > \delta\}$ ,  $\delta > 0$ , имеет место асимптотика:

$$\Psi(x_1, \rho) = D_\rho [W] \exp(\rho x_1 \omega) A(\rho), \quad A(\rho) = O(1),$$

где  $D_\rho = \text{diag}(1, \rho, \dots, \rho^{n-1})$ ,  $\omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ ,  $W = (w_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}$ ,  $w_{jk} = \omega_k^{j-1}$ ,  $[W] = W + O(\rho^{-1})$ ,  $A(\rho)$  – верхнетреугольная матрица с 1 на главной диагонали. Далее, пусть  $\tilde{\Psi}(x_1, \rho)$  построена аналогично  $\Psi(x_1, \rho)$  по решениям типа Вейля уравнений вида (1), (2), удовлетворяющим условиям 1)-3), но с другими коэффициентами  $\tilde{q}_0, \tilde{q}_{10}, \dots, \tilde{q}_{1, n-2}$ . Тогда для  $\hat{A}(\rho) := A(\rho) - \tilde{A}(\rho)$  справедлива оценка  $\hat{A}(\rho) = O(\rho^{-1})$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\rho \in G_{\nu, \delta}$ .

Пусть  $\Sigma_\nu = \{\rho : \arg \rho = \frac{\nu}{n}\pi\}$ . Для  $\rho_0 \in \Sigma_\nu \setminus (\Lambda_\nu \cup \Lambda_{\nu+1})$  определим

$$\Psi^-(x_1, \rho_0) = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0, \rho \in \Omega_\nu} \Psi(x_1, \rho), \quad \Psi^+(x_1, \rho_0) = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0, \rho \in \Omega_{\nu+1}} \Psi(x_1, \rho).$$

Тогда существует единственная матрица  $v(\rho_0)$  такая, что  $\Psi^+(x_1, \rho_0) = \Psi^-(x_1, \rho_0)v(\rho_0)$ .

Будем говорить, что набор функций  $\{q_0, q_{10}, \dots, q_{1,n-2}\}$  принадлежит классу  $G$ , если утверждение теоремы 2 справедливо при  $\rho_* = 0$ . В этом случае определим *данные рассеяния, ассоциированные с ребром  $r_1$* , как набор  $J_1 = \{v(\rho_0), \rho_0 \in \Sigma_\nu \setminus (\Lambda_\nu \cup \Lambda_{\nu+1}); \Lambda_\nu; \alpha(\rho_0), \rho_0 \in \Lambda_\nu, \nu = \overline{1, 2n}\}$ .

**Теорема 3.** *Если  $\{q_0, q_{10}, \dots, q_{1,n-2}\} \in G$  и  $\{\tilde{q}_0, \tilde{q}_{10}, \dots, \tilde{q}_{1,n-2}\} \in G$  таковы, что  $J_1 = \tilde{J}_1$ , то  $q_{1j} = \tilde{q}_{1j}, j = \overline{0, n-2}$ . Таким образом, задание данных рассеяния, ассоциированных с ребром  $r_1$ , однозначно определяет коэффициенты уравнения (2).*

Для восстановления коэффициента уравнения (1) требуются задания некоторых дополнительных данных, связанных с периодической задачей на  $r_0$ . А именно, пусть  $S_0(x_0, \lambda)$  – решение уравнения  $\ell_0 y = \lambda y$  с начальными условиями типа синуса,  $F(\lambda)$  – дискриминант Хилла периодической задачи для этого уравнения [3]. Пусть, далее,  $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$  – спектр краевой задачи для уравнения  $\ell_0 y = \lambda y$  с условиями Дирихле на концах интервала  $(0, \pi)$  и  $\sigma_m \in \{-1, 0, 1\}, m = \overline{1, \infty}$  – числа такие, что [3]:

$$S'_0(\pi, \lambda_m) = \frac{1}{2}F(\lambda_m) + \frac{\sigma_m}{2}\sqrt{F^2(\lambda_m) - 4}.$$

Обозначим через  $N_0$  множество всех индексов  $m$  таких, что  $\lambda_m$  является собственным значением периодической задачи.

Определим *данные рассеяния* как набор  $J = \{J_1; \sigma_m, m = \overline{1, \infty}; N_0; \lambda_m, m \in N_0\}$ .

**Теорема 4.** *Если  $\{q_0, q_{10}, \dots, q_{1,n-2}\} \in G$  и  $\{\tilde{q}_0, \tilde{q}_{10}, \dots, \tilde{q}_{1,n-2}\} \in G$  таковы, что  $J = \tilde{J}$ , то  $q_{1j} = \tilde{q}_{1j}, j = \overline{0, n-2}$  и  $q_0 = \tilde{q}_0$ . Таким образом, задание данных рассеяния однозначно определяет коэффициенты уравнений (1), (2).*

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00134).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Beals R., Deift P., Tomei C. Direct and inverse scattering on the line // Math. Surveys and Monographs. 1988. Vol.28. Amer. Math. Soc, Providence : RI.
2. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
3. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.

## ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРУНЫ

В работе А. И. Вагабова [1, с. 116–117] приведен пример гиперболической системы с двумя переменными, у которой спектральная задача имеет неполную систему собственных и присоединенных функций, что приводит к неразрешимости смешанной задачи методом Фурье, и в то же время решение этой задачи можно представить интегралом Лапласа. Схожая ситуация имеет место и для следующей очень простой смешанной задачи:

$$u_t(x, t) = u_x(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (3)$$

где  $u(x, t)$  — скалярная функция,  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ .

В настоящей статье мы изучим задачу (1)–(3) и дадим применение полученных результатов к одной смешанной задаче для уравнения струны.

**1.** Решение задачи (1)–(3) будем обозначать  $u_+(x, t)$ . Спектральная задача в этом случае имеет вид  $y'(x) = \lambda y(x)$ ,  $y(0) = 0$ . У неё нет собственных чисел и собственных функций. Ввиду простоты задачи (1)–(3) будем изучать её, не привлекая интеграла Лапласа как в [1]. Общее решение уравнения (1) есть

$$u_t(x, t) = F(x + t). \quad (4)$$

Отсюда следует, что (1)–(3) имеет при всех  $t \in (-\infty, \infty)$  только нулевое решение (и, значит, лишь при  $\varphi(x) = 0$ ). Поэтому будем рассматривать отдельно две задачи: одну при  $t \in [0, \infty)$ , другую при  $t \in (-\infty, 0]$ . Считаем, что  $\varphi(x)$  удовлетворяет следующим естественным для классического решения условиям:  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ . Из представления (4) получаем следующий результат.

**Теорема 1.** *Если  $t \in [0, \infty)$ , то  $u_+(x, t) \equiv 0$  (в этом случае  $\varphi(x) \equiv 0$ ). Если  $t \in (-\infty, 0]$ , то*

$$u_+(x, t) = \begin{cases} \varphi(x + t), & 0 \leq x + t \leq 1, \\ 0, & x + t \leq 0. \end{cases}$$

**2.** Схожая ситуация имеет место, когда (1) заменяется на  $u_t = -u_x$ . В этом случае решение смешанной задачи обозначим через  $u_-(x, t)$ .

**Теорема 2.** Если  $t \in [0, \infty)$ , то

$$u_-(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - t), & 0 \leq x - t \leq 1, \\ 0, & x - t \leq 0. \end{cases}$$

Если  $t \in (-\infty, 0]$ , то  $u_-(x, t) \equiv 0$  (в этом случае  $\varphi(x) \equiv 0$ ).

**Замечание.** Теоремы 1 и 2 справедливы и при  $x \in [0, \infty)$ :

$$u_+(x, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0;$$

если  $t \in (-\infty, 0]$ , то

$$u_+(x, t) = \begin{cases} \varphi(x + t), & 0 \leq x + t, \\ 0, & x + t \leq 0; \end{cases}$$

$$u_-(x, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \leq 0;$$

если  $t \in [0, \infty)$ , то

$$u_-(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - t), & 0 \leq x - t, \\ 0, & x - t \leq 0. \end{cases}$$

**3.** Теоремы 1 и 2 с учетом замечания приводят к следующим результатам для уравнения струны.

**Теорема 3.** Предположим, что  $\varphi(x) \in C^2[0, \infty)$ ,  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ . Тогда задача а):

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t); \\ u(0, t) &= u_x(0, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = -\varphi'(x) \end{aligned}$$

при  $x \in [0, \infty)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , имеет решение

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - t), & 0 \leq x - t, \\ 0, & x - t \leq 0; \end{cases}$$

задача б):

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t); \\ u(0, t) &= u_x(0, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi'(x) \end{aligned}$$

при  $x \in [0, \infty)$ ,  $t \in (-\infty, 0]$ , имеет решение

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x+t), & 0 \leq x+t, \\ 0, & x+t \leq 0. \end{cases}$$

**Замечание.** В задачах а) и б) условия  $u_t(x, 0) = -\varphi'(x)$  и  $u_t(x, 0) = \varphi'(x)$  соответственно являются излишними.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238а).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 1994. 160 с.

УДК 517.984

О. А. Королева

### ТЕОРЕМА ЖОРДАН—ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В работе найдены условия разложения функции  $f(x)$  в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям скалярного дифференциального оператора  $L$ , где

$$L : Ly = y'; U(y) = y(0) - y(1) + \int_0^1 a(t)y(t)dt = 0, \quad (1)$$

где  $a(t)$  – непрерывная функция на  $[0, 1]$ . Как известно, для частичной суммы ряда Фурье  $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$ , где  $R_\lambda f$  – резольвента оператора  $L$ .

Рассмотрим краевую задачу:

$$y'(x) = \lambda y(x) + f(x), \quad (2)$$

$$U(y) = 0. \quad (3)$$

Ее решение [1] имеет вид

$$y(x, \lambda) = R_\lambda f = -e^{\lambda x} \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda)) f(t) dt + g_\lambda f(x), \quad (4)$$

где  $\Delta(\lambda) = U(e^\lambda)$ ,  $U_x$  означает, что  $U$  применяется по  $x$ ,

$$g(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t, x)e^{\lambda(x-t)}, & \text{при } \operatorname{Re}\lambda \geq 0, \\ \varepsilon(x, t)e^{\lambda(x-t)}, & \text{при } \operatorname{Re}\lambda < 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leq x, \\ 0, & \text{при } t > x, \end{cases}$$

$$g_\lambda f(x) = \int_0^1 g(x, t, \lambda) f(t) dt.$$

Рассмотрим  $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ . Известно, если  $g(x) \in C^1[0, 1]$ , то

$$\int_a^b g'(x) f(x) dx = g(x) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x). \quad (5)$$

Будем считать, что  $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ . (Случай  $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$  рассматривается аналогично.)

**Лемма 1.** *Имеет место формула*

$$\begin{aligned} \int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda)) f(t) dt &= \frac{1}{\lambda} (f(1) - e^\lambda f(0)) - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{\lambda(1-t)} df(t) - \\ &- \frac{1}{\lambda} \int_0^1 a(\tau) f(\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 a(\tau) e^{\lambda\tau} f(0) d\tau + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 a(\tau) d\tau \int_0^\tau e^{\lambda(\tau-t)} df(t). \end{aligned}$$

**Доказательство.** В самом деле,  $U_x(g(x, t, \lambda)) = g(0, t, \lambda) - g(1, t, \lambda) + \int_0^1 a(\tau) g(\tau, t, \lambda) d\tau = -e^{\lambda(1-t)} + \int_0^1 a(\tau) g(\tau, t, \lambda) d\tau$ . Тогда  $\int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda)) f(t) dt = - \int_0^1 e^{\lambda(1-t)} f(t) dt + \int_0^1 a(\tau) d\tau \int_0^1 f(t) g(\tau, t, \lambda) dt$ . Разбив внутренний интервал второго слагаемого на два – первый от 0 до  $\tau$ , а второй от  $\tau$  до 1 и применив формулу (5) в каждом слагаемом, получим требуемое.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь  $g_\lambda f(x)$  из (4). Аналогично лемме 1 по формуле (5) можно доказать лемму.

**Лемма 2.** *Выполняются равенство:*

$$g_\lambda f(x) = -\frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} f(0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} df(t).$$

Вернемся к решению задачи (2), (3).

**Лемма 3.** Если  $f(x)$  удовлетворяет условию (3), то  $R_\lambda f = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \Omega_\lambda f$ , где  $\Omega_\lambda = \frac{1}{\lambda}[I_1 + I_2 + I_3]$ , где  $I_1 = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int_0^x e^{-\lambda t} df(t)$ ,  $I_2 = \frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 e^{-\lambda t} df(t)$ ,  $I_3 = -\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 a(x) dx \int_0^x e^{\lambda(x-t)} df(t)$ .

**Доказательство.** По леммам (1), (2)

$$\begin{aligned} R_\lambda f &= -\frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} f(1) + \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)} f(0) + \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 e^{-\lambda t} df(t) + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 a(\tau) f(\tau) d\tau - \frac{1}{\lambda \Delta(\lambda)} e^{\lambda x} \int_0^1 a(\tau) f(\tau) d\tau - \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 a(\tau) e^{\lambda \tau} f(0) d\tau - \\ &- \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 a(x) dx \int_0^x e^{\lambda(x-t)} df(t) - \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} f(0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} df(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим два слагаемых:  $\frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)} f(0) + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} f(0)$ .

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем их: } &\frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)} f(0) + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} f(0) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} f(0) \left[ \frac{e^\lambda}{\Delta(\lambda)} + 1 \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda \Delta(\lambda)} e^{\lambda x} f(0) [e^\lambda + \Delta(\lambda)] = \frac{1}{\lambda \Delta(\lambda)} e^{\lambda x} f(0) \left[ 1 + \int_0^1 a(t) e^{\lambda t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda \Delta} e^{\lambda x} f(0) + \frac{1}{\lambda \Delta(\lambda)} e^{\lambda x} f(0) \int_0^1 a(t) e^{\lambda t} dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } R_\lambda f &= \frac{1}{\lambda \Delta(\lambda)} e^{\lambda x} \left[ f(0) - f(1) + \int_0^1 a(\tau) f(\tau) d\tau \right] + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 e^{-\lambda t} df(t) - \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 a(x) dx \int_0^x e^{\lambda(x-t)} df(t) - \frac{1}{\lambda} f(x) + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} df(t). \text{ Так как квадратная скобка обращается в 0.} \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Удалим из комплексной плоскости собственные значения оператора  $L$  вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса  $\delta_0$ . В полученной области  $S_{\delta_0}$  при  $\text{Re} \lambda \leq 0$  справедлива оценка  $|\Delta(\lambda)| \geq c |e^{-\lambda}|$ . Теперь можно сформулировать основной результат статьи.

**Теорема 1.** Если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ , имеет на нем ограниченную вариацию и удовлетворяет условию (3), то

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - S_r(f, x)| \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

где  $r$  таково, что окружность  $|\lambda| = r$  находится в  $S_{\delta_0}$ .

**Доказательство.**  $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$ . На основании преды-



дущей леммы  $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left[-\frac{1}{\lambda} f(x) + \Omega_\lambda f\right] d\lambda = f(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \Omega_\lambda f d\lambda$ . Значит, для доказательства утверждения достаточно показать, что

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_{|\lambda|=r} \Omega_\lambda f d\lambda \right| \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Зададим сколь угодно малое  $\varepsilon$ . Тогда существует  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , такое что  $\bigvee_{1-\delta}^1 (f) < \varepsilon$ . Значит, для первого слагаемого в  $\Omega_\lambda$  при  $|\lambda| = r$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\lambda} I_1 \right| &\leq \frac{|e^\lambda| |e^{\lambda x}|}{c \cdot r} \left\{ \int_0^{x-\delta} |e^{-\lambda t}| |df(t)| + \int_{x-\delta}^x |e^{-\lambda t}| |df(t)| \right\} \leq \\ &\leq \frac{|e^{\lambda x}|}{c \cdot r} \int_0^{x-\delta} |e^{-\lambda(x-t)}| |df(t)| + \frac{1}{c \cdot r} \int_{x-\delta}^x |e^{\lambda(x-t)}| |df(t)| \leq \\ &\leq \frac{1}{c \cdot r} \left\{ \int_0^{x-\delta} |e^{\lambda \delta}| |df(t)| + \int_{x-\delta}^x |df(t)| \right\} \leq \frac{1}{c \cdot r} \left\{ |e^{\lambda \delta}| \bigvee_0^1 (f) + \bigvee_{1-\delta}^1 (f) \right\} = \\ &= \frac{c}{r} \{ |e^{\lambda \delta}| + \varepsilon \}, \text{ где } c \text{ обозначены разные константы. Ана-} \\ &\text{логично для остальных слагаемых } \left| \frac{1}{\lambda} I_2 \right| \text{ и } \left| \frac{1}{\lambda} I_3 \right| \text{ из } \Omega_\lambda. \end{aligned}$$

Поэтому  $\left| \int_{|\lambda|=r} ' \Omega_\lambda f d\lambda \right| \leq \frac{c}{r} \int_{|\lambda|=r} ' |e^{\lambda \delta}| |d\lambda| + \frac{c \cdot \varepsilon}{r} \int_{|\lambda|=r} ' |d\lambda| \leq$   
 $\leq \frac{c}{r} 2r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\delta r \sin \theta} d\theta + c \pi \varepsilon \leq 2c \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\delta r \frac{2}{\pi} \theta} d\theta + c \pi \varepsilon \leq \frac{c}{r} + c \cdot \pi \cdot \varepsilon \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ , где  
 (') означает часть  $|\lambda| = r$ , в которой  $Re \lambda \leq 0$ .

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях. // Мат. сб. 2006. №197, вып. 11. С 115–142.

УДК 517.984

**Л. П. Кувардина**

### СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим интегральный оператор:

$$Af(x) = \int_0^{p(x)} A(p(x), t) f(t) dt, \quad (6)$$

где  $p(x) = \frac{1-x}{ax+1}$ ,  $a > -1$ . Предполагается, что функции  $A(x, t)$ ,  $A_x(x, t)$ ,  $A_t(x, t)$ ,  $A_{xt}(x, t)$  непрерывны при  $0 \leq t \leq x \leq 1$ , кроме того,  $\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x, t) \Big|_{t=x} = \delta_{0,j}$  ( $j = 0, 1$ ),  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера.

Для оператора (6) автором получена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям оператора и в тригонометрический ряд Фурье [1]. В данной работе изучается суммируемость по Риссу разложений по собственным и присоединенным функциям оператора (6).

Обозначим обобщенные средние Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям оператора  $A$  через

$$\sigma_r(x, f, g) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda,$$

где  $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$  – резольвента Фредгольма оператора  $A$ ,  $E$  – единичный оператор,  $\lambda$  – спектральный параметр, функция  $g(\lambda, r)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $g(\lambda, r)$  непрерывна по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| \leq r$  и аналитична по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < r$  при любом  $r > 0$ ;
- 2) существует такая константа  $C > 0$ , что  $|g(\lambda, r)| \leq C$  при всех  $r > 0$  и  $|\lambda| \leq r$ ;
- 3) существуют положительные  $\beta$  и  $h$  такие, что

$$g(re^{i\theta}, r) = \begin{cases} O(|\theta|^\beta) & \text{при } |\theta| \leq h, \\ O(|\theta - \pi|^\beta) & \text{при } |\theta - \pi| \leq h; \end{cases}$$

- 4)  $g(\lambda, r) \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$  и фиксированном  $\lambda$ .

Для нахождения резольвенты  $R_\lambda$  строится интегродифференциальная задача в пространстве двумерных вектор-функций:

$$\tilde{Q}(x)z'(x) + \tilde{P}(x)z(x) + \tilde{N}z(x) - \lambda z(x) = F(x), \quad (7)$$

$$\tilde{M}_0 z(0) + \tilde{M}_1 z(1) = 0, \quad (8)$$

где  $\tilde{Q}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (p'(x))^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & N(x, x) \\ N(p(x), p(x)) & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$\tilde{N}z(x) = \int_0^1 \tilde{N}(x, t)z(t)dt, \quad \tilde{N}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon(x, t)N'_t(x, t) \\ 0 & -\varepsilon(p(x), t)N'_t(p(x), t) \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq x, \\ 0 & \text{при } t > x. \end{cases} \quad \tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T, F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T, F_1(x) = f(x), F_2(x) = f(p(x)), N(x, t)$  – ядро интегрального оператора  $N = (E + N_1)^{-1} - E$ ,  $N_1 f(x) = \int_0^x N_1(x, t) f(x) dt, N_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} A(x, t)$ .

**Теорема 1.** *Если  $\lambda$  таково, что  $R_\lambda$  существует, то вектор  $z(x)$  с координатами  $z_1(x) = R_\lambda f(x), z_2(x) = z_1(p(x))$  является решением задачи (7), (8). Обратно, если  $z(x)$  удовлетворяет (7), (8), и соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то  $R_\lambda$  существует, и  $R_\lambda f(x) = z_1(x), z_2(x) = z_1(p(x))$ .*

Задача (7), (8) в два этапа приводится к виду, более удобному для изучения. Во первых, диагонализуется матрица  $\tilde{Q}(x)$  и заменой  $z(x) = \Gamma(x)u(x)$  задача (7), (8) преобразуется в следующую:

$$u'(x) + P(x)u(x) + Nu(x) - \lambda \mathcal{D}(x)u(x) = \Phi(x), \quad (9)$$

$$M_0 u(0) + M_1 u(1) = 0, \quad (10)$$

где  $P(x) = \Gamma^{-1}(x)\Gamma'(x) + \Gamma^{-1}(x)\tilde{Q}^{-1}(x)\tilde{P}(x)\Gamma(x), N = \Gamma^{-1}(x)\tilde{Q}^{-1}(x)\tilde{N}\Gamma, \Phi(x) = \Gamma^{-1}(x)\tilde{Q}^{-1}(x)F(x), M_0 = \tilde{M}_0\Gamma(0), M_1 = \tilde{M}_1\Gamma(1), \omega(x) = i\sqrt{-p'(x)}, \mathcal{D}(x) = \begin{pmatrix} \omega(x) & 0 \\ 0 & -\omega(x) \end{pmatrix}, \Gamma(x) = \begin{pmatrix} \omega(x) & -\omega(x) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

При исследовании асимптотического поведения решений краевой задачи (9), (10) дополнительные сложности возникают из-за матрицы  $P(x)$ . Поэтому на следующем этапе проводится преобразование, заменяющее матрицу  $P(x)$  на матрицу, элементы которой имеют оценку  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ .

**Теорема 2.** *Существует матрица-функция размером  $2 \times 2$ :  $H(x, \lambda) = H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_2(x)$  с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц  $H_0(x), H_2(x)$ , причем  $H_0(x)$  невырождена при всех  $x$  и диагональна, а  $H_2(x)$  – кодиагональна, такая, что преобразование  $u(x) = H(x, \lambda)v(x)$  приводит задачу (9), (10) к виду*

$$v'(x) + P(x, \lambda)v(x) + N_\lambda v(x) - \lambda \mathcal{D}(x)v(x) = \Phi(x, \lambda), \quad (11)$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \quad (12)$$

где  $P(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda}H^{-1}(x, \lambda)\left(H_2'(x) + P(x)H_2(x)\right), N_\lambda = H^{-1}(x, \lambda)NH, \Phi(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)\Phi(x), M_{l\lambda} = M_l H(l, \lambda), l = 0, 1$ .

Обозначим через  $S_\delta$  область, получающуюся из полуплоскости  $Re \rho \leq 0, \rho = \lambda i$ , после удаления нулей функции  $\varphi(\rho) = h_1(0)h_2(1) +$

$+e^{2\rho\beta}h_2(0)h_1(1)$  вместе с окрестностями одного и того же радиуса  $\delta$ , где  $H_0(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{a+1}}{a} \ln(a+1)$ .

**Теорема 3.** В области  $S_\delta$  при больших значениях  $|\lambda|$  резольвента  $R_\lambda f$  есть первая компонента вектора  $\Gamma H L_\lambda R_{1\lambda} \Phi(x, \lambda)$ , где

$$R_{1\lambda} F(x) = -W(x, \lambda) \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^1 U(g(x, t, \lambda)) F(t) dt + \int_0^1 g(x, t, \lambda) F(t) dt,$$

$$W(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\rho q(x)} & 0 \\ 0 & e^{-\rho q(x)} \end{pmatrix}, \quad g(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\rho(q(x)-q(t))} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{при } t \leq x, \quad g(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\rho(q(x)-q(t))} \end{pmatrix} \quad \text{при } t > x, \quad q(x) =$$

$$= \frac{\sqrt{a+1}}{a} \ln(ax+1), \quad L_\lambda = \left( E + R_{1\lambda} N_\lambda + R_{1\lambda} P(x, \lambda) \right)^{-1}.$$

**Лемма 1.** Для любой функции  $f(x) \in L[0, 1]$  справедливо

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} \Gamma H(x, \lambda) (L_\lambda R_{1\lambda} \Phi(x, \lambda) - R_{1\lambda} H_0^{-1} \Phi(x)) d\lambda \right\|_\infty = 0,$$

здесь норма в пространстве вектор-функций размерности два  $L_\infty[0, 1]$ .

**Лемма 2.** Если функция  $f(x) \in C[0, 1]$  и удовлетворяет условию  $f(1) = 0$ , то существует последовательность функций  $f_n(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $f_n(1) = 0$ , сходящихся к  $f$ .

**Теорема 4.** Для того чтобы выполнялось

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda \right\| = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы функция  $f(x) \in C[0, 1]$  удовлетворяла условию  $f(1) = 0$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кувардина Л.П. О равносходимости спектральных разложений для интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // 4 Международный симпозиум. Ряды Фурье и их приложения: Тез. докл. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 2006. 32 с.

## ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ФАКТОРАМИ

Иерархические игры – это модели конфликтных ситуаций с неравноправными участниками. Основы теории иерархических игр заложены в монографии [1], различные способы задания информированности первого игрока об интересах второго исследовались в работах [2–6]. В [5] считалось, что первый игрок имеет стохастическую информированность об интересах второго. В настоящей работе этот подход обобщается. Предполагается, что первому игроку известно только то, что функция выигрыша второго игрока находится с определенной вероятностью в некоторой группе критериев. При данном предположении находится наибольший гарантированный результат первого игрока и его оптимальная стратегия. Доказывается теорема, частным случаем которой является и результат [5], и решение задачи в постановке данной работы.

Пусть  $X$  – множество стратегий первого игрока,  $Y$  – множество стратегий второго игрока,  $F$  – функция выигрыша первого игрока,  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  – функции выигрыша второго игрока,  $p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$  – числа, удовлетворяющие условиям  $\forall k = 1, 2, \dots, l \ p_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^l p_k = 1$ . Первый игрок знает, что с вероятностью  $p_k$  функцией выигрыша второго игрока является одна из функций  $G_{j_{k-1}+1}, G_{j_{k-1}+2}, \dots, G_{j_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$  (положим  $j_0 = 0, j_l = n$ ). Будем считать, что множества  $X$  и  $Y$  конечны.

В [7] показано, что при любой информированности первого игрока об интересах второго оптимальный способ организации обмена информацией между игроками моделируется игрой:

$\tilde{\Gamma} = (\Phi_1, \Psi_2 \times Y, \tilde{F}, \tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_i, \dots, \tilde{G}_n)$ , где  $\Phi_1 = \{\varphi_1\}$ ,  $\varphi_1: Y \rightarrow 2^X$ ,  $\Psi_2 = \{\psi_2\}$ ,  $\psi_2: 2^X \rightarrow X$ , причем при всех  $T \subset X$  выполнено условие  $\psi_2(T) \in T$ , функции  $\tilde{F}, \tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_i, \dots, \tilde{G}_n$  определяются равенствами  $\tilde{F}(\varphi_1, (\psi_2, y)) = F(\psi_2(\varphi_1(y)), y)$ ,  $\tilde{G}_i(\varphi_1, (\psi_2, y)) = G_i(\psi_2(\varphi_1(y)), y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Здесь первый игрок для того, чтобы использовать интересы партнера, не зная их точно, передает второму игроку право выбора  $x$  в определенных пределах.

Наибольший гарантированный результат первого игрока при этих условиях определяется равенством

$$\gamma(\tilde{\Gamma}) = \max_{\varphi_1 \in \Phi_1} \sum_{k=1}^l p_k \cdot \min_{j_{k-1}+1 \leq i \leq j_k} \min_{(\psi_2, y) \in M_i(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y),$$

где

$$M_i(\psi_1) = \{(\psi'_2, y') : G_i(\psi_2(\varphi_1(y')), y') = \max_{(\psi_2, y)} G_i(\psi_2(\varphi_1(y)), y)\}, \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Основная цель работы – сведение решения данной вариационной задачи с ограничениями к экстремальной задаче на исходной множествах  $X$  и  $Y$ . Мы докажем общую теорему, следствиями которой будут и формула для  $\gamma(\tilde{\Gamma})$ , и результат [5].

**Теорема.** Пусть заданы все элементы игры  $\tilde{\Gamma}$  и, кроме того, функция  $H : R^n \rightarrow R$ , неубывающая по каждой компоненте. Введем обозначения:

$$\gamma = \max_{\varphi_1 \in \Phi_1} H\left(\min_{(\varphi_2, y) \in M_1(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y), \dots, \min_{(\varphi_2, y) \in M_i(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y), \dots, \min_{(\varphi_2, y) \in M_n(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y), \dots\right),$$

где  $M_i(\varphi_1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  задаются равенствами (1),

$$\gamma_0 = \max_{((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)) \in T_0} H(F(x_1, y_1), \dots, F(x_i, y_i), \dots, F(x_n, y_n)),$$

$$T_0 = \{((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)) : \forall j = 1, 2, \dots, n (x_j, y_j) \stackrel{i}{\leq} (x_i, y_i), \forall y \in Y \exists x \in X \forall i = 1, 2, \dots, n (x, y) \stackrel{i}{\leq} (x_i, y_i)\}, \quad (2)$$

$$(x', y') \stackrel{i}{\leq} (x'', y'') \Leftrightarrow G_i(x', y') < G_i(x'', y'')$$

или

$$G_i(x', y') = G_i(x'', y''), F(x', y') \geq F(x'', y''), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда справедливо равенство  $\gamma = \gamma_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_1 \in \Phi_1$ . Определим  $(x_i, y_i)$  из условий

$$G_i(x_i, y_i) = \max_{(\psi_2, y)} G_i(\psi_2(\varphi_1(y)), y), F(x_i, y_i) = \min_{(\psi'_2, y') \in M_i(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Из данного определения вытекает, что  $((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)) \in T_0$ , и, следовательно, верно неравенство  $\gamma \leq \gamma_0$ .

Докажем противоположное неравенство. Пусть точки  $(x_i^0, y_i^0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , выбраны таким образом, что выполняются условия  $((x_1^0, y_1^0), \dots, (x_i^0, y_i^0), \dots, (x_n^0, y_n^0)) \in T_0$ ,

$$\begin{aligned} & H(F(x_1^0, y_1^0), \dots, F(x_i^0, y_i^0), \dots, F(x_n^0, y_n^0)) = \\ & = \max_{((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)) \in T_0} H(F(x_1, y_1), \dots, F(x_i, y_i), \dots, F(x_n, y_n)). \end{aligned}$$

Определим отображение  $\varphi_1^0: Y \rightarrow 2^X$  равенством

$$\varphi_1^0 = \begin{cases} x_i^0 & \text{если } y = y_i^0, \\ \varphi_1^-(y) & \text{если } y \neq y_i^0, \end{cases}$$

где функция  $\varphi_1^-$  удовлетворяет условию  $\forall y \in Y \forall i = 1, 2, \dots, n$ :  $(\varphi_1^-(y), y) \leq^i (x_i^0, y_i^0)$ .

Возможность построения такой функции вытекает из определения множества  $T_0$ . Из определений отображения  $\varphi_1^-$  и множества  $T_0$  вытекает, что при всех  $((x_1^0, y_1^0), \dots, (x_i^0, y_i^0), \dots, (x_n^0, y_n^0)) \in T_0$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & H\left(\min_{(\varphi_2, y) \in M_1(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y), \dots, \min_{(\varphi_2, y) \in M_i(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y), \dots, \right. \\ & \left. \min_{(\varphi_2, y) \in M_n(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y), \dots\right) \geq H(F(x_1, y_1), \dots, F(x_i, y_i), \dots, F(x_n, y_n)), \end{aligned}$$

что влечет за собой требуемое неравенство  $\gamma \geq \gamma_0$ .

Теорема доказана.

**Следствие.** Если положить

$$H(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^l p_k \cdot \min_{j_{k-1}+1 \leq i \leq j_k} z_i,$$

то получим равенство

$$\gamma(\tilde{\Gamma}) = \max_{((x_1^0, y_1^0), \dots, (x_i^0, y_i^0), \dots, (x_n^0, y_n^0)) \in T_0} \sum_{k=1}^l p_k \cdot F(x_i, y_i),$$

где множество  $T_0$  определено формулой (2), которая и является решением поставленной нами задачи. Результат [5] получается при  $l = n$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

2. Кукушкина Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.
3. Шолпо И. А. Об одном классе иерархических игр двух лиц // Вестн. Моск. ун-та. Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 4. С. 58–62.
4. Кононенко А. Ф. Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной исследовательностью ходов // ЖВМ и МФ. 1973. Т. 13. № 2. С. 311–317.
5. Кузнецова И. А. Иерархические игры со случайными факторами // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып.6. С. 77–79.
6. Кузнецова И. А. Иерархические игры с двузначным критерием эффективности // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 47–49.
7. Шолпо И. А. Исследование операций. Теория игр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983.

УДК 519.257

А. А. Кучер, Л. В. Бессонов

## О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НЕВЕРБАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ В КОНТЕКСТЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ДОСТОВЕРНОСТИ СООБЩАЕМОЙ ИНФОРМАЦИИ

Задача оценки достоверности получаемой информации является весьма актуальной в настоящее время для многих сфер деятельности, таких как политика, экономика, юридическая практика, медицина и другие. Целью настоящей статьи является оценка результатов эксперимента с применением некоторых математических способов оценки достоверности сообщаемой информации. Будем рассматривать метод, позволяющий оценить достоверность получаемой информации на основе бесконтактного анализа невербального поведения. Проведен эксперимент с целью сравнительного анализа данных, полученных при обсчете параметров невербальных признаков некоторыми способами, а именно вычисление:

1. Оценок среднего значения по сериям.
2. Оценки стандартного отклонения от среднего.
3. Оценки длины вектора.
4. Оценки дисперсии.

Опишем условия проведения эксперимента. В комнате лежит предмет, приглашается испытуемый, который либо берет этот предмет, либо нет. Эксперт, запускающий испытуемых лиц, осведомлен, брал испытуемый предмет или не брал. Назовём этот факт «эталоном». Далее проводится опрос испытуемых, направленный на определение, брал ли





испытуемый предмет. В ходе опроса наблюдаются некоторые невербальные показатели. Таким образом, имеем эмпирические данные изменения наблюдаемых невербальных показателей, а с другой стороны, известно, сообщал ли испытуемый правдивые факты. Обсчет результатов проводился без учёта знаний о том, брал ли испытуемый предмет на самом деле.

В качестве наблюдаемого невербального показателя была выбрана величина угла отклонения положения тела от нормали к плоскости пола (угол  $X$  – вперед, назад; угол  $Y$  – влево, угол  $Z$  – вправо). Этот показатель был выбран как один из невербальных показателей. Для чистоты эксперимента испытуемым не было сообщено, какой именно невербальный показатель будет измеряться. Однако было наложено ограничение на то, что испытуемые не пытаются намеренно противодействовать экспертизе (раскачиваться, принимать неестественные позы, вносить сознательные изменения в речь). Следует отметить, что для получения не зашумленных экспериментальных данных при проведении реальной экспертизы эксперт проводит предварительный анализ, на основании которого решает: какой невербальный показатель наименее зашумлен, а какие следует игнорировать.

Выбранный показатель измерялся при проведении структурированного интервью десяти испытуемых. Интервью было составлено из трех блоков вопросов различного характера: нейтральные, контрольные, проверочные. Цель вопросов интервью – выявление достоверности или ложности сообщаемой испытуемым информации.

Результаты обсчета показателей приведены в таб. 1 и 2. При этом для удобства восприятия в табл. 1 собраны данные лишь тех испытаний, где сообщаемая информация не соответствовала эталону, а в табл. 2 – тех испытаний, где сообщаемая информация соответствовала эталону.

Направление стрелок подобного вида «» означает, что сообщаемая информация недостоверна, «» – сообщаемая информация достоверна.

Проводя анализ по каждой группе вычислений, получим, что при обсчете параметров первым способом (вычисление оценок среднего значения параметров) сообщаемая информация достоверна. В то же время значение оценки стандартного отклонения показывает, что испытуемые сообщают недостоверную информацию. При вычислении оценок длины вектора и дисперсии можно заключить, что в результате эксперимента испытуемый давал правдивые ответы.

Сравнивая результаты обсчёта эмпирических данных с эталонным ответом, можно сделать вывод, что для данного эксперимента метод вы-

Таблица 1

Оценки стандартных отклонений от среднего			
	Угол X	Угол Y	Угол Z
Серия 1	3,7346	3,5487	5,4755
Серия 2	4,4587	4,7943	7,7852
Серия 3	5,1444	5,9078	7,4615
	1 ↗ 2 ↗ 3	1 ↗ 2 ↗ 3	1 ↘ 2 ↘ 3

	Оценка длины вектора	Оценка дисперсии
Серия 1	23,6256	20,5072
Серия 2	24,1161	32,7361
Серия 3	22,2949	27,8460
	1 ↗ 2 ↘ 3	1 ↗ 2 ↘ 3

числения оценок стандартного отклонения является наиболее информативным по сравнению с другими и дает наиболее верную оценку достоверности.

Таблица 2

Оценка среднего значения параметров по сериям			
	Угол X	Угол Y	Угол Z
Серия 1	9,1693	17,3148	8,2728
Серия 2	6,8466	16,6477	7,6684
Серия 3	6,6447	15,6323	7,0544
Общее	7,4980	16,5732	7,6845
	1 ↘ 2 ↘ 3	1 ↘ 2 ↘ 3	1 ↘ 2 ↗ 3

Оценка стандартного отклонения от среднего			
	Угол X	Угол Y	Угол Z
Серия 1	3.7512	3.3668	3.7483
Серия 2	4.8377	4.3341	5.7890
Серия 3	3.5048	6.3327	3.7775
	1 ↗ 2 ↘ 3	1 ↗ 2 ↗ 3	1 ↗ 2 ↘ 3

	Оценка длины вектора	Оценка дисперсии
Серия 1	21,9013	16,4322
Серия 2	20,7556	28,3170
Серия 3	18,5710	47,5389
	1 ↘ 2 ↘ 3	1 ↗ 2 ↗ 3

Анализируя полученные оценки, можно сделать вывод, что и в дан-

ном случае наиболее точный метод, позволяющий оценить достоверность сообщаемой информации, – метод расчета стандартного отклонения от среднего.

УДК 512.56, 512.571, 515.12

В. А. Молчанов

## О НЕСТАНДАРТНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РЕШЕТКИ РАВНОМЕРНЫХ СХОДИМОСТЕЙ

В работе рассматривается решетка равномерных сходимостей на алгебраической системе. С помощью методов нестандартного анализа показано, что решетка равномерных сходимостей на произвольном множестве изоморфна решетке эквивалентностей специального вида. Главный результат работы показывает, что решетка равномерных сходимостей на алгебраической системе, удовлетворяющей мальцевским условиям, изоморфно вкладывается в решетку перестановочных эквивалентностей и, следовательно, является модулярной решеткой.

В работе используются методы нестандартного анализа [1], общепринятая алгебраическая и топологическая терминология [2, 3, 4], отдельные результаты нестандартной топологии из [5, 6].

Как обычно [1], для простоты рассуждений основные множества  $X$  рассматриваемых пространств сходимости считаются подмножествами множества индивидов  $\mathbf{S}$ , над которым строится теоретико-множественная суперструктура  $V(\mathbf{S})$  [1]. Для таких множеств  $X$  определено нестандартное расширение  $*X$ , и любой фильтр  $F$  над  $X$  полностью определяется своей монадой  $\mu F = \bigcap \{ *A : A \in F \}$ . Монады ультрафильтров над множеством  $X$  разбивают расширение  $*X$  на классы эквивалентности  $\varepsilon_X$ . Подмножество  $M \subset *X$  называется *насыщенным*, если  $\varepsilon_X(M) \subset M$ , и монадой, если  $M = \mu F$  для некоторого фильтра  $F$  над множеством  $X$ .

При нестандартном подходе к топологии [5] произвольная сходимость [3] на множестве  $X$  определяется соответствием  $\rho \subset X \times *X$ , для которого все значения  $\rho(a) = \{ x \in *X : (a, x) \in \rho \}$  ( $a \in X$ ) являются насыщенными подмножествами  $*X$  и удовлетворяют условию  $a \in \rho(a)$ . Такие соответствия называются (*нестандартными*) *сходимостями* и на них распространяется топологическая терминология. Если сходимость на  $X$  – предтопология [3], то все  $\rho(a)$  ( $a \in X$ ) являются монадами, и если сходимость на  $X$  задается топологией открытых множеств, то для

каждого  $a \in X$  значение  $\rho(a)$  является монадой окрестностного фильтра точки  $a$ .

Согласно [4], равномерная структура на множестве  $X$  определяется как фильтр  $U$  над множеством  $X^2$ , для которого выполняются условия:  $(P_1)$   $\Delta_X \in U$ ;  $(P_2)$   $\delta \in U$  влечет  $\delta^{-1} \in U$ ;  $(P_3)$   $\delta \in U$  влечет  $\eta \circ \eta \subset \delta$  для некоторого  $\eta \in U$ . При нестандартном подходе фильтр  $U$  определяется монадой-эквивалентностью  $\xi = \mu U$  на расширении  ${}^*X$ . Такая эквивалентность  $\xi$  также называется *равномерностью (точнее, монадой-равномерностью)* на множестве  $X$  и на нее распространяется известная топологическая терминология. Так, равномерность  $\xi$  определяет на множестве  $X$  равномерную сходимост  $\rho$  по формуле  $\rho = \xi \circ \Delta_X$ . Известно [5], что такая сходимост  $\rho$  является регулярной топологией. Для равномеризации произвольных сходимостей на множестве  $X$  понятие равномерности естественно обобщается следующим образом.

*Равномерностью на множестве  $X$*  называется эквивалентность  $\xi$  на расширении  ${}^*X$ , насыщенная в  ${}^*X^2$ . Упорядоченная пара  $(X, \xi)$  называется *равномерным пространством сходимости*. В этом случае равномерность  $\xi$  также определяет на множестве  $X$  равномерную сходимост  $\rho$  по формуле  $\rho = \xi \circ \Delta_X$ . Мы не будем останавливаться на стандартной интерпретации этого определения равномерности, а отметим лишь, что ее легко получить с помощью [6, лемма 1.2] в форме свойств  $(P_1)$ – $(P_3)$ . Обозначим символом  $R(X)$  множество всех равномерностей на множестве  $X$ .

**Лемма.** *Для любого непустого множества  $X$  множество  $R(X)$  с отношением теоретико-множественного включения является полной решеткой, в которой для любых  $\xi_1, \xi_2 \in R(X)$  операции  $\wedge$  и  $\vee$  определяются по формулам:  $\xi_1 \wedge \xi_2 = \xi_1 \cap \xi_2$ ,  $\xi_1 \vee \xi_2 = \bigcap \{ \xi \in R(X) : \xi_1, \xi_2 \subset \xi \}$ .*

Следуя определению [4], отображение  $f$  равномерного пространства  $(X, \xi_X)$  в равномерное пространство  $(Y, \xi_Y)$  называется *равномерно непрерывным*, если  $f^2(\xi_X) \subset \xi_Y$ .

В работе рассматриваются алгебраические системы произвольной сигнатуры  $\Omega = \sum_n (\Omega_{F,n} + \Omega_{P,n})$ , где  $\Omega_{F,n}$  и  $\Omega_{P,n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) – множества символов  $n$ -местных операций и  $n$ -местных предикатов соответственно. Без нарушения общности можно считать, что  $\Omega \subset \mathbf{S}$ . Задание на основном множестве  $A \in V(\mathbf{S})$  алгебраической структуры сигнатуры  $\Omega$  равносильно определению такого отображения  $\chi$  множества  $\Omega$  в универсум  $V(\mathbf{S})$ , что для любого  $f \in \Omega_{F,n}$  образ  $\chi(f)$  есть  $n$ -местная операция на множестве  $A$  и для любого  $P \in \Omega_{P,n}$  образ  $\chi(P)$  –  $n$ -местное отношение на множестве  $A$ . В дальнейшем для сокращения записи обра-

зы  $\chi(f)$  и  $\chi(P)$  будем, по возможности, обозначать просто символами  $f$  и  $P$ .

Множество  $A$  с определенной на нем алгебраической структурой сигнатуры  $\Omega$  называется *алгебраической  $\Omega$ -системой* и обозначается символом  $A = (A, \Omega)$ . Пусть алгебраическая структура  $\Omega$ -системы  $A = (A, \Omega)$  определяется отображением  $\chi : \Omega \rightarrow V(\mathbf{S})$ . В силу произвольности множества индивидов  $\mathbf{S}$  стандартного универсума  $V(\mathbf{S})$  можно считать, что  $A \subset \mathbf{S}$  и отображение  $\chi$  являются элементом  $V(\mathbf{S})$ . Тогда при нестандартном расширении этого универсума (с помощью отображения  $*$ ) множество  $A$  расширяется до множества  $*A$  и отображение  $\chi$  – до отображения  $*\chi : *\Omega \rightarrow *V(\mathbf{S})$  так, что для каждого  $P \in \Omega_{P,n}$  образ  $*\chi(P)$  является  $n$ -местным отношением на множестве  $*A$  и для каждого  $f \in \Omega_{F,n}$  образ  $*\chi(f)$  является отображением множеств  $*(A^n)$  в  $*A$ , т.е.  $n$ -местной алгебраической операцией на множестве  $*A$ . Значит, ограничение отображения  $*\chi(f)$  на множестве  $\Omega$  задает на  $*A$  алгебраическую структуру сигнатуры  $\Omega$ . Такую нестандартную алгебраическую  $\Omega$ -систему условимся обозначать символом  $*A = (*A, \Omega)$ . По принципу переноса [1] алгебраические системы  $A$  и  $*A$  элементарно эквивалентны.

Предположим, что на основном множестве  $A$  алгебраической  $\Omega$ -системы  $A$  задана некоторая равномерность  $\xi$ . Тогда согласованность этой топологической структуры с алгебраической структурой системы  $A$  означает, что для каждого  $f \in \Omega_{F,n}$  равномерно непрерывна алгебраическая операция  $\chi(f)$  и для каждого  $P \in \Omega_{P,n}$  отношение  $\chi(P)$  замкнуто в пространстве  $A^n$ . В этом случае алгебраическая система  $A$  называется *равномерной алгебраической  $\Omega$ -системой* и обозначается символом  $A = (A, \Omega, \xi)$ .

Для алгебраической  $\Omega$ -системы  $A = (A, \Omega)$  обозначим символом  $R(A)$  множество всех равномерностей на множестве  $A$ , согласованных с алгебраической структурой системы  $A$ . Легко видеть, что с отношением теоретико-множественного включения  $R(A)$  является полной решеткой, в которой для любых  $\xi_1, \xi_2 \in R(A)$  операции  $\wedge$  и  $\vee$  определяются по формулам:  $\xi_1 \wedge \xi_2 = \xi_1 \cap \xi_2$ ,  $\xi_1 \vee \xi_2 = \bigcap \{ \xi \in R(A) : \xi_1, \xi_2 \subset \xi \}$ .

Напомним [2], что алгебраическая  $\Omega$ -система  $A = (A, \Omega)$  удовлетворяет Мальцевским условиям, если в сигнатуре  $\Omega$  найдется такой терм  $p(x, y, z)$ , что для любых  $a, b \in A$  выполняются равенства:  $p(a, a, b) = b$ ,  $p(a, b, b) = a$ . Например, если сигнатура алгебраической  $\Omega$ -системы  $A = (A, \Omega)$  содержит сигнатуру группы  $\Omega_{gr} = \{ \cdot, -1 \}$ , то такая система  $A$  удовлетворяет Мальцевским условиям с термом  $p(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$ . Если же сигнатура алгебраической  $\Omega$ -системы  $A = (A, \Omega)$  содержит сигнатуру квазигруппы  $\Omega_{qgr} = \{ /, \cdot, \backslash \}$ , то такая система  $A$  удовлетворяет

Мальцевским условиям с термом  $p(x, y, z) = (x/(y \setminus y)) \cdot (y \setminus z)$ .

Символом  $\text{Eq}A$  обозначим решетку всех эквивалентностей на множестве  $A$ . Эквивалентности  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \text{Eq}A$  называются *перестановочными*, если выполняется равенство  $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$ .

**Теорема.** *Если алгебраическая  $\Omega$ -система  $A = (A, \Omega)$  удовлетворяет Мальцевским условиям, то решетка ее равномерных сходимостей  $R(A)$  изоморфна подрешетке решетки  $\text{Eq}^*A$ , состоящей из перестановочных эквивалентностей. В частности, такая решетка  $R(A)$  модулярна.*

**Следствие 1.** *Если алгебраическая  $\Omega$ -система  $A = (A, \Omega)$  удовлетворяет Мальцевским условиям, то решетка ее равномерных топологий  $RT(A)$  изоморфна подрешетке решетки  $\text{Eq}^*A$ , состоящей из перестановочных эквивалентностей. В частности, такая решетка  $RT(A)$  модулярна.*

**Следствие 2.** *Если алгебраическая  $\Omega$ -система  $A = (A, \Omega)$  удовлетворяет Мальцевским условиям, то решетка ее бикомпактных топологий  $BCT(A)$  изоморфна подрешетке решетки  $\text{Eq}^*A$ , состоящей из перестановочных эквивалентностей. В частности, такая решетка  $BCT(A)$  модулярна.*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Альбеверио С., Фенстад Й., Хезг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.
2. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
3. Fischer H. R. Limesraum // Math. Ann. 1959. Vol. 137. P. 269–303.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
5. Молчанов В. А. О применении повторных нестандартных расширений в топологии // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 3. С. 64–71.
6. Молчанов В. А. Нестандартные сходимости в пространствах отображений // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 141–153.

УДК 517.51

К. Б. Мосина

### ПРИНЦИП ДИНИ—ЛИПШИЦА ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА ЛАГРАНЖА—ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} U'' + [\lambda - q]U = 0, \\ U'(0) - hU(0) = 0, \\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $h$  и  $H$  – произвольные действительные числа (причем допускается возможность  $h, H = \infty$ ), а потенциал  $q$  ограниченной вариации на отрезке  $[0, \pi]$  исчезает в нуле и не обязательно непрерывен.

Введем оператор Лагранжа–Штурма–Лиувилля:

$$L_n^{SL}(f, x) = \sum_{k=1}^n \frac{u_n(x)}{u'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}), \quad (2)$$

где  $u_n(x)$  – собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (1),  $x_{k,n}$  – нули  $u_n(x)$ .

**Лемма 1.** *Существует константа  $C$ , зависящая только от  $h, H$  в краевых условиях и потенциала  $q$  ограниченной вариации задачи Штурма–Лиувилля, такая, что для всех  $x \in [0, \pi]$  и  $n \in \mathbb{N}$  фундаментальные полиномы Лагранжа–Штурма–Лиувилля удовлетворяют неравенству*

$$|l_{k,n}^{SL}(x)| = \left| \frac{u_n(x)}{u'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})} \right| \leq C. \quad (3)$$

**Доказательство.** Если  $x = x_{k,n}$ , то  $|l_{k,n}^{SL}(x_{k,n})| = 1$ . Поэтому считаем, что  $x \neq x_{k,n}$ . Пусть сначала  $0 < |x - x_{k,n}| \leq \frac{1}{n}$ , тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и асимптотическим формулам для  $u_n(x)$  и  $u'_n(x_{k,n})$  (см. [1, теорема 1, с. 73–76])

$$\begin{aligned} |l_{k,n}^{SL}(x)| &\leq \left| \frac{u'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n}) + u''_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})^2/2}{u'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})} \right| \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \frac{|u''_n(\xi_{k,n})|}{|u'_n(x_{k,n})|} |x - x_{k,n}| = 1 + \frac{O(n^2)}{n + O(n^{-1})} \cdot \frac{1}{n} \leq C_1. \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть случай  $|x - x_{k,n}| \geq \frac{1}{n}$ . В силу асимптотических формул для  $u_n(x)$  и  $u'_n(x_{k,n})$  (см. [1, теорема 1, с. 73–76])

$$|l_{k,n}^{SL}(x)| \leq n \left| \frac{u_n(x)}{u'_n(x_{k,n})} \right| \leq C_2.$$

Выбирая  $C = \max(C_1, C_2)$ , получим (3).

Лемма 1 доказана.

Обозначим через  $C_0[0, \pi]$  пространство непрерывных исчезающих в концах отрезка функций,  $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$ .

**Лемма 2.** *Если гладкость функции  $f \in C_0[0, \pi]$  допускает выбор последовательности  $\nu(n)$ , удовлетворяющей требованиям*

$$\nu(n) = o(1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} = \infty,$$

$$\varepsilon(n) = \exp \left\{ -\frac{\nu(n)}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} \right\},$$

и такой, что  $k_2 \leq k_1$  (тогда в отрезок  $[x - \varepsilon(n), x + \varepsilon(n)]$  будет попадать не более одного узла  $x_{k,n}$ ), или такой, что в отрезок  $[x - \varepsilon(n), x + \varepsilon(n)]$  будет попадать не более  $K(n) = o(\frac{1}{\omega(f, \frac{2\pi}{n})})$  узлов  $x_{k,n}$ , то это означает возможность равномерной на отрезке  $[0, \pi]$  аппроксимации функции  $f$  с помощью интерполяционных процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля. Где  $k_1, k_2$  – номера наименьшего и наибольшего из узлов, попадающих в отрезок  $[x - \varepsilon(n), x + \varepsilon(n)]$  :  $x_{k_1-1,n} \leq x - \varepsilon(n) < x_{k_1,n}, x_{k_2,n} < x + \varepsilon(n) \leq x_{k_2+1,n}$ .

**Доказательство.** Действительно, в силу равномерной непрерывности функции  $f$ , асимптотических формул для нулей собственных функций (см. [1, теорема 1, с. 73–76]) и леммы 1 имеем:

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right| \leq \frac{CK(n)}{2} \omega \left( f, \frac{2\pi}{n} \right).$$

В силу предложения 9 (см. [2, с. 86–99]) имеем:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - L_n^{SL}(f, x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - L_n^{SL}(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x)| + \frac{CK}{2} \omega(f, \frac{2\pi}{n}) = 0.$$

Лемма 2 доказана.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Если функция  $f \in C_0[0, \pi]$  принадлежит классу Дини-Липшица, т.е. выполняется соотношение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(f, \frac{1}{n}) \ln n = 0$ , то значения интерполяционного процесса (2) сходятся к  $f$  равномерно на  $[0, \pi]$ .

**Доказательство.** Взяв в соотношении

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \exp \left\{ -\frac{\nu(n)}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} \right\} = \\ &= \nu(n) = \omega(f, \frac{\pi}{n}) \ln \frac{2n}{\pi}, \end{aligned}$$



воспользуемся соответственно асимптотическими формулами для нулей собственных функций (см. [1, теорема 1, с. 73–76]) и леммой [3].

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Турашвили К. Б.* Асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений задачи Штурма—Лиувилля // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 14.

2. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отчетов Уиттекера—Котельникова—Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Т. 200, №11. С. 61–108.

УДК 519.7

**В. Е. Новиков**

### НЕЙТРАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В АЛГЕБРЕ КОНТЕКСТОВ

Предметом работы является дальнейшее исследование алгебры контекстов. Работа представляет собой естественное продолжение предыдущих исследований автора [1]. Основной результат работы определяет критерий нейтральности элемента относительно операций алгебры контекстов.

Восстановим необходимые определения. Будем говорить, что задан *формальный полиатрибутный контекст*  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ , если заданы  $G$  – непустое конечное множество объектов,  $(M_i)$  – семейство непустых конечных множеств атрибутов с множеством индексов  $1 \leq i \leq n$ ,  $\rho \subseteq G \times M_1 \times \dots \times M_n$  – некоторое  $(n + 1)$ -арное отношение. Под словом *контекст* далее будем понимать полиатрибутный контекст. Допустим  $(g, t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Это значит, что объект  $g$  по атрибуту 1 имеет значение  $t_1$ , по атрибуту 2 – значение  $t_2$ , по системе атрибутов  $(1, 2)$  – значение  $(t_1, t_2)$  и т. д. Мы полагаем, что всякий объект по каждому атрибуту имеет не менее одного значения, т. е. отношение  $\rho$  является полным относительно  $G$ . Если любой объект по каждому атрибуту имеет точно одно значение, то такой контекст называется *однозначным*.

*Концептом* в контексте  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$  по системе атрибутов  $\bar{j}_k$  называем стабильное множество  $X \subset G$  объектов, которые имеют по системе атрибутов  $\bar{j}_k$  общее множество значений  $Y \subset M_{\bar{j}_k}$ ,  $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ . Стабильное в том смысле, что в  $G$  нет других объектов, имеющих те же значения по системе атрибутов  $\bar{j}_k$ .

В [2] показано, что множество концептов однозначного контекста образует решётку, там же представлены основные характеристики этой

решётки. Если  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$  – однозначный контекст, то обозначаем  $L(\mathbb{K})$  как решётка у его концептов.

Соединение  $\mathbb{K}_1 \triangleright \triangleleft \mathbb{K}_2$  контекстов  $\mathbb{K}_1 = (G, (A_i), \rho)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и  $\mathbb{K}_2 = (G, (B_j), \varsigma)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , определяется равенством

$$\mathbb{K}_1 \triangleright \triangleleft \mathbb{K}_2 = (G, (A_i, B_j), \rho \triangleright \triangleleft \varsigma),$$

где  $\rho \triangleright \triangleleft \varsigma = \bigcup_{g \in G} \sigma_{\{g\}}(\rho) \times s_{\bar{m}}\langle g \rangle$ . Таким образом, соединение контекстов определено для контекстов с одним и тем же множеством объектов и равносильно тому, что к одному контексту добавляются множества атрибутов другого контекста, сохраняя значения атрибутов каждого объекта из второго контекста.

Объединение  $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$  контекстов  $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$  и  $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$  определяется равенством

$$\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2 = (G_1 \cup G_2, (M_i), \rho \cup \varsigma),$$

где  $G_1 \cup G_2$  и  $\rho \cup \varsigma$  являются теоретико-множественными объединениями.

Пусть  $X_1$  – концепт контекста  $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$  по системе атрибутов  $\bar{j}_k$  и  $X_2$  – концепт контекста  $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$  по той же системе атрибутов. Будем говорить, что концепт  $X_1$  эквивалентен концепту  $X_2$ , если  $\widehat{\rho}_{\bar{j}_k}(X_1) = \widehat{\varsigma}_{\bar{j}_k}(X_2)$ . Два однозначных контекста  $\mathbb{K}_1$  и  $\mathbb{K}_2$  будем считать *равными*, если все их концепты попарно эквивалентны друг другу. Очевидно, в этом случае решётки  $L(\mathbb{K}_1)$  и  $L(\mathbb{K}_2)$  будут изоморфными, причём изоморфизм определится указанным отношением эквивалентности. Однако обратное не верно, т.е. если решётки  $L(\mathbb{K}_1)$  и  $L(\mathbb{K}_2)$  изоморфны, то из этого не следует, что контексты  $\mathbb{K}_1$  и  $\mathbb{K}_2$  равны.

В работе [1] показано, что множество однозначных контекстов замкнуто относительно операции соединения, и выделено подмножество множества однозначных контекстов, замкнутое относительно объединения. А именно это множество тех однозначных контекстов, в которых один и тот же объект в разных контекстах по одному и тому же атрибуту не может иметь различных значений. Обозначим это множество однозначных контекстов  $\mathfrak{K}$ , тогда  $(\mathfrak{K}, \cup, \triangleright \triangleleft)$  – алгебра однозначных контекстов.

Поскольку в определении объединения контекстов используется только теоретико-множественное объединение, то все свойства теоретико-множественного объединения сохраняются и для операции объединения контекстов. Операция соединения контекстов также является коммутативной и ассоциативной.

Если  $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1$ , то  $\mathbb{K}_2$  – единица элемента  $\mathbb{K}_1$  относительно операции  $\cup$ . Если  $\mathbb{K}_1 \triangleright \triangleleft \mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1$ , то  $\mathbb{K}_2$  – единица элемента  $\mathbb{K}_1$  относительно операции  $\triangleright \triangleleft$ . Следующие утверждения определяют условия нейтральности элемента относительно операций соединения и объединения.

**Теорема 1.** *Справедливы следующие утверждения :*

1)  $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$  является единицей контекста  $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$  относительно операции  $\cup$  тогда, и только тогда, когда для любого  $g_2 \in G_2$  существует  $g_1 \in G_1$  такой, что  $\widehat{\rho}_{\bar{n}}(\{g_1\}) = \widehat{\varsigma}_{\bar{n}}(\{g_2\})$ ;

2) однозначный контекст  $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$  является единицей однозначного контекста  $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$  относительно операции  $\cup$  тогда и только тогда, когда решётка  $L(\mathbb{K}_2)$  является подрешёткой решётки  $L(\mathbb{K}_1)$ .

**Теорема 2.** *Контекст  $\mathbb{K}_2 = (G, (B_j), \varsigma)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , является единицей контекста  $\mathbb{K}_1 = (G, (A_i), \rho)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , относительно операции  $\triangleright \triangleleft$  тогда и только тогда, когда для любого  $j$  существует  $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$  так, что в контексте  $\mathbb{K}_1 \triangleright \triangleleft \mathbb{K}_2$  отношение  $\rho \triangleright \triangleleft \varsigma$  имеет  $B$ -зависимость  $A_{\bar{i}_s} \rightarrow B_j$ .*

Следовательно, при объединении контекста  $\mathbb{K}_1$  с нейтральным элементом некоторые атомы решётки как бы раздуваются, наполняясь объектами из нейтрального контекста. А в случае соединения с нейтральным элементом раздуваются классы эквивалентных систем атрибутов по отношениям  $B$ -зависимости. Поэтому, если контекст  $\mathbb{K}_1$  минимальный [3], а  $\mathbb{K}_2$  – его единица относительно  $\cup$  или  $\triangleright \triangleleft$ , то после минимизации соответственно контекстов  $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$  или  $\mathbb{K}_1 \triangleright \triangleleft \mathbb{K}_2$  мы снова получим контекст  $\mathbb{K}_1$  с точностью до обозначения объектов или атрибутов.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков В. Е. Некоторые алгебраические операции над формальными контекстами // Математика. Механика: сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 73–76.

2. Новиков В. Е. Решётка концептов в однозначном контексте // Математика. Механика : сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 53–56.

3. Новиков В. Е. Минимизация однозначного контекста // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. центр «Наука», 2012. С. 233–236.

## О НАИМЕНЬШЕМ ПО ОБЪЁМУ ШАРОВОМ СЛОЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ГРАНИЦУ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

1. Пусть  $D$  – заданное выпуклое тело из конечномерного действительного пространства  $\mathbb{R}^P$ , а  $n(x)$  – некоторая норма на  $\mathbb{R}^P$ . Рассмотрим задачу

$$\varkappa(x) \equiv R^p(x) - \varrho^p(x) \rightarrow \min_{x \in D}. \quad (1)$$

Здесь функции

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y), \quad \varrho(x) = \min_{y \in \Omega} n(x - y),$$

где  $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$ , выражают соответственно радиус наименьшего шара нормы  $n(\cdot)$  с центром в точке  $x$ , содержащем тело  $D$ , и, если  $x \in D$ , радиус наибольшего шара, содержащегося в  $D$ .

Объём  $p$ -мерного шара радиуса  $r$  нормы  $n(\cdot)$  можно выразить в виде  $\gamma r^p$ , где множитель  $\gamma$  зависит от выбранной нормы, но не зависит от  $r$ . Поэтому задача (1) требует построения наименьшего по объёму шарового слоя, содержащего границу тела  $D$ . Близкой к ней по постановке является давно известная (см., например [1, 2]) задача о минимальном «по толщине» шаровом слое, содержащем границу выпуклого тела  $D$

$$R(x) - \varrho(x) \rightarrow \min_{x \in D}. \quad (2)$$

Известно [3], что функция  $R(x)$  является выпуклой на всем пространстве  $\mathbb{R}^p$  функцией, а функция  $\varrho(x)$  является вогнутой на  $D$ . Поэтому целевая функция задачи (2) является выпуклой на  $D$  и сама задача (2) является задачей выпуклого программирования. В то же время целевая функция  $\varkappa(x)$  задачи (1), как показывают примеры, может быть не выпуклой и не вогнутой, и решения задач (1) и (2) могут быть различными.

Цель статьи – исследовать дифференциальные свойства функции  $\varkappa(x)$  и получить необходимое условие решения задачи (1).

2. Функция  $R(x)$ , как и любая выпуклая конечная функция, дифференцируема по любому направлению  $g \in \mathbb{R}^p$  в любой точке  $x \in \mathbb{R}^p$ , причём [4] справедлива формула

$$\frac{\partial R(x)}{\partial g} \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [R(x + \alpha g) - R(x)] = \max_{v \in \underline{\partial R(x)}} \langle v, g \rangle, \quad (3)$$

где  $\underline{\partial R(x)}$  – субдифференциал функции  $R(x)$  в точке  $x$ .

Известно также [3], что функция  $\varrho(x)$  дифференцируема по любым направлениям всюду на  $\mathbb{R}^p$  и при этом для внутренних точек тела  $D$ , то есть для  $x \in \text{int}D$  справедлива формула

$$\frac{\partial \varrho(x)}{\partial g} = \min_{w \in \underline{\partial \varrho(x)}} \langle w, g \rangle, \quad (4)$$

где  $\overline{\partial \varrho(x)}$  – супердифференциал вогнутой на  $D$  функции  $\varrho(x)$ .

Отметим, что формулы для  $\underline{\partial R(x)}$  и  $\overline{\partial \varrho(x)}$ , выраженные через характеристики тела  $D$  и используемой нормы  $n(\cdot)$ , известны [3].

**Теорема 1.** *Функция  $\varkappa(x)$  дифференцируема по любому направлению  $g \in \mathbb{R}^p$  всюду на  $\mathbb{R}^p$ , причём*

$$\frac{\partial \varkappa(x)}{\partial g} = \max_{v \in \underline{\partial \varkappa(x)}} \langle v, g \rangle, \quad (5)$$

где

$$\underline{\partial \varkappa(x)} = \begin{cases} p(R^{p-1}(x)\underline{\partial R(x)} - \varrho^{p-1}(x)\overline{\partial \varrho(x)}), & \text{если } x \in \text{int}D, \\ pR^{p-1}(x)\underline{\partial R(x)}, & \text{если } x \notin \text{int}D. \end{cases} \quad (6)$$

**Доказательство.** В силу (3) имеет место асимптотическая формула

$$R(x + \alpha g) = R(x) + \alpha \frac{\partial R(x)}{\partial g} + o_1(\alpha, g),$$

где  $\frac{o_1(\alpha, g)}{\alpha} \rightarrow 0$  при  $\alpha \downarrow 0$ . Отсюда получаем:

$$R^p(x + \alpha g) = R^p(x) + \alpha p R^{p-1}(x) \frac{\partial R(x)}{\partial g} + o_2(\alpha, g),$$

где  $\frac{o_2(\alpha, g)}{\alpha} \rightarrow 0$  при  $\alpha \downarrow 0$ . А следовательно, используя (3), получаем формулу

$$\frac{\partial R^p(x)}{\partial g} = \max_{v \in pR^{p-1}(x)\underline{\partial R(x)}} \langle v, g \rangle. \quad (7)$$

Нетрудно также сделать вывод о том, что функция  $\varrho(x)$  дифференцируема всюду по любому направлению [4]. При этом, поскольку  $\varrho(x) = 0$  для точек  $x \notin \text{int}D$ , то в этих точках её производная по направлениям равна нулю. А в точках  $x \in \text{int}D$ , как это вытекает из (4), имеет место формула

$$\frac{\partial \varrho^p(x)}{\partial g} = \min_{w \in p\varrho^{p-1}(x)\overline{\partial \varrho(x)}} \langle w, g \rangle \quad (8)$$

В итоге, поскольку

$$\frac{\partial \varkappa(x)}{\partial g} = \frac{\partial R^p(x)}{\partial g} - \frac{\partial \varrho^p(x)}{\partial g},$$

из (7) – (8) получаем (5) – (6).

Теорема доказана.

**Замечание.** Теорема 1 говорит о том, что функция  $\varkappa(x)$  субдифференцируема, в смысле определения В. Ф. Демьянова – А. М. Рубинова [5], всюду на  $\mathbb{R}^p$ .

Используя необходимое условие минимума субдифференцируемой функции на выпуклом множестве [5, гл. 5], получаем в качестве следствия теоремы 1 утверждение.

**Теорема 2.** Если точка  $x^o \in D$  доставляет минимальное значение функции  $\varkappa(x)$  в задаче (1), то справедливо соотношение

$$\underline{\partial \varkappa(x^o)} \cap K^+(x^o, D) \neq \emptyset,$$

где  $K^+(x, D)$  – сопряжение конуса возможных направлений множества  $D$  в точке  $x$ , а  $\underline{\partial \varkappa(x)}$  определяется формулой (6).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00238, 13-01-00175).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.
2. Дудов С. И. О оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем // Изв. Саратов. ун-та. 2001. Т. 1. 2. С. 64–75.
3. Дудов С. И., Златорунская И. В. Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, №10. С. 13–38.
4. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
5. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

УДК 519.95

С. И. Поликарпов

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АВТОМАТА РЯДОМ ФУРЬЕ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

В данной статье предлагается новый способ задания математических моделей конечных дискретных динамических систем на основе представления законов их функционирования конечными рядами Фурье. Такие

модели предназначены для описания объектов управления и технического диагностирования.

Основными формами задания конечных дискретных динамических систем являются определения конечных автоматов таблицами, диаграммами Мура, системами логических уравнений. Такие задания основываются на рекурсии: последовательно определяются такты функционирования автомата и правила рекурсивного совмещения тактов в процессе функционирования.

Указанными способами задания автоматов явно выделяются только начальные фрагменты возможных вариантов функционирования. Для того чтобы заменить рекурсивное задание законов функционирования автомата их явным заданием, в работе [1] В. А. Твердохлебовым введено понятие геометрического образа автомата в специальной дискретной словарной геометрии и исследованы свойства геометрических образов.

В данной статье на основе конечных рядов Фурье исследуются периодические геометрические образы конечных детерминированных автоматов. Для этого элементы автоматного отображения  $- p_s : X^*$  – соответствующего инициальному автомату  $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$  – систематизируются в геометрический образ по предложенным в работе [1] правилам. Представление периодического геометрического образа в ряд Фурье осуществляется на основе разложения его периода. Предложена структура конечного автомата, получаемая специфической композицией базовых автоматов, соответствующих компонентам разложения в ряд Фурье [2].

Для этого по множеству точек периода геометрического образа  $\{(x_1, y_1); \dots (x_n, y_n)\}$  строится конечный ряд Фурье [3] по ортогональной на конечном множестве точек системе функций  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . Полученный ряд Фурье

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$$

полагается математической моделью автомата  $(A, s_0)$ , явно задающего все варианты его возможного функционирования. Каждой функции  $\varphi_i$  сопоставляется базовый автомат  $A_i$ , а автомату  $A$  соответствует композиция базовых автоматов (см. рисунок).

Каждый базовый автомат  $i$ , соответствует функции  $\varphi_i$ , график которой рассматривается как геометрический образ автомата  $A_i$ .

В геометрическом образе автомата функциональная зависимость представлена как автоматное отображение, то есть отображение с изменяющимся параметром (изменяющимся состоянием). Это позволяет функцию  $\varphi_i$  преобразовывать в автомат  $A_i$  с конкретным множеством

состояний. Следовательно, в рассматриваемой композиции все компоненты – автоматы и результат композиции – автомат.

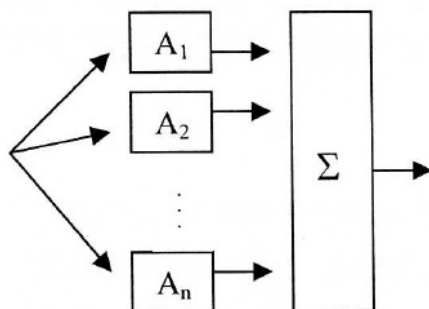


Схема композиции базовых автоматов, соответствующей автомату  $A$

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Твердохлебов В. А.* Основные свойства геометрических образов автоматов // Проблемы точной механики и управления: сб. науч. трудов ИПТМУ РАН. Саратов, 2004.
2. *Поликарпов С. И.* Представление автомата рядом Фурье в задачах диагностирования и управления // Информационные технологии в науке, производстве и социальной сфере: сб. науч. трудов. Саратов, 2005.
3. *Хемминг Р. В.* Численные методы. М., 1972.

УДК 514.133

**Л. Н. Ромакина**

### О ПЛОЩАДИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА САККЕРИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Многовековые попытки доказательства пятого постулата Евклида обогатили науку и новыми методами, и новыми объектами исследования. Одним из таких объектов является четырехугольник Саккери (или четырехугольник Хайяма) – двупрямоугольник с равными боковыми ребрами, с помощью которого была опровергнута «гипотеза тупого угла» [1]. На гиперболической плоскости  $\widehat{H}$  положительной кривизны [2] можно построить аналогичные четырехугольники, причем различных типов. В работе докажем теорему о площади эллиптического четырехугольника Саккери плоскости  $\widehat{H}$ .

Пусть на плоскости  $\widehat{H}$   $A, B$  – точки эллиптической прямой  $m$ ,  $A_0, B_0$  – ортогональные проекции точек  $A, B$  на эллиптическую прямую  $l$ , отличную от прямой  $m$ . Простую замкнутую двустороннюю ломаную  $AB B_0 A_0$



с ограниченной ею не содержащей точек абсолюта областью плоскости  $\widehat{H}$  назовем *эллиптическим двупрямоугольником*. Звенья ломаной, отрезки, циклически соединяющие точки  $A, B, B_0, A_0$ , назовем *ребрами* двупрямоугольника  $ABV_0A_0$ . Ребро  $A_0B_0$ , ортогональное смежным с ним ребрам, назовем *основанием* двупрямоугольника  $ABV_0A_0$ . Ребра, смежные с основанием, назовем *боковыми ребрами* данного двупрямоугольника.

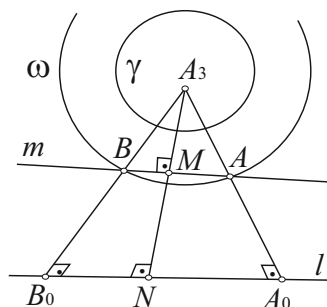
Эллиптический двупрямоугольник с равными боковыми ребрами назовем *эллиптическим четырехугольником Саккери* плоскости  $\widehat{H}$ .

**Теорема.** На плоскости  $\widehat{H}$  действительного радиуса кривизны  $\rho$  площадь  $S$  эллиптического четырехугольника Саккери с основанием длиной  $a$  и боковыми ребрами длиной  $h$  может быть вычислена по формуле

$$S = \rho^2 \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2\rho} \operatorname{sh} \frac{h}{\rho}}{1 - \operatorname{tg} \frac{a}{2\rho} \operatorname{sh} \frac{h}{\rho}}. \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть  $ABV_0A_0$  – эллиптический четырехугольник Саккери с основанием  $A_0B_0$  на прямой  $l$  (рисунок). По определению и условиям теоремы  $AA_0 \perp A_0B_0$ ,  $BB_0 \perp A_0B_0$ ,  $|AA_0| = |BB_0| = h$ ,  $|A_0B_0| = a$ . Обозначим  $N$  ( $M$ ) – середину основания  $A_0B_0$  (ребра  $AB$  на прямой  $m$ ). Прямая  $MN$  – общий серединный перпендикуляр ребер  $A_0B_0, AB$ . Четырехугольники  $AMNA_0, BMNB_0$ , составляющие четырехугольник  $ABV_0A_0$ , симметричны относительно прямой  $MN$ , следовательно, имеют равные площади.

Для вычисления площади  $S_0$  четырехугольника  $AMNA_0$  используем гиперциклическую ортогональную систему координат, введенную в работе [2]. Точки  $A, B$  принадлежат гиперциклу  $\omega(l, h)$  с базой  $l$  и высотой  $h$  (на рисунке изображена часть гиперцикла  $\omega$  и абсолютная овальная линия  $\gamma$ ).



Эллиптический четырехугольник Саккери

Выберем канонический репер  $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$  первого типа плоскости  $\widehat{H}$  так, чтобы его вершина  $A_3$  совпала с центром гиперцикла  $\omega$ , то-

гда первые две вершины попадут на прямую  $l$ . Вершину  $A_1$  совместим с точкой  $N$ . Точке  $A_0$  на прямой  $l$  можно присвоить координаты  $(t : 1 : 0)$ . Единичную точку  $E$  репера расположим так, чтобы ее ортогональная проекция  $E_{12}$  на прямую  $l$  принадлежала отрезку  $A_1A_2$ , содержащему точку  $A_0$ . При таком расположении точки  $E$  выполняется неравенство  $(A_1A_2A_0E_{12}) > 0$ . Записывая указанное неравенство в координатах, получим  $t > 0$ .

Поскольку  $|A_0N| = a/2 < \pi/2$ , то по второй формуле (8) работы [2]

$$\cos \frac{a}{2\rho} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Откуда

$$t = \operatorname{ctg} \frac{a}{2\rho}. \quad (2)$$

Точка  $A$  принадлежит прямой  $A_0A_3$ , поэтому ее можно задать координатами  $(t : 1 : c)$ ,  $c > 0$ . Поскольку  $|AA_0| = h$ , по первой формуле (8) [1]

$$\operatorname{ch} \frac{h}{\rho} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + 1 - c^2}}.$$

Откуда с учетом выражения (2) находим

$$c = \frac{\operatorname{th} \frac{h}{\rho}}{\sin \frac{a}{2\rho}}. \quad (3)$$

Прямая  $m = AB$  ортогональна прямой  $NA_3$ , значит  $A_2 \in m$ . В репере  $R^*$  прямую  $m$  при условии (3) можно задать координатами  $(\theta : 0 : -1)$ , где

$$\theta = \frac{\operatorname{th} \frac{h}{\rho}}{\cos \frac{a}{2\rho}}. \quad (4)$$

Прямую  $NA_3$  ( $l$ ) примем за координатную ось  $Ou$  ( $Ov$ ) гиперциклической системы координат  $C_h$  и по формулам (25) [2] запишем уравнение прямой  $m$ :  $\theta \cos u \operatorname{ch} v = \operatorname{sh} v$ . В системе координат  $C_h$  область  $D$  изменения параметров  $u$ ,  $v$ , соответствующая четырехугольнику  $AMNA_0$ , задана неравенствами:

$$0 \leq u \leq u_0 = \frac{a}{2\rho}, \quad 0 \leq v \leq v_0 = \operatorname{th}^{-1}(\theta \cos u),$$

где значение  $\theta$  определено выражением (4), значение  $v_0$  – уравнением прямой  $m$ ,  $y = \operatorname{th}^{-1}(x)$  – функция, обратная к функции  $y = \operatorname{th}(x)$ .

По формуле (32) [2] находим площадь  $S_0$  четырехугольника  $AMNA_0$ :

$$S_0 = \rho^2 \int \int_D \operatorname{ch} v \, du \, dv = -i\rho^2 \operatorname{arctg} \left( i \operatorname{th} \frac{a}{2\rho} \operatorname{sh} \frac{h}{\rho} \right),$$

$$S_0 = \frac{\rho^2}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2\rho} \operatorname{sh} \frac{h}{\rho}}{1 - \operatorname{tg} \frac{a}{2\rho} \operatorname{sh} \frac{h}{\rho}}.$$

Площадь  $S$  четырехугольника Саккери  $ABV_0A_0$  вдвое больше площади четырехугольника  $AMNA_0$ . Таким образом, справедлива формула (1).

Длина  $b$  противоположного основанию ребра четырехугольника Саккери может быть выражена (см. [3]) через длину  $a$  основания и длину  $h$  бокового ребра по формуле

$$\cos \frac{b}{\rho} = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2\rho} \operatorname{ch}^2 \frac{h}{\rho}. \quad (5)$$

По формулам (1), (5) найдем формулу выражения площади  $S$  эллиптического четырехугольника Саккери плоскости  $\widehat{H}$  через длины его боковых ребер:

$$S = \rho^2 \ln \frac{\cos \frac{a}{2\rho} + \sqrt{\cos \frac{a}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho}}}{\cos \frac{a}{2\rho} - \sqrt{\cos \frac{a}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho}}}.$$

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Погорелов А. В.* Основания геометрии. 3-е изд. М.: Наука, 1968.
2. *Ромакина Л. Н.* Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // Дальневост. мат. журн. 2013. Т. 13, № 1. С. 127–147.
3. *Romakina L. N., Beshaposhnikova L. S.* Regular polygons, inscribed in hypercycles of a hyperbolic plane of positive curvature // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тез. докл. междун. конф., посвящ. 50-летию мех.-мат. фак. 17–22 апр. 2011. Харьков: Изд-во ФЛП Вировец А.П.; Изд. группа «Апостроф», 2011. 135 с.

Л. Н. Ромакина, М. А. Бондарева

**ОБ ОДНОМ МЕТРИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ  
ОВАЛЬНЫХ ЛИНИЙ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ**

Докажем теоремы, сформулированные авторами в тезисах [1].

**Постановка задачи.** Множество  $\eta$  всех точек евклидовой плоскости, из которых данный отрезок  $AB$  виден под постоянным углом  $\alpha$ , является дугой окружности с хордой  $AB$  без ее концов. В частности, если  $\alpha$  – прямой угол, то  $\eta$  – окружность с диаметром  $AB$  без точек  $A$  и  $B$ .

Пусть на гиперболической плоскости  $\widehat{H}$  положительной кривизны [2] заданы точки  $A, B$ . Исследуем множество  $\eta$  всех точек  $M$  плоскости  $\widehat{H}$ , для которых  $MA \perp MB$  (величина прямого угла плоскости  $\widehat{H} = i\pi/2$ ). Решим задачу в три этапа, при гиперболической, эллиптической и параболической прямой  $AB$ . Для сравнения свойств фигур в двух гиперболических плоскостях решим аналогичную задачу на плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$ , т.е. на гиперболической плоскости отрицательной кривизны.

**I.** Прямая  $AB$  гиперболическая.

Присоединим канонический репер  $R$  второго типа [2] плоскости  $\widehat{H}$  к заданным точкам так, чтобы его третья вершина являлась серединой отрезка  $AB$ , единичную точку поместим на пересечение гиперболической прямой  $AB$  с абсолютом. Точки  $A, B$  заданы в репере  $R$  координатами:

$$A(1 : 1 : a), \quad B(1 : 1 : -a), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Уравнение абсолюта в репере  $R$  имеет вид

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0. \quad (2)$$

По условию задачи точки  $A, B$  внешние относительно абсолюта (2), поэтому в координатах (1)  $a^2 > 1$ .

Произвольной точке  $M$  множества  $\eta$  присвоим в репере  $R$  координаты  $(m_1 : m_2 : m_3)$  и найдем координаты прямых

$$\begin{aligned} MA &(am_2 - m_3 : m_3 - am_1 : m_1 - m_2), \\ MB &(-am_2 - m_3 : m_3 + am_1 : m_1 - m_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнению (2) абсолюта соответствует тангенциальная билинейная форма  $\Phi = 2X_1Y_2 + 2X_2Y_1 - X_3Y_3$ . Прямые  $MA$  и  $MB$  ортогональны, поэтому их координаты (3) сопряжены относительно  $\Phi$ . Следовательно, уравнение искомого множества  $\eta$  имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2(1 - 2a^2) + 4x_3^2 = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим положение линии (4) по отношению к абсолюту. При  $a^2 > 1$  система уравнений (2), (4) имеет четыре действительных решения, следовательно, множество  $\eta$  (4) пересекает абсолют в четырех вещественных точках. Согласно классификации овальных линий плоскости  $\widehat{H}$  [3] множество  $\eta$  является однополостной или двуполостной бигиперболой. Чтобы уточнить тип множества  $\eta$ , определим природу его общих с абсолютом касательных. Для этого уравнения (2), (4) запишем в тангенциальных координатах:

$$4X_1X_2 - X_3^2 = 0, \quad (5)$$

$$X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2(2a^2 - 1) + a^2(1 - a^2)X_3^2 = 0. \quad (6)$$

Система уравнений (5), (6) при  $a^2 > 1$  определяет четыре действительные абсолютные касательные множества  $\eta$ . Согласно классификации овальных линий из работы [3] множество  $\eta$  является двуполостной бигиперболой.

**II.** Прямая  $AB$  эллиптическая.

Помещая третью вершину репера  $R$  в середину отрезка  $AB$ , а точку  $E_{21}(-1 : 1 : 0)$  на прямую  $AB$ , точкам  $M, A, B$  присвоим координаты:

$$M(m_1 : m_2 : m_3), \quad A(1 : -1 : a), \quad B(-1 : 1 : a), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Записывая условие ортогональности прямых  $MA(-am_2 - m_3 : am_1 - m_3 : m_1 + m_2)$ ,  $MB(am_2 - m_3 : -am_1 - m_3 : m_1 + m_2)$ , получим уравнения искомого множества  $\eta$  в координатах текущей точки

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2(1 - 2a^2) - 4x_3^2 = 0 \quad (7)$$

и в координатах текущей касательной

$$X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2(2a^2 - 1) + a^2(a^2 - 1)X_3^2 = 0. \quad (8)$$

Система уравнений (2), (7) определяет четыре общие вещественные точки, а система уравнений (5), (8) – четыре общие мнимые касательные множества  $\eta$  с абсолютом. Согласно классификации овальных линий множество  $\eta$  является однополостной бигиперболой.

Заметим, что в случаях I, II уравнения (4), (7) множества  $\eta$  определяют линию, симметричную относительно прямой  $AB$ .

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Множество всех точек плоскости  $\widehat{H}$ , из которых данный отрезок  $AB$  гиперболической (эллиптической) прямой виден под прямым углом, является двуполостной (однополостной) бигиперболой с действительной осью  $AB$  без точек  $A$  и  $B$ .*

**III.** Прямая  $AB$  параболическая.

Помещая вершину  $A_3$  репера  $R$  в середину отрезка  $AB$  координатной прямой  $A_1A_3$ , точкам  $M$ ,  $A$ ,  $B$  присвоим координаты:

$$M(t_1 : t_2 : t_3), \quad A(1 : 0 : a), \quad B(1 : 0 : -a), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Применяя условие ортогональности прямых  $MA(-at_2 : at_1 - t_3 : t_2)$ ,  $MB(at_2 : -at_1 - t_3 : t_2)$ , получим уравнение

$$x_2(4a^2x_1 - x_2) = 0. \quad (9)$$

Линия (9) распадается на пару прямых: прямую  $AB$  ( $x_2 = 0$ ), точки которой по смыслу задачи не принадлежат множеству  $\eta$ , и гиперболическую прямую  $k$  ( $4a^2x_1 - x_2 = 0$ ). Прямая  $k$  ортогональна прямой, соединяющей середину отрезка  $AB$  с точкой пересечения касательных к абсолюту, проведенных из точек  $A$  и  $B$ . Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Множество всех точек плоскости  $\widehat{H}$ , из которых данный отрезок  $AB$  параболической прямой виден под прямым углом, является гиперболической прямой, проходящей через середину  $S$  отрезка  $AB$  перпендикулярно прямой  $SK$ , где  $K$  – точка пересечения касательных к абсолюту, проведенных из точек  $A$  и  $B$ .*

Заметим, что на плоскости  $\widehat{H}$  тип множества  $\eta$  определен однозначно типом прямой  $AB$ . В связи с этим интересно найти решение поставленной задачи на плоскости Лобачевского, все прямые которой одного типа.

Решим задачу на плоскости  $\Lambda^2$ , применяя канонический репер  $R^*$  первого типа [2] и классификацию овальных линий плоскости Лобачевского из книги [4]. Используемый при решении задачи на плоскости  $\widehat{H}$  алгоритм позволяет доказать, что тип множества  $\eta$  на плоскости Лобачевского однозначно определен расстоянием между точками  $A$ ,  $B$ .

**Теорема 3.** *Множество точек плоскости Лобачевского радиуса кривизны  $i\sigma$ , из которых данный отрезок  $AB$  виден под прямым углом, является вогнутой гиперболой при  $\text{ch} \frac{|AB|}{\sigma} > 3$ , эквидистантой при  $\text{ch} \frac{|AB|}{\sigma} = 3$ , эллипсом при  $\text{ch} \frac{|AB|}{\sigma} < 3$ .*

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ромакина Л. Н., Бондарева М. А.* Метрическое свойство гиперболической плоскости положительной кривизны // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 50-летию мех.-мат. фак. 17–22 апр. 2011. Харьков: Изд-во ФЛП Вировец А.П.; Изд. группа «Апостроф», 2011. 151 с.
2. *Ромакина Л. Н.* Аналогии формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 393–407.
3. *Ромакина Л. Н.* Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 37–44.
4. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.

УДК 517.518 + 519.583

Р. О. Романов, С. И. Дудов

### ОБ ОДНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАЖОРАНТЕ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  – непрерывные на отрезке  $[c, d]$  функции,  $P_n(A, t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$  – полином степени  $n$  с вектором коэффициентов  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Рассмотрим задачу

$$\rho(A) = \max_{t \in [c, d]} [P_n(A, t) - f_1(t)] \rightarrow \min_{A \in D}, \quad (1)$$

$$D = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : \max_{t \in [c, d]} [f_2(t) - P_n(A, t)] \leq 0\}, \quad (2)$$

которая требует построения полиномиальной мажоранты для функции  $f_2(t)$ , оптимальной относительно  $\rho(A)$ .

Очевидно, функции  $\rho(A)$  и  $h(A) = \max_{t \in [c, d]} [f_2(t) - P_n(A, t)]$  выпуклы и конечны на  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а задача (1)–(2) является задачей выпуклого программирования. Нетрудно показать, что решение задачи (1)–(2) существует и может быть не единственным.

Цель статьи – получить необходимые и достаточные условия решения задачи.

Далее будем использовать обозначения:  $\partial\rho(A)$  и  $\partial h(A)$  – субдифференциалы выпуклых функций  $\rho(\cdot)$  и  $h(\cdot)$  в точке  $A$ ;  $K(A, D)$  – конус возможных направлений множества  $D$  в точке  $A$ ;  $\text{int}B$ ,  $\text{co}B$ ,  $K(B)$  –

внутренность, выпуклая и коническая оболочка множества  $B$  соответственно,  $K^+$  – сопряжение конуса  $K$ ,  $0_{n+1} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$R^\rho(A) = \{t \in [c, d] : \rho(A) = P_n(A, t) - f_1(t)\},$$

$$R^h(A) = \{t \in [c, d] : h(A) = f_2(t) - P_n(A, t)\}.$$

Приведем некоторые вспомогательные факты. Используя формулу субдифференциала для функции максимума по параметру от выпуклых функций (см. [1, гл.2, § 3]) можно получить формулы субдифференциалов функций  $\rho(A)$  и  $h(A)$  в следующем виде:

$$\partial\rho(A) = \text{co}\{(1, t, \dots, t^n) : t \in R^\rho(A)\}, \quad (3)$$

$$\partial h(A) = \text{co}\{-(1, t, \dots, t^n) : t \in R^h(A)\}. \quad (4)$$

Если  $h(A) = 0$ , то для конуса возможных направлений множества  $D$ , являющегося нижним лебеговым множеством выпуклой функции  $h(\cdot)$ , учитывая  $0_{n+1} \notin \partial h(A)$ , справедлива формула (см. [2, гл. 2, § 6])

$$K(A, D) = -K^+(\partial h(A)). \quad (5)$$

Нам также понадобится следующий факт [3].

**Лемма.** Пусть  $T \subset \mathbb{R}$  – некоторое множество, на котором определена многозначная функция  $\xi(\cdot) : T \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  для  $t = \overline{(1, n+2)}$  :

а) Для того чтобы выполнялось включение

$$0_{n+1} \in \text{co}\{\xi(t)(1, t, \dots, t^n) : t \in T\} \quad (6)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

- 1) существует точка  $t_0 \in T$ , в которой  $0 \in \xi(x_0)$ ,
- 2) существует селектор  $\eta(t) \in \xi(t)$  и набор точек  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+2}$  из  $T$  таких, что  $\eta(t_i) \neq 0$  и  $\text{sign } \eta(t_i) = -\text{sign } \eta(t_{i+1})$ ,

б) Если выполняется условие 2) из пункта а), то

$$0_{n+1} \in \text{int } \text{co}\{\xi(t)(1, t, \dots, t^n) : t \in T\}. \quad (7)$$

Теперь приведем основной результат.



**Теорема.** Для того, чтобы вектор коэффициентов  $A^*$  был одним из решений задачи (1)–(2), необходимо и достаточно, чтобы  $h(A^*) = 0$  и при этом выполнялось хотя бы одно из условий:

1)  $R^\rho(A^*) \cap R^h(A^*) \neq \emptyset$ ,

2) существует упорядоченный набор точек  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+2}$  из  $R^\rho(A^*) \cup R^h(A^*)$  таких, что если  $t_i \in R^\rho(A^*) \left( R^h(A^*) \right)$ , то  $t_{i+1} \in R^h(A^*) \left( R^\rho(A^*) \right)$ .

**Доказательство.** В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см. [1, гл 4, § 2])

$$\rho(A^*) = \min_{A \in D} \rho(A) \Leftrightarrow \partial\rho(A^*) \cap K^+(A^*, D) \neq \emptyset. \quad (8)$$

Очевидно, что для оптимального вектора коэффициентов  $A^*$  выполняется  $h(A^*) = 0$ , а из (4) вытекает  $0_{n+1} \notin \partial h(A^*)$ . Поэтому, используя (5), получаем  $K^+(A^*, D) = -K(\partial h(A^*))$ , и тогда критерий оптимальности (8) можно записать в виде

$$0_{n+1} \in \partial\rho(A^*) + K(\partial h(A^*)). \quad (9)$$

Учитывая  $0_{n+1} \notin \partial h(A^*)$ , нетрудно показать эквивалентность (9) соотношению

$$0_{n+1} \in \text{co}\{\partial\rho(A^*), \partial h(A^*)\}. \quad (10)$$

Определим на множестве  $T = R^\rho(A^*) \cup R^h(A^*)$  многозначную функцию:

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in R^\rho(A), \\ -1, & \text{если } t \in R^h(A), \\ [-1, 1], & \text{если } t \in R^\rho(A) \cup R^h(A). \end{cases}$$

Тогда, учитывая формулы (3)–(4), полученный критерий решения (10) можно записать в виде (6). Это, в силу леммы, говорит о справедливости первой части утверждения теоремы.

Если выполняется условие 2) теоремы, то из леммы следует справедливость соотношения (7), которое, ввиду введенных обозначений, дает нам выполнение соотношения

$$0_{n+1} \in \text{int co}\{\partial\rho(A^*), \partial h(A^*)\}. \quad (11)$$

В соответствии с известным фактом из негладкого анализа [4, гл. 5, § 3]

соотношение (11) говорит о том, что  $A^*$  – единственное решение задачи (1)–(2).

Теорема доказана.

**Замечание.** В случае  $f_1(t) \equiv f_2(t) \equiv f(t)$  для  $t \in [c, d]$  нетрудно показать, что задача (1)–(2) становится эквивалентной задаче чебышевского приближения функции  $f(t)$  полиномом заданной степени  $n$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
2. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
3. Дудов С. И., Сорина Е. В. Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 5. С. 44–71.
4. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

### КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В пространстве  $L_2[0, 1]$  рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов  $L(\lambda)$ , порожденный однородным дифференциальным выражением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями специальной структуры

$$U_i(y, \lambda) := \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (2)$$

$$U_i(y, \lambda) := \sum_{s+k \leq \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k \leq \varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n},$$

где  $\lambda, \alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}, \varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0, 1, \dots, n-1\}, 0 \leq l \leq n-1$ . Отметим, что краевые условия (2) в случае  $2l < n$  не являются полураспадающимися.

Пусть корни  $\{\omega_j\}_1^n$  характеристического уравнения  $\sum_{s+k=n} p_{sk} \omega^k = 0$  различны, отличны от нуля и лежат на двух лучах, исходящих из начала

координат, раствор между которыми  $\pi - 2|\varphi|$ , где  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ , в количествах  $k$  и  $n - k$ . Не нарушая общности, можно считать, что

$$\omega_n e^{\varphi i} < \dots < \omega_{k+1} e^{\varphi i} < 0 < \omega_1 e^{-\varphi i} < \dots < \omega_k e^{-\varphi i}, \quad n - k \leq k. \quad (3)$$

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка  $L(\lambda)$ , при которых имеет место или отсутствует  $m$ -кратная ( $1 \leq m \leq n$ ) полнота системы собственных и присоединенных функций или корневых функций этого пучка в пространстве  $L_2[0, 1]$ .

Основополагающей по этой проблеме является работа [1], в которой была сформулирована теорема об  $n$ -кратной полноте корневых функций пучка  $L(\lambda)$ , порожденного дифференциальным выражением со специальной главной частью

$$\ell(y, \lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в работе [2] в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения и в работе [3] в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в работе [4]. Случай произвольной главной части дифференциального выражения был рассмотрен в работах [5–6]. В работах [7–8], относящихся к общему виду пучка  $L(\lambda)$ , получены достаточные условия  $n$ -кратной полноты в  $L_2[0, 1]$  системы корневых функций в терминах степенной ограниченности по  $\lambda$  функции Грина пучка на некоторых лучах. Детальное исследование вопроса об  $n$ -кратной и  $m$ -кратной полноте корневых функций пучка  $L(\lambda)$ , дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, проведено в работе [9]. Похожий результат получен в работе [10].

Для рассматриваемого пучка (1)–(2) с условием (3) не выполняется основное предположение работы [9], а именно, что существует прямая  $d$ , проходящая через начало, не содержащая  $\omega$ -корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше  $n - l$ , а также, что краевые условия являются полураспадающимися.

Для формулировки основного результата введем обозначения.

Считаем, что краевые условия (2) упорядочены таким образом (это не нарушает общность), что при  $s_0 = l$ ,  $s_{r+1} = n$  справедливы неравенства

$$\kappa_{s_0+1,1} - \kappa_{s_0+1,0} = \dots = \kappa_{s_1,1} - \kappa_{s_1,0} < \dots < \kappa_{s_r+1,1} - \kappa_{s_r+1,0} = \dots = \kappa_{s_{r+1},1} - \kappa_{s_{r+1},0}$$

и  $\gamma, \delta$  таковы, что

$$s_\gamma + 1 \leq n - k + 1 \leq s_{\gamma+1}, \quad s_\delta + 1 \leq k + 1 \leq s_{\delta+1}. \quad (4)$$

Обозначим

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k, \quad i = \overline{1, n}, \quad b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_j^k, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}, \quad i = \overline{l+1, n}; \quad [n]_+ = \max\{n, 0\}, \quad [n, m]_- = \min\{n, m\},$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{s_\gamma, k+1} & \dots & a_{s_\gamma, n} \\ b_{s_\gamma+1, 1} & \dots & b_{s_\gamma+1, k} & a_{s_\gamma+1, k+1} & \dots & a_{s_\gamma+1, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n, 1} & \dots & b_{n, k} & a_{n, k+1} & \dots & a_{n, n} \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s_\delta, 1} & \dots & a_{s_\delta, k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{s_\delta+1, 1} & \dots & a_{s_\delta+1, k} & b_{s_\delta+1, k+1} & \dots & b_{s_\delta+1, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n, 1} & \dots & a_{n, k} & b_{n, k+1} & \dots & b_{n, n} \end{vmatrix}.$$

**Теорема 1.** Если выполняются условия (3)–(4) и, кроме того,

1) в случае  $k + l \geq n$ ,  $k > l$  выполняются условия

$$\det(a_{ij})_{i \in \{1, \dots, l\}}^{j \in \{1, \dots, k+l-n, k+1, \dots, n\}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i \in \{l+1, \dots, n\}}^{j \in \{k+l-n+1, \dots, k\}} \neq 0, \quad B \neq 0;$$

2) в случае  $k + l \geq n$ ,  $k \leq l$  выполняются условия

$$\det(a_{ij})_{i \in \{1, \dots, l\}}^{j \in \{1, \dots, k+l-n, k+1, \dots, n\}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i \in \{l+1, \dots, n\}}^{j \in \{k+l-n+1, \dots, k\}} \neq 0,$$

$$\det(a_{ij})_{i \in \{1, \dots, l\}}^{j \in \{1, \dots, l\}} \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i \in \{l+1, \dots, n\}}^{j \in \{l+1, \dots, n\}} \neq 0;$$

3) в случае  $k + l < n$ ,  $k > l$  выполняются условия  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ ,

то при  $m \leq [k, n-l]_- + [n-k, n-l]_-$  система корневых функций пучка (1)–(2)  $m$ -кратно полна в  $L_2[0, 1]$  с возможным конечным дефектом в первых 2-х случаях, не превышающим числа  $\sum_{i=l+1}^n [m-1-\varkappa_i]_+$ , а в 3-м случае с 0 дефектом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 1. С. 11–14.
2. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. Дис. докт. физ.-мат. наук. Новосибирск. 1973. 242 с.
3. Шкаликос А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ. 1976. Т. 10. № 4. С. 69–80.
4. Хромов А. П. О порождающих функциях вольтерровых операторов // Матем. сборник. 1977. Т. 102(144). № 3. С. 457–472.
5. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z. 1984. Vol. 188. N 1. P. 55–68.
6. Тихомиров С. А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций. Дис. канд. физ.-мат. наук. Саратов. 1987. 126 с.
7. Гасымов М. Г., Магеррамов А. М. О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов // Докл. АН Азерб. ССР. 1974. Т. 30. № 12. С. 9–12.
8. Шкаликос А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. № 9. С. 190–229.
9. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. 1994. 160 с.
10. Рылов В. С. Кратная полнота собственных функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка // Исследования по теории операторов: Сб. статей / БНЦ УрО АН СССР. Уфа. 1988. С. 128–140.

УДК 519.4

Д. С. Смирнова

### МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С РАВНОЦЕННЫМИ КРИТЕРИЯМИ

Будем рассматривать задачу многокритериальной оптимизации по качественным критериям в виде

$$G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle, \quad (1)$$

где  $A$  – непустое множество допустимых альтернатив,  $(q_j)_{j \in J}$  – критерии оценки этих альтернатив. Качественный критерий  $q_j$  характеризуется тем, что шкалой для его измерения служит некоторое линейно упорядоченное множество (цепь)  $\langle C_j, \leq^j \rangle$ ; формально  $q_j$  представляет собой

отображение  $q_j : A \rightarrow C_j$ . Каждой альтернативе  $a \in A$  сопоставляется вектор  $q(a) = (q_j(a))_{j \in J}$ , называемый *векторной оценкой альтернативы  $a$*  и содержащий всю информацию об этой альтернативе; при этом в теоретическом анализе сравнение альтернатив заменяется сравнением их векторных оценок.

Иногда на отображение  $q : A \rightarrow \prod_{j \in J} C_j$  накладывают дополнительное условие:

$$(\forall j \in J)q_j(a_1) = q_j(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2. \quad (2)$$

Заметим, что условие (2) позволяет отождествить альтернативу с ее векторной оценкой.

Обозначим через  $K$  класс моделей многокритериальной оптимизации вида (1) с дополнительным условием (2). Напомним, что отношение предпочтения по Парето задается следующей формулой:

$$a_1 \leq^{Par} a_2 \Leftrightarrow (\forall j \in J)q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2).$$

В общем случае можно задать различные отношения предпочтения  $\rho$ . Тогда в качестве оптимальных альтернатив для модели  $G$  будем рассматривать множество альтернатив  $M_\rho$ , которые являются максимальными относительно предпочтения  $\rho$ , при этом множество всех максимальных по Парето-предпочтению альтернатив составляет так называемый *паретовский оптимум*.

В общем случае для моделей многокритериальной оптимизации класса  $K$ , в которых введено отношение предпочтения альтернатив  $\rho$ , важными являются две задачи:

1. Сокращение множества оптимальных альтернатив.
2. Исследование на внешнюю устойчивость множества оптимальных альтернатив  $M_\rho$ .

Напомним, что свойство внешней устойчивости подмножества  $M_\rho$  в модели  $G \in K$  задается формулой

$$(\forall a \in A)(\exists a^* \in M_\rho)a \lesssim^\rho a^*. \quad (3)$$

В настоящей статье будем рассматривать модель  $G$  вида (1) с дополнительной информацией о равноценности критериев в следующем виде:

- 1) Все критерии измеряются в одной шкале  $\langle C, \leq \rangle$ , т.е. все  $C_j = C$  и считаются равноценными.
- 2) Наборы значений критериев не зависят от порядка перечисления компонент.

В этом случае определим симметрическое отношение предпочтения по Парето следующей формулой:

$$a_1 \leq^{Spar} a_2 \Leftrightarrow (\exists \pi^1, \pi^2)(q_{\pi^1(1)}(a_1) \leq q_{\pi^2(1)}(a_2) \wedge \dots \wedge q_{\pi^1(n)}(a_1) \leq q_{\pi^2(n)}(a_2)), \quad (4)$$

где  $\pi^1, \pi^2$  – некоторые перестановки на множестве  $1\dots n$ .

Заметим, что

$$\leq^{par} \subseteq \leq^{spar} \quad (5)$$

**Теорема 1.** *Следующие условия эквивалентны между собой:*

$$1) (\exists \pi^1, \pi^2) \pi^1(a^1) \leq^{par} \pi^2(a^2),$$

$$2) (\exists \pi^2) a^1 \leq^{par} \pi^2(a^2),$$

3)  $\pi^\uparrow(a^1) \leq^{par} \pi^\uparrow(a^2)$ , где  $\pi^\uparrow$  – перестановка, в которой элементы расположены по возрастанию.

**Доказательство.** 1)  $\Rightarrow$  2) и 2)  $\Rightarrow$  1) следует из определения симметрического отношения предпочтения по Парето.

Докажем 1)  $\Rightarrow$  3). Дано:

$$pi^1(c^1) = (c_{\pi^1(1)}^1, c_{\pi^1(2)}^1, \dots, c_{\pi^1(n)}^1),$$

$$pi^2(c^2) = (c_{\pi^2(1)}^2, c_{\pi^2(2)}^2, \dots, c_{\pi^2(n)}^2),$$

$$c_{\pi^1(1)}^1 \leq c_{\pi^2(1)}^2, \dots, c_{\pi^1(n)}^1 \leq c_{\pi^2(n)}^2.$$

Доказательство проведем по индукции по числу критериев.

База индукции:  $n = 1$ . Тогда  $c^1 = (c_1^1), c^2 = (c_1^2)$ . Следовательно, существует только одна перестановка –  $\pi^0$  – тождественная. Из условия 1) получаем, что  $\pi^0(c^1) \leq^{par} \pi^0(c^2)$ , но в данном случае  $\pi^0 = \pi^\uparrow$ , следовательно, условие 3) также выполнено.

Далее рассмотрим случай  $n = 2$ . Тогда  $c^1 = (c_1^1, \frac{1}{2}), c^2 = (c_1^2, \frac{2}{2})$ . Из условия 1) получаем, что  $(c_{i_1}^1, c_{i_2}^1) \leq (c_{j_1}^2, c_{j_2}^2)$ .

Рассмотрим всевозможные варианты расположения компонент в векторах.

1)  $(c_{i_1}^1, c_{i_2}^1)$  и  $(c_{j_1}^2, c_{j_2}^2)$  уже расположены по возрастанию. Тогда  $\pi^\uparrow(c^1) \leq \pi^\uparrow(c^2)$ .

2)  $(c_{i_1}^1, c_{i_2}^1)$  и  $(c_{j_1}^2, c_{j_2}^2)$  расположены по убыванию, т.е.  $c_{i_1}^1 \leq c_{j_1}^2, c_{i_2}^1 \leq c_{j_2}^2$ . В этом случае получаем  $\pi^\uparrow(c^1) = (c_{i_2}^1, c_{i_1}^1), \pi^\uparrow(c^2) = (c_{j_2}^2, c_{j_1}^2)$ , следовательно,  $\pi^\uparrow(c^1) \leq \pi^\uparrow(c^2)$ .

3) В одном векторе компоненты расположены по возрастанию, а в другом по убыванию. Пусть  $c_{i_1}^1 \leq c_{i_2}^1$ , но  $c_{j_1}^2 \geq c_{j_2}^2$ . Надо показать, что  $(c_{i_1}^1, c_{i_2}^1) \leq (c_{j_2}^2, c_{j_1}^2)$ . Так как  $(c_{i_1}^1, c_{i_2}^1) \leq (c_{j_1}^2, c_{j_2}^2)$ , то  $c_{i_1}^1 \leq c_{j_1}^2$  и  $c_{i_2}^1 \leq c_{j_2}^2$ , то  $c_{i_1}^1 \leq c_{i_2}^1 \leq c_{j_2}^2 \leq c_{j_1}^2$ , следовательно,  $c_{i_1}^1 \leq c_{j_2}^2, c_{i_2}^1 \leq c_{j_1}^2$ , откуда следует, что  $(c_{i_1}^1, c_{i_2}^1) \leq^{par} (c_{j_2}^2, c_{j_1}^2)$ .

Шаг индукции: пусть теорема верна для  $n - 1$  компоненты. Рассмотрим случай  $n$  компонент. Имеем

$$\pi^1(c^1) = (c_{\pi^1(1)}^1, c_{\pi^1(2)}^1, \dots, c_{\pi^1(n)}^1),$$

$$\pi^2(c^2) = (c_{\pi^2(1)}^2, c_{\pi^2(2)}^2, \dots, c_{\pi^2(n)}^2).$$

Обозначим

$$c_{\pi^1(j_1)}^1 = \min(c_{\pi^1(j)}^1),$$

$$c_{\pi^2(j_2)}^2 = \min(c_{\pi^2(j)}^2).$$

Первый случай:  $j_1 = j_2$ .

$$\widehat{c}_1 = (c_{\pi^1(1)}^1, \dots, c_{\pi^1(j_1-1)}^1, c_{\pi^1(j_1+1)}^1, \dots, c_{\pi^1(n)}^1),$$

$$\widehat{c}_2 = (c_{\pi^2(1)}^2, \dots, c_{\pi^2(j_2-1)}^2, c_{\pi^2(j_2+1)}^2, \dots, c_{\pi^2(n)}^2).$$

В этом случае  $\widehat{c}_1 \leq^{par} \widehat{c}_2$ , по предположению индукции  $\pi^\uparrow(\widehat{c}_1) \leq^{par} \pi^\uparrow(\widehat{c}_2)$ . Тогда для векторов

$$(c_{\pi^1(1)}^1, \dots, c_{\pi^1(j_1-1)}^1, c_{\pi^1(j_1+1)}^1, \dots, c_{\pi^1(n)}^1),$$

$$(c_{\pi^2(1)}^2, \dots, c_{\pi^2(j_2-1)}^2, c_{\pi^2(j_2+1)}^2, \dots, c_{\pi^2(n)}^2)$$

доминирование по Парето имеет место. Следовательно, перестановка  $\pi^\uparrow$  приводит к паретовскому доминированию.

Второй случай:  $j_1 \neq j_2$ .

$$(c_{\pi^1(1)}^1, \dots, c_{\pi^1(j_1)}^1, \dots, c_{\pi^1(j_2)}^1, \dots, c_{\pi^1(n)}^1),$$

$$(c_{\pi^2(1)}^2, \dots, c_{\pi^2(j_1)}^2, \dots, c_{\pi^2(j_2)}^2, \dots, c_{\pi^2(n)}^2).$$

По предположению верны следующие неравенства:

$$c_{\pi^1(j_1)}^1 \leq c_{\pi^1(j_2)}^1 \leq c_{\pi^2(j_2)}^2. \quad (6)$$

Рассмотрим перестановку

$$(c_{\pi^1(1)}^1, \dots, c_{\pi^1(j_2)}^1, \dots, c_{\pi^1(j_1)}^1, \dots, c_{\pi^1(n)}^1),$$



$$(c_{\pi^2(1)}^2, \dots, c_{\pi^2(j_1)}^2, \dots, c_{\pi^2(j_2)}^2, \dots, c_{\pi^2(n)}^2).$$

Согласно первому случаю и воспользовавшись неравенствами (6), получаем, что перестановка  $\pi^\uparrow$  приводит к паретовскому доминированию.

Теорема доказана.

**Следствие.**  $M_{Spar}G \subseteq M_{Par}G$ . Это означает, что в случае равноценных критериев мы получаем сокращение паретовского оптимума.

**Теорема 2.** Пусть множество критериев  $J$  конечно, все цепи  $\langle C_j, \leq \rangle_{j \in J}$  удовлетворяют условию максимальности. Тогда в любой задаче  $G \in K^s$ , в которой отношение предпочтения альтернатив является симметрическим отношением предпочтения по Парето, множество альтернатив оптимальных по симметрическому отношению предпочтения по Парето  $M_{Spar}G$  будет внешне устойчивым.

**Доказательство.** Надо показать, что  $\forall a \in A \exists a^* \in M_{Spar}G$  такой, что  $a \leq^{Spar} a^*$ . Зафиксируем  $a \in A$ . Возможны два случая:

- 1) если  $a \in M_{Spar}G$ , то  $a^* = a$  и  $a \leq^{Spar} a$ ;
- 2) если  $a \notin M_{Spar}G$ , тогда  $\exists a^1 \in A, a < a^1$  если  $a^1 \in M_{Spar}G$ , то требуемое утверждение доказано, иначе  $\exists a^2 \in A, a^1 < a^2$ , если  $a^2 \in M_{Spar}G$ , то требуемое утверждение доказано и т.д.

В результате получаем последовательность

$$a <^{Spar} a_1 <^{Spar} a_2 <^{Spar} \dots,$$

а так как упорядоченное множество  $\langle A, \leq^{Par} \rangle$  удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, то эта последовательность оборвется на конечном номере  $k$ , причем имеет место  $a \leq^{Spar} a_k$  и  $a_k \in A^*$ , то есть для модели  $G$  выполнено условие внешней устойчивости множества  $M_{Spar}G$ .

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето—оптимальные решения многокритериальных задач. М: Наука, 1982. 256 с.
2. Розен В. В. Математические модели многокритериальной оптимизации по качественным критериям //Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. центр «Наука», 2012. 266 с.
3. Смирнова Д. С. Модели многокритериальной оптимизации с частично упорядоченным множеством критериев//Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. центр «Наука», 2012. 293 с.

## О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В КРУГЕ

В работе [1, с. 74] были приведены априорные оценки решения задачи Дирихле в круге. Данная статья также посвящена решению задачи Дирихле в круге, но на другом более интересном с практической точки зрения классе функций, задаваемых итерированным оператором Лапласа. Пусть, как и в [1, с. 71],  $K$  – круг с центром в т.  $O$  радиуса  $h$  и границей  $\Gamma$ ,  $C = C(K)$  – множество непрерывных на  $K$  функций с нормой  $\|u\|_C = \sup \{u(x) : x \in K\}$ ;  $L_\infty = L_\infty(K)$  – множество измеримых существенно ограниченных на  $K$  функций с нормой  $\|u\|_\infty = \text{ess sup} \{u(x) : x \in K\}$ . Обозначим через  $U$  множество функций из  $C$ , для которых значение итерированного оператора Лапласа  $\Delta^2 u$  принадлежит пространству  $L_\infty(K)$ . При этом  $\Delta^2 u$  понимается в смысле Соболева [2, с. 44]. На классе  $U$  функций, заданных на круге, решена задача Дирихле с итерированным оператором Лапласа и приведён алгоритм получения априорных оценок производных решения. Пусть  $M_0(\rho_0, \varphi_0)$  – фиксированная точка круга  $K$ ,  $M_1(\rho_1, \varphi_1)$  – точка, сопряжённая с  $M_0$  относительно окружности  $\Gamma$ ,  $p(r, \psi)$  – точка такая, что  $p \in \overline{K}$ ,  $\frac{\partial}{\partial n_p}$  – производная по внешней нормали в точке  $p$ . Положим  $r_0 = |\overline{M_0 p}|$ ,  $r_1 = |\overline{M_1 p}|$ ,  $\rho_0 = |\overline{O M_0}|$ ,  $\rho_1 = |\overline{O M_1}|$ . Поскольку круг инвариантен относительно поворота вокруг его центра  $O$ , то в дальнейшем полагаем  $\varphi_0 = 0$ . Рассмотрим функцию

$$G(M_0, p) = r_0^2 \ln \frac{r_0 h}{\rho_0 r_1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{h^2}\right) (h^2 - \rho_0^2). \quad (1)$$

**Теорема 1.** *Для функций класса  $U$  справедливо следующее интегральное представление:*

$$u(M_0) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left\{ u(p) \frac{\partial \Delta G(M_0, p)}{\partial n_p} - \Delta G(M_0, p) \frac{\partial u}{\partial n_p} \right\} d\psi + \frac{1}{8\pi} \iint_K G(M_0, p) \Delta^2 u(p) r dr d\psi. \quad (2)$$

**Доказательство**

Непосредственно устанавливается, что функция (1) является функцией Грина круга  $K$ , т.е.

- $G(M_0, p) = G(p, M_0)$ .

2.  $G(M_0, p)$  удовлетворяет уравнению  $\Delta^2 G = 0$  по  $p$  на множестве  $K \setminus \{M_0\}$ .
3.  $G(M_0, p)$  на  $\Gamma$  обращается в ноль.
4.  $\frac{\partial G(M_0, p)}{\partial n}$  на  $\Gamma$  обращается в ноль.
5.  $G(M_0, p) = r_0^2 \ln r_0 + V(M_0, p)$ , где  $V = V(M_0, p)$  – бигармоническая функция всюду в  $K$  по каждому из аргументов.

Отметим также, что функции  $G(M_0, p)$ ,  $\frac{\partial G(M_0, p)}{\partial \rho_0}$ ,  $\Delta G(M_0, p)$  и  $\frac{\partial \Delta G(M_0, p)}{\partial \rho_0}$  имеют интегрируемую особенность при  $p = M_0$ . Перечисленные свойства функции (1) позволяют получить [3, с. 69 – 71], [4, с. 319 – 320] следующее интегральное представление:

$$u(M_0) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left\{ u(p) \frac{\partial \Delta G(M_0, p)}{\partial n_p} - \Delta G(M_0, p) \frac{\partial u}{\partial n_p} \right\} d\psi + \frac{1}{8\pi} \iint_K G(M_0, p) \Delta^2 u(p) r dr d\psi. \quad (3)$$

для любой функции  $u$ , определённой непрерывной и ограниченной вместе со всеми своими производными до четвёртого порядка включительно на  $K$ . Следуя [5, с. 679 – 680] и [6, с. 20 – 21, теорема 125] можно показать, что представление (3) остаётся верным и для любой функции  $u \in U$ , т. е. справедливо представление (2).

**Следствие 1.** В силу свойств функции (1) оба интеграла в (3) можно дифференцировать по  $\rho_0$ . Для всякой функции  $u \in U$  производная  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \rho_0}$  существует в классическом смысле и имеет место представление

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \rho_0} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left\{ u(p) \frac{\partial^2 \Delta G(M_0, p)}{\partial \rho_0 \partial n_p} - \frac{\partial \Delta G(M_0, p)}{\partial \rho_0} \frac{\partial u}{\partial n_p} \right\} d\psi + \frac{1}{8\pi} \iint_K \frac{\partial G(M_0, p)}{\partial \rho_0} \Delta^2 u(p) r dr d\psi.$$

**Следствие 2.** Для функций класса  $U$  справедлива следующая априорная оценка нормальной производной:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \right\|_c \leq A \|u\|_c + B \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_c + C \|\Delta^2 u\|_{\infty}, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2 \Delta G(M_0, p)}{\partial \rho_0 \partial n_p} \right| d\psi,$$
$$B = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \Delta G(M_0, p)}{\partial \rho_0} \right| d\psi,$$
$$C = \frac{1}{8\pi} \iint_K \left| \frac{\partial G(M_0, p)}{\partial \rho_0} \right| r dr d\psi.$$

**Следствие 3.** Для класса бигармонических на круге  $K$  функций справедлива следующая оценка:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_0} = O\left(\frac{1}{h - \rho_0}\right).$$

### Замечания:

1. Следуя изложенному, можно получать априорные оценки для  $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_0^2}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial \rho_0^3}$ ,  $\Delta u$  и им подобные оценки.
2. Неравенство (4) не является точным.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимофеев В. Г. Априорные оценки решения задачи Дирихле в круге // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 71–74.
2. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
3. Тиман А. Ф., Трофимов В. Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
5. Тимофеев В. Г. Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, вып. 5, С. 676–689.
6. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

## О НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ

В данной работе приводится условие наименьшего отклонения от нуля тригонометрического полинома на системе отрезков среди всех полиномов, старшие коэффициенты  $(A, B)$  которых удовлетворяют соотношению  $A^2 + B^2 = 1$ .

Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2l}$  таковы, что

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2l}, \quad 0 < \alpha_{2l} - \alpha_1 < 2\pi,$$

и

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^l [\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}].$$

Обозначим через  $\mathcal{T}_N^{(A,B)}$  класс тригонометрических полиномов вида

$$\begin{aligned} \tau_N(\varphi) = & A \cos \frac{N}{2}\varphi + B \sin \frac{N}{2}\varphi + a_1 \cos \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + b_1 \sin \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots \\ & \dots + a_{\left[ \frac{N}{2} \right]} \cos \left( \frac{N}{2} - \left[ \frac{N}{2} \right] \right) \varphi + b_{\left[ \frac{N}{2} \right]} \sin \left( \frac{N}{2} - \left[ \frac{N}{2} \right] \right) \varphi, \end{aligned}$$

$$A, B, a_1, b_1, \dots, a_{\left[ \frac{N}{2} \right]}, b_{\left[ \frac{N}{2} \right]} \in \mathbb{R}, \quad A^2 + B^2 = 1.$$

Этот класс включает в себя не только обычные тригонометрические полиномы (при чётном  $N$ ), но и тригонометрические полиномы полуцелого порядка, рассмотренные в работах [1–3].

Положим  $\|\tau_N\| := \max_{\varphi \in \mathcal{E}} |\tau_N(\varphi)|$ . Точками отклонения полинома  $\tau_N(\varphi)$  на  $\mathcal{E}$  будем называть точки, в которых  $|\tau_N(\varphi)|$  достигает своего максимума на  $\mathcal{E}$ . Кроме того, через  $T_n(x)$  будем обозначать многочлены Чебышёва

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x.$$

Если гармонические меры отрезков рациональны, то по теореме 2 [4] найдется  $\Psi$  такое, что тригонометрический полином вида

$$\cos \Psi \cos \frac{N}{2}\varphi + \sin \Psi \sin \frac{N}{2}\varphi + a_1 \cos \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + b_1 \sin \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots,$$

наименее уклоняющийся от нуля среди всех полиномов класса  $\mathcal{T}_N^{(\cos \Psi, \sin \Psi)}$ , имеет на  $\mathcal{E}$  максимальное число точек уклонения.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Если*

$$\begin{aligned} \tau_N^*(\varphi) = & \cos \frac{N}{2} \varphi + a_1^* \cos \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + b_1^* \sin \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots \\ & \dots + a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \cos \left( \frac{N}{2} - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi + b_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \sin \left( \frac{N}{2} - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi \in \mathcal{T}_N^{(1,0)} \end{aligned}$$

*имеет на  $\mathcal{E}$  максимальное число точек уклонения  $(N + l)$ , то он наименее уклоняется от нуля на  $\mathcal{E}$  среди полиномов в классе*

$$\mathcal{T}_N = \bigcup_{A, B: A^2 + B^2 = 1} \mathcal{T}_N^{(A, B)}.$$

**Доказательство.** Проведём доказательство теоремы от противного.

Пусть полином

$$\tau_N^*(\varphi) = \cos \frac{N}{2} \varphi + a_1^* \cos \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + b_1^* \sin \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots$$

имеет на  $\mathcal{E}$  максимальное количество точек уклонения.

Предположим, что для некоторого  $\psi$  имеет место

$$\|\tau_N^*\| > \|\tau_{N, \psi}^*\|,$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{N, \psi}^*(\varphi) = & \cos \psi \cos \frac{N}{2} \varphi + \sin \psi \sin \frac{N}{2} \varphi + \\ & + a_{1, \psi}^* \cos \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + b_{1, \psi}^* \sin \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \varphi + \dots \\ & \dots + a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor, \psi}^* \cos \left( \frac{N}{2} - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi + b_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor, \psi}^* \sin \left( \frac{N}{2} - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \varphi \end{aligned}$$

— полином, наименее уклоняющийся от 0 на  $\mathcal{E}$  в классе  $\mathcal{T}_N^{(\cos \psi, \sin \psi)}$ . Так как  $\|\tau_{N, \psi}^*\|$  непрерывно зависит от  $\psi$ , можно считать, что  $\frac{\psi}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ , т.е.

$$\psi = \frac{2\pi p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left( \cos \psi \cos \frac{N}{2} \varphi + \sin \psi \sin \frac{N}{2} \varphi \right)^q &= \left( \cos \left( \frac{N}{2} \varphi - \psi \right) \right)^q = \\ &= \frac{1}{2^{q-1}} \cos \left( \frac{N}{2} \varphi - \psi \right) q + \dots, \end{aligned}$$

то пары старших коэффициентов полиномов  $T_q \left( \frac{\tau_N^*(\varphi)}{\|\tau_N^*\|} \right)$  и  $T_q \left( \frac{\tau_{N,\psi}^*(\varphi)}{\|\tau_{N,\psi}^*\|} \right)$  равны соответственно  $\left( \frac{1}{2^{q-1} \|\tau_N^*\|^q}, 0 \right)$  и  $\left( \frac{1}{2^{q-1} \|\tau_{N,\psi}^*\|^q}, 0 \right)$ , а нормы  $\frac{1}{2^{q-1}}$ . Поэтому полиномы

$$\|\tau_N^*\|^q T_q \left( \frac{\tau_N^*(\varphi)}{\|\tau_N^*\|} \right) = \tau_{Nq}^*(\varphi)$$

и

$$\|\tau_{N,\psi}^*\|^q T_q \left( \frac{\tau_{N,\psi}^*(\varphi)}{\|\tau_{N,\psi}^*\|} \right) = \tau_{Nq,\psi}^*(\varphi)$$

имеют одинаковые пары старших коэффициентов  $\left( \frac{1}{2^{q-1}}, 0 \right)$ , при этом нормы удовлетворяют неравенству

$$\|\tau_{Nq}^*\| = \frac{1}{2^{q-1}} \|\tau_N^*\|^q > \frac{1}{2^{q-1}} \|\tau_{N,\psi}^*\|^q = \|\tau_{Nq,\psi}^*\|.$$

С другой стороны,  $\frac{\tau_N^*(\varphi)}{\|\tau_N^*\|}$  на  $\mathcal{E}$  пробегает отрезок  $[-1, 1]$   $N$  раз, поэтому полином

$$\tau_{Nq}^*(\varphi) = \|\tau_N^*\|^q T_q \left( \frac{\tau_N^*(\varphi)}{\|\tau_N^*\|} \right)$$

пробегает на  $\mathcal{E}$  отрезок  $[-\|\tau_{Nq}^*\|, \|\tau_{Nq}^*\|]$   $Nq$  раз, а значит наименее уклоняется от нуля на  $\mathcal{E}$  в классе  $\mathcal{T}_{Nq}^{(1,0)}$ , что противоречит последнему неравенству.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Виденский В. С.* О тригонометрических полиномах полуцелого порядка // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. науки. 1964. Т. 17, № 3. С. 133–140.
2. *Peherstorfer F., Steinbauer R.* Orthogonal polynomials on arcs of the unit circle // J. Approx. Theory. 1996. Vol. 85. P. 140–184.
3. *Peherstorfer F., Steinbauer R.* Orthogonal polynomials on arcs of the unit circle. Orthogonal polynomials with periodic reflection coefficients // J. Approx. Theory. 1996. Vol. 87. P. 60–102.
4. *Лукашов А. Л.* Неравенства для производных рациональных функций // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 3. С. 115–138.

**ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ  
РЯДОВ ФУРЬЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

Через  $L_{2\pi}^p$  обозначим пространство  $2\pi$ -периодических интегрируемых в степени  $p$  на  $[0; 2\pi]$  функций с нормой  $\|f\|_p = \left( \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ . Если  $\xi = \{x_i\}_{i=0}^n$  — разбиение периода  $[a; a + 2\pi]$ , то при  $1 < p < \infty$  по определению  $\mathfrak{a}_\xi^p(f) = \left( \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p}$ . Введем при  $1 < p < \infty$   $\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup\{\mathfrak{a}_\xi^p(f) : \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) \leq \delta\}$ ,  $C_p = \{f \in C_{2\pi} : \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \omega_{1-1/p}(f, \delta) = 0\}$  и  $\|f\|_p = \max(\omega_{1-1/p}(f, 2\pi), \|f\|_\infty)$ . Для  $X = L_{2\pi}^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  или  $X = C_p$  введем  $\omega_2(f, \delta)_X = \sup_{|t| \leq \delta} \|f(\cdot + t) + f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_X$ .

Пусть  $f \in L_{2\pi}^1$  и имеет ряд Фурье  $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ .  $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}_{n=0, k=0}^{\infty, n}$  — треугольная матрица, такая что  $\lambda_{n,0} = 1$ . Введем следующие обозначения:  $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ ,

$$L_n(f, \lambda, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \cos it = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2 \sin(\frac{t}{2})}, \quad t \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$F_k(t) = \sum_{i=0}^k D_i(t)/(k+1) = \frac{1}{2(k+1)} \frac{\sin^2(\frac{k+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{t}{2})}, \quad t \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Теорема.** Пусть  $\Lambda$  такова, что

$$|\lambda_{n,0} - \lambda_{n,1}| \leq A_1 n^{-3/2}; \quad \sum_{k=0}^n (\Delta^2 \lambda_{n,k})^2 \leq A_2 n^{-3}. \quad (1)$$

Если  $X = L_{2\pi}^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  или  $X = C_p$ ,  $1 < p < \infty$ , то справедлива оценка  $\|f(x) - L_n(f, \Lambda, x)\|_X \leq C n^{-3/2} \left( \sum_{k=1}^n k^2 \omega_2^2(f, \pi/k)_X \right)^{1/2}$ .

**Доказательство.** Применяя дважды преобразования Абеля, получаем:

$$L_n(f, \Lambda, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \left( \sum_{k=0}^n \Delta^2 \lambda_{n,k} (k+1) F_k(t) \right) dt.$$



Применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем:

$$\begin{aligned} \|L_n(f, \Lambda, x) - f(x)\|_X &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \|\varphi_x(t)\|_X \left| \sum_{k=0}^n \Delta^2 \lambda_{n,k} (k+1) F_k(t) \right| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/n}^\pi \right) \omega_2(f, t)_X \left| \sum_{k=0}^n \Delta^2 \lambda_{n,k} (k+1) F_k(t) \right| dt = \frac{1}{\pi} (I_1 + I_2). \end{aligned}$$

Поскольку  $|F_k(t)| \leq \sum_{i=0}^k D_i(t)/(k+1) \leq \sum_{i=0}^k (i+1/2)/(k+1) = (k+1)/2$ , то согласно второму неравенству (1) и неравенству Коши – Буняковского

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^{\pi/n} \omega_2(f, t)_X \sum_{k=0}^n |\Delta^2 \lambda_{n,k}| (n+1)^2 dt \leq \\ &\leq C_1 n \omega_2(f, \pi/n)_X \left( \sum_{k=0}^n |\Delta^2 \lambda_{n,k}|^2 \right)^{1/2} (n+1)^{1/2} \leq \\ &\leq C_2 (A_2) n^{3/2} \omega_2(f, \pi/n)_X n^{-3/2} = C_2 \omega_2(f, \pi/n)_X. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, в силу неравенства  $\sin^2(t/2) \geq t^2/\pi^2$  имеем:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C_3 \int_{\pi/n}^\pi \omega_2(f, t)_X \left| \sum_{k=0}^n \Delta^2 \lambda_{n,k} t^{-2} (1 - \cos(k+1)t) \right| dt \leq \\ &\leq C_3 \left( \int_{\pi/n}^\pi \frac{\omega_2(f, t)_X}{t^2} \left| \sum_{k=0}^n \Delta^2 \lambda_{n,k} \right| dt + \right. \\ &\left. + \int_{\pi/n}^\pi \frac{\omega_2(f, t)_X}{t^2} \left| \sum_{k=0}^n \Delta^2 \lambda_{n,k} \cos(k+1)t \right| dt \right) = C_3 (I_{21} + I_{22}). \end{aligned}$$

Применяя первое неравенство (1) в виде  $\sum_{k=0}^n \Delta^2 \lambda_{n,k} = |\lambda_{n,0} - \lambda_{n,1}| \leq \leq A_1 n^{-3/2}$ , оцениваем  $I_{21}$  с помощью неравенства Коши – Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} I_{21} &\leq C_4 (A_1) n^{-3/2} \int_{\pi/n}^\pi \omega_2(f, t)_X t^{-2} dt \leq \\ &\leq C_4 (A_1) n^{-3/2} \left( \int_{\pi/n}^\pi \omega_2^2(f, t)_X t^{-4} dt \right)^{1/2} \left( \int_{\pi/n}^\pi 1 dt \right)^{1/2} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_5 n^{-3/2} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k} \left( \frac{k+1}{\pi} \right)^4 \omega_2^2(f, \pi/k)_X dt \right)^{1/2} \leq \\
&\leq C_6 n^{-3/2} \left( \sum_{k=1}^n k^4 k^{-2} \omega_2^2(f, \pi/k)_X dt \right)^{1/2}. \quad (3)
\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши – Буняковского и равенства Парсеваля имеем:

$$\begin{aligned}
I_{22} &\leq \left( \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\omega_2^2(f, t)_X}{t^4} dt \right)^{1/2} \left( \int_{\pi/n}^{\pi} \left( \sum_{k=0}^n \Delta^2 \lambda_{n,k} \cos(k+1)t \right)^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
&\leq C_8 \left( \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\omega_2^2(f, t)_X}{t^4} dt \right)^{1/2} \left( \sum_{k=0}^n |\Delta^2 \lambda_{n,k}|^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq C_9 n^{-3/2} \left( \sum_{k=1}^n k^2 \omega_2^2(f, \pi/k)_X \right)^{1/2}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Легко видеть, что правая часть (2) оценивается через правую часть (3) и (4).

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Обозначим через  $Zug(\alpha, p)$  пространство функций  $\{f \in L_{2\pi}^p : \omega_2(f, \delta)_p = O(\delta^\alpha)\}$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Тогда в условиях теоремы имеем для  $f \in Zug(\alpha, p)$

$$\|f(x) - L_n(f, \Lambda, x)\|_{L^p} = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & 0 < \alpha < 3/2, \\ O(\log^{1/2} n/n^{3/2}), & \alpha = 3/2, \\ O(n^{-3/2}), & 3/2 < \alpha \leq 2. \end{cases}$$

**Следствие 2.** Пусть  $f \in L_{2\pi}^p$ ,  $1 < p < \infty$ , такова, что  $\sum_{k=1}^n k^{2+2/p} \omega_2(f)_{L^p} = o(n^3)$ . Тогда  $L_n f, \Lambda, x$  сходится к  $f_0(x)$  в  $C_p$ , где  $f_0 = f$  почти всюду на  $\mathbb{R}$ .

Утверждение следствия 2 вытекает из теорем и результатов пунктов 2.2 и 2.5 из [1].

Для  $f \in C_{2\pi}$  следствие 1 получено П.В. Ермаковым [2].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Терёхин А. П. Приближение функций ограниченной  $p$ -вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. №2. С. 171–187.
2. Ермаков П. В. О сходимости некоторых линейных операторов и функций класса  $Z_\alpha$  // Математические заметки. 1977. Т.22, №4. С. 601–607.

УДК 518.517

Р. Н. Фадеев

### ОЦЕНКИ КРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ—ВИЛЕНКИНА

Пусть  $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ ,  $2 \leq p_n \leq N$ . По определению  $m_0 = 1$ ,  $m_n = p_1 \dots p_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда каждое  $x \in [0, 1)$  имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n) \quad (1)$$

(для  $x = k/m_l$  берем разложение с конечным числом ненулевых  $x_n$ ). Если  $y \in [0, 1)$  имеет вид (1), то по определению  $x \oplus y = z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$ , где  $z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}$ ,  $z_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$ . Если  $k \in \mathbb{Z}_+$  записано в виде  $k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$ ,  $k_i \in \mathbb{Z} \cap [0, p_i)$ , то по опре-

делению для  $x \in [0, 1)$  полагаем  $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)$ .

Пусть  $L^p[0, 1)^2$  — пространство измеримых на  $[0, 1) \times [0, 1)$  функций  $f$  с конечной нормой  $\|f\|_p = \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)|^p dx dy\right)^{1/p}$ . Система  $\{\chi_n(x)\chi_m(y)\}_{m,n=0}^\infty$  ортонормирована на  $[0, 1)^2$  и полна в  $L^1[0, 1)^2$ . Далее  $\hat{f}(n, m) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \overline{\chi_n(x)\chi_m(y)} dx dy$  для  $f \in L^1[0, 1)^2$  и  $n, m \in \mathbb{Z}_+$ ,

$\mathcal{P}_{n,m} = \{f \in L^1[0, 1)^2 : \hat{f}(j, k) = 0, j \geq n \text{ или } k \geq m\}$ ,  $E_{n,m}(f)_p = \inf\{\|f - t\|_p : t \in \mathcal{P}_{n,m}\}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_{kl}^*(f)_p = \sup\{\|\Delta_{h_1, h_2}^{kl} f(\cdot, \cdot)\|_p : 0 < h_1 < 1/m_k, 0 < h_2 < 1/m_l\}$ , где  $\Delta_{h_1, h_2}^{kl} f(x, y) = f(x \oplus h_1, y \oplus h_2) - f(x \oplus h_1, y) - f(x, y \oplus h_2) + f(x, y)$ . Нам понадобится лемма (см. [1, гл. 4]).

**Лемма.** Пусть  $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $|D_n(x)| \leq \min(n, N/x)$  при  $x \in (0, 1)$ .

Из леммы выводится неравенство

$$\|D_n(x)D_m(y)\|_p \leq C(nm)^{1-1/p}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L^r[0, 1]^2$ ,  $1 < r < \infty$ , такова, что  $\hat{f}(n, m) \geq 0$  при всех  $n, m \in \mathbb{N}$  и  $\hat{f}(i, j) \geq C\hat{f}(k, l)$  при  $k \in [i, 2i - 1]$ ,  $l \in [j, 2j - 1]$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$(m_{k+1}m_{l+1})^{1-1/r} \hat{f}(m_{k+1}, m_{l+1}) \leq C\omega_{kl}^*(f)_r, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+.$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $A_{kl}(x, y) = \Delta_{h_1, h_2}^{11} f(x, y)$ , где  $h_1 = 1/m_{k+1}$ ,  $h_2 = 1/m_{l+1}$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}_+$ . Легко видеть, что ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(i, j) (\chi_i(1/m_{k+1}) - 1) (\chi_j(1/m_{l+1}) - 1) \chi_i(x) \chi_j(y).$$

В силу ортогональности системы  $\{\chi_n(x)\chi_m(y)\}_{n,m=0}^{\infty}$  имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \int_0^1 A_{kl}(x, y) (D_{2m_k}(x) - D_{m_k}(x)) (D_{2m_l}(y) - D_{m_l}(y)) dx dy \right| = \\ & = \left| \sum_{s=m_k}^{2m_k-1} \sum_{j=m_l}^{2m_l-1} \hat{f}(s, j) (\chi_s(1/m_{k+1}) - 1) (\chi_j(1/m_{l+1}) - 1) \right|. \quad (2) \end{aligned}$$

Для  $j \in [m_l, 2m_l - 1]$  имеем  $\chi_j(1/m_{l+1}) = \exp(2\pi i/p_{l+1})$ , а для  $s \in [m_k, 2m_k - 1]$  верно  $\chi_s(1/m_{k+1}) = \exp(2\pi i/p_{k+1})$ . Значит, при этих  $s, j$

$$\begin{aligned} & -\Im((\chi_i(1/m_{k+1}) - 1) (\chi_j(1/m_{l+1}) - 1)) = \\ & = (1 - \cos(2\pi/p_{k+1})) \sin(2\pi/p_{l+1}) (1 - \cos(2\pi/p_{l+1})) \sin(2\pi/p_{k+1}) = \\ & = 4 \sin(\pi/p_{k+1}) \sin(\pi/p_{l+1}) \sin(\pi/p_{k+1} + \pi/p_{l+1}). \quad (3) \end{aligned}$$

Если  $p_{k+1}, p_{l+1} \geq 3$ , то  $\pi/N < \pi/p_{k+1} + \pi/p_{l+1} < \pi - \pi/N$ , поэтому последнее произведение из (3) не меньше, чем  $4 \sin^3(\pi/N)$ . При  $p_{k+1} = p_{l+1} = 2$  и  $m_k \leq s \leq 2m_k - 1$ ,  $m_l \leq j \leq 2m_l - 1$ , имеем  $(1 - \chi_i(1/m_{k+1})) (1 - \chi_j(1/m_{l+1})) = 4$ . Наконец, при  $p_{k+1} = 2$ ,  $p_{l+1} \neq 2$  находим, что

$$(1 - \chi_s(1/m_{k+1})) (1 - \chi_j(1/m_{l+1})) = 2|\chi_j(1/m_{l+1}) - 1| \geq 2 \sin^2(\pi/N).$$

Из этих оценок, (1), (2) и неравенства Гельдера следует, что  $(1/r + 1/r' = 1)$

$$\omega_{kl}^*(f)_r m_{k+1}^{1/r} m_{l+1}^{1/r} \geq C_1 \|A_{kl}\|_r \|(D_{m_{k+1}}(x) - D_{m_k}(x)) (D_{m_{l+1}}(y) - D_{m_l}(y))\|_{r'} \geq$$

$$\geq C_2 \sum_{s=m_k}^{2m_k-1} \sum_{j=m_l}^{2m_l-1} \hat{f}(s, j) \geq C_3 m_{k+1} m_{l+1} \hat{f}(m_{k+1}, m_{l+1}).$$

В последнем неравенстве также использована ограниченность  $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $f \in L^p[0, 1)^2$ ,  $1 < p < \infty$ , удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для любых  $n, m \in \mathbb{N}$  верно

$$\hat{f}(n, m) = O\left((nm)^{1/p-1} E_{\left[\frac{n+1}{2}\right], \left[\frac{m+1}{2}\right]}(f)_p\right).$$

**Доказательство.** Пусть  $n = 2k - 1$ ,  $m = 2l - 1$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ . Снова имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{2k-1} \sum_{j=l}^{2l-1} \hat{f}(i, j) &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) (D_{2k}(x) - D_k(x)) (D_{2l}(y) - D_l(y)) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - t_{kl}(x, y) (D_{2k}(x) - D_k(x)) (D_{2l}(y) - D_l(y))) dx dy, \end{aligned}$$

где  $t_{kl} \in \mathcal{P}_{k,l}$  и  $\|f - t_{kl}\|_p = E_{kl}(f)_p$ . Применяя (1), находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{2k-1} \sum_{j=l}^{2l-1} \hat{f}(i, j) &\leq \|f - t_{kl}\|_p \|(D_{2k}(x) - D_k(x)) (D_{2l}(y) - D_l(y))\|_{p'} \leq \\ &\leq C_1 (kl)^{1/p} E_{kl}(f)_p. \end{aligned}$$

Но в силу условия теоремы  $\sum_{i=k}^{2k-1} \sum_{j=l}^{2l-1} \hat{f}(i, j) \geq C_2 kl \hat{f}(2k - 1, 2l - 1)$  мы получаем утверждение теоремы в случае  $n = 2k - 1$ ,  $m = 2l - 1$ . Остальные случаи следуют из разобранного.

Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 являются двумерными мультипликативными аналогами результатов из [2] и [3].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : ЭЛМ, 1981.
2. Aljancic S., Tomić M. Über den Stetigkeitsmodul von Fourier-Reihen mit monotonen Koeffizienten // Math. Zeitschrift. 1965. Vol. 88, № 3. P. 274–284.

3. *Конюшков А. А.* Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сборник. 1958. Т. 44, № 1. С. 53–84.

УДК 517.984

**А. Е. Федосеев**

## О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

В данной статье исследуется обратная задача на конечном отрезке для оператора Штурма—Лиувилля, имеющего неинтегрируемую особенность во внутренней точке.

Рассмотрим краевую задачу  $\mathcal{L}$  на конечном отрезке  $0 < x < T$  вида

$$\ell y = -y'' + \left( \frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x) \right) y = \lambda y, \quad 0 < x < T, \quad (1)$$

$$y(0) = y(T) = 0$$

с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя в точке  $a > 0$ , где  $q(x)$  — комплекснозначная функция,  $\nu_0$  — комплексное число. Положим  $\lambda = \rho^2$ ,  $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$  и, для определенности,  $\text{Im } \rho \geq 0$ ,  $\text{Re } \nu > 0$ ,  $\nu \neq 1, 2, \dots$  Предположим, что  $q(x)|x-a|^{\min(0, 1-2\text{Re } \nu)} \in L(0, T)$ .

Теоремы единственности разрешимости обратной задачи для уравнения (1), заданного на конечном отрезке для различных краевых условий и с условием склейки частного вида, рассматривались в работах [1, 2]. В данной работе рассматриваются произвольные условия склейки, а также предполагается, что спектр краевой задачи  $\mathcal{L}$  может состоять из кратных собственных значений.

Рассмотрим функции

$$C_j(x, \lambda) = (x-a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} (\rho(x-a))^{2k}, \quad j = 1, 2,$$

где

$$\mu_j = (-1)^j \nu + 1/2, \quad c_{10} c_{20} = (2\nu)^{-1},$$

$$c_{jk} = (-1)^k c_{j0} \left( \prod_{s=1}^k ((2s + \mu_j)(2s + \mu_j - 1) - \nu_0) \right)^{-1}.$$

Здесь и в дальнейшем  $z^\mu = \exp(\mu(\ln |z| + i \arg z))$ ,  $\arg z \in (-\pi, \pi]$ . При  $x > a$  и  $x < a$  функции  $C_j(x, \lambda)$  являются решениями уравнения (1) при  $q(x) \equiv 0$ . Пусть функции  $s_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$ , являются решениями следующих интегральных уравнений при  $x > a$  и  $x < a$ :

$$s_j(x, \lambda) = C_j(x, \lambda) + \int_a^x g(x, t, \lambda)q(t)s_j(t, \lambda) dt,$$

где  $g(x, t, \lambda) = C_1(t, \lambda)C_2(x, \lambda) - C_1(x, \lambda)C_2(t, \lambda)$ .

Функции  $s_j(x, \lambda)$  образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) и при каждом фиксированном  $x$  являются целыми по  $\lambda$  порядка  $1/2$ .

Пусть задана матрица  $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$ ,  $\det A \neq 0$  с комплексными  $a_{jk}$ . Введем функции  $\{\sigma_j(x, \lambda)\}_{j=1,2}$ ,  $x \in J_- \cup J_+$ ,  $J_\pm = \{\pm(x - a) > 0\}$  по формуле

$$\sigma_j(x, \lambda) = \begin{cases} s_j(x, \lambda), & x \in J_-, \\ \sum_{k=1}^2 a_{kj}s_k(x, \lambda), & x \in J_+. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений  $\{\sigma_j(x, \lambda)\}$  будет использоваться для склейки решений в окрестности особой точки  $x = a$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что решение  $y(x, \lambda)$  уравнения (1) удовлетворяет условию склейки порожденному матрицей перехода  $A$ , если  $y(x, \lambda)$ , может быть представлено в виде

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 \chi_j(\lambda)\sigma_j(x, \lambda) \quad \text{для всех } x \in J_- \cup J_+,$$

где коэффициенты  $\chi_j(\lambda)$  не зависят от  $x$ .

Введем функцию  $S(x, \lambda)$  являющуюся решением дифференциального уравнения (1) при  $x < a$ ,  $x > a$  и удовлетворяющую начальным условиям  $S'(0, \lambda) = 1$ ,  $S(0, \lambda) = 0$ .

Обозначим  $\Delta(\lambda) = S(T, \lambda)$ . Функция  $\Delta(\lambda)$  является целой по  $\lambda$ , и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи  $\mathcal{L}$ .

Обозначим через  $m_n$  кратность собственного значения  $\lambda_n$  ( $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m_n-1}$ ) и положим  $\mathbb{S} = \{n : n - 1 \in \mathbb{N}, \lambda_{n-1} \neq \lambda_n\} \cup \{1\}$ .

Пусть  $\Phi(x, \lambda)$  – решение уравнения (1) при условиях  $\Phi(0, \lambda) = 1$ ,  $\Phi(T, \lambda) = 0$ . Обозначим  $M(\lambda) = \Phi'(0, \lambda)$ . Функции  $\Phi(x, \lambda)$  и  $M(\lambda)$  называются *решением Вейля* и *функцией Вейля* для  $\mathcal{L}$  соответственно.

**Лемма 1.** Зафиксируем  $n \in \mathbb{S}$ . В окрестности точки  $\lambda = \lambda_n$  функция Вейля  $M(\lambda)$  имеет представление

$$M(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{m_n-1} \frac{M_{n+\nu}}{(\lambda - \lambda_n)^{\nu+1}} + M_n^*(\lambda),$$

где  $m_n$  – кратность  $\lambda_n$ ,  $M_n^*(\lambda)$  регулярна при  $\lambda = \lambda_n$ .

**Определение 2.** Последовательность  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  называется последовательностью Вейля, а набор  $\mathcal{D} := \{\lambda_n, M_n\}_{n \geq 1}$  называется спектральными данными.

**Задача 1.** По заданным спектральным данным  $\mathcal{D} := \{\lambda_n, M_n\}_{n \geq 1}$  построить потенциал  $q(x)$ .

**Теорема 1.** Спектральные данные  $\{\lambda_n, M_n\}_{n \geq 1}$  однозначно определяют краевую задачу  $\mathcal{L}$ .

Доказательство теоремы конструктивно и дает процедуру решения обратной задачи 1. При этом используются и развиваются идеи метода спектральных отображений [3].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проект 13-01-00134).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Yurko V. A. Integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval // Integral Transforms and Special Functions, 1997. Vol. 5, №3,4. P. 309–322.
2. Yurko V. A. Spectral analysis for differential operators with singularities // Abstract and Applied Analysis. 2004. Vol. 9, №2. P. 165–182.
3. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

УДК 517.51

А. А. Хромов

### О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

В данной работе на базе оператора, приведенного в [1], строится модификация оператора Стеклова, позволяющая получать приближения, равномерно сходящиеся к функции и ее производной на всем отрезке задания функции.

Пусть  $f(x) \in C^1[0, 1]$ .



Из операторов  $S_{\alpha 1} f = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x f(t) dt$ ,  $S_{\alpha 2} f = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} f(t) dt$  построим операторы:

$$S_{\alpha}^{(2)} f = \begin{cases} S_{\alpha 2}^2 f & \text{при } x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1}^2 f & \text{при } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

и

$$DS_{\alpha}^{(2)} f = \begin{cases} DS_{\alpha 2}^2 f & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ DS_{\alpha 1}^2 f & \text{при } x \in [1/2, 1] \end{cases},$$

где  $D$  – оператор дифференцирования по  $x$ . Из-за разрывности функций  $S_{\alpha}^{(2)} f$  и  $DS_{\alpha}^{(2)} f$  в точке  $x = 1/2$  будем использовать метрику пространства  $L_{\infty}[0, 1]$ , норма в котором в нашем случае будет определяться по формуле

$$\|\cdot\|_{L_{\infty}[0,1]} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}.$$

**Лемма 1.** Операторы  $S_{\alpha 1}^2$  и  $S_{\alpha 2}^2$  имеют вид

$$S_{\alpha 1}^2 f = \frac{1}{\alpha^2} \left[ \int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} (2\alpha - (x-t)) f(t) dt + \int_{x-\alpha}^x (x-t) f(t) dt \right],$$

$$S_{\alpha 2}^2 f = \frac{1}{\alpha^2} \left[ \int_x^{x+\alpha} (t-x) f(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t-x)) f(t) dt \right]$$

( $\alpha \leq 1/4$ ).

Доказательство получается, если к повторным интегралам в выражениях для операторов  $S_{\alpha 1}^2$  и  $S_{\alpha 2}^2$  применить формулу интегрирования по частям.

**Лемма 2.** Операторы  $DS_{\alpha 1}^2$  и  $DS_{\alpha 2}^2$  имеют вид

$$DS_{\alpha 1}^2 f = \frac{1}{\alpha^2} \left[ - \int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} f(t) dt + \int_{x-\alpha}^x f(t) dt \right],$$

$$DS_{\alpha 2}^2 f = \frac{1}{\alpha^2} \left[ - \int_x^{x+\alpha} f(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} f(t) dt \right].$$

**Теорема 1.** Для любой непрерывной функции  $f(x)$  выполняется сходимость

$$\|S_{\alpha}^{(2)} f - f\|_{L_{\infty}[0,1]} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

Доказательство получается, если использовать равенство  $S_{\alpha j}^2 1 = 1$ ,  $j = 1, 2$ , из которого получается оценка:  $|S_{\alpha j}^2 f - f| \leq \omega(2\alpha)$ ,  $j = 1, 2$ , где  $\omega(2\alpha)$  – модуль непрерывности функции  $f(x)$ .

**Теорема 2.** Для  $f(x) \in C^1[0, 1]$  выполняется сходимость:

$$\|DS_{\alpha}^{(2)} f - f'\|_{L_{\infty}[0,1]} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** В формулах леммы 1 заменим дифференцирование по  $x$  на дифференцирование по  $t$ , после чего возьмем соответствующие интегралы по частям, "перебросив" производную на функцию  $f(x)$ . Поскольку подстановки при этих вычислениях обратятся в ноль, мы придем к равенствам:  $DS_{\alpha j}^2 f = S_{\alpha j}^2 f'$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда из теоремы 1 будет следовать утверждение теоремы 2.

Теорема доказана.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П., Хромова Г. В. Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения: тез. докл. 15-й Саратов. зимн. школы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 181 с.

УДК 517.51

**А. П. Хромов, Г. В. Хромова**

### ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАНДАУ

В данной работе приводится некоторая модификация оператора Ландау, позволяющая получать равномерные приближения к непрерывной функции на всем отрезке ее задания.

В теории приближений хорошо известны операторы Ландау:

$$L_n f = \frac{1}{2J_n} \int_0^1 (1 - (x - t)^2)^n f(t) dt,$$

где  $J_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$ .

Известно [1], что для любой непрерывной функции, заданной на отрезке  $[0, 1]$ , эти операторы дают равномерные приближения к ней внутри отрезка.

Мы здесь рассмотрим операторы вида

$$\hat{L}_n f = \begin{cases} \hat{L}_{1n} f, & x \in [1/2, 1] \\ \hat{L}_{2n} f, & x \in [0, 1/2], \end{cases}$$

где

$$\hat{L}_{1n} f = \frac{J_{1n} f}{J_n}, \quad \hat{L}_{2n} f = \frac{J_{2n} f}{J_n}, \quad (1)$$

$$J_{1n} = \int_0^x (1 - (x - t)^2)^n f(t) dt, \quad (2)$$

$$J_{2n} = \int_x^1 (1 - (x - t)^2)^n f(t) dt. \quad (3)$$

**Лемма 1.** *Справедливы представления:*

$$\hat{L}_{1n} 1 = 1 - \frac{1}{J_n} \int_x^1 (1 - t^2)^n dt, \quad (4)$$

$$\hat{L}_{2n} 1 = 1 - \frac{1}{J_n} \int_{1-x}^1 (1 - t^2)^n dt. \quad (5)$$

**Доказательство.** Положив в (1), (2), (3)  $f(x) = 1$  и сделав замену  $x - t = \tau$  в (2),  $t - x = \tau$  - в (3), придем к представлениям:

$$\hat{L}_{1n} 1 = \frac{1}{J_n} \int_0^x (1 - t^2)^n dt,$$

$$\hat{L}_{2n} 1 = \frac{1}{J_n} \int_0^{1-x} (1 - t^2)^n dt,$$

а отсюда получаем (4), (5).

**Лемма 2.** *Справедливы представления:*

$$\hat{L}_{1n} f - f = \frac{1}{J_n} \left[ \int_0^x (1 - (x - t)^2)^n (f(t) - f(x)) dt + f(x) \int_x^1 (1 - t^2)^n dt \right], \quad (6)$$

$$\hat{L}_{2n}f - f = \frac{1}{J_n} \left[ \int_x^1 (1 - (t-x)^2)^n (f(t) - f(x)) dt + f(x) \int_{1-x}^1 (1 - t^2)^n dt \right], \quad (7)$$

**Теорема.** Для любой  $f(x) \in C[0, 1]$  при  $n \rightarrow \infty$  выполняется сходимость

$$\left\| \hat{L}_n f - f \right\|_{L_\infty[0,1]} \rightarrow 0,$$

где  $\|\cdot\|_{L_\infty[0,1]} = \max \left\{ \|\cdot\|_{C_{[0,1/2]}}, \|\cdot\|_{C_{[1/2,1]}} \right\}$ .

**Доказательство.** Представим первый интеграл в правой части (6) в виде

$$\int_0^x = \int_0^{x-\delta_1} + \int_{x-\delta_1}^x \equiv J_n^{(1)} + J_n^{(2)},$$

где  $0 < \delta_1 < 1/2$ . Далее, имеем:

$$\left| J_n^{(1)} \right| \leq 2K \int_{\delta_1}^x (1 - t^2)^n dt,$$

где  $K = \|f\|_{C[0,1]}$ . Учитывая, что в  $J_n^{(1)}$   $x \in [1/2, 1]$ , придем к оценке:

$$\left| J_n^{(1)} \right| \leq K \frac{(1 - \delta_1^2)^{n+1}}{\delta_1(n+1)}.$$

Для  $J_n^{(2)}$  получим оценку:

$$\left| J_n^{(2)} \right| \leq \omega(\delta_1) \int_0^{\delta_1} (1 - t^2)^n dt,$$

где  $\omega(\delta_1)$  – модуль непрерывности функции  $f(x)$ . Используя оценки

$$J_n \geq \frac{1}{n+1} \text{ и } J_n \geq \int_0^{\delta_1} (1 - t^2)^n dt,$$

приходим к оценкам:

$$\frac{\left| J_n^{(1)} \right|}{J_n} \leq 2K \frac{(1 - \delta_1^2)^{n+1}}{\delta_1}, \quad \frac{\left| J_n^{(2)} \right|}{J_n} \leq 2\omega(\delta_1). \quad (8)$$

При оценке второго слагаемого в (6) учтем, что  $x \in [1/2, 1]$ , используем замену  $1 - t^2 = \tau$  и оценку  $\sqrt{1 - t} \geq \frac{1}{2}$ . Тогда получим:

$$\left| \frac{f(x) \int_x^1 (1 - t^2)^n dt}{J_n} \right| \leq K (3/4)^{n+1}. \quad (9)$$

Из (8), (9) получаем оценку

$$\left\| \hat{L}_{1n} f - f \right\|_{C_{[1/2, 1]}} \leq 2K \frac{(1 - \delta_1^2)^{n+1}}{\delta_1} + 2\omega(\delta_1) + K (3/4)^{n+1}. \quad (10)$$

Аналогичные выкладки проводим и для слагаемых в правой части (7), предварительно представив первый интеграл в виде:

$$\int_x^1 = \int_x^{x+\delta_1} + \int_{x+\delta_1}^1.$$

Тогда придем к тому, что норма  $\left\| \hat{L}_{2n} f - f \right\|_{C_{[0, 1/2]}}$  имеет точно такую же оценку, что и норма  $\left\| \hat{L}_{1n} f - f \right\|_{C_{[1/2, 1]}}$ . Отсюда получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: ГИТЛ, 1954.

УДК 517.984

**В. А. Юрко**

### КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

1. Рассмотрим краевую задачу  $B$  вида

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, T), \quad q(x) \in L(0, \pi), \quad (1)$$

$$y(0) = \alpha y(T), \quad y'(0) - hy(0) = \beta y'(T), \quad (2)$$

$$y(b_j+0) = \gamma_j y(b_j-0), \quad y'(b_j+0) = \gamma_j^{-1} y'(b_j-0) + \eta_j y(b_j-0), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (3)$$

$$0 < b_1 < \dots < b_{N-1} < b_N = T,$$

где  $q(x), \alpha, \beta, h, \gamma_j, \eta_j$  вещественны и  $\alpha\beta \neq 0, \gamma_j \neq 0$ .

Основной целью статьи является исследование обратной задачи восстановления параметров краевой задачи (1)–(3) по заданным спектральным характеристикам. Обратные задачи с условием разрыва внутри интервала часто возникают в математике, механике, радиоэлектронике, геофизике и других областях естествознания и техники. Как правило, такие задачи связаны с разрывными, или негладкими, свойствами среды (см., например, работы [1–5] и библиографические списки к ним). Обратные задачи такого типа связаны также с исследованием разрывных решений нелинейных интегрируемых уравнений математической физики. Кроме того, ряд обратных задач для дифференциальных операторов на геометрических графах сводится к решению обратной задачи для  $B$ , что дополнительно стимулировало появление данной статьи.

Для классических операторов Штурма–Лиувилля без разрывов обратные задачи достаточно полно изучены (см. [6]). Наличие условий разрыва вносит существенные качественные изменения в исследование. Разрывные обратные задачи для операторов Штурма – Лиувилля с распадающимися краевыми условиями рассматривались в [4, 5] и других работах. Квазипериодические обратные задачи без разрывов изучались в [7]. Квазипериодические разрывные обратные задачи до настоящего времени не исследовались.

**2.** Пусть для определенности  $\alpha > \beta > 0, \gamma_j > 0, j = \overline{1, N-1}$ . Остальные случаи исследуются аналогично. Через  $S_m(x, \lambda), m = 1, 2$ , обозначим решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям разрыва (3) и начальным условиям:

$$S_1(0, \lambda) = S_2'(0, \lambda) = 0, \quad S_1'(0, \lambda) = S_2(0, \lambda) = 1.$$

Пусть  $\lambda = \rho^2, \tau := \text{Im } \rho \geq 0, \Pi_\delta := \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}, \delta \in (0, \pi/2)$ .

**Теорема 1.** *Фиксируем  $j = \overline{1, N-1}$ . При  $x \in (b_j, b_{j+1}), \nu = 0, 1, m = 1, 2, |\rho| \rightarrow \infty$ ,*

$$S_m^{(\nu)}(x, \lambda) = \left( \prod_{k=1}^j \xi_k^+ \right) \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left( C_m(x, \rho) + \sum_{k=1}^j \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq j} \left( \prod_{i=1}^k \frac{\xi_{\mu_i}^-}{\xi_{\mu_i}^+} \right) C_m \cdot \right. \\ \left. \cdot (\alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x), \rho) \right) + O(\rho^{\nu+m-3} e^{\tau x}), \quad \xi_j^\pm := \frac{\gamma_j + \gamma_j^{-1}}{2},$$

$$C_1(x, \rho) := \frac{\sin \rho x}{\rho}, \quad C_2(x, \rho) := \cos \rho x, \quad \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x) := 2 \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} b_{\mu_i} + (-1)^k x.$$

Обозначим

$$\varphi(x, \lambda) = S_2(x, \lambda) + hS_1(x, \lambda), \quad d_m(\lambda) = S_m(T, \lambda), \quad M(\lambda) = -\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}.$$

Собственные значения  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  задачи  $B$  совпадают с нулями характеристической функции:

$$a(\lambda) = \alpha\varphi(T, \lambda) + \beta S_1'(T, \lambda) - (1 + \alpha\beta). \quad (4)$$

Используя теорему 1, получаем при  $|\rho| \rightarrow \infty$ ,  $\rho \in \Pi_\delta$ :

$$a(\lambda) = \frac{\alpha + \beta}{2} \xi_N e^{-i\rho T} [1], \quad d(\lambda) = -\frac{1}{2i\rho} \xi_N e^{-i\rho T} [1], \quad \xi_N := \prod_{j=1}^{N-1} \xi_j^+. \quad (5)$$

Все нули  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  функции  $d_1(\lambda)$  являются простыми, т. е.  $\dot{d}_1(z_n) \neq 0$ , где  $\dot{d}_1(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} d_1(\lambda)$ . Обозначим  $M_n = \operatorname{Res}_{\lambda=z_n} M(\lambda) = -\frac{d_2(z_n)}{\dot{d}_1(z_n)}$ . Последовательность  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  называется *последовательностью Вейля*.

**3.** Положим

$$D(\lambda) = \alpha\varphi(T, \lambda) + \beta S_1'(T, \lambda),$$

$$Q(\lambda) = \alpha\varphi(T, \lambda) - \beta S_1'(T, \lambda), \quad \omega_n = \operatorname{sign} Q(z_n), \quad \Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}.$$

Так как  $\varphi(T, \lambda)S_1'(T, \lambda) - \varphi'(T, \lambda)S_1(T, \lambda) = 1$ , то

$$Q^2(\lambda) = D^2(\lambda) - 4\alpha\beta(1 + \varphi'(T, \lambda)S_1(T, \lambda)),$$

и, следовательно,

$$Q(z_n) = \omega_n \sqrt{D^2(z_n) - 4\alpha\beta}. \quad (6)$$

Пусть  $\alpha\beta$  известно априори. Например, для самосопряженного случая  $\alpha\beta = 1$ . Обратная задача ставится следующим образом.

**Обратная задача 1.** Даны  $a(\lambda)$ ,  $d(\lambda)$ ,  $\Omega$ , построить  $q(x)$ ,  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_j$ ,  $\eta_j$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ .

Данная обратная задача является обобщением классической периодической обратной задачи без разрывов (см. [7]).

**Теорема 2.** Задание  $a(\lambda)$ ,  $d(\lambda)$  и  $\Omega$  однозначно определяет  $q(x)$ ,  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_j$  и  $\eta_j$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ . Решение Обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.

### Алгоритм 1.

- 1) Вычисляем  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\xi_N$ , используя (5).
- 2) Строим  $D(\lambda) = a(\lambda) + (1 + \alpha\beta)$ .
- 3) Находим нули  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  функции  $d_1(\lambda)$ .
- 4) Вычисляем  $Q(z_n)$  по формуле (6).
- 5) Строим  $d_2(z_n)$  по формуле

$$d_2(z_n) = \frac{1}{2\alpha} (D(z_n) + Q(z_n)).$$

- 6) Находим  $\dot{d}_1(z_n)$ .
- 7) Вычисляем последовательность Вейля  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  по формуле

$$M_n = -\frac{d_2(z_n)}{\dot{d}_1(z_n)}.$$

- 8) По заданным спектральным данным  $\{z_n, M_n\}_{n \geq 1}$  строим  $q(x)$ ,  $\gamma_j$ ,  $\eta_j$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ , решая вспомогательную обратную задачу Дирихле (подробнее см. [5]).
- 8) Находим  $S'_1(T, \lambda)$  и  $S_2(T, \lambda)$ .
- 9) Вычисляем  $h$ , используя (4).

**Замечание 1.** Аналогичные результаты верны и в более общем случае, когда величины  $q(x)$ ,  $\gamma_j$ ,  $\eta_j$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $h$  являются комплексными и  $\xi_j^+ \neq 0$ ,  $\alpha\beta \neq 0$ ,  $\alpha + \beta \neq 0$ . В этом случае последовательности  $\{M_n\}_{n \geq 1}$  и  $\Omega$  вводятся сложнее, аналогично несамосопряженной задаче без разрывов (см. [7]).

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).*

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Lapwood F., Usami T.* Free Oscillations of the Earth. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
2. *Krueger R.* Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties. // J. Math. Phys. 1982. Vol. 23, № 3. P. 396–404.
3. *Anderssen R. S.* The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth. Geophys. // J. R. Astr. Soc. 1997. Vol. 50. P. 303–309.
4. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems // Comm. Pure Appl. Math. 1984. Vol. 37. P. 539–577.
5. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems, Integral Transforms and Special Functions. 2000. Vol. 10, № 2. P. 141–164.
6. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
7. *Yurko V. A.* An inverse spectral problem for non-selfadjoint Sturm-Liouville operators with nonseparated boundary conditions // Tamkang J. Math. 2012. Vol. 43, № 2. P. 289–299.



УДК 539.3

Н. С. Анофрикова, К. М. Денисова

**ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ НИЗКОЧАСТОТНЫЕ  
ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ  
ДВУХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ**

В работах [1, 2] описаны асимптотические методы, разработанные для построения приближенных теорий для двухслойных вязкоупругих пластин и многослойных упругих оболочек. В данной работе показано применение этих методов к выводу тангенциальных низкочастотных длинноволновых приближений трехмерных уравнений теории вязкоупругости для случая двухслойной оболочки произвольного очертания.

Рассмотрим полубесконечную двухслойную оболочку произвольного очертания, оба слоя которой выполнены из изотропных вязкоупругих материалов. Считаем, что вязкоупругое поведение материалов описывается моделью стандартного вязкоупругого тела с условием упругого объемного расширения. Введем триортогональную систему координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  – параметры линий кривизны срединной поверхности оболочки,  $\alpha_3$  – расстояние по нормали от срединной поверхности. Заметим, что поверхность  $\alpha_3 = 0$  соответствует срединной поверхности оболочки и в общем случае не является поверхностью раздела слоев. Примем следующие обозначения:  $l$  – номер слоя ( $l = 1, 2$ ),  $2h_l$  – толщина слоя,  $2h$  – толщина оболочки. Трехмерные динамические уравнения теории вязкоупругости для каждого слоя оболочки возьмем в виде:

уравнения движения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{ii}^{(l)}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{ji}^{(l)}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{3i}^{(l)}}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii}^{(l)} - \sigma_{jj}^{(l)}) + \\ & + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij}^{(l)} + \sigma_{ji}^{(l)}) + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{3i}^{(l)} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{i3}^{(l)} - \rho \frac{\partial^2 v_i^{(l)}}{\partial t^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{i3}^{(l)}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{j3}^{(l)}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(l)}}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \sigma_{ii}^{(l)} - \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{jj}^{(l)} + \\ & + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial \alpha_3} \sigma_{33}^{(l)} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{i3}^{(l)} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{j3}^{(l)} - \rho \frac{\partial^2 v_3^{(l)}}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения состояния

$$E_l f_{2l} \left( \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i^{(l)}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j^{(l)} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_3^{(l)} \right) = f_{3l} \sigma_{ii}^{(l)} + f_{4l} (\sigma_{jj}^{(l)} + \sigma_{33}^{(l)}),$$

$$E_l f_{2l} \left( \frac{\partial v_3^{(l)}}{\partial \alpha_3} \right) = f_{3l} \sigma_{33}^{(l)} + f_{4l} (\sigma_{ii}^{(l)} + \sigma_{jj}^{(l)}), \quad (2)$$

$$\frac{E_l}{2(1+\nu_l)} f_{2l} \left( \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_i^{(l)}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_j^{(l)}}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_i^{(l)} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_j^{(l)} \right) = f_{1l} \sigma_{ij}^{(l)},$$

$$\frac{E_l}{2(1+\nu_l)} f_{2l} \left( \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_3^{(l)}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial v_i^{(l)}}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} v_i^{(l)} \right) = f_{1l} \sigma_{i3}^{(l)}, \quad (i \neq j = 1, 2),$$

где  $\sigma_{ij}^{(l)}$  – напряжения,  $v_i^{(l)}$  – перемещения в  $l$ -м слое оболочки,  $t_{1l}$  – характерное время релаксации,  $t_{2l}$  – характерное время ползучести,  $E_l, \nu_l$  – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициент Пуассона,  $\rho_l$  – плотность материала слоя,  $t$  – время,  $H_i$  – параметры Ламе,  $f_{1l}, f_{2l}, f_{3l}, f_{4l}$  – дифференциальные операторы, определяемые выражениями:  $f_{kl} = \left( \frac{1}{t_{kl}} + \frac{\partial}{\partial t} \right)$ ,  $f_{3l} = \frac{1}{3} \left( \frac{1-2\nu_l}{t_{2l}} + 2 \frac{1+\nu_l}{t_{1l}} \right) + \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $f_{4l} = \frac{1}{3} \left( \frac{1-2\nu_l}{t_{2l}} - \frac{1+\nu_l}{t_{1l}} \right) - \nu_l \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $k = 1, 2$ .

Коэффициенты Ламе выбранной триортогональной системы координат задаются соотношениями

$$H_i = A_i \left( 1 + \frac{\alpha_3}{R_i} \right) \quad (i = 1, 2), \quad H_3 = 1, \quad (3)$$

где  $A_i$  и  $R_i$  не зависят от  $\alpha_3$  и представляют собой соответственно коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

Лицевые поверхности оболочки считаем свободными от напряжений. Тогда граничные условия на них имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha_3 = -h : \quad & \sigma_{3i}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)} = 0, \\ \text{при } \alpha_3 = h : \quad & \sigma_{3i}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия на стыке двух слоев оболочки, условия полного контакта имеют вид

$$\text{при } \alpha_3 = z_1 : \quad \sigma_{3i}^{(1)} = \sigma_{3i}^{(2)}, u_i^{(1)} = u_i^{(2)}, \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad (5)$$

где  $z_1 = h - 2h_1$ .

Произведем в уравнениях (1) – (2) растяжение масштабов независимых переменных по формулам:

$$\alpha_i = R\eta^q \xi_i, \alpha_3 = R\eta \zeta, t = Rc_{21}^{-1} \eta^a \tau, \quad (6)$$

где  $q$  – показатель изменяемости,  $a$  – показатель динамичности,  $c_{21}$  – скорость волны сдвига первого слоя,  $\eta = hR^{-1} \ll 1$  – относительная полутолщина оболочки,  $R$  – характерное значение радиусов кривизны срединной поверхности оболочки.

Предположим, что дифференцирование по безразмерным переменным  $\xi_i, \zeta, \tau$  не меняет асимптотического порядка неизвестных величин. Кроме того, будем рассматривать случай, когда скорости волн сдвига для материалов первого и второго слоев – величины одного порядка. Введение независимых переменных (6) позволяет методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории вязкоупругости (1), (2) вывести асимптотически приближенные уравнения для составляющих напряженно-деформированного состояния (НДС) при различных показателях изменяемости и динамичности [1, 2].

В настоящей работе остановимся на случае так называемых длинноволновых низкочастотных тангенциальных приближений. К этому виду относятся приближения, для которых показатели динамичности и изменяемости удовлетворяют неравенствам  $q < 1$ ,  $a < 1$  и связаны соотношением  $q = a$ .

Асимптотику НДС возьмем в виде

$$\begin{aligned} v_i^{(l)} &= R(\eta^q v_i^{0(l)} + \eta^{1+q} v_i^{1(l)}), v_3^{(l)} = R(\eta v_3^{0(l)} + \eta^{2q} v_3^{1(l)}), \sigma_{ii}^{(l)} = E_l(\sigma_{ii}^{0(l)} + \eta \sigma_{ii}^{1(l)}), \\ \sigma_{ij}^{(l)} &= E_l(\sigma_{ij}^{0(l)} + \eta \sigma_{ij}^{1(l)}), \sigma_{3i}^{(l)} = E_l(\eta^{1-q} \sigma_{3i}^{0(l)} + \eta^{2-q} \sigma_{3i}^{1(l)}), \\ \sigma_{33} &= E_l(\eta^{2q-2} \sigma_{33}^{0(l)} + \eta \sigma_{33}^{1(l)}). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь предполагается, что величины с индексами «0» и «1» сверху имеют один и тот же асимптотический порядок. Величины с индексом «0» соответствуют основному НДС, совпадающему с НДС плоского слоя [1], величины с индексом «1» – дополнительному НДС, учитывают влияние кривизны оболочки.

Подставляя (7) в (1), (2), записанные в безразмерных переменных (6), отбрасывая члены порядка  $O(\eta^{2-2q})$ , приравнивая члены одинакового порядка по  $\eta$ , интегрируя полученные системы уравнений, устанавливаем, что зависимость компонент НДС от нормальной координаты совпадает с аналогичной для случая упругой многослойной оболочки [2]. В частности, для компонент  $v_i^{0(l)}$ ,  $v_3^{1(l)}$ ,  $\sigma_{ii}^{0(l)}$ ,  $\sigma_{ij}^{0(l)}$ ,  $\sigma_{3i}^{0(l)}$ ,  $\sigma_{33}^{1(l)}$  эта зависимость имеет вид:

$$\begin{aligned} v_i^{0(l)} &= v_{i,0}^{0(l)}, & v_3^{1(l)} &= v_{3,0}^{1(l)}, & \sigma_{ii}^{0(l)} &= \sigma_{ii,0}^{0(l)}, & \sigma_{ij}^{0(l)} &= \sigma_{ij,0}^{0(l)}, \\ \sigma_{3i}^{1(l)} &= \sigma_{3i,0}^{1(l)} + \zeta \sigma_{3i,1}^{1(l)} + \zeta^2 \sigma_{3i,2}^{1(l)}, & \sigma_{33}^{0(l)} &= \sigma_{33,0}^{0(l)} + \zeta \sigma_{33,1}^{0(l)} + \zeta^2 \sigma_{33,2}^{0(l)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь величины с запятой в нижнем индексе не зависят от  $\zeta$ .

Подставляя представления (8) в граничные условия (4), (5), записанные в безразмерной форме, устанавливаем связь между компонентами НДС первого и второго слоев и получаем замкнутую систему относительно асимптотически главных компонент НДС  $v_i^{0(l)}$ ,  $v_3^{1(l)}$ ,  $\sigma_{ii}^{0(l)}$ ,  $\sigma_{ij}^{0(l)}$ . Приведем двумерную форму записи разрешающей системы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (T_i - T_j) + 2k_i S_{ij} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{h_1 E_1}{1 + \nu_1} f_{12} f_{21} + \frac{h_2 E_2}{1 + \nu_2} f_{11} f_{22} \right] \left( \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - k_i u_i + \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - k_j u_j \right) &= \\ = f_{11} f_{12} S_{ij}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 [h_1 E_1 f_{21} f_{31} (f_{32}^2 - f_{42}^2) + h_2 E_2 f_{22} f_{32} (f_{31}^2 - f_{41}^2)] \left( \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i u_j + \frac{w}{R_i} \right) - \\ - 2 [h_1 E_1 f_{21} f_{41} (f_{32}^2 - f_{42}^2) + h_2 E_2 f_{22} f_{42} (f_{31}^2 - f_{41}^2)] \left( \frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + k_j u_i + \frac{w}{R_j} \right) &= \\ = (f_{31}^2 - f_{41}^2)(f_{32}^2 - f_{42}^2) T_i, \end{aligned}$$

где приняты обозначения:  $k_i = \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}$ ,  $u_i = R \eta^q v_{i,0}^{0(l)}$ ,  $w = R \eta^{2q} v_{3,0}^{1(l)}$ ,  $T_i = 2(h_1 E_1 \sigma_{ii,0}^{0(1)} + h_2 E_2 \sigma_{ii,0}^{0(2)})$ ,  $S_{ij} = 2(h_1 E_1 \sigma_{ij,0}^{0(1)} + h_2 E_2 \sigma_{ij,0}^{0(2)})$ ,  $\rho = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h}$ .

Полученные уравнения могут быть использованы для построения решений вдали от фронтов волн при исследовании процессов распространения нестационарных волн в многослойных вязкоупругих оболочках.

Исследования выполнены при поддержке РФФИ (грант 11-01-00545).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анофрикова Н. С., Вильде М. В. Низкочастотные длинноволновые приближения трёхмерных динамических уравнений для случая двухслойной вязкоупругой пластины // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. №4(29). С. 115–121.
2. Вильде М. В., Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 56 – 64.

УДК 519.615

А. А. Барышев, Ю. В. Лысункина

### О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ К АНАЛИЗУ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ МАТНЕМАТІСА

Анализ распространения гармонических волн в системах с дисперсией приводит к необходимости определения зависимости между частотой волны  $\omega$  и волновым числом  $\chi$ . Эта функция задана неявно трансцендентным уравнением, которое в большинстве практически важных случаев имеет вид

$$F(\chi, \omega) = 0. \quad (1)$$

Такое уравнение будем называть *дисперсионным*. Свойства рассматриваемых в работе систем таковы, что при частоте  $\omega$  может одновременно распространяться бесконечное число волн. Под *решением дисперсионного уравнения* (1) будем понимать зависимость  $\chi = \chi(\omega)$ , либо  $\omega = \omega(\chi)$ , определяющую волну, распространяющуюся с частотой  $\omega$  и постоянной групповой скоростью.

Будем считать, что один из аргументов действительный, а другой, вообще говоря, комплексный. Функция  $F(\chi, \omega)$  – непрерывная почти всюду в области изменения своих аргументов. Конкретный вид этой функции даже в простейших задачах динамики сплошной среды является достаточно сложным для аналитического исследования. Поэтому нахождение корней (1), как правило, проводится численно [1]. Однако известные нам алгоритмы имеют существенные недостатки, связанные со значительными затратами машинного времени.

В работе предложен метод построения решения дисперсионного уравнения на основе метода продолжения решения по параметру [2]. Согласно этому методу продифференцируем исходное уравнение по  $\omega$ , и получим следующее дифференциальное уравнение, к которому следует добавить начальное условие:

$$F'_\omega + F'_\chi \chi'(\omega) = 0, \quad \chi(\omega_0) = \chi_0. \quad (2)$$

Это условие определяется корнем  $(\omega_0, \chi_0)$ , который удовлетворяет (1) и может быть найден численно в некоторой локальной области, определяемой механическим смыслом исходного уравнения. В частности, в задаче Релея—Лэмба [3] можно в качестве  $\omega_0$  использовать частоты записания ( $\chi_0 = 0$ ). Реализация предложенного метода решения дисперсионных уравнений достаточно удобна в пакете Wolfram Mathematica [4]. Покажем использование метода на примере дисперсионного уравнения Релея—Лэмба для симметричных мод упругого слоя. Оно имеет вид:

$$\gamma^4 \cosh \alpha \frac{\sinh \beta}{\beta} - \alpha^2 \chi^2 \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \cosh \beta = 0. \quad (3)$$

Определим в системе Mathematica функцию:

$$\text{RLS}(\chi\_ , \omega\_ ) := \frac{\left(\chi^2 - \frac{\omega^2}{2}\right)^2 \sinh\left(\sqrt{\chi^2 - \omega^2}\right) \cosh\left(\sqrt{\chi^2 - k^2\omega^2}\right)}{\sqrt{\chi^2 - \omega^2}} - \frac{\chi^2 (\chi^2 - k^2\omega^2) \cosh\left(\sqrt{\chi^2 - \omega^2}\right) \sinh\left(\sqrt{\chi^2 - k^2\omega^2}\right)}{\sqrt{\chi^2 - k^2\omega^2}}.$$

Требуемые в (2) производные подсчитаем с помощью встроенной функции  $D[\text{RLS}[\chi, \omega], x]$ , где  $x$  – это  $\omega$ , либо  $\chi$ . Определим в системе необходимые функции, как результат дифференцирования командами:  $\text{RLS}\omega[\omega\_ ] = D[\text{RLS}[\chi, \omega], \omega] /. \{\chi \rightarrow \chi[\omega]\}$ ;  $\text{RLS}\chi[\omega\_ ] = D[\text{RLS}[\chi, \omega], \chi] /. \{\chi \rightarrow \chi[\omega]\}$ . Начальные условия  $\omega_0, \chi_0$  можно определить графически путем построения графика функции  $F(\chi_0, \omega)$  в случае, когда  $\chi_0 \in R$  либо контурной карты поверхности функции  $\ln |F(x + iy, \omega_0)|$  в случае, когда  $\chi_0 \in C$ . Уточнение найденной графически пары  $\omega_0, \chi_0$  проводится функцией системы FindRoot. Для рассмотренного уравнения примем

$$\omega_0 = \{0.01, \pi, 2\pi, 8.81607, 3\pi, 4\pi, 20.5708, 8\pi\}, \chi_0 = 0$$

при  $\chi_0 \in R$ , а в случае  $\chi_0 \in C$  имеем:

$$\chi_0 = \{1.12537 + 2.10618i, 1.55157 + 5.35626i, 1.77554 + 8.53668i, 2.04685 + 14.8541i, 2.14189 + 18.0049i\}, \omega_0 = 0, 01.$$

Решение задачи Коши (2) осуществляется функцией NDSolve:

$$sR = \text{NDSolve}[\{\text{RLS}\chi[\omega]\chi'[\omega] + \text{RLS}\omega[\omega] = 0, \chi[\omega_0] = \chi_0\}, \chi, \{\omega, \omega_0, 27\}].$$

Каждое решение представляет собой ветвь дисперсионной кривой, некоторые из которых представлены на рис. 1. Эти графики построены командой:

$$\text{plR} = \text{Plot}[\text{Evaluate}[\chi[\omega]/.sR, \{\omega, \omega_0, 27\}], \\ \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 18.5\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thick}\}].$$

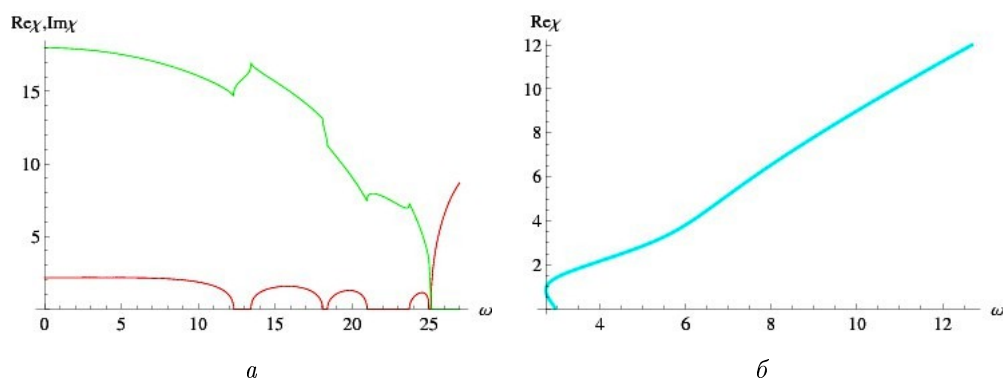


Рис. 1. Ветви дисперсионных кривых

В некоторых случаях  $RLS\chi[\omega]$  обращается в нуль. Тогда на основании метода продолжения решения по параметру следует поменять параметр продолжения. Так, вторая ветвь дисперсионной кривой приведена на рис. 1, б.

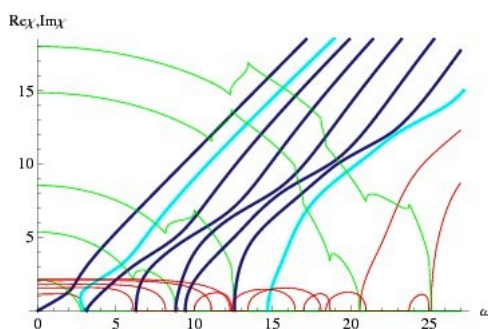


Рис. 2. Графики дисперсионных кривых

Совмещая полученные кривые на одном рисунке, в плоскостях  $(\omega, \text{Re}\chi)$  и  $(\omega, \text{Im}\chi)$  функцией Show получаем следующую картину, представленную на рис. 2.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Березин В. Л., Харитоновна К. Ю. Просмотрщик решений трансцендентных уравнений и его применение в задачах волоконной оптики // Математика. Механика.: сб. науч. трудов. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 168–170.

2. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования : метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 231 с.

3. Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю. Дисперсионные уравнения Релея—Лэмба : учеб. метод. пособие для студентов мех.-мат. ун-та. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. 18 с.

4. Wolfram Mathematics. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica/> (дата обращения: 12.03.2013).

УДК 539.3

А. В. Иванов, С. П. Шевырёв

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛИМФЫ В ЛИМФАТИЧЕСКИХ СОСУДАХ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

В статье приведены результаты численного решения задачи, связанные с течением лимфы в сосуде с упругими стенками. Лимфатическая жидкость предполагается однородной, несжимаемой, вязкой, ньютоновской жидкостью. Решение получено в программно-аппаратном комплексе Ansys, реализующем метод конечных элементов [1]. Течение лимфы описывается системой уравнений Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} * \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (4)$$

где  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ ,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы по осям x, y, z,  $\vec{v} = (u, v, w)$  – вектор скорости частиц жидкости,  $\rho$  – плотность лимфы, p – давление, t – время. Плотность лимфы составляет  $\rho=998$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент динамической вязкости равен  $\mu=0.0009$  Па\*с. На боковой поверхности заданы условия прилипания. Основное уравнение движения стенок артерии, называемое уравнением изменения импульса, выглядит следующим образом [1]:

$$M\ddot{\vec{u}} + C\dot{\vec{u}} + K\vec{u} = \vec{F}(t), \quad (5)$$

где M – матрица масс (слагаемое  $M\ddot{\vec{u}}$  является инерционной составляющей в уравнении) объединяет в себе массу движущегося объема, C – матрица демпфирования (слагаемое  $C\dot{\vec{u}}$  представляет собой демпфирующую составляющую) – слагаемое, обусловленное трением, K – матрица жесткости,  $\ddot{\vec{u}}$  – вектор ускорения,  $\dot{\vec{u}}$  – вектор скорости,  $\vec{u}$  – вектор перемещения узлов,  $\vec{F}(t)$  – вектор внешних сил. Матрица жесткости K представляет собой математическую запись физической связи между реакциями



в узлах элемента и узловыми перемещениями. Матрица жесткости является интегральной характеристикой, включающей как физические свойства материала рассчитываемой системы, так и геометрические свойства конечного элемента и сгенерированной сетки. В общем случае матрица жесткости уникальна для каждого элемента и имеет важнейшее значение при реализации метода конечных элементов [1]. Модуль Юнга для стенок сосуда  $E=5000 \text{ Н/м}^2$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.4$ [2 – 4]. Торцы стенок сосуда жестко закреплены. На поверхности сосуда приложены перемещения, изменяющиеся по синусоидальному закону (рис .1).

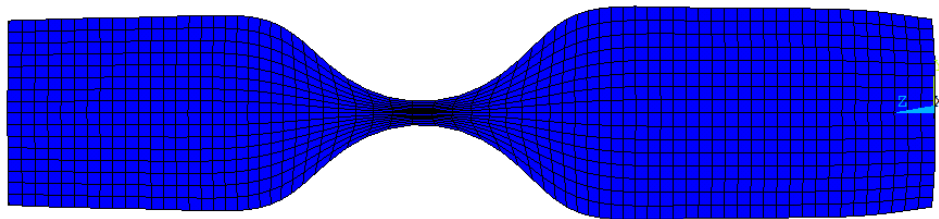


Рис. 1

При решении задачи выбирается сетка с большим количеством четырехгранников. Это сделано с целью получения наиболее качественных расчетов. Также для упрощения расчетов была взята четверть модели и поставлены соответствующие граничные условия симметрии для стенки лимфатического сосуда и для лимфатической жидкости. В результате решения задачи получена картина линий тока (рис. 2). Размер стрелки говорит о величине скорости: скорость максимальна в месте сжатия сосуда и равна нулю на боковой поверхности канала [2 – 4].

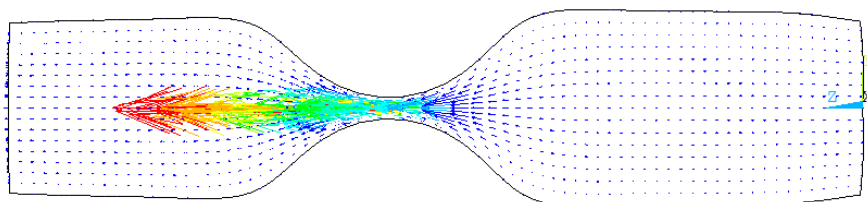


Рис. 2

Перемещения принимают следующие значения (рис. 3).

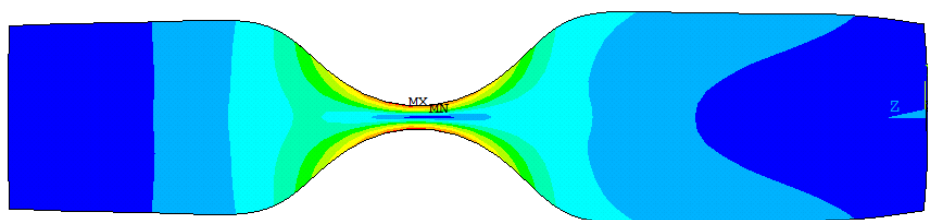


Рис. 3

Исходя из полученных данных видим, что в результате приложенных перемещений в средней части сосуда происходит движение лимфатической жидкости.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Release 14.0 documentation for ANSYS [Электронный ресурс], ANSYS, Inc - 2012.
2. *Elaheh Rahbar, James E. Moore Jr.* A model of radially expanding and contracting lymphangion // *Journal of Biomechanics* 2011. Vol. 44. P. 1001 – 1007.
3. *Arun M. Venugopal, Randolph H. Stewart, Glen A. Laine, Christopher M. Quick.* Nonlinear lymphangion pressure-volume relationship minimize edema // *Am. J. Physiol Heart Circ Physiol.* 2010. September. Vol.299(3) . P. H876–H882.
4. *David C. Zawieja.* Contractile Physiology of Lymphatics // *LYMPHATIC RESEARCH AND BIOLOGY.* 2009. Vol. 7, №2. P. 87–96.

УДК 532.5:533.6.011.5

**В. С. Кожанов, С. В. Сорокин**

### УЧЁТ ТРЕТЬЕЙ ПОПРАВКИ В ЗАДАЧЕ О ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ С ПРОТИВОДАВЛЕНИЕМ

Рассматривается задача об одномерном точечном взрыве (ТВ) в пространстве, заполненном идеальным совершенным газом при адиабатическом течении с противодавлением. Для решения задачи используется метод возмущений, в котором учёт противодействия реализуется с помощью поправок к автомодельному решению задачи о сильном точечном взрыве (СТВ). Этот метод впервые был применён Н.С. Мельниковой и независимо Сакураи, получившими первую поправку. В данной работе метод распространён до приближений третьего порядка. Приводятся детали алгоритма решения.

Система уравнений, описывающих течение в области, ограниченной расходящейся ударной волной (УВ), в безразмерных переменных имеет вид [1]

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda \right] (1-q) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \\ & + \frac{[\gamma+2 + (\gamma-1)(1-q)][\gamma+1 - 2(1-q)]}{2\gamma(\gamma+1)g} \frac{\partial h}{\partial \lambda} + \\ & + \left[ (1-q) \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{2-(1-q)}{2q} f \right] r_2 \frac{dq}{dr_2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda \right] \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \lambda} + \frac{2(1-q)}{\gamma+1} \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\nu-1}{\lambda} f \right] + \\
& + \left[ \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{2}{\gamma+1-2(1-q)} \right] r_2 \frac{dq}{dr_2} = 0, \\
& \left[ \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda \right] \frac{\partial h}{\partial \lambda} + \frac{2\gamma(1-q)}{\gamma+1} \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\nu-1}{\lambda} f \right] h + \\
& + \left[ \frac{\partial h}{\partial q} - \frac{2\gamma h}{[2\gamma - (\gamma-1)q]q} \right] r_2 \frac{dq}{dr_2} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\lambda$  и  $q$  – независимые безразмерные переменные ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ),  $f(\lambda, q)$ ,  $g(\lambda, q)$ ,  $h(\lambda, q)$  – безразмерные представители скорости частицы жидкости  $\nu$ , плотности  $\rho$  и давления  $p$  соответственно,  $r_2 = r_2(t)$  – закон движения УВ,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\nu$  – тип симметрии течения.

Система (1) дополняется граничными условиями на УВ ( $\lambda = 1$ )

$$f(1, q) = g(1, q) = h(1, q) = 1 \tag{2}$$

и в центре симметрии (ЦС) ( $\lambda = 0$ )

$$f(0, q) = 0. \tag{3}$$

Следуя методу возмущений, решение системы (1) ищем в виде

$$\begin{aligned}
f(\lambda, q) &= f_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} q^k f_k(\lambda), \quad g(\lambda, q) = g_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} q^k g_k(\lambda), \\
h(\lambda, q) &= h_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} q^k h_k(\lambda), \quad r_2 \frac{dq}{dr_2} = \nu q / \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $q$ , будем последовательно получать системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для определения функций  $k$ -го приближения  $f_k(\lambda)$ ,  $g_k(\lambda)$ ,  $h_k(\lambda)$ . Начиная с номера  $k = 1$  в каждую очередную систему входит коэффициент  $A_k$ , который также подлежит определению. В качестве начального приближения  $f_0(\lambda)$ ,  $g_0(\lambda)$  и  $h_0(\lambda)$  выступает автомодельное решение задачи о СТВ.

Для функций  $f_k(\lambda)$ ,  $g_k(\lambda)$ ,  $h_k(\lambda)$  получаются следующие граничные условия:  $f_k(1) = g_k(1) = h_k(1) = 0$  – на УВ и  $f_k(0) = 0$  – в ЦС.

Краевая задача для определения функций  $k$ -го приближения представляет собой двухточечную краевую задачу с особой точкой типа седло

на одной из границ (в ЦС). Для её решения применяется *метод пристрелки* (*shooting method*). Основная его идея состоит в том, что интегрирование системы ведётся от значения  $\lambda = 1$ , соответствующего УВ, к значению  $\lambda = 0$ , при этом анализируется поведение интегральной кривой  $f_k(\lambda)$ . Целью решения является подбор такого значения  $A_k$ , при котором график функции  $f_k(\lambda)$  входит в точку  $(\lambda = 0, f_k(0) = 0)$  вдоль сепаратрисы седла. При прочих значениях  $A_k$  график функции  $f_k(\lambda)$  будет отклоняться вверх или вниз (рис. 1).

Зададим параметр  $\varepsilon_k > 0$  и выберем некоторое значение  $A_k = A_k^*$ .

Введём в рассмотрение функцию, характеризующую расстояние от произвольной точки кривой  $f_k(\lambda)$  до ЦС:

$$l(\lambda) = \sqrt{f_k^2(\lambda) + \lambda^2}. \quad (5)$$

Вычислим производную (5)

$$l'(\lambda) = [\lambda + f_k(\lambda)f_k'(\lambda)] / l(\lambda). \quad (6)$$

Минимум функции (5) соответствует равенству нулю числителя в (6). Пусть этот минимум достигается в некоторой точке  $\lambda_M \in (0, 1)$ . Таким образом, численное интегрирование ведётся от 1 до  $\lambda_M$ . Затем проверяется выполнение условия

$$l(\lambda_M) < \varepsilon_k. \quad (7)$$

Если условие (7) выполнено, то итерационный процесс заканчивается, и краевая задача для определения функций  $k$ -го приближения решена.

Если же при текущей итерации условие (7) не выполнено, то требуется определить, в какую сторону отклонилась интегральная кривая. Математическим индикатором поведения кривой является величина  $\mu = f_k'(\lambda_M)$ . Если  $\mu < 0$ , то график отклонился вверх, а если  $\mu > 0$  – то вниз. В первом случае значение  $A_k^*$  необходимо уменьшать, а во втором – увеличивать. Из (7) следует, что параметр  $\varepsilon_k$  характеризует степень приближения искомой интегральной кривой к сепаратрисе седла.

Отметим, что при использовании метода пристрелки абсолютное совпадение с сепаратрисой седла принципиально не достижимо. Однако это не мешает получить достаточно высокую точность вычисления коэффициента  $A_k$  в частности и задачи в целом.

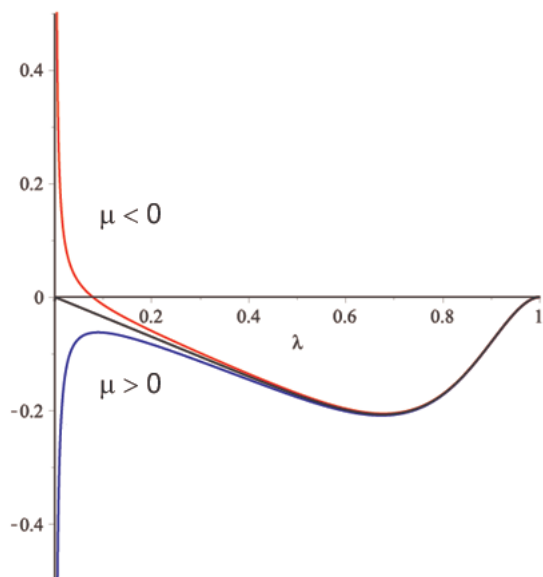


Рис. 1

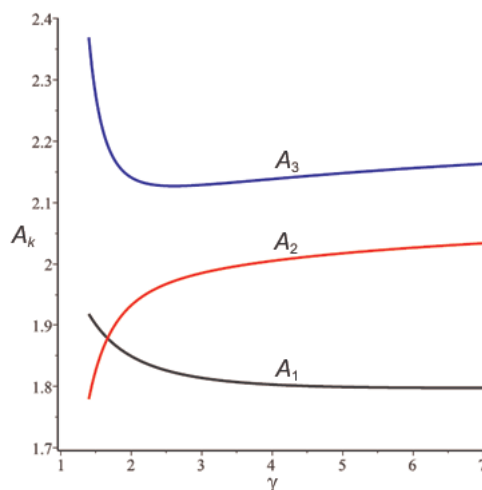
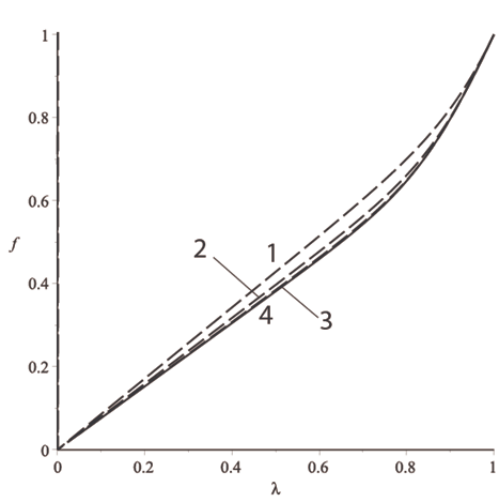
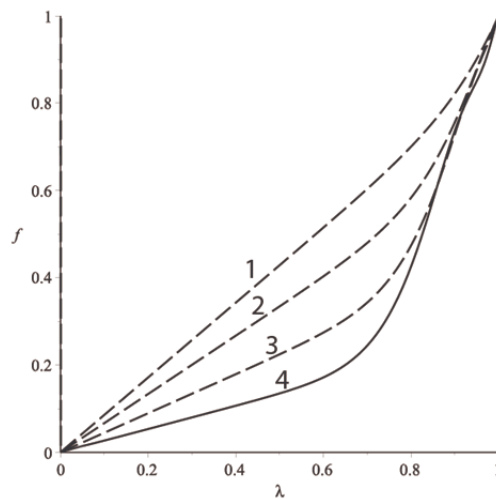


Рис. 2

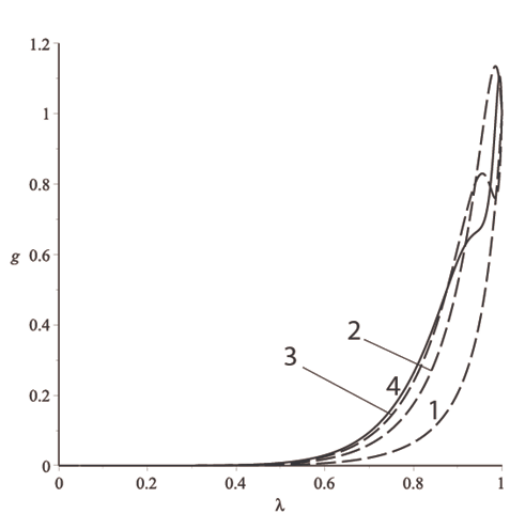


а

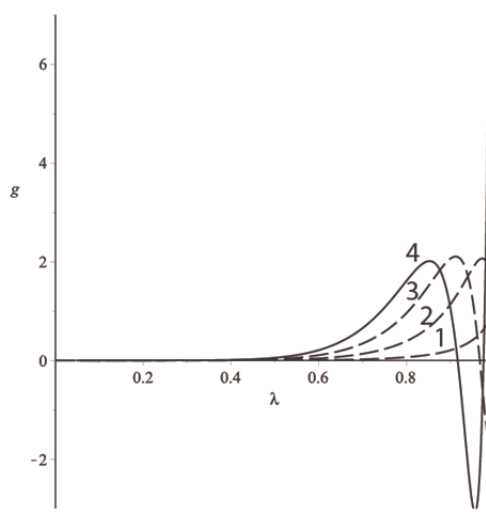


б

Рис. 3



а



б

Рис. 4

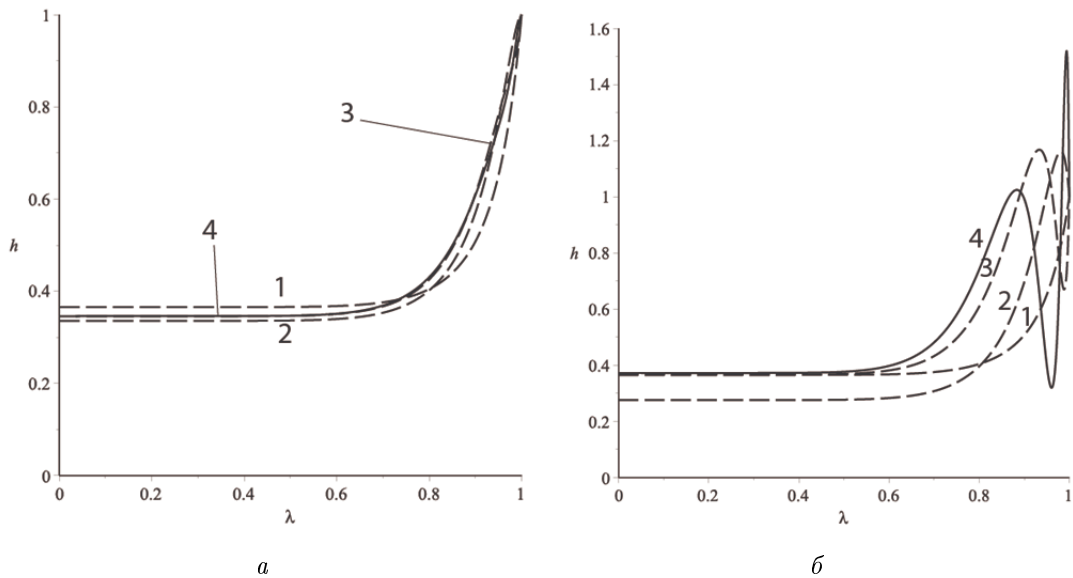


Рис. 5

Результаты расчётов приводятся для случая сферической симметрии течения ( $\nu = 3$ ). На рис. 2 представлены графики зависимостей  $A_1(\gamma)$ ,  $A_2(\gamma)$  и  $A_3(\gamma)$ .

На рис. 3–5 демонстрируются графики распределения безразмерных представителей скорости, плотности и давления при  $\gamma = 7/5$  для двух значений параметра  $q$  (для  $q = 0.2$  – слева, для  $q = 0.6$  – справа). Цифрами 1–4 обозначены кривые, построенные с учётом 1–4 слагаемых в (4) ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) соответственно. Для небольших значений  $q$  учёт поправок третьего порядка даёт незначительный вклад в распределения параметров по сравнению с результатами и с учётом двух поправок [2]. При увеличении значения  $q$  учёт третьей поправки может приводить к невозможным с физической точки зрения результатам: плотность и давление становятся отрицательными в отдельных областях за УВ.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М.: Физматгиз, 1961. 332 с.
2. Лягасва Т. В., Чернов И. А. К учёту противодействия в задаче о сильном взрыве // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 150–153.

**К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ  
ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ  
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
КВАТЕРНИОННОГО ОСКУЛИРУЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА**

В работе рассматривается задача оптимальной переориентации плоскости орбиты космического аппарата (КА) посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Для решения задачи используется дифференциальное кватернионное уравнение ориентации орбиты. Работа является развитием [1, 2].

Введем систему координат  $\eta$ , связанную с центром масс КА, и систему координат  $\xi$ , связанную с плоскостью и перицентром орбиты КА с началом в центре  $O$  притяжения Земли. Ориентация системы координат  $\xi$  в инерциальной системе координат  $X$  характеризует собой ориентацию орбиты КА в инерциальном пространстве и задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты: долготой восходящего узла  $\Omega_u$ , наклоном орбиты  $I$ , угловым расстоянием перицентра от узла  $\omega_\pi$ .

Считается, что вектор ускорения  $\mathbf{u}$  от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости орбиты КА. Тогда орбита КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления  $\mathbf{u}$  как неизменяемая фигура.

Задача состоит в нахождении оптимального управления  $\mathbf{u}$ , переводящего плоскость орбиты КА, движение центра масс которого описывается дифференциальными уравнениями:

$$2 \frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \circ \Omega_\xi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad |\mathbf{u}| \leq u_{max}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const},$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \Omega_\xi = u \frac{r}{c} (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2)$$

из любого заданного начального положения:

$$t = t_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \Lambda(t_0) = \Lambda^0,$$

в конечное положение, принадлежащие многообразию

$$t = t^*, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*,$$

$$\text{tg } \Omega_u = \frac{\Lambda_1^* \Lambda_3^* + \Lambda_0^* \Lambda_2^*}{\Lambda_0^* \Lambda_1^* - \Lambda_2^* \Lambda_3^*}, \quad \cos I = (\Lambda_0^*)^2 - (\Lambda_1^*)^2 - (\Lambda_2^*)^2 + (\Lambda_3^*)^2,$$

где  $\varphi$  – истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите);  $r$  – модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА;  $c$  – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  центра масс КА);  $p$  и  $e$  – параметр и эксцентриситет орбиты КА;  $u$  – проекция вектора ускорения  $\mathbf{u}$  на направление вектора момента скорости центра масс КА;  $\mathbf{\Lambda}$  – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий элемент орбиты КА);  $\Lambda_j^*$  – компоненты кватерниона  $\mathbf{\Lambda}^* = \mathbf{\Lambda}(t^*)$ , характеризующего конечное положение орбиты КА.

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J = \int_{t_0}^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0, \quad (1)$$

который характеризует затраты времени и энергии на переориентацию плоскости орбиты.

Задача решена с использованием принципа максимума Понтрягина. Введены сопряженные переменные  $M_j$ ,  $\chi$ , соответствующие фазовым переменным  $\Lambda_j$ ,  $\varphi$ . Система сопряженных переменных найдена в виде

$$\begin{aligned} 2 d\mathbf{M}/dt &= \mathbf{M} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \\ \frac{d\chi}{dt} &= 2 \frac{\chi}{r} \frac{dr}{dt} + u \frac{r}{2c} (N_1 \sin \varphi - N_2 \cos \varphi) - u \frac{r^2}{2c^2} \frac{dr}{dt} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi), \end{aligned}$$

где  $M_j$  – компоненты сопряженного кватерниона  $\mathbf{M}$ .

Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 u^2) + u r/2c (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi) + \chi c/r^2,$$

где  $N_1$ ,  $N_2$  – компоненты кватерниона  $\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{M}$ . Верхняя волна означает сопряженный кватернион.

Оптимальное управление, найденное из условия максимума функции Гамильтона–Понтрягина по управлению  $u$ , имеет вид

$$u_{\text{опт}} = \begin{cases} r|\nu_1|/4\alpha_2 c, & \text{если } r|\nu_1|/4\alpha_2 c \leq u_{\text{max}}, \\ u_{\text{max}} \text{ sign } \nu_1, & \text{если } r|\nu_1|/4\alpha_2 c > u_{\text{max}}, \end{cases}$$

где  $\nu_1 = N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi$ .

Для численного решения задачи был осуществлен переход к новой независимой переменной – истинной аномалии  $\varphi$ . В результате получена дифференциальная краевая задача восьмого порядка, для которой



имеется 6 заданных краевых условий. Рассматриваемая задача является задачей с подвижным правым концом траектории. Поэтому были построены условия трансверсальности, имеющие вид

$$\begin{aligned} M_0(\Lambda_1^* + \Lambda_2^* \operatorname{tg} \Omega_u) + M_1(\Lambda_0^* + \Lambda_3^* \operatorname{tg} \Omega_u) - \\ - M_2(\Lambda_3^* - \Lambda_0^* \operatorname{tg} \Omega_u) - M_3(\Lambda_2^* - \Lambda_1^* \operatorname{tg} \Omega_u) = 0, \\ N_3 = -M_0\Lambda_3^* + M_1\Lambda_2^* - M_2\Lambda_1^* + M_3\Lambda_0^* = 0. \end{aligned}$$

На графиках представлены законы изменения фазовых переменных и оптимального управления для случая круговой орбиты. Конечная ориентация плоскости орбиты КА соответствует ориентации плоскости орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС.

На рис. 1 приведены результаты решения задачи, близкой к экономии энергетических затрат, т.е. для случая, когда коэффициенты в функционале (1) имеют значения  $\alpha_1 = 0.001$ ,  $\alpha_2 = 1$ . На рис. 2 – для задачи, близкой к задаче, быстрогодействия ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ). Необходимо отметить, что во втором случае оптимальное управление близко к разрывному. Это обстоятельство значительно усложняет процесс нахождения неизвестных начальных значений сопряженных переменных при численном решении задачи.

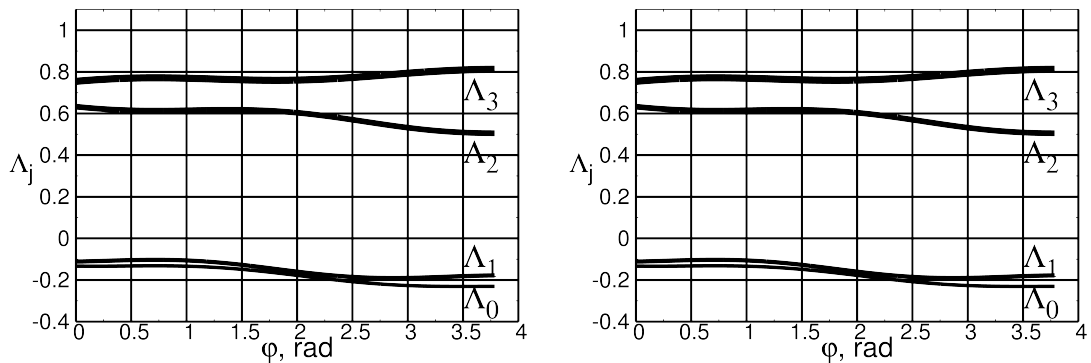


Рис. 1

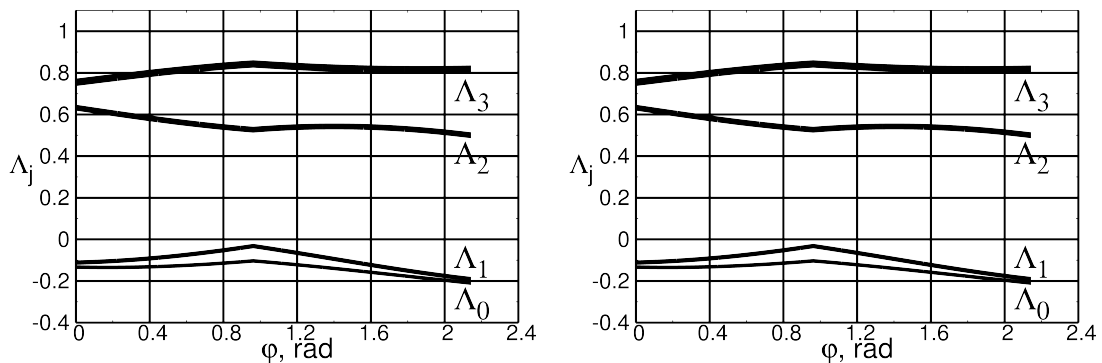


Рис. 2

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00365).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.

УДК 533.6.011

Д. И. Ливеровский, С. П. Шевырёв

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЁЛОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

В данной статье рассмотрено моделирование движения тяжёлой несжимаемой невязкой жидкости в двумерном случае численным методом крупных частиц и произведено сравнение результатов моделирования с результатами, полученными методом конечных объёмов. Была использована реализация метода конечных объёмов из пакета OpenFOAM [1].

Суть метода Давыдова (метода крупных частиц) состоит в том, что он использует расщепление по физическим факторам и по координатам. В методе Давыдова выделяют три этапа.

**1. Эйлеров этап.** На этом этапе жидкость предполагается моментально заторможенной, т. е. пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещениями элементарной ячейки, потока массы через границы ячеек нет, и движение ячейки как твёрдого тела происходит только за счёт сил давления. На эйлеровом этапе опускают конвективные производные, отвечающие за перетекание жидкости. Кроме того, так как по условию жидкость является несжимаемой, то на этом этапе выполняется решение уравнения Пуассона для давления.

**2. Лагранжев этап.** На этом этапе происходит перетекание жидкости из одной ячейки в другую за счёт вычисления направленного потока массы.

**3. Заключительный этап.** На этом этапе получают значения параметров на следующем шаге по времени. Подробное описание метода Давыдова приведено в работе [2]. Было произведено сравнение результатов моделирования движения невязкой несжимаемой тяжёлой жидкости,

полученных с использованием метода крупных частиц, и результатов, полученных с помощью свободно распространяемого пакета OpenFOAM (рис. 1–3).



Рис. 1. Начальные условия



Рис. 2. Сравнение результатов

В рассматриваемой задаче положение свободной поверхности меняется с течением времени, а потому возникает необходимость её отслеживания.

При использовании метода крупных частиц для определения свободной поверхности использовался метод маркеров. Приведём краткое описание метода маркеров. Для определения ячеек, занятых жидкостью, в рассмотрение вводят маркеры. Они представляют из себя частицы, не имеющие массы. Изначально маркеры располагаются в ячейках расчётной области, занятых жидкостью. Маркеры движутся по всему объёму, занятому жидкостью, как бы переносятся ею. Скорость маркеров вычисляется интерполированием между значениями локальной скорости

среды в соседних ячейках сетки, которые предварительно были найдены разностным решением. Основная цель введения маркеров состоит в том, что они позволяют определить свободную поверхность движущейся несжимаемой среды, так как на подвижной границе необходимо использовать соответствующие граничные условия. Маркеры распределены также по всему объёму среды для того, чтобы, изобразив их координаты графически, более наглядно показать движение среды.

В пакете OpenFOAM для отслеживания свободной поверхности используется метод объёма жидкости (VOF метод). В данном методе в каждой клетке сетки обычно задается лишь одно значение для каждой зависимой величины, определяющее состояние жидкости. Так как метод объёма жидкости требует хранения только одного значения для каждой клетки, то его программная реализация использует меньше памяти, чем метод маркеров, кроме того, метод объёма жидкости требует меньше времени на отслеживание свободной поверхности, так как не требуется на каждом шаге по времени вычислять новую позицию для каждого маркера. Маркеры, помимо определения клеток, содержащих границы, определяют конфигурацию жидкости в пограничной клетке. Метод объемов дает схожую информацию, но картина течения жидкости в окрестности свободной поверхности выглядит более схематично. Подробное описание VOF метода может быть найдено в работе [3] из списка цитируемой литературы. Начальное условие модельной задачи о прорыве дамбы можно увидеть на рисунке рис. 1,а для метода крупных частиц, и рис. 1,б для результатов, полученных с помощью пакета OpenFOAM. Следует отметить, что при моделировании в разных методах использовалась разная сетка. В пакете OpenFOAM использовалась сетка, которая становится чаще около препятствия [4,5].

При моделировании методом крупных частиц использовалась регулярная сетка с постоянным шагом по осям  $X$  и  $Y$ . Результаты сравнения можно увидеть на рис. 1 – 3.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. OpenFOAM URL : <http://www.openfoam.com> (дата обращения : 17.03.2013).
2. Шевырёв С. П. Расчёт течения тяжёлой несжимаемой невязкой жидкости методом Давыдова (нестационарный плоский случай) // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 148–153.
3. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 39. P. 201–225.
4. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М. : Мир, 1975.
5. Ливеровский Д. И., Шевырёв С. П. Метод Давыдова для случая несжимаемой невязкой тяжёлой жидкости на регулярной сетке // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 161–164.

## КВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В работе рассматривается задача оптимальной переориентации плоскости орбиты космического аппарата (КА) в центральном ньютоновском гравитационном поле посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Подобные задачи уже изучались в [1, 2]. Для решения задачи используется кватернионное уравнение движения центра масс КА, записанное в орбитальной системе координат; при этом КА рассматривается как точка переменной массы.

Движение центра масс КА рассматривается в инерциальной системе координат  $OX_1X_2X_3$  — геоцентрической экваториальной системе координат с началом в центре  $O$  притяжения Земли. Введем орбитальную систему координат  $\eta$ , связанную с центром масс КА, и систему координат  $\xi$ , связанную с плоскостью орбиты.

Считаем, что вектор ускорения  $\mathbf{u}$  от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления  $\mathbf{u}$  как неизменяемая фигура.

Дифференциальные уравнения ориентации орбитальной системы координат имеют вид

$$2 \, d\boldsymbol{\lambda}/dt = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = ur/c \, \mathbf{i}_1 + c/r^2 \, \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

$$d\varphi/dt = c/r^2, \quad r = p/(1 + e \cos \varphi), \quad c = \text{const}, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$  — кватернион ориентации орбитальной системы координат КА в инерциальной системе координат  $OX_1X_2X_3$ ;  $\mathbf{i}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — мнимые единицы Гамильтона;  $\varphi$  — истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите);  $r$  — модуль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА;  $p$  и  $e$  — параметр и эксцентриситет орбиты;  $c$  — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  центра масс КА);  $u$  — проекция вектора ускорения  $\mathbf{u}$  на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА);  $\boldsymbol{\omega}_\eta$  — отображение вектора  $\boldsymbol{\omega}$  на базис  $\eta$ .

Требуется определить ограниченное по модулю управление  $\mathbf{u}$ :

$$-u_{max} \leq u \leq u_{max} < \infty, \quad u = \pm|\mathbf{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (1), (2), переводящее плоскость орбиты КА из заданного начального состояния, описываемого соотношениями

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \mathbf{\Lambda}(t_0) = \mathbf{\Lambda}^0, \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\lambda}^0 = \mathbf{\Lambda}^0 \circ (\cos \varphi_0/2 + \mathbf{i}_3 \sin \varphi_0/2)$$

в требуемое конечное состояние, описываемое соотношениями

$$t = t^*, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \mathbf{n}^*(n_1^*, n_2^*, n_3^*), \quad n_1^* = 2(\lambda_1^* \lambda_3^* + \lambda_0^* \lambda_2^*), \\ n_2^* = 2(\lambda_2^* \lambda_3^* - \lambda_0^* \lambda_1^*), \quad n_3^* = (\lambda_0^*)^2 - (\lambda_1^*)^2 - (\lambda_2^*)^2 + (\lambda_3^*)^2$$

и минимизирующее комбинированный функционал качества процесса

$$J = \int_{t_0}^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0,$$

характеризующий время управляемого движения и энергетические затраты на управление.

Здесь  $n_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — заданные значения проекций единичного вектора  $\mathbf{n}^*$ , ортогонального плоскости орбиты КА, на оси инерциальной системы координат  $OX_1X_2X_3$  для конечного момента времени  $t^*$ .

Величины  $c, p, e, \varphi_0, \mathbf{\Lambda}^0$  ( $\boldsymbol{\lambda}^0$ ) и  $\mathbf{n}^*$  заданы. Переменная  $\mathbf{\Lambda}$  характеризуют собой ориентацию орбиты КА. Начальные значения кватерниона  $\mathbf{\Lambda}$  находятся через заданные значения угловых элементов орбиты: долготы восходящего узла  $\Omega_u$ , наклона орбиты  $I$  и аргумента перицентра  $\omega_\pi$ . Подлежат определению оптимальный закон управления  $u(t)$ , величины  $t^*$  и  $\varphi^*$ .

Задача решается с использованием принципа максимума Понтрягина. В соответствии с ним были введены переменные  $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i}_1 + \mu_2 \mathbf{i}_2 + \mu_3 \mathbf{i}_3$  и  $\chi$ , сопряженные по отношению к фазовым переменным  $\boldsymbol{\lambda}$  и  $\varphi$  соответственно; а также вспомогательная кватернионная переменная  $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$ , где верхняя волна — символ сопряжения; построены функция Гамильтона–Понтрягина, система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных и закон оптимального управления. Важно отметить, что кватернионное сопряженное уравнение имеет вид кватернионного фазового уравнения в силу самосопряженности последнего.

Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 u^2) + u \frac{r}{2c} \nu_1 + \frac{c}{r^2} \left( \frac{\nu_3}{2} + \chi \right).$$

Дифференциальные уравнения для сопряженных переменных найдены в виде

$$\begin{aligned} 2 \, d\boldsymbol{\mu}/dt &= \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_\zeta, & \boldsymbol{\omega}_\zeta &= ur/c \, \mathbf{i}_1 + c/r^2 \, \mathbf{i}_3, \\ d\chi/dt &= dr/dt \left[ (\nu_3 + 2\chi)/r - \nu_1 ur^2/2c^2 \right]. \end{aligned}$$

Здесь вектор  $\boldsymbol{\omega}$  может трактоваться как вектор абсолютной угловой скорости некоторой системы координат  $\zeta$  (сопряженной по отношению к орбитальной системе координат  $\eta$ ), а  $\boldsymbol{\omega}_\zeta$  — отображение этого вектора на базис  $\zeta$ .

Закон оптимального управления, найденный из условия максимума функции Гамильтона–Понтрягина по переменной  $u$ , имеет вид

$$u_{\text{опт}} = \begin{cases} r\nu_1/4\alpha_2c, & \text{если } r|\nu_1|/4\alpha_2c \leq u_{\text{max}}, \\ u_{\text{max}} \text{sign}(\nu_1), & \text{если } r|\nu_1|/4\alpha_2c > u_{\text{max}}. \end{cases}$$

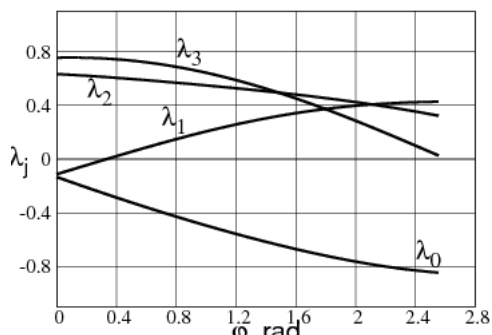


Рис. 1. Фазовые переменные

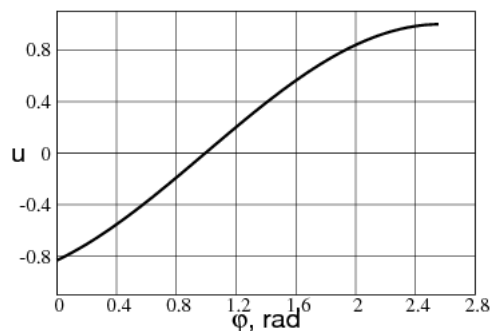


Рис. 2. Оптимальное управление

Для реализации численного решения краевой задачи была разработана программа, использующая комбинацию метода Рунге–Кутты 4-го порядка точности, модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Построены примеры численного решения задачи оптимальной переориентации плоскости орбиты КА из заданного начального положения в конечное со значениями абсолютной долготы восходящего узла  $215^\circ 15'$  и наклона орбиты  $64^\circ 8'$ , соответствующими плоскости орбиты спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. На рис. 1, рис. 2 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для случая, когда отличие в угловой мере между начальным и конечным положениями орбит составляло порядка  $15^\circ$ ;  $e = 0$ ;  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00365).*

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.
2. Челноков Ю. Н. Переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.

УДК 629

**И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков**

### ОСОБЫЙ РЕЖИМ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В настоящей работе исследуется следующая задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА): необходимо определить ограниченное по модулю управление  $u$  :

$$-u_{max} \leq u \leq u_{max} < \infty, \quad u = \pm |\mathbf{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$2 \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = u \frac{r}{c} \mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2} \mathbf{i}_3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const},$$

из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ \left( \cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

в конечное состояние

$$t = t_1 = ?, \quad \varphi(t_1) = \varphi_1, \quad \text{vect} \left[ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t_1) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] = 0.$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0.$$

Здесь  $\boldsymbol{\lambda}$  – кватернион ориентации орбитальной системы координат,  $\boldsymbol{\Lambda}$  – кватернион ориентации орбиты КА,  $r$  – модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$



центра масс КА,  $c$  – постоянная площадей,  $p$  и  $e$  – параметр и эксцентриситет орбиты,  $\varphi$  – истинная аномалия. Верхняя волна – символ сопряжения. Величины  $c$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\varphi_0$ ,  $\Lambda^0$ ,  $\Lambda^*$  – заданы; подлежат определению  $t_1$ ,  $\varphi_1$  и оптимальный закон управления  $u = u(t)$ .

Поставленная задача решается с помощью принципа максимума. Для этого вводятся переменные  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\chi$ , сопряженные к фазовым переменным  $\boldsymbol{\lambda}$  и  $\varphi$ . Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2|u|) + \frac{1}{2}\left[u\frac{r}{c}\nu_1 + \frac{c}{r^2}(\nu_3 + 2\chi)\right], \quad (1)$$

где  $\nu_1, \nu_3$  – компоненты кватерниона,  $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$ .

Оптимальное управление, найденное из условия максимума функции Гамильтона–Понтрягина (1), имеет вид

$$u^o = \begin{cases} u_{max} \text{sign } \nu_1, & r|\nu_1|/(2\alpha_2c) - 1 > 0, \\ 0, & r|\nu_1|/(2\alpha_2c) - 1 < 0, \\ ?, & r|\nu_1|/(2\alpha_2c) - 1 \equiv 0, \quad t \in [t_*; t_{**}]. \end{cases}$$

Также была построена система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных и условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Исходная задача сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории 10-го порядка.

В работе [1] было показано, что порядок краевой задачи можно понизить (без её усложнения) на 6 единиц и привести её к уравнениям

$$\frac{d\nu_1}{dt} = \frac{c}{r^2}\nu_2, \quad \frac{d\nu_2}{dt} = -\frac{c}{r^2}\nu_1 + \frac{r}{c}u\nu_3, \quad \frac{d\nu_3}{dt} = -\frac{r}{c}u\nu_2. \quad (2)$$

Рассмотрим подробнее случай особого управления, когда

$$r|\nu_1|/(2\alpha_2c) \equiv 1 \quad (3)$$

на некотором промежутке времени  $[t_*; t_{**}]$ . (При этом функция Гамильтона–Понтрягина (1) не зависит явно от управления. Можно показать, что это возможно лишь при  $\alpha_1 = 0$ .)

Возведём соотношение (3) в квадрат и продифференцируем его по времени, имеем:

$$\frac{r^2}{2c^2}\nu_1 \frac{d\nu_1}{dt} + \frac{r}{2c^2} \frac{dr}{dt} \nu_1^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \nu_1 = 0, \\ \frac{1}{c}\nu_2 + \frac{r}{c^2} \frac{dr}{dt} \nu_1 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Продифференцируем второе соотношение (4) по времени и учтём (2):

$$u^o = \frac{c}{r\nu_3} \left\{ \left[ \frac{c}{r^2} - \frac{1}{c} \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right] \nu_1 - \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \nu_2 \right\}.$$

В случае круговой орбиты ( $r = \text{const}$ ) оптимальное управление имеет вид  $u^o = c^2 \nu_1 / (r^3 \nu_3)$ .

Авторами предложен оригинальный алгоритм численного решения указанных дифференциальных краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА, являющийся комбинацией методов Рунге—Кутты 4-го порядка точности, Ньютона, градиентного спуска. Приводятся примеры расчетов. Построены графики оптимальных траекторий и управлений.

Начальное и конечное значения кватерниона ориентации орбиты равны:

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &= (0.340051, -0.202771, 0.778442, -0.487111); \\ \Lambda^* &= (0.270571, -0.135281, 0.784644, -0.541133). \end{aligned}$$

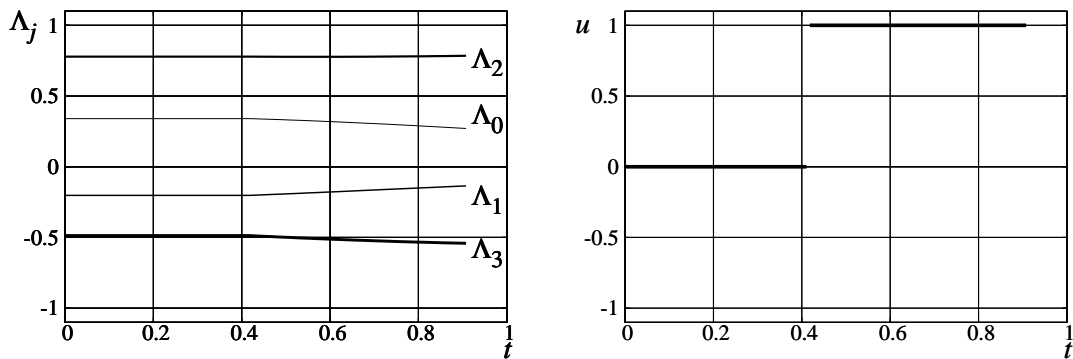


Рис. 1

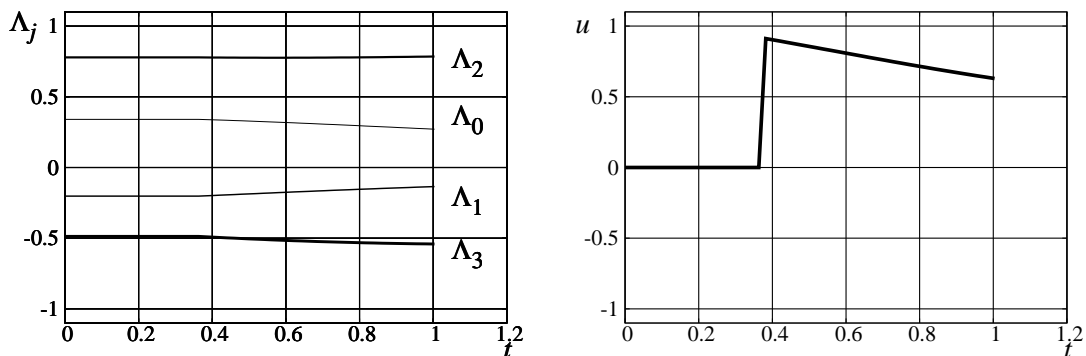


Рис. 2

На рис. 1 приведены результаты решения в безразмерных переменных краевой задачи для функционала  $\int_0^{t_1} |u| dt \rightarrow \min$  ( $e = 0.2$ ) и неособого управления. На рис. 2 – для того же функционала и особого управления. Отметим, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях

появляется характерный безразмерный параметр  $N = u_{max}p^3/c^2$ . При численном решении полагалось, что  $N = 0.5$ .

Значение минимизируемого функционала в первом случае оказалось равным  $J_{неособ} = 0.4897$ , а во втором –  $J_{особ} = 0.4936$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00 165).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.

УДК 629.78

Я. Г. Сапунков

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ И ДВИГАТЕЛЕМ ИМПУЛЬСНОЙ ТЯГИ

С использованием KS-переменных (переменные Кустаанхеймо – Штифеля) с помощью принципа максимума Понтрягина решена пространственная задача оптимального управления о встрече двух космических аппаратов (КА), один из которых неуправляемый и движется только под действием силы притяжения к Солнцу, второй аппарат управляется с помощью солнечного паруса и импульсного двигателя. Функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой линейную комбинацию с весовыми множителями двух критериев: времени и суммы величин импульсов, затраченных на процесс управления. Приводятся результаты численного решения задачи.

1. KS-переменные  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$  связаны с векторами положения центра масс КА и его скорости  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  соотношениями [1, 2]

$$\mathbf{r} = P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}; \quad \mathbf{v} = (2/r)P^T(\mathbf{u})\mathbf{s}; \quad r = |\mathbf{r}| = u^2, \quad h = v^2/2 - \gamma M/r. \quad (1.1)$$

Переменная  $h$  определяет полную энергию единицы массы КА,  $M$  – масса притягивающего центра,  $\gamma$  – гравитационная постоянная.

Переменная  $\tau$ , функциями которой являются KS-переменные  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $h$ , связана со временем  $t$  соотношением

$$dt/d\tau = u^2. \quad (1.2)$$

Тяга  $\mathbf{p}_{sol}$  солнечного паруса, отнесенная к единице массы КА, определяется по формуле, в которой  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости паруса, обращенной от Солнца,  $\theta$  – угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$ ,  $d$  – коэффициент, характеризующий площадь паруса, отнесенную к единице массы аппарата [3]:

$$\mathbf{p}_{sol} = d \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \mathbf{n} = d (\mathbf{u}^2)^{-4} (P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{n})^2 \mathbf{n}. \quad (1.3)$$

Если через  $R$  обозначить характерный масштаб длины, например радиус орбиты Земли, на которой находится управляемый аппарат в начальный момент времени, то связь между размерными и безразмерными переменными, которые обозначаются верхним индексом «\*», будет определяться соотношениями:

$$\begin{aligned} h &= (\gamma M/R)h^*; & \mathbf{s} &= (\gamma M)^{1/2}\mathbf{s}^*; & \mathbf{u} &= R^{1/2}\mathbf{u}^*; & \tau &= (R/(\gamma M))^{1/2}\tau^*; \\ t &= R(R/(\gamma M))^{1/2}t^*; & d &= \gamma M d^*; & \mathbf{r} &= R\mathbf{r}^*; & \mathbf{v} &= (\gamma M/R)^{1/2}\mathbf{v}^*. \end{aligned}$$

Безразмерная величина  $d^*$  определяет отношение максимальной величины тяги солнечного паруса к силе притяжения аппарата к центру на орбите Земли радиуса  $R$ . Далее будут использоваться только безразмерные величины и верхний индекс «\*» над ними опускается. Движение неуправляемого аппарата, который движется только под действием силы притяжения к центру, с которым управляемый аппарат должен осуществить мягкую встречу в безразмерных KS-переменных, определяется через переменную  $\tau_a$  и векторные элементы орбиты  $\mathbf{C} = (C_0, C_1, C_2, C_3)$  и  $\mathbf{D} = (D_0, D_1, D_2, D_3)$  соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= \mathbf{C} \cos(k\tau_a) + \mathbf{D} \sin(k\tau_a); & \mathbf{s}_a &= k (\mathbf{D} \cos(k\tau_a) - \mathbf{C} \sin(k\tau_a)); \\ k &= (-h_a/2)^{1/2}; & h_a &= -(C^2 + D^2)^{-1} < 0; & t &= \int_{\tau_{ан}}^{\tau_a} (\mathbf{u}_a)^2 d\tau_a \\ \tau_a &\geq \tau_{ан}; & \mathbf{C} &= const; & \mathbf{D} &= const. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если через  $K_i$  обозначить безразмерную величину импульса тяги, отнесенного к единице массы КА, то она будет связана с размерной величиной изменения вектора скорости  $|\Delta \mathbf{v}_i|$  под действием импульса соотношением

$$|\Delta \mathbf{v}_i| = (\gamma M R^{-1})^{1/2} K_i.$$

В безразмерных переменных функционал, определяющий качество процесса управления, принимающий минимальное значение для опти-

мального управления, имеет вид

$$I = \alpha_0 t_k + \alpha_1 \sum_{i=1}^n K_i. \quad (1.5)$$

Ниже приводятся результаты решения задачи с помощью принципа максимума Понтрягина.

2. В декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , начало которой находится в центре Солнца, а плоскость  $Ox_1x_2$  совпадает с плоскостью орбиты Земли, в начальный момент времени в безразмерных переменных положение и скорость управляемого аппарата, который находится на орбите Земли, определяется координатами

$$x_1 = 1.0, \quad x_2 = 0.0, \quad x_3 = 0.0, \quad v_1 = 0.0, \quad v_2 = 1.0, \quad v_3 = 0.0. \quad (2.1)$$

Неуправляемый аппарат находится вблизи орбиты Марса. Положение и скорость неуправляемого аппарата в начальный момент времени в безразмерных переменных, вектора  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$ , значения величин  $h_a$ ,  $k$ ,  $\tau_{ан}$ , входящих в закон движения в KS-переменных для неуправляемого аппарата (1.4), определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 = 0.76, \quad x_2 = 1.3164, \quad x_3 = 0.05, \quad v_1 = -0.7019, \quad v_2 = 0.4052, \quad v_3 = -0.0267. \\ C_0 = 0.0, \quad C_1 = 1.0679, \quad C_2 = 0.6163, \quad C_3 = 0.0234, \\ D_0 = -0.03196, \quad D_1 = -0.6171, \quad D_2 = 1.0671, \quad D_3 = -0.01484, \\ h_a = -0.3288, \quad k = 0.4054, \quad \tau_{ан} = 0.0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Безразмерный множитель, характеризующий тягу солнечного паруса,  $d = 0.1$ , весовые множители в функционале (1.5)  $\alpha_0 = 1.0$ ,  $\alpha_1 = 0.75$ . Расчеты показали, что для данной задачи в оптимальном управлении импульсный двигатель включался в начале и в конце процесса управления, обеспечивающего мягкую встречу аппаратов. Безразмерные координаты первого импульса, который осуществлялся при  $t = 0$ , и его величина определяются соотношениями:

$$K_{н1} = -0.4247, \quad K_{н2} = 0.3965, \quad K_{н3} = 0.0021, \quad K_{н} = 0.5810. \quad (2.3)$$

В результате сообщения первого импульса безразмерные координаты вектора скорости управляемого аппарата принимают значения:

$$v_1 = -0.4247, \quad v_2 = 1.3965, \quad v_3 = 0.0021. \quad (2.4)$$

Далее до момента  $t_k = 1.4502$  управляемый аппарат движется под действием солнечного паруса, в момент подлета к неуправляемому аппарату его положение и скорость в безразмерных координатах определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.3756, & x_2 &= 1.4725, & x_3 &= 0.0009, \\ v_1 &= -1.1077, & v_2 &= 0.5555, & v_3 &= -0.0008. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Величина второго импульса, который осуществляется в этот момент времени, и его безразмерные координаты определяются соотношениями:

$$K_{k1} = 0.3224, \quad K_{k2} = -0.7564, \quad K_{k3} = -0.0369, \quad K_k = 0.8231. \quad (2.6)$$

В результате сообщения второго импульса безразмерные координаты вектора скорости управляемого аппарата принимают значения, совпадающие с координатами скорости неуправляемого аппарата:

$$v_1 = 0.7853, \quad v_2 = -0.2009, \quad v_3 = -0.0377. \quad (2.7)$$

Функционал качества процесса управления (1.5), обеспечивающего мягкую встречу двух аппаратов,  $I = 2.5031$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00 165).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
2. Сапунков Я. Г. Решение задач оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной и импульсной тягой в KS-переменных // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 3. С. 73–78.
3. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. М.: Наука, 1986. 304 с.

УДК 519.257

**Г. П. Шиндяпин, А. А. Матутин**

### **ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВОЗДУХЕ ПРИ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ОКЕАНЕ**

Для различных режимов нелинейной рефракции ударных волн (УВ) на поверхности океана с образованием волны разрежения или отраженной УВ методами асимптотической теории коротких волн [1] установлены области существования режимов с невырожденным фронтом преломленной УВ в воздухе.

1. При падении УВ  $AR, BR$  (рис.1,  $a-f$ ) относительной интенсивности  $(p_1 - p_0)/(\rho_0 c_0^2)$  под углом  $\alpha$  к вертикали на свободную поверхность  $AF$  океана, разделяющую воздух и воду с газосодержаниями  $\gamma^+, \gamma^-$ , возникают различные режимы рефракции [2]:  $NR$  – нерегулярный ( $a$ );  $RR$  – регулярный ( $b$ );  $RRW$  – регулярный с УВ  $EB_1$ , замыкающей область разрежения ( $c$ );  $FNR$  – Free Neumann Refraction ( $d$ );  $RW$  – регулярный с отраженной УВ ( $e$ );  $TNR$  – Twin Neumann Refraction ( $f$ ).  $AD$  – фронт преломленной УВ.

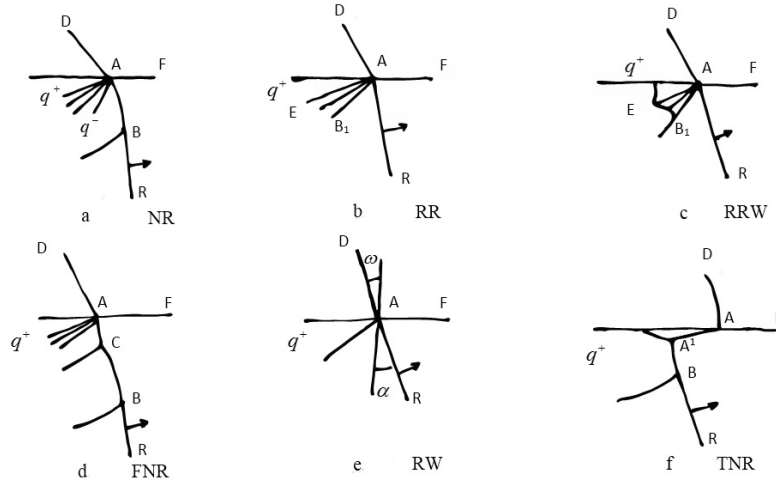


Рис.1. Режимы рефракции ударных волн

Установлены основные параметры [3] для относительно слабых УВ ( $AR, BR$ ):

$$\bar{\varepsilon} \ll 1, \bar{\varepsilon} = L_0(\gamma^-)\varepsilon_{10} = R_0(\gamma^-)P_{10}, P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0(\gamma^-);$$

$$B_0 = \rho_0(\gamma^-)c_0^2(\gamma^-), L_0(\gamma^-) = p_0R_0(\gamma^-)/B_0(\gamma^-), \varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0.$$

При использовании модели гомогенной локально-равновесной пузырьковой среды с газосодержаниями  $\gamma^- = m_{II}/m_I$  для жидкости и  $\gamma^+ = \infty$  для газа были установлены [4] в точке  $A$  два инварианта рефракции

$$I : c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad II : v^+ = v^-. \quad (1)$$

В переменных теории коротких волн [1] (для областей больших градиентов)

$$x/c_0t = \xi = 1 + \bar{\varepsilon}X, y/c_0t = \eta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y; R/c_0t = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \theta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y;$$

$$\delta = X + \frac{1}{2}Y^2, \frac{u}{c_0} = \bar{\varepsilon}\frac{\mu}{R_0}, \frac{v}{c_0} = \bar{\varepsilon}^{3/2}\frac{\nu}{R_0}, \frac{p-p_0}{B_0} = P_{10}P^{(1)}, \frac{p-p_0}{\rho_0} = P_{10}H^{(1)}. \quad (2)$$

Течения в областях возмущения (за фронтами УВ  $AB, CB, AC, A'B$ ) описываются системой уравнений коротких волн

$$[\mu(\mu - 2\delta)]_\delta + \nu_Y + 3\mu = 0, \mu_\delta = \nu_Y, \mu = P^{(1)} = H^{(1)}. \quad (3)$$

Решение (2) для волны разрежения  $AEB_1$  имеет вид

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, \nu = \frac{1}{3}z^3 - \mu Y + d, z = (X - X_A)/Y. \quad (4)$$

На фронтах УВ, ограничивающих область возмущений ( $AB, EB_1, AC, A'B$ ),  $X = X^*(Y)$ , имеем условия ( $\mu', \nu'$  – значения перед фронтом)

$$\begin{aligned} X - \Psi^\nu Y &= \frac{1}{2}(\Psi^{\nu^2} + \mu + \mu'), \Psi = \frac{dX}{dY}; \\ (\mu - \mu') \cdot (\Psi^\nu + Y) &= \nu - \nu', P^{(1)} = H^{(1)} = \mu. \end{aligned} \quad (5)$$

В точке за фронтом АВ имеем  $\mu_A = q^-$  – перед передним фронтом волны разрежения,  $\mu_A = q^+$  – за задним фронтом волны разрежения, т. е.

$$q^- = (p_A^- - p_0)/(p_1 - p_0), \quad q^+ = (p_A^+ - p_0)/(p_1 - p_0).$$

Решение (3) за фронтом Маха ( $AB, AC, A'B$ ) имеет вид [5]

$$\mu = 1 - m\sqrt{1 - \delta}, \nu = 1 + (m^2 - 1) \cdot (Y - Y_B), Y_B = \alpha^\nu - 1, 1 - m^2 = \delta_A \quad (6)$$

в случае  $NR$ .

2. В переменных (2) теории коротких волн инварианты I, II (1) имеют вид [3]

$$(I) : \omega^{\nu^2} = 2C_\gamma + \alpha^{\nu^2} - q^+/\bar{L} + q^-, \omega^\nu = tg\omega/\bar{\varepsilon}^{1/2}, \alpha^\nu = tg\alpha/\bar{\varepsilon}^{1/2}, \quad (7)$$

$$(II) : q^+ \cdot \bar{\rho}\bar{c} \cdot \omega^\nu = \frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{3/2} + d. \quad (8)$$

Исключая  $\omega^\nu$  из (7), (8), получим для режимов  $NR, RR, RRW, RW$  выражение для нахождения  $q^+$ :

$$q^{+2}(\bar{\rho}\bar{c})^2 (2C_\gamma + \alpha^{\nu^2} - q^+/\bar{L} + q^-) = \left[ \frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{3/2} + d \right]^2. \quad (9)$$

Здесь параметры подобия имеют вид

$$C_\gamma = \frac{c_0^- - c_0^+}{c_0^- \bar{\varepsilon}}; \bar{L} = L_0^-/L_0^+; \alpha^\nu = tg\alpha/\bar{\varepsilon}^{1/2}; \bar{\rho}\bar{c}(\bar{\rho} = \rho_0^-/\rho_0^+; \bar{c} = c_0^-/c_0^+). \quad (10)$$

Для режимов  $RR, RRW$  правая часть (9) имеет вид [3]

$$\left[ \frac{1}{3} \left( (\alpha^{\nu^2} + 1) - 2q^2 \right)^{3/2} + \alpha^\nu - \frac{1}{3} (\alpha^{\nu^2} - 1)^{3/2} \right]^2. \quad (11)$$



Для режима  $NR$  вид

$$\left[ \frac{1}{3} (2 (q^- - q^+))^{3/2} + (q^-)^{3/2} \right]^2. \quad (12)$$

Для режима  $RW$  вид

$$\left[ \alpha^\nu - (q^+ - 1) \sqrt{\alpha^{\nu^2} - q^+} \right]^2. \quad (13)$$

Правые части (11) – (13) совпадают вдоль линии ” $K$ ” при  $q^+ = 1.0$ , когда исчезает волна разрежения ( $NR, RR, RRW$ ), а отраженная УВ нулевой интенсивности ( $RW$ ). В этих случаях линия  $q^+ = 1.0$  является границей режимов  $RR$  и  $RW$ ;  $RRW$  и  $RW$ ;  $FNR$  и  $TNR$ . Другие границы согласно (11) – (13) (подчеркнутые выражения) возникают при  $\alpha^\nu = 1.0$  между  $NR$  и  $RR$ ;  $\alpha^\nu = 2.1$  между  $RR$  и  $RRW$ ; при  $q^+ = q^-$  – схлопывании волны разрежения в режиме  $NR$  и переходе к  $FNR$ ; при  $q^+ = \alpha^{\nu^2}$  – в режиме  $RW$  и переходе к режиму  $TNR$ .

**3.** Для случая рефракции относительно слабой УВ при  $\varepsilon = (p_1 - p_0)/p_0 = 0.01$  на поверхности океана в диапазоне газосодержаний ( $0 \leq \gamma^- \leq 10^{-4}$ ,  $\gamma^+ = \infty$ ) были проведены расчеты интенсивности преломленной волны  $AD$   $q^+ = \frac{p_A^+ - p_0}{p_1 - p_0}$  в зависимости от газосодержания  $\gamma^-$  и угла падения  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha^0 \leq 15^0$ ). Зависимости параметров подобия от газосодержания  $\gamma$  при фиксированных значениях  $\varepsilon = 0.01$   $\alpha = 10^0$  будут иметь вид (таблица).

$\gamma$	0	$10^{-8}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$\infty$
$C_\gamma$	$1.60 \cdot 10^5$	$0.51 \cdot 10^2$	-0.09	-80.3	
$L$	$0.55 \cdot 10^{-4}$	0.17	1.10	1.16	$L_0^+ = 0.86$
$(\bar{\rho}\bar{c})^2$	$12.4 \cdot 10^6$	$10.6 \cdot 10^6$	$0.68 \cdot 10^6$	$0.72 \cdot 10^4$	
$\alpha^\nu$	80.8	1.45	0.57	0.56	

Основное уравнение (9) относительно  $q^+ / \gamma$ ,  $\alpha$  – третьей степени, при значениях параметра  $(\bar{\rho}\bar{c})^2 \sim 10^6 \div 10^4$  в рассмотренном диапазоне обычным классическим решением (9) является (в рамках теории коротких волн)  $q^+ = 0$ . То есть волна преломления нулевой интенсивности (звуковая) однако обращение в ноль скобки в левой части (9) позволяет при газосодержаниях, близких к  $\gamma \approx 10^{-6}$  (смена знака  $C_\gamma$ ), позволяет построить нетривиальное решение (9), найти области существования различных режимов  $NR, RR, RRW, RW$  с  $q^+ \neq 0$ .

$$\begin{aligned} 0.958 \cdot 10^{-6} 0.958 \cdot 10^{-6} q^+ &= \alpha^{\nu^2} q^+ = \alpha^{\nu^2} \gamma = 1.05 \cdot 10^{-6} \gamma = 1.05 \cdot 10^{-6} \gamma = \\ &= 10^{-6} \gamma = 10^{-6} \gamma = 0.97 \cdot 10^{-6} \gamma = 0.97 \cdot 10^{-6} \alpha^\nu = 2.1 \alpha^\nu = 2.1 \alpha^\nu = 1.0 \alpha^\nu = \\ &= 1.0 q^+ = 1.0 q^+ = 1.0 q^+ = q^- q^+ = q^- q^+ = 1.0 q^+ = 1.0 \varepsilon = 0.01 \varepsilon = \\ &= 0.01 \alpha^0 \alpha^0 q^+ q^+; \end{aligned}$$

$$0.9638 \cdot 10^{-6} 0.9638 \cdot 10^{-6} 0.965 \cdot 10^{-6} 0.965 \cdot 10^{-6} 0.960 \cdot 10^{-6} 0.960 \cdot 10^{-6}.$$

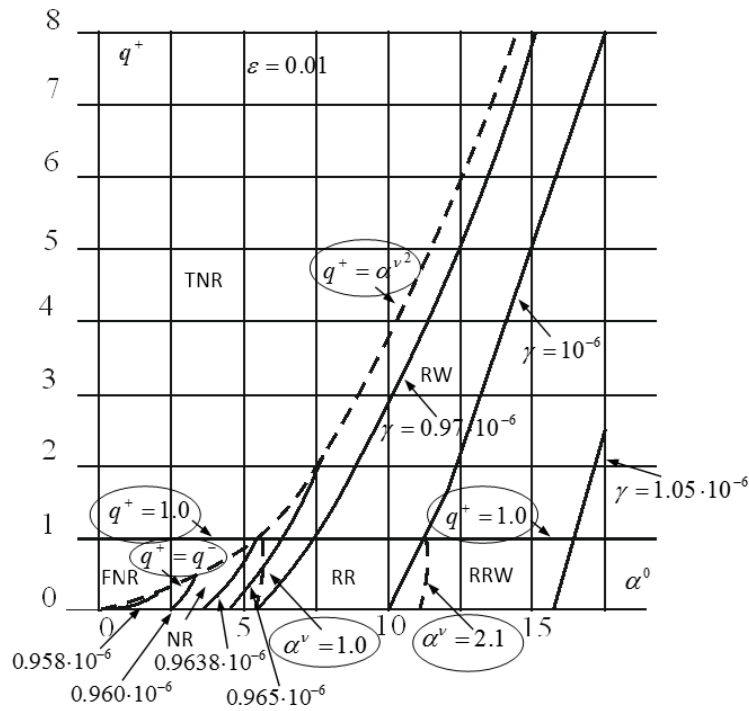


Рис.2. Зависимость интенсивности преломленной волны  $q^+$  от  $\gamma, \alpha$  при различных режимах рефракции

На рис. 2 приведены результаты расчета зависимости  $q^+$  – интенсивности преломленной УВ ( $AD$ ) согласно (9) (при  $\varepsilon = 0.01$ ) от газосодержания водной среды  $\gamma$  при различных углах падения  $\alpha$ . Построены границы рефракции: "K" при  $q^+ = 1.0$  между  $RR$  и  $RW$ ;  $RRW$  и  $RW$ ;  $\alpha^\nu = 1.0$  между  $NR$  и  $RR$ ;  $\alpha^\nu = 2.1$  между  $RR$  и  $RRW$ ;  $q^+ = q^-$  между  $NR$  и  $FNR$ ;  $q^+ = \alpha^{\nu^2}$  между  $RW$  и  $TNR$ .

Результаты помогают объяснить возникновение невырожденной преломленной УВ в воздухе при рефракции УВ на поверхности океана при достижении определенной газонасыщенности воды, порядка  $10^{-6}$ , для различных режимов рефракции. Результаты могут быть обобщены с помощью модели потенциальных адиабатических течений [1] (верной до  $\bar{\varepsilon}^2$  включительно), для произвольных углов падения.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейное взаимодействие ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. Henderson L. F., Ma J., Sakurai A., Takayama K. Refraction of a Shok Wave at an air-water interface // Fluid Dynamics Research. 1990. №5. P. 337–350.
3. Шиндяпин Г. П., Матвеев А. А. Анализ нелинейной рефракции ударных волн методами асимптотической теории коротких волн // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 150–154.

4. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.

5. Шиндяпин Г. П. Об особенностях «сверхзвукового» взаимодействия слабых ударных волн и задача преломления слабой ударной волны в воде на свободной поверхности // Аэродинамика : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 3 (6). С. 92–104.

УДК 629

Д. А. Шишков, Ю. Н. Челноков, И. А. Панкратов

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПОНИЖЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Представленная работа является развитием [1–2].

Движение центра масс космического аппарата (КА) будем рассматривать в инерциальной системе координат  $X$  – геоцентрической экваториальной системе координат  $OX_1X_2X_3(X)$  с началом в центре  $O$  притяжения Земли.

Ось  $OX_3$  этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси  $OX_1$  и  $OX_2$  лежат в плоскости экватора Земли, ось  $OX_1$  направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, ось  $OX_2$  дополняет систему до правой тройки векторов.

Для решения задачи переориентации орбиты космического аппарата (КА) используем уравнения орбитальной системы координат  $\eta$  в параметрах Эйлера:

$$2\frac{d\lambda}{dt} = \lambda \circ \omega_\eta, \omega_\eta = u\frac{r}{c}\mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2}\mathbf{i}_3, \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, c = const, \quad (1)$$

где  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3$  – кватернион ориентации орбитальной системы координат  $\eta$  в инерциальной системе координат  $X$ ,  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  – векторные мнимые единицы Гамильтона,  $\circ$  – символ кватернионного умножения,  $\omega_\eta$  – отображение вектора  $\omega$  на базис  $\eta$ ,  $\lambda_j, j = 0, 1, 2, 3$  – параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбитальной системы координат.

Кватернион  $\lambda$  связан с кватернионом  $\Lambda$  ориентации орбиты КА соотношением

$$\lambda = \Lambda \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (2)$$

Требуется определить ограниченно по модулю управление  $u$ :

$$-u_{max} \leq u \leq u_{max}, u \leq \pm|\mathbf{u}|, \quad (3)$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (1), из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \varphi(0) = \varphi_0, \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^0 = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ (\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2}) \quad (4)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ?, \varphi(t^*) = \varphi^*, \boldsymbol{\lambda}(t^*) = \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\Lambda}^* \circ (\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2}) \quad (5)$$

и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2); \alpha_1, \alpha_2 = const \geq 0. \quad (6)$$

Компоненты  $\boldsymbol{\Lambda}_j$  кватерниона  $\boldsymbol{\Lambda}$  удовлетворяют условию  $\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1$ , поэтому краевое кватернионное условие (5) заменим на условие

$$vect[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t^*) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ (\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2})] = 0. \quad (7)$$

Поставленная задача решается с помощью принципа максимума. Для этого введём дополнительные переменные  $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i}_1 + \mu_2 \mathbf{i}_2 + \mu_3 \mathbf{i}_3$  и  $\chi$ , сопряжённые по отношению к фазовым переменным  $\boldsymbol{\lambda}$  и  $\varphi$ . Функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H = -\sigma + \frac{1}{2} \left[ \frac{r}{c} \nu_1 u + \frac{c}{r^2} (\nu_3 + 2\chi) \right], \quad (8)$$

где  $\nu_1, \nu_3$  – компоненты  $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$ . Для функционала  $J$   $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$ . Система уравнений для сопряжённых переменных примет вид

$$2 \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \frac{d\chi}{dt} = \left[ \frac{1}{r} (\nu_3 + 2\chi) \nu_1 u - \frac{r^2}{2c^2} \nu_1 u \right] \frac{dr}{dt}. \quad (9)$$

Закон оптимального управления находится из условий максимума функции  $H$  по переменной  $u$  с учётом наложенного ограничения (3) и имеет вид

$$u = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} \nu_1, & \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| \leq u_{max} \\ u_{max} \operatorname{sign} \nu_1, & \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| \geq u_{max}. \end{cases} \quad (10)$$

Условия трансверсальности, не содержащие неопределённых множителей Лагранжа, имеют вид

$$\Lambda_0^* \mu_0 + \Lambda_1^* \mu_1 + \Lambda_2^* \mu_2 + \Lambda_3^* \mu_3 = 0, \quad 2\chi + (\Lambda_0^* \mu_3 + \Lambda_1^* \mu_2 + \Lambda_2^* \mu_1 + \Lambda_3^* \mu_0) = 0 \quad (11)$$

Таким образом, задача оптимальное переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (1), (9), (10) десятого порядка и восемью краевыми условиями (4), (7), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (11) и равенством

$$H^0|_{t^*} = H^0(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \chi, u^0)|_{t^*} = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим понижение размерности сформулированной краевой задачи. В силу того что значение переменной  $\chi$  необходимо знать лишь в конечный момент времени, уравнение для  $\chi$  может быть исключено из рассмотрения. Переходя от переменной  $\boldsymbol{\mu}$  к кватернионной переменной  $\boldsymbol{\nu}$ , получим систему восьми дифференциальных уравнений, содержащую уравнения (1) и уравнения для компонент  $\nu_j$  кватерниона  $\boldsymbol{\nu}$  [3]

$$\frac{d\nu_1}{dt} = \frac{c}{r^2} \nu_2, \quad \frac{d\nu_2}{dt} = -\frac{c}{r^2} \nu_1 + \frac{r}{c} \nu_3 u, \quad \frac{d\nu_3}{dt} = -\frac{r}{c} \nu_2 u. \quad (13)$$

Для численного решения краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА запишем уравнения этой задачи в безразмерных переменных. Безразмерные переменные  $r^b, t^b$  и управление  $u^b$  связаны с размерными переменными  $r, t$  и управлением  $u$  соотношениями:  $r = Rr^b, u = u_{max} u^b, t = Tt^b$ , где  $R$  – характерное расстояние;  $V, T$  – характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями  $V = \frac{c}{R}, T = \frac{R^2}{c}$ .

Таким образом, вместо системы дифференциальных уравнений краевой задачи десятого порядка имеем систему дифференциальных уравнений восьмого порядка, размерность которой можно понизить ещё на единицу, если перейти к новой независимой переменной  $\varphi$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ (u^b N r^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3) \\
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{r^b}, r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi} \\
\frac{d\nu_1}{dt} &= \frac{1}{r^b} \nu_2, \frac{d\nu_2}{dt} = -\frac{1}{r^b} \nu_1 + N r^b u^b \nu_3, \frac{d\nu_3}{dt} = -N r^b u^b \nu_2
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}(0) &= \boldsymbol{\lambda}^0 = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ (\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2}) \\
\text{vect}[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t^*) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ (\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2})] &= 0 \\
H^0|_{t^*} &= H^0(\boldsymbol{\nu}, u^0)|_{t^*} = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00365).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
2. Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Саратов. ун-та. Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.
3. Челноков Ю.Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.

# СОДЕРЖАНИЕ

## СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

БАРЫШЕВ А. А., ЛУКОМСКИЙ Д. С., ЛУКОМСКИЙ С. Ф., ЮЗЛИКЕЕВ Э. Х. Быстрое преобразование Фурье—Хаара в двухпараметрической цветовой палитре . . . . .	3
БРЕДИХИН Д. А. О классах группоидов бинарных отношений с диофантовыми операциями . . . . .	6
БУКУШЕВА А. В. О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий . . . . .	8
БУТЕРИН С. А., ЮРКО В. А. О восстановлении дифференциальных операторов по информации о первом собственном значении . . . . .	11
ВОДОЛАЗОВ А. М. Локальный метод обоснования теории идеалов . . . . .	17
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. О монотонном алгоритме решения задачи аппроксимации многозначного отображения алгебраическим полиномом . . . . .	20
ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. О первых интегралах динамической системы с неинтегрируемой линейной связью . . . . .	23
ГЛОТОВА И. В., ТЕРЕХИН П. А. Дополнение изометрии до $C^*$ -алгебры Кунца $\mathcal{O}_2$ и основная теорема кратномасштабного анализа . . . . .	29
ГУДОШНИКОВА Е. В. Приближение классом линейных операторов . . . . .	32
ИГНАТЬЕВ М. Ю. Единственность восстановления дифференциального оператора переменного порядка на простейшем некомпактном графе с циклом . . . . .	35
КОРНЕВ В. В., ХРОМОВ А. П. Об одной смешанной задаче для уравнения струны . . . . .	38
КОРОЛЕВА О. А. Теорема Жордана—Дирихле для оператора дифференцирования . . . . .	40
КУВАРДИНА Л. П. Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов . . . . .	43
КУЗНЕЦОВА И. А. Иерархические игры с неопределенными факторами . . . . .	47
КУЧЕР А. А., БЕССОНОВ Л. В. О некоторых оценках показателей невербального поведения в контексте задачи оценки достоверности сообщаемой информации . . . . .	50
МОЛЧАНОВ В. А. О нестандартной характеристике решетки равномерных сходимостей . . . . .	53
МОСИНА К. Б. Принцип Дини—Липшица для интерполяционного процесса Лагранжа—Штурма—Лиувилля . . . . .	56
НОВИКОВ В. Е. Нейтральные элементы в алгебре контекстов . . . . .	59

ОСИПЦЕВ М. А., ДУДОВ С. И. О наименьшем по объёму шаровом слое, содержащем границу выпуклого тела . . . . .	62
ПОЛИКАРПОВ С. И. Представление автомата рядом Фурье в задачах диагностики и управления . . . . .	64
РОМАКИНА Л. Н. О площади эллиптического четырехугольника Саккери на гиперболической плоскости положительной кривизны . . . . .	66
РОМАКИНА Л. Н., БОНДАРЕВА М. А. Об одном метрическом свойстве овальных линий гиперболических плоскостей . . . . .	70
РОМАНОВ Р. О., ДУДОВ С. И. Об одной оптимальной полиномиальной мажоранте для непрерывной функции . . . . .	73
РЫХЛОВ В. С. Кратная полнота корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов . . . . .	76
СМИРНОВА Д. С. Модели многокритериальной оптимизации с равноценными критериями . . . . .	79
ТИМОФЕЕВ В. Г. О задаче Дирихле в круге . . . . .	84
ТЫШКЕВИЧ С. В. О наименее уклоняющихся от нуля тригонометрических полиномах . . . . .	87
ТЮЛЕНЕВА А. А. Приближение линейными средними рядов Фурье специального вида . . . . .	90
ФАДЕЕВ Р. Н. Оценки кратных коэффициентов Фурье—Виленкина . . . . .	93
ФЕДОСЕЕВ А. Е. О единственности решения обратной задачи на конечном отрезке для оператора Штурма—Лиувилля с неинтегрируемой особенностью . . . . .	96
ХРОМОВ А. А. О приближении функции и ее производной с помощью модифицированного оператора Стеклова . . . . .	98
ХРОМОВ А. П., ХРОМОВА Г. В. Об одной модификации оператора Ландау	100
ЮРКО В. А. Квазипериодическая обратная задача с условиями разрыва внутри интервала . . . . .	103

### СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНОФРИКОВА Н. С., ДЕНИСОВА К. М. Тангенциальные низкочастотные длинноволновые приближения трехмерных уравнений для случая вязкоупругой двухслойной оболочки . . . . .	107
БАРЫШЕВ А. А., ЛЫСУНКИНА Ю. В. О применении метода продолжения решения по параметру к анализу дисперсионных уравнений в системе mathematica . . . . .	111
ИВАНОВ А. В. ШЕВЫРЁВ С. П. Численное исследование движения лимфы в лимфатических сосудах с упругими стенками . . . . .	114
КОЖАНОВ В. С., СОРОКИН С. В. Учёт третьей поправки в задаче о точечном взрыве с противодавлением . . . . .	116
КОЗЛОВ Е. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н., ПАНКРАТОВ И. А. К решению задачи оптимальной переориентации плоскости орбиты космического аппарата с использованием кватернионного оскулирующего элемента . . . . .	121
ЛИВЕРОВСКИЙ Д. И., ШЕВЫРЁВ С. П. Моделирование движения тяжёлой несжимаемой невязкой жидкости методом крупных частиц . . . . .	124
ЛОБАНКОВ Я. В., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н., ПАНКРАТОВ И. А. Кватернионное решение задачи оптимальной переориентации плоскости орбиты космического аппарата . . . . .	127
ПАНКРАТОВ И. А., САПУНКОВ Я. Г., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Особый режим в задаче переориентации орбиты космического аппарата . . . . .	130



САПУНКОВ Я. Г. Оптимальное управление космическим аппаратом с солнечным парусом и двигателем импульсной тяги . . . . .	133
ШИНДЯПИН Г. П., МАТУТИН А. А. Возникновение невырожденной ударной волны в воздухе при рефракции ударной волны в океане . . . . .	136
ШИШКОВ Д. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н., ПАНКРАТОВ И. А. Краевая задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата пониженной размерности . . . . .	141