

УДК 517.984

Н. П. Бондаренко

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКА МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим пучок операторов  $L = L(Q_0, Q_1, h_0, h_1, H_0, H_1)$ , порожденный дифференциальным выражением

$$\ell(Y, \rho) := Y'' + (\rho^2 \cdot I + 2i\rho Q_1(x) + Q_0(x))Y, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} U(Y) &:= Y'(0) + (i\rho h_1 + h_0)Y(0) = 0, \\ V(Y) &:= Y'(\pi) + (i\rho H_1 + H_0)Y(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $Y(x) = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$  — вектор-столбец,  $I$  — единичная матрица размера  $m \times m$ ,  $Q_s(x) = [Q_{s,jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$  —  $m \times m$  матрицы с элементами  $Q_{s,jk}(x) \in W_1^s[0, \pi]$ ,  $s = 0, 1$ ,  $h_s = [h_{s,jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$ ,  $H_s = [H_{s,jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$ , где  $h_{s,jk}$ ,  $H_{s,jk}$  — комплексные числа.

Будем предполагать, что  $\det(I \pm h_1) \neq 0$  и  $\det(I \pm H_1) \neq 0$ . Эти условия исключают из рассмотрения задачи типа Редже [1], которые требуют отдельного исследования.

Обратные задачи спектрального анализа для пучков дифференциальных операторов в скалярном случае ( $m = 1$ ) изучались в работах [2, 3]. В данной статье исследуется обратная задача восстановления матричного пучка  $L$  вида (1)-(2) по матрице Вейля, представляющей собой обобщение функции Вейля скалярного оператора. Получены асимптотические формулы для решений уравнения  $\ell(Y, \rho) = 0$  и теорема единственности решения обратной задачи. Для исследования используется метод спектральных отображений [4], с помощью которого также может быть получена конструктивная процедура решения обратной задачи.

Пусть  $S(x, \rho) = [S_{jk}(x, \rho)]_{j,k=\overline{1,m}}$ ,  $C(x, \rho) = [C_{jk}(x, \rho)]_{j,k=\overline{1,m}}$  и  $\varphi(x, \rho) = [\varphi_{jk}(x, \rho)]_{j,k=\overline{1,m}}$  — матричные решения уравнения  $\ell(Y, \rho) = 0$ , удовлетворяющие начальным условиям

$$S(0, \rho) = C'(0, \rho) = U(\varphi) = 0, \quad S'(0, \rho) = C(0, \rho) = \varphi(0, \rho) = I.$$

При каждом фиксированном  $x \in [0, \pi]$  элементы матриц  $S(x, \rho)$ ,  $C(x, \rho)$  и  $\varphi(x, \rho)$  являются целыми аналитическими функциями по  $\rho$ .

**Лемма 1.** При  $x \in (0, \pi)$ ,  $\nu = 0, 1$ ,  $|\rho| \rightarrow \infty$  справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} S^{(\nu)}(x, \rho) &= \frac{(i\rho)^{\nu-1}}{2} e^{i\rho x} P_-(x)[I] + \frac{(-i\rho)^{\nu-1}}{2} e^{-i\rho x} P_+(x)[I], \\ C^{(\nu)}(x, \rho) &= \frac{(i\rho)^\nu}{2} e^{i\rho x} P_-(x)[I] + \frac{(-i\rho)^\nu}{2} e^{-i\rho x} P_+(x)[I], \end{aligned}$$

где  $[I] := I + O(\rho^{-1})$  и матрицы  $P_\pm(x)$  являются решениями задач Коши

$$P'_\pm(x) = \pm Q_1(x) P_\pm(x), \quad P_\pm(0) = I.$$

**Замечание.** В скалярном случае ( $m = 1$ )

$$P_\pm(x) = e^{\pm \int_0^x Q_1(t) dt}.$$

Будем называть *решением Вейля* пучка  $L$  матричное решение  $\Phi(x, \rho) = [\Phi_{jk}(x, \rho)]_{j,k=\overline{1,n}}$  уравнения  $\ell(Y, \rho) = 0$ , удовлетворяющее условиям  $U(\Phi) = I$ ,  $V(\Phi) = 0$ , и *матрицей Вейля* матрицу  $M(\rho) := \Phi(0, \rho)$ . Нетрудно видеть, что

$$\Phi(x, \rho) = S(x, \rho) + \varphi(x, \rho) M(\rho), \quad M(\rho) = -(V(\varphi))^{-1} V(S). \quad (3)$$

Пучок  $L$  имеет счетное множество собственных значений  $\{\rho_n\}$ , которые совпадают с нулями характеристической функции  $\Delta(\rho) := \det V(\varphi)$ . В силу формул (3) элементы матриц  $\Phi(x, \rho)$  и  $M(\rho)$  мероморфны по  $\rho$ , и их полюса совпадают с собственными значениями  $\{\rho_n\}$ .

**Лемма 2.** Справедливо представление

$$M(\rho) = \sum_n \sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{M_{n\nu}}{(\rho - \rho_n)^\nu},$$

где  $m_n$  — кратность собственного значения  $\rho_n$ ,  $M_{n\nu}$  — некоторые матричные коэффициенты.

Величины  $\{\rho_n, M_{n\nu}\}$  будем называть *спектральными данными* пучка  $L$ . В силу леммы 2 спектральные данные однозначно определяют матрицу Вейля и наоборот. Поэтому следующие две задачи эквивалентны.

**Обратная задача 1.** По матрице Вейля  $M(\rho)$  построить коэффициенты  $Q_s(x)$ ,  $h_s$ ,  $H_s$ ,  $s = 0, 1$ , пучка  $L$ .

**Обратная задача 2.** По спектральным данным  $\{\rho_n, M_{n\nu}\}$  построить коэффициенты пучка  $L$ .

В данной статье ограничимся рассмотрением обратной задачи 1.

Наряду с  $L$  рассмотрим пучок  $\tilde{L} = L(\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \tilde{H}_0, \tilde{H}_1)$  того же вида, что и  $L$ , но с другими коэффициентами. Условимся, что если некоторый символ  $\gamma$  обозначает объект, относящийся к  $L$ , то  $\tilde{\gamma}$  обозначает аналогичный объект, относящийся к  $\tilde{L}$ . Докажем теорему единственности решения обратной задачи 1.

**Теорема 1.** *Если  $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$ , то  $L = \tilde{L}$ . Таким образом, задание матрицы Вейля однозначно определяет пучок  $L$ .*

**Доказательство.** 1. Введем обозначения  $\tau := \text{Im } \rho$ ,  $\Theta_\delta^\pm := \{\rho \in \mathbb{C} : \delta \leq \pm \arg \rho \leq \pi - \delta\}$ ,  $\delta > 0$ . Используя лемму 1, получаем асимптотические формулы при  $\nu = 0, 1$ ,  $\rho \in \Theta_\delta^\pm$ ,  $|\rho| \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(x, \rho) &= \frac{(\mp i \rho x)^\nu}{2} e^{\mp i \rho x} P_\pm(x) (I \pm h_1) + O(\rho^{-1} e^{|\tau|x}), \\ \Phi^{(\nu)}(x, \rho) &= -(\mp i \rho)^{\nu-1} e^{\pm i \rho x} P_\pm^\bullet(x) (P_\pm^\bullet(0))^{-1} (I \pm h_1)^{-1} + O(\rho^{\nu-2} e^{-|\tau|x}), \end{aligned} \quad (4)$$

где матрицы  $P_\pm^\bullet(x)$  — решения задач Коши

$$P_\pm^{\bullet\prime}(x) = \mp Q_1(x) P_\pm^\bullet(x), \quad P_\pm^\bullet(\pi) = I.$$

2. Положим

$$\begin{aligned} \ell^*(Z, \rho) &:= Z'' + Z(\rho^2 \cdot I + 2i\rho Q_1(x) + Q_0(x)), \\ U^*(Z) &:= Z'(0) + Z(0)(i\rho h_1 + h_0), \\ V^*(Z) &:= Z'(\pi) + Z(\pi)(i\rho H_1 + H_0), \end{aligned}$$

где  $Z = [z_k]_{k=1, \bar{m}}^T$  — вектор-строка ( $T$  — знак транспонирования). Пусть  $\varphi^*(x, \rho)$  и  $\Phi^*(x, \rho)$  — матричные решения уравнения  $\ell^*(Z, \rho) = 0$ , удовлетворяющие условиям

$$\varphi^*(0, \rho) = U^*(\Phi^*) = I, \quad U^*(\varphi^*) = V^*(\Phi^*) = 0.$$

Введенные решения обладают аналогичными свойствами с  $\varphi(x, \rho)$  и  $\Phi(x, \rho)$ . В частности, справедливы асимптотические формулы при  $\rho \in \Theta_\delta^\pm$ ,  $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\varphi^{*(\nu)}(x, \rho) &= \frac{(\mp i \rho x)^\nu}{2} e^{\mp i \rho x} (I \pm h_1) P_\pm^*(x) + O(\rho^{-1} e^{|\tau|x}), \\ \Phi^{*(\nu)}(x, \rho) &= -(\mp i \rho)^{\nu-1} e^{\pm i \rho x} (I \pm h_1)^{-1} (P_\pm^{\bullet*}(0))^{-1} P_\pm^{\bullet*}(x) + O(\rho^{\nu-2} e^{-|\tau|x}),\end{aligned}\quad (5)$$

где  $P_\pm^*(x)$  и  $P_\pm^{\bullet*}(x)$  — решения задач Коши

$$\begin{aligned}P_\pm^{*'}(x) &= \pm P_\pm^*(x) Q_1(x), & P_\pm^*(0) &= I, \\ P_\pm^{\bullet*'}(x) &= \mp P_\pm^{\bullet*}(x) Q_1(x), & P_\pm^{\bullet*}(\pi) &= I.\end{aligned}$$

Обозначим  $M^*(\rho) := \Phi^*(0, \rho)$ . Нетрудно показать, что  $M^*(\rho) \equiv M(\rho)$ .

3. Определим блочные матрицы  $\mathcal{P}(x, \rho) = [\mathcal{P}_{jk}(x, \rho)]_{j,k=1,2}$  по формуле

$$\mathcal{P}(x, \rho) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \rho) & \tilde{\Phi}(x, \rho) \\ \tilde{\varphi}'(x, \rho) & \tilde{\Phi}'(x, \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x, \rho) & \Phi(x, \rho) \\ \varphi'(x, \rho) & \Phi'(x, \rho) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{j1}(x, \rho) &= \varphi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\Phi}^{*'}(x, \rho) - \Phi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\varphi}^{*'}(x, \rho), \\ \mathcal{P}_{j2}(x, \rho) &= \Phi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\varphi}^*(x, \rho) - \varphi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho).\end{aligned}\quad (7)$$

Используя формулы (4) и (5), для  $\rho \in \Theta_\delta^\pm$ ,  $|\rho| \rightarrow \infty$ ,  $x \in (0, \pi)$  вычисляем

$$\mathcal{P}_{11}(x, \rho) = \Omega(x) + O(\rho^{-1}), \quad \mathcal{P}_{12}(x, \rho) = \rho^{-1} \Lambda(x) + O(\rho^{-2}), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\Omega(x) &:= \frac{1}{2} \left( P_-(x) \tilde{P}_+^*(x) + P_+(x) \tilde{P}_-^*(x) \right), \\ \Lambda(x) &:= \frac{1}{2i} \left( P_-(x) \tilde{P}_+^*(x) - P_+(x) \tilde{P}_-^*(x) \right).\end{aligned}$$

С другой стороны, согласно (7)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{11} &= \varphi \tilde{S}^{*'} - S \tilde{\varphi}^{*'} + \varphi (\tilde{M}^* - M) \tilde{\varphi}^*, \\ \mathcal{P}_{12} &= S \tilde{\varphi}^* - \varphi \tilde{S}^* + \varphi (M - \tilde{M}^*) \tilde{\varphi}^*,\end{aligned}$$

Поскольку  $\tilde{M}^*(\rho) \equiv \tilde{M}(\rho) \equiv M(\rho)$ , для любого фиксированного  $x \in [0, \pi]$  элементы матриц  $\mathcal{P}_{11}(x, \rho)$  и  $\mathcal{P}_{12}(x, \rho)$  целые функции по  $\rho$  порядка не больше 1. Используя теорему Фрагмена – Линделёфа и соотношения (8), получаем  $\mathcal{P}_{11}(x, \rho) \equiv \Omega(x)$ ,  $\mathcal{P}_{12}(x, \rho) \equiv 0$ ,  $\Lambda(x) \equiv 0$ .

Нетрудно показать, что  $\Omega'(x) = 0$  и, следовательно,  $\Omega(x) \equiv \Omega(0) \equiv I$ ,  $x \in [0, \pi]$ . Таким образом,  $P_{11}(x, \rho) \equiv I$ ,  $x \in [0, \pi]$ . В силу (6)  $\varphi(x, \rho) \equiv \tilde{\varphi}(x, \rho)$ ,  $\Phi(x, \rho) \equiv \tilde{\Phi}(x, \rho)$  и  $L = \tilde{L}$ .  $\square$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. О краевых задачах с параметром в краевых условиях // Известия Арм. ССР. Сер. Математика. 1984. Т. 19, № 5. С. 398–409.
2. Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш. Определение оператора диффузии по спектральным данным // ДАН Азерб. ССР. 1981. Т. 37, № 2. С. 19–23.
3. Бутерин С. А., Юрко В. А. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на конечном интервале // Вестн. Башкир. ун-та. 2006. № 4. С. 8–12.
4. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: физматлит, 2007. 384 с.

УДК 512.57

**Д. А. Бредихин**

### **О ГРУППОИДАХ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ**

Множество бинарных отношений  $\Phi$ , замкнутое относительно некоторой совокупности  $\Omega$  операций над ними, образует алгебру  $(\Phi, \Omega)$ , называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения  $\subset$ . Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной общей алгебры и алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1, 2]. Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются *логическими*. Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Операция называется *диофантовой* [3] (в другой терминологии примитивно-позитивной [4]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции допускают описания с помощью графов см.[3, 4]. Эквациональные и квази-эквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в [5, 6].

Предметом нашего изучения будут алгебры с одной бинарной диофантовой операцией. Рассмотрение бинарных операций над отношениями играет в алгебраической логике предикатов роль, аналогичную роли бинарных булевых функций в пропозициональной логике высказываний. Поэтому естественен интерес к алгебраическим свойствам указанных операций. Одной из важнейших бинарных диофантовых операций над отношениями является операция умножения отношений  $\circ$ . Алгебры отношений вида  $(\Phi, \circ)$  являются полугруппами, и всякая полугруппа допускает изоморфное представление полугруппой бинарных отношений. В общем случае алгебра отношений вида  $(\Phi, *)$ , где  $*$  — некоторая бинарная операция над отношением, образует группоид. Класс всех группоидов не имеет естественных представлений в виде алгебр бинарных отношений, поэтому с точки зрения теории группоидов также представляет интерес рассмотрение группоидов, допускающих такое представление. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в [7, 8].

Для заданного множества  $\Omega$  операций над бинарными отношениями обозначим через  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subset\}$ ) класс алгебр (упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам отношений с операциями из  $\Omega$ . Пусть  $Q\{\Omega\}$  ( $Q\{\Omega, \subset\}$ ) — квазимногообразие и  $Var\{\Omega\}$  ( $Var\{\Omega, \subset\}$ ) — многообразие, порожденное классом  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subset\}$ ). Одной из основных задач теории алгебр отношений является характеристика указанных классов алгебр для различных совокупностей операций над отношениями. Сосредоточим свое внимание на следующей бинарной операции над бинарными отношениями, определяемой таким образом:

$$\rho * \sigma = \{(x, y) : (\exists z, w)(x, z) \in \rho \wedge (z, w) \in \sigma\}.$$

Упорядоченным группоидом  $(A, \cdot, \leq)$  назовем группоид  $(A, \cdot)$  с заданным на множестве  $A$  отношением порядка  $\leq$ , согласованным с операцией группоида. Полурешеточно упорядоченный группоид — это алгебра  $(A, \cdot, \vee)$  типа  $(2, 2)$ , где  $(A, \cdot)$  — группоид,  $(A, \vee)$  — верхняя полурешетка, каноническое отношение порядка которой согласовано с операцией группоида. Элемент  $0$  называется нулевым элементом группоида, если  $0x = x0 = 0$  для любого  $x \in A$ .

Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах.

**Теорема 1.** *Квазимногообразие  $Q\{*, \subset\}$  является многообразием, то есть  $Q\{*, \subset\} = Var\{*, \subset\}$ . Упорядоченный группоид  $(A, \cdot, \leq)$  принадлежит многообразию  $Var\{*, \subset\}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим тождествам:*

$$(xy)x = xy \text{ (1)}, (xy)x = xy \text{ (2)}, (xy)^2 = xy \text{ (3)}, (x^2y)z = (x^2z)y \text{ (4)},$$

$$(x^2y^2)z = x^2(y^2z) \text{ (5)}, x^2y \leq x^2 \text{ (6)}, x(yz) \leq xy \text{ (7)}.$$

Класс  $R\{*, \subset\}$  не является квазимногообразием. Упорядоченный группоид  $(A, \cdot, \leq)$  принадлежит классу  $R\{*, \subset\}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1) – (7) и следующему условию:

$$z \neq 0 \Rightarrow (xy)z = xy \text{ (8)}.$$

**Теорема 2.** Квазимногообразие  $Q\{*\}$  не имеет конечного базиса квазитожеств и не является многообразием. Класс  $R\{*\}$  не может быть охарактеризован никакой конечной системой элементарных аксиом и не является квазимногообразием.

Группоид  $(A, \cdot)$  принадлежит многообразию  $Var\{*\}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1) – (5).

**Теорема 3.** Полурешеточно упорядоченный группоид  $(A, \cdot, \vee)$  принадлежит многообразию  $Var\{*, \cup\}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1) – (5) и тождествам:

$$x(y \vee z) = xy \vee xz \text{ (9)}, (x \vee y)z = xz \vee yz \text{ (10)},$$

$$x^2z \vee x^2 = x^2 \text{ (11)}, x(yz) \vee xy = xy \text{ (12)}.$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. v. 4. P. 73–89.
2. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. v 18. С. 188–189.
3. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Доклады Российской Академии Наук. 1998. Т. 360. С. 594–595.
4. *Böner P., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. v. 7. P. 50–70.
5. *Бредихин Д. А.* Эквиациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. математика. 1993. № 3. С. 23–30.
6. *Бредихин Д. А.* О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
7. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. v. 54. P. 11–124.
8. *Bredikhin D. A.* Varieties of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. v. 44. P. 87–192.

## О БЕСКОНЕЧНОЙ БАЗИРУЕМОСТИ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую *алгеброй отношений*. Для всякого множества  $\Omega$  операций над бинарными отношениями обозначим  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subset\}$ ) класс алгебр (упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам (упорядоченных отношением включения  $\subset$  алгебр) отношений с операциями из  $\Omega$ . Пусть  $Var\{\Omega\}$  ( $Var\{\Omega, \subset\}$ ) есть многообразие, порожденное классом  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subset\}$ ). В работах [1, 2] найдены бесконечные базисы тождеств многообразий  $Var\{\circ, \nabla\}$  и  $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$ , где  $\circ$  — операция умножения бинарных отношений и  $\nabla$ -3-унарная операция идентификации неподвижной точки, определяемая следующим образом:

$$\nabla(\rho) = \{(x, x) : (\exists z)(z, z) \in \rho\}.$$

**Теорема 1** (см. [1]). *Алгебра  $(A, \cdot, *)$  типа  $(2, 1)$  принадлежит многообразию  $Var\{\circ, \nabla\}$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:  $(xy)z = x(yz)$  (1),  $(x^*)^2 = x^*$  (2),  $xy^* = y^*x$  (3),  $(xy)^* = (yx)^*$  (4),  $(xy^*)^* = x^*y^*$  (5),  $x^*(x^k)^* = x^*$  (6) для любого простого числа  $k$ .*

**Теорема 2** (см. [2]). *Упорядоченная алгебра  $(A, \cdot, *, \leq)$  типа  $(2, 1)$  принадлежит многообразию  $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1) – (6) и тождеству  $xy^* \leq x$  (7).*

Основной результат работы формулируется в следующей теореме.

**Теорема 3.** *Многообразия  $Var\{\circ, \nabla\}$  и  $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$  не являются конечно базлируемыми, то есть они не могут быть охарактеризованы никакой конечной системой тождеств.*

*Доказательство.* Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении. Обозначим через  $N$  множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару  $G = (V, E)$ , где  $V = V(G)$  — конечное множество, называемое множеством вершин, и  $E = E(G) \subset V \times N \times V$  — тернарное отношение. Тройку  $(u, k, v) \in E$  будем называть ребром графа, идущим из вершины  $u$  в вершину  $v$ , помеченным меткой  $k$ , и графически изображать следующим образом:  $u \cdot \xrightarrow{k} \cdot v$ . Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, то есть систему вида  $G = (V, E, in, out)$ ,



где  $(V, E)$  – помеченный граф;  $in = in(G)$  и  $out = out(G)$  – две выделенные вершины (не обязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Двухполюсник определяет операцию над бинарными отношениями (см. [1]). Двухполюсники  $G_\circ = (V_\circ, E_\circ, in_\circ, out_\circ)$  и  $G_\nabla = (V_\nabla, E_\nabla, in_\nabla, out_\nabla)$ , соответствующие операции умножения отношений  $\circ$  и операции  $\nabla$ , задаются следующим образом:  $V_\circ = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $E_\circ = \{(v_1, 1, v_2), (v_2, 2, v_3)\}$ ,  $in_\circ = v_1, out_\circ = v_3$  и  $V_\nabla = \{v_0, v_1\}$ ,  $E_\nabla = \{(v_1, 1, v_1)\}$ ,  $in_\nabla = out_\nabla = v_0$ .

Пусть  $G = (V, E, in, out)$  и  $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник  $G(G_1, \dots, G_m)$ , определяемый следующим образом: возьмем двухполюсник  $G$  и заменим каждое его ребро  $(u, k, v) \in E$  на двухполюсник  $G_k$ , отождествляя при этом вершину  $in_k$  с вершиной  $u$  и вершину  $out_k$  с вершиной  $v$ .

Обозначим через  $pr(E)$  множество всех вершин помеченного графа, которые инцидентны хотя бы одному ребру. Пусть даны два помеченных графа  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$ .  $f : pr(E_2) \rightarrow pr(E_1)$  называется гомоморфизмом  $G_2$  в  $G_1$ , если  $(f(u), k, f(v)) \in E_1$  для всякой тройки  $(u, k, v) \in E_2$ . Пусть  $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$  – двухполюсники. Отображение  $f : V_2 \rightarrow V_1$  называется гомоморфизмом из  $G_2$  в  $G_1$ , если  $f(in_2) = in_1$ ,  $f(out_2) = out_1$  и  $(f(u), k, f(v)) \in E_1$  для всякой тройки  $(u, k, v) \in E_2$ . Мы будем писать  $E_1 \prec E_2$  ( $G_1 \prec G_2$ ), если существует гомоморфизм из  $E_2$  в  $E_1$  (из  $G_2$  в  $G_1$ ), и  $E_1 \cong E_2$  ( $G_1 \cong G_2$ ), если  $E_1 \prec E_2$  и  $E_2 \prec E_1$  ( $G_1 \prec G_2$  и  $G_2 \prec G_1$ ).

Обозначим через  $\Sigma$  эквациональную теорию алгебр типа  $(2, 1)$ , удовлетворяющих тождествам (1)–(6), и пусть  $\Xi$  – множество термов алгебры  $(A, \cdot, *)$  типа  $(2, 1)$ . Для термов  $p_1$  и  $p_2$  из  $\Xi$  будем писать  $p_1 \cong p_2$ , когда тождество  $p_1 = p_2$  принадлежит  $\Sigma$ . Пусть  $\Lambda$  – множество всех непустых слов над алфавитом  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ ,  $\odot$  – пустое слово и  $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\odot\}$ .

**Лемма 1** (см. [1]). *Для любого терма  $p$  существуют такие  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  ( $n \geq 0$ ), что  $p \cong \alpha_0(\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^*$ , где  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$ .*

Сопоставим терму  $p$  двухполюсник  $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$ , который строится следующим образом (см. [1]).

Пусть  $p = \alpha = \odot$ . Тогда  $V_p = V_\alpha = \{v_0\}$ ,  $E_p = E_\alpha = \emptyset$  и  $in(p) = in(\alpha) = out(p) = out(\alpha) = v_0$ . Пусть  $p = \alpha = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}$ . Тогда  $V_p = V_\alpha = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ ,  $E_p = E_\alpha = \{(v_k, i_k, v_{k+1}) : k \in [1, n]\}$  и  $in(p) = in(\alpha) = v_1$ ,  $out(p) = out(\alpha) = v_{n+1}$ :

$$in(\alpha) = v_1 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \dots \cdot \xrightarrow{i_n} \cdot v_{n+1} = out(\alpha).$$

Пусть  $p = \alpha^*$ , где  $\alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ . Тогда  $V_p = V_{\alpha^*} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ,  $E_p = E_{\alpha^*} = \{(v_k, i_k, v_{k+1}) : k \in [1, n-1]\} \cup \{(v_n, i_n, v_1)\}$  и  $in(p) = out(p) = in(\alpha^*) = out(\alpha^*) = v_0$ . Заметим, что  $E_{\alpha^*}$  есть петля, которая получена из  $E_\alpha$  посредством отождествления вершин  $v_1$  и  $v_{n+1}$ .

Пусть  $p = \alpha_0(\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^*$  и  $n > 0$ . Мы будем предполагать, что множества  $V_{\alpha_0}, V_{\alpha_1^*}, \dots, V_{\alpha_n^*}$  попарно не пересекаются. Тогда  $V_p = V_{\alpha_0} \cup \cup pr(E_{\alpha_1^*}) \cup \dots \cup pr(E_{\alpha_n^*})$ ,  $E_p = E_{\alpha_0} \cup E_{\alpha_1^*} \cup \dots \cup E_{\alpha_n^*}$  и  $in(p) = in(\alpha_0)$ ,  $out(p) = out(\alpha_0)$ .

Обозначим через  $|V|$  число элементов конечного множества  $V$ .

**Лемма 2** (см. [1]). Пусть  $E_{\alpha^*} \prec E_{\beta^*}$  и  $f$  – гомоморфизм из  $E_{\beta^*}$  в  $E_{\alpha^*}$ . Тогда существуют такие  $\lambda, \mu \in \tilde{\Lambda}$ , что  $\alpha = \lambda\mu$  и  $\beta = (\mu\lambda)^k$  для некоторого натурального  $k \geq 1$ , и для каждой вершины  $v \in pr(E_{\alpha^*})$  выполняется условие  $|f^{-1}(v)| = k$ .

Пусть  $\Theta$  – множество всех двухполюсников  $G(p)$ , где  $p = \alpha_0(\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^*$  для некоторого  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$ . Определим две операции на  $\Theta$  типа 2 и 1 как следующую композицию графов. Для заданных  $G, Q \in \Theta$  положим  $G \cdot Q = G_\circ(G, Q)$  и  $G^* = G_\nabla(G)$ , где  $G_\circ$  и  $G_\nabla$  – двухполюсники, соответствующие операциям  $\circ$  и  $\nabla$  над отношениями.

Будем писать  $G \prec^k Q$  ( $k \geq 2$ ), если существует гомоморфизм  $f$  из  $Q$  в  $G$ , удовлетворяющий условию: для любой вершины  $v$  из  $G$   $|f^{-1}(v)| \leq k$ . Далее, будем писать  $G \overset{K}{\prec} Q$ , если  $G = G_1 \overset{k}{\prec} G_2 \overset{k}{\prec} \dots \overset{k}{\prec} G_n = Q$  для некоторых  $G_1, G_2, \dots, G_n \in \Theta$ , и  $G \overset{K}{\cong} Q$ , если  $G \overset{K}{\prec} Q$  и  $Q \overset{K}{\prec} G$ . Легко проверить, что отношение  $\overset{K}{\cong}$  является конгруэнтностью алгебры  $(\Theta, \cdot, *)$  и фактор алгебра  $A_k = (\Theta, \cdot, *) / \overset{K}{\cong}$  удовлетворяет тождествам (1)-(5), а фактор система  $A_k^{\leq} = (\Theta, \cdot, *, \overset{K}{\prec}) / \overset{K}{\cong}$  является упорядоченной алгеброй, которая удовлетворяет тождествам (1)-(5) и (7).

Обозначим  $Pr$  множество всех простых чисел,  $Pr[1, n] = PR \cap [1, n]$  и  $Pr(n)$  – множество всех простых делителей  $n$ .

**Лемма 3**. Если  $G(\alpha^*) \overset{K}{\prec} G((\alpha^l)^*)$ , то  $Pr(l) \subset Pr[1, k]$ .

Предположим, что  $G(\alpha^*) \overset{K}{\prec} G((\alpha^l)^*)$ , то есть  $G(\alpha^*) = G_1 \overset{k}{\prec} G_2 \overset{k}{\prec} \dots \overset{k}{\prec} G_{n-1} \overset{k}{\prec} G_n = G((\alpha^l)^*)$  для некоторых  $G_1, G_2, \dots, G_{n-1}, G_n \in \Theta$ , и  $f_i$  – соответствующий гомоморфизм из  $G_i$  в  $G_{i-1}$  ( $i = 2, \dots, n$ ).

Положим  $\tilde{G}_{n-1} = f_n(G_n), \tilde{G}_{n-2} = f_{n-1}(\tilde{G}_{n-1}), \dots, \tilde{G}_1 = f_2(\tilde{G}_2)$ .

Легко видеть, что  $G(\alpha^*) \stackrel{k}{\prec} \tilde{G}_1 \stackrel{k}{\prec} \tilde{G}_2 \stackrel{k}{\prec} \dots \stackrel{k}{\prec} \tilde{G}_{n-1} \stackrel{k}{\prec} G_n = G((\alpha^l)^*)$ . Пусть  $f$  – композиция гомоморфизмов  $f_n, f_{n-1}, \dots, f_2$ . Согласно лемме 2 имеем  $f_i^{-1}(v) = k_i \leq k$  для всякой вершины  $v \in V(\tilde{G}_{i-1})$  такой, что  $v \neq in(\tilde{G}_{i-1}) = out(\tilde{G}_{i-1})$ . Отсюда следует, что  $f^{-1}(v) = k_2 k_3 \dots k_n$  для всякой вершины  $v \in V(G(\alpha^*))$  такой, что  $v \neq in(G(\alpha^*)) = out(G(\alpha^*))$ . Таким образом, согласно лемме 2 имеем  $l = k_2 k_3 \dots k_n$ , следовательно,  $Pr(l) \subset Pr[1, k]$ . *Лемма 3 доказана.*

Пусть  $l$  – простое число такое, что  $l \notin Pr[1, k]$ . Предположим, что  $G(\alpha^*) \circ G((\alpha^*)^l) \stackrel{K}{\cong} G(\alpha^*)$ , тогда  $G(\alpha^*) \stackrel{K}{\prec} G((\alpha^*)^l)$ , следовательно, по лемме 3  $l \in Pr[1, k]$ , что противоречит сделанному предположению. Таким образом, система тождеств (1)-(6) ((1)-(6) и (7)) не эквивалентна никакой своей подсистеме, следовательно, многообразие  $Var\{o, \nabla\}$  ( $Var\{o, \nabla, \subset\}$ ) не является конечно базлируемым. *Теорема 3 доказана.*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с операцией идентификации неподвижной точки // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвузов. сб. науч. тр.. 2010. С. 90–98
2. *Бредихин Д. А., Попович А. В.* Об упорядоченных полугруппах отношений с операцией идентификации неподвижной точки // Вестник Саратовского технического университета. 2011. № 4. вып. 1. С. 52–56.

УДК 514.764

**А. В. Букушева**

### О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ФИНСЛЕРОВОЙ СТРУКТУРОЙ

В статье исследуются специальные классы распределений с финслеровой структурой [1]. В соответствии с уже ставшим классическим подходом к изучению собственно финслеровых пространств (фундаментальная функция задана на всем касательном расслоении финслерова пространства), от финслерова многообразия переходят к его касательному расслоению с метрикой Сасаки – Финслера [2]. В случае субфинслерова пространства [3] вместо касательного расслоения удобно использовать его подрасслоение — распределение с финслеровой структурой. Существенным отличием использования подрасслоения является нечетность размерности многообразия, на котором осуществляются основные построения. В этом случае на распределении с финслеровой структурой естественно определить почти контактную метрическую структуру — аналог структуры многообразия с метрикой Сасаки – Финслера [4].

Пусть  $X$  — гладкое многообразие нечетной размерности  $n$ ,  $\Xi(X)$ –  $C^\infty(X)$ -модуль гладких векторных полей на  $X$ . Рассмотрим на многообразии  $X$  четверку  $(D, \eta, \vec{\xi}, D^\perp)$ , где  $D$  — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой  $\eta$ ,  $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$  — его оснащение. Карту  $K(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$ ) ( $a, b, c, e = 1, \dots, n-1$ ) на многообразии  $X$  будем называть адаптированной к неголономному многообразию  $D$ , если  $D^\perp = \text{Span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$ .

На многообразии  $X$  имеем неголономное поле базисов  $(\vec{e}_a, \partial_n)$  и соответствующее ему поле кобазисов  $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$ . В дальнейшем ограничимся рассмотрением исключительно адаптированных координат с условием  $\vec{\xi} = \partial_n$  ( см. [1]). Адаптированным будем называть также базис  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  как базис, определяемый адаптированной картой.

Предположим, что задана связность над распределением  $D$  ( см. [1]), т.е. распределение  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$  разбивается в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  — вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ . Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта  $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a})$  такого, что  $HD = \text{Span}(\vec{e}_a)$ , где  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$  ( см. [1]). Внутренняя линейная связность определяет связность над распределением, если положить  $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+c}$ . Для координатного представления объектов, заданных на  $D$ , мы используем координаты на многообразии  $D$ , индуцируемые адаптированной картой ( см. [1]).

Проводя необходимые вычисления, получаем

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n + R_{ab}^c \partial_{n+c}, [\vec{e}_a, \partial_n] = \partial_n G_a^b \partial_{n+b}, [\vec{e}_a, \partial_{n+b}] = G_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad (1)$$

где  $R_{ba}^c = \vec{e}_b G_a^c - \vec{e}_a G_b^c$  и  $\partial_n G_b^a$  соответственно первый и второй тензоры кривизны Схоутена [5].

Предположим, что на многообразии  $D$  задана функция  $L(x^\alpha, x^{n+a})$  такая, что выполняются следующие условия:

1.  $L$  — гладкая положительная функция на  $D^0 = D \setminus \vec{0}$ ;
2.  $L$  — положительно однородна степени 1 относительно слоевых координат;
3. Квадратичная форма  $L_{.a.b}^2 \zeta^a \zeta^b = \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a} \partial x^{n+b}} \zeta^a \zeta^b$  положительно определена.

Распределение  $D^0$  будем обозначать символом  $D$ . Назовем функцию  $L(x^\alpha, x^{n+a})$  допустимой финслеровой метрикой, а пару  $(D, L)$  — распределением с финслеровой структурой или финслеровым распределением. Как было показано в ( см. [1]), с каждым распределением  $(D, L)$  ассоциируются некоторая внутренняя и соответствующая ей продолженная

связности. Для задания внутренней и продолженной связностей необходимо задать объект внутренней связности  $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a})$ , а — задать разложение  $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$ , где  $HD \subset \widetilde{HD}$ .

Если на многообразии  $X$  задана пара  $(D, L)$ , то в  $D$  возникает внутренняя связность, порождаемая распределением  $HD = \text{Span}(\vec{\epsilon}_a)$ , где  $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}$ ,  $G_{bc}^a = G_{.b.c}^a = \partial_{n+b} \partial_{n+c} G^a$ ,  $G^a = g^{ab}(\partial_c L_{.b}^2 x^{n+c} - \vec{\epsilon}_b L^2)$ ,  $g_{ab} = \frac{1}{2} L_{.a.b}^2$  (см. [1]).

**Теорема 1.** Пусть  $(D, L)$  — распределение с финслеровой структурой и  $(\tilde{D}, \tilde{\eta}, \tilde{g}, \partial_n)$  — соответствующая почти контактная метрическая структура, тогда ненулевые коэффициенты связности Леви-Чивита метрики  $\tilde{g}$  представимы в следующем виде:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \Gamma_{ab}^c = F_{ab}^c, \Gamma_{ab}^{n+c} = (-C_{ab}^c + \frac{1}{2} R_{ab}^c), \\
b) \quad & \Gamma_{n+an+b}^c = -\frac{1}{2} g_{ab|d} g^{dc}, \Gamma_{n+an+b}^{n+c} = C_{ab}^c, \\
c) \quad & \Gamma_{an+b}^c = (C_{ba}^c + \frac{1}{2} g^{cd} R_{da}^e g_{eb}), \Gamma_{an+b}^{n+c} = \frac{1}{2} g^{cd} (\vec{\epsilon}_a g_{bd}), \\
d) \quad & \Gamma_{n+ab}^c = (\frac{1}{2} g^{cd} (\partial_{n+a} g_{bd}) - \frac{1}{2} g^{cd} R_{bd}^e g_{ea}), \Gamma_{n+ab}^{n+c} = \frac{1}{2} g^{cd} g_{da|b}, \\
e) \quad & \Gamma_{na}^c = \frac{1}{2} g^{cb} (\partial_n g_{ab} - 2\omega_{ab}), \Gamma_{na}^{n+c} = -\Gamma_{an}^{n+c} = -\frac{1}{2} \partial_n G_a^c, \\
& \Gamma_{an}^c = \frac{1}{2} g^{cb} (\partial_n g_{ab} + 2\omega_{ab}), \\
f) \quad & \Gamma_{nna}^c = \Gamma_{n+aa}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_n G_a^b) g_{ba}, \Gamma_{nna}^{n+c} = \Gamma_{n+aa}^{n+c} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_n g_{ad}),
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
a) \quad & F_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\vec{\epsilon}_a g_{bd} + \vec{\epsilon}_b g_{da} - \vec{\epsilon}_d g_{ab}), \\
b) \quad & C_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_{n+d} g_{ab}), \\
c) \quad & g_{ab|d} = \vec{\epsilon}_d g_{ab} - G_{bd}^k g_{ka} - G_{da}^k g_{kb}.
\end{aligned} \tag{3}$$

**Доказательство.** Связность Леви — Чивита  $\tilde{\nabla}$  определяется по формулам

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\vec{X}} \vec{Y}, \vec{Z}) &= \vec{X}(\tilde{g}(\vec{Y}, \vec{Z})) + \vec{Y}(\tilde{g}(\vec{Z}, \vec{X})) - \vec{Z}(\tilde{g}(\vec{X}, \vec{Y})) + \\
&+ \tilde{g}([\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z}) - \tilde{g}([\vec{Y}, \vec{Z}], \vec{X}) + \tilde{g}([\vec{Z}, \vec{X}], \vec{Y}),
\end{aligned} \tag{4}$$

$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \Gamma(TD)$ . Прямым вычислением, используя (1), (4), получим

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\vec{\epsilon}_a} \vec{\epsilon}_b, \vec{\epsilon}_d) = \frac{1}{2} (\vec{\epsilon}_a g_{bd} + \vec{\epsilon}_b g_{da} - \vec{\epsilon}_d g_{ab}), \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\vec{\epsilon}_a} \vec{\epsilon}_b, \partial_{n+d}) = \frac{1}{2} (-\partial_{n+d} g_{ab} + R_{ab}^c g_{cd}).$$

Из (3a) и (3b), следует (2a). Аналогично получают (2b-2f).  $\square$

Назовем  $(D, L)$  распределением Ландсберга, если выполняется равенство  $F_{bc}^a = G_{bc}^a$  и распределением Бервальда, если  $G_{bc.d}^a = 0$ . На многообразии  $D$  определим два эндоморфизма  $h$  и  $j$  следующим образом:

$h(\vec{x}_u) =^h (P \circ \pi_*)(\vec{x}_u)$ ;  $j(\vec{x}_u) =^v (P \circ \pi_*)(\vec{x}_u)$ , где  $\vec{u} \in D_x$ ,  $\vec{x}_u \in T_u(D)$ .  
Имеет место

**Теорема 2.** *На пространстве распределения с финслеровой метрикой существует и при том единственная внутренняя связность  $\nabla$ , удовлетворяющая условию  $\nabla h = \nabla j = 0$ .*

Доказательство теоремы сводится к непосредственному вычислению коэффициентов связности  $\nabla$ . Прямым вычислением проверяется, что ненулевые компоненты тензора кривизны связности  $\nabla$  как и в голономном случае распадаются на три блока  $R$ ,  $S$ ,  $P$ , соответствующие в классическом случае первому, второму и третьему тензорам кривизны Картана соответственно. Назовем полученные тензоры тензорами кривизны типа Картана. Таким образом, заключаем, что справедливы следующие теоремы:

**Теорема 3.** *Финслерово распределение  $(D, L)$  есть распределение Ландсберга, если ее третий тензор кривизны типа Картана равен нулю.*

**Теорема 4.** *Всякое пространство Бервальда является пространством Ландсберга.*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Галаев С. В.* О продолжении внутренней связности неголономного многообразия с финслеровой метрикой // *Механика. Математика* : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 25–28.
2. *Bejancu A., Farran H. R.* Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle // *Reports on Mathematical Physics*. 2006. Vol. 58, № 1. P. 131–146.
3. *Clelland J. N., Moseley C. G.* Sub-Finsler geometry in dimension three // *Differential Geometry and its Applications*. 2006. Vol. 24, № 6. P. 628–651.
4. *Бужушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П.* О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // *Механика. Математика* : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 10–14.
5. *Вагнер В. В.* Геометрия  $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // *Тр. семинара по векторному и тензорному анализу*. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
6. *Reinhart B. L.* Foliated manifolds with bundle-like metric // *Annals of Math*. 1959. Vol. 69, № 2. P. 119–132.

## КОЛЬЦО ЦЕЛОЗНАЧНЫХ P-АДИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В последнее время вопросы факторизации и неоднозначная факторизация в кольцах многочленов изучалась в различных работах. Например, в [1] доказывается неоднозначность разложение в  $\mathbb{Z}_{p^n}[x]$ , а в работах [2, 3] изучалось кольцо целочисленных полиномов  $Int(\mathbb{Z}) = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}\}$ .

В нашей работе мы изучаем свойства факторизации кольца

$$Int(\mathbb{Z}_p) = \{f \in \mathbb{Q}_p[x] \mid f(\mathbb{Z}_p) \subset \mathbb{Z}_p\}$$

целозначных  $p$ -адических полиномов, где  $p$  – простое число,  $\mathbb{Q}_p$  – поле  $p$ -адических чисел, а  $\mathbb{Z}_p$  – кольцо целых  $p$ -адических чисел. Напомним необходимые определения.

**Определение 1.** Пусть  $R$  – коммутативное кольцо с единицей. Ненулевой и неединичный элемент  $r \in R$  называется неприводимым в  $R$ , если из того, что  $r = ab$  с  $a, b \in R$  следует, что либо  $a$ , либо  $b$  является целой единицей в  $R$  (то есть  $a \in R$  и  $a^{-1} \in R$ ). Представление элемента  $r \in R$  в виде произведения неприводимых элементов  $r = s_1 \dots s_n$ ,  $s_i \in R$ , будем называть факторизацией  $r$ . Число  $n$  неприводимых множителей называется длиной факторизации.

Множество длин  $L(r)$  элемента  $r \in R$  есть множество всех натуральных чисел  $n$  таких, что  $r$  имеет факторизацию длины  $n$  в  $R$ .

Кольцо  $R$  называется атомарным, если любой ненулевой неединичный элемент в  $R$  допускает факторизацию в  $R$ .

Атомарная область целостности  $R$ , для которой множество длин каждого ненулевого и неединичного элемента конечно, называется областью ограниченной факторизации.

Кольцо  $R$  называется факториальным, если для каждого ненулевого и неединичного элемента  $r$  существует однозначная, с точностью до перестановки и умножения на единичные элементы, факторизация.

**Теорема 1.** Кольцо  $Int(\mathbb{Z}_p)$  удовлетворяет следующим свойствам, оно:

- 1) атомарно
- 2) является областью ограниченной факторизации;
- 3) не факториально.

**Доказательство**

1) Каждый ненулевой многочлен  $f \in \mathbb{Q}_p[x]$  можно единственным образом представить в виде

$$f(x) = p^k \prod_{i \in I} g_i(x),$$

где  $g_i(x)$  – неприводимый примитивный полином из  $\mathbb{Z}_p[x]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  и множество  $I$  конечно. Если  $k \geq 0$ , то мы получили разложение на неприводимые полиномы. Если  $k < 0$ , то или  $f$  неприводим в  $\text{Int}(\mathbb{Z}_p)$  и разложение получено, или множество  $I$  разбивается на два подмножества  $I_1$  и  $I_2$  таких, что каждый  $f_j(x) = p^{k_j} \prod_{i \in I_j} g_i(x)$  содержится в  $\text{Int}(\mathbb{Z}_p)$ . Далее раскладываем каждый многочлен  $f_j(x)$ , и на каком-то шаге разложение закончится, так как на каждом понижаем степень многочлена.

2) Из 1) для любого  $f \in \text{Int}(\mathbb{Z}_p)$  имеет место представление

$$f(x) = p^k \prod_{i \in I} \frac{g_i(x)}{p^{n_i}} = \prod_{j=1}^k h_j(x) \prod_{i \in I} \frac{g_i(x)}{p^{n_i}},$$

где  $\frac{g_i(x)}{p^{n_i}}$  – неприводимый полином из  $\text{Int}(\mathbb{Z}_p)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  и множество  $I$  конечно. Многочлены  $h_j(x) = p$  неприводимы в  $\text{Int}(\mathbb{Z}_p)$ , для  $j = 1, \dots, k$ .

3) Рассмотрим многочлен

$$f(x) = \frac{\prod_{j=1}^{p+1} (x - j)}{p}.$$

Он принадлежит  $\text{Int}(\mathbb{Z}_p)$ , так как  $j = 1, \dots, p$  образуют полную систему вычетов. Для  $f$  имеются два различных представления на неприводимые в  $\text{Int}(\mathbb{Z}_p)$ :

$$f(x) = (x - 1) \frac{\prod_{j=2}^{p+1} (x - j)}{p} = (x - (p + 1)) \frac{\prod_{j=1}^p (x - j)}{p}.$$

Теорема доказана.

Для атомарных колец определяются следующие важные понятия.

**Определение 2.** Если кольцо  $R$  является атомарным, то для любого ненулевого неединичного  $r \in R$  эластичность  $r$  определяется следующим образом:

$$\rho(r) = \sup \left\{ \frac{m}{n} \mid n, m \in L(r) \right\},$$

и эластичность  $R$  равна

$$\rho(R) = \sup_{r \in R_1} \{ \rho(r) \},$$



где  $R_1$  есть множество ненулевых неединичных элементов  $R$ .  $R$  называется полностью эластичным, если для каждого рационального числа  $q$ , большего 1, существует некоторый ненулевой неединичный элемент  $r \in R$ , для которого  $q = \rho(r)$ .

**Теорема 2.** Кольцо  $Int(\mathbb{Z}_p)$  имеет бесконечную эластичность, то есть

$$\rho(Int(\mathbb{Z}_p)) = \infty.$$

**Доказательство.** В работе [3] было доказано, что  $\rho(\mathbb{Z}_p[x]) = \infty$ . Для этого был построен неприводимый полином  $f(x)$  и доказана неприводимость полинома  $f^q(x) + p^{n-1}$ , где  $q$  – большое простое число. Для полинома  $g(x)$  из формулы

$$g(x) = (f^q(x) + p^{n-1})^2 = f^q(x)(f^q(x) + 2p^{n-1})$$

следует, что разложение слева имеет два неприводимых множителя, а в разложении справа  $q + 1$  неприводимый множитель. В силу модификации леммы Гензеля [4] два разложения для  $g(x)$  можно продолжить на разложение в кольце  $Int(\mathbb{Z}_p)$ . Наличие двух таких разложений для  $g(x)$  и доказывает теорему.

**Замечание.** В работах [5, 4] было доказано, что  $\rho(Int(\mathbb{Z})) = \infty$ , и доказана полная эластичность кольца  $Int(\mathbb{Z})$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Frei Ch., Frisch S.* Non-unique factorization of polynomials over residue class rings of the integers // Comm. Algebra. 2011. Vol. 39. P. 1482 – 1490.
2. *Cohen P. J., Chabert J. L.* Integer-valued polynomials // vol. 48 of Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., 1997.
3. *Frisch S.* A construction of integer-valued polynomials with prescribed sets of lengths of factorizations // Comm. Algebra. 2012. Vol. 42. P. 473 – 481
4. *Hasse H.* Number theory. Berlin : Springer-Verlag. 2002.
5. *Chapman S. T., McClain B. A.* Irreducible polynomials and full elasticity in rings of integer-valued polynomials // J. Algebra. 2005. Vol. 293. P. 595 – 610.

О МОНОТОННОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
АППРОКСИМАЦИИ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ С ОГРАНИЧЕНИЕМ

Пусть  $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$ ,  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ ,  $N \geq n + 1$ ,  $\Phi(\cdot)$  – сегментная функция,  $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$ ,  $y_{2,k} \geq y_{1,k}$ ,  $k = \overline{0, N}$ ,  $\exists s \in \overline{0, N} : y_{2,s} = y_{1,s} := y_s$ . Обозначим  $f(A, k) := \max\{p_n(A, t_k) - y_{1,k}, y_{2,k} - p_n(A, t_k)\}$ ,  $D := \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : p_n(A, t_s) = y_s\}$ . Рассматривается задача

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0, N}} f(A, k) \longrightarrow \min_{A \in D}. \quad (1)$$

Базисом назовём любое множество  $\sigma := \{t_{j_0} < \dots < t_{j_r} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$  с фиксированной точкой  $t_{j_r} = t_s$ ,  $\Omega$  – множество всех базисов. Пусть  $i \in \{0, 1\}$  и  $\phi_i(\sigma, t_{j_k}) = y_{0.5(3+(-1)^{k+i}), j_k}$ ,  $k = \overline{0, n+1}$ .

Наряду с (1) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\rho_i(A, \sigma) := \max_{k=\overline{0, n+1}} |\phi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A, t_{j_k})| \longrightarrow \min_{A \in D}. \quad (2)$$

Рассуждениями, аналогичными в работе [1], нетрудно доказать существование решения задачи (1) и следующие два утверждения.

**Теорема.** Решение задачи (1) единственно. Вектор  $A \in \mathbb{R}^{n+1}$  является решением задачи (2) тогда и только тогда, когда для некоторого  $h_i(\sigma)$  выполняются равенства ("прерванный альтернанс"):

$$\phi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A, t_{j_k}) = (-1)^{k+i} h_i(\sigma), k = \overline{0, n+1} \setminus \{r\}, \quad (3)$$

$$p_n(A, t_{j_r}) = y_s. \quad (4)$$

**Теорема 2.** Пусть решение задачи (1) единственно. Для того чтобы вектор  $A \in \mathbb{R}^{n+1}$  был решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы нашёлся такой базис  $\sigma \in \Omega$ , чтобы для  $i = 0$  или  $i = 1$  выполнялись равенства (3)-(4) и  $\rho(A) = h_i(\sigma)$ .

Обозначим минимальные значения целевых функций задач (1) и (2)  $\rho^*$  и  $\rho_i^*(\sigma)$  соответственно. Ввиду теорем 1, 2 в случае единственности решения задачи (1) имеем

$$\rho^* = \max_{i \in \{0, 1\}, \sigma \in \Omega} \rho_i^*(\sigma). \quad (5)$$

**Теорема 3.** Пусть решение задачи (1) единственно,  $h \geq 0$ ,  $w > 0$ ,  $v \in \overline{0, n+1} \setminus \{r\}$ . Если для некоторого  $\tilde{A} \in D$  выполняются соотношения ("частичный прерванный альтернанс"):

$$\phi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(\tilde{A}, t_{j_k}) = (-1)^{k+i} h, k = \overline{0, n+1} \setminus \{\{r\} \cup \{v\}\},$$

$$\phi_i(\sigma, t_{j_v}) - p_n(\tilde{A}, t_{j_v}) = (-1)^{v+i} (h + w), p_n(\tilde{A}, t_{j_r}) = y_s,$$

то  $h_i(\sigma)$  из (3), (4) удовлетворяет неравенству  $h_i(\sigma) > h$ .

**Доказательство.** Поскольку  $A$  из (3)-(4) – решение задачи (2) по теореме 1 и оно единственно, то  $h + w > h_i(\sigma)$ . Если  $h_i(\sigma) \leq h$ , то для полинома с вектором коэффициентов  $A^0 = A - \tilde{A}$  имеем  $(-1)^{k+i} (p_n(A, t_{j_k}) - p_n(\tilde{A}, t_{j_k})) = h - h_i(\sigma) \geq 0$ ,  $k = \overline{0, n+1} \setminus \{\{r\} \cup \{v\}\}$ ,  $(-1)^{v+i} (p_n(A, t_{j_v}) - p_n(\tilde{A}, t_{j_v})) = h + w - h_i(\sigma) > 0$ ,  $p_n(A, t_{j_r}) = p_n(\tilde{A}, t_{j_r})$ . То есть  $(-1)^{k+i} p_n(A^0, t_{j_k}) \geq 0$ ,  $k = \overline{0, n+1} \setminus \{r\}$ ,  $p_n(A^0, t_{j_r}) = 0$ .

1. Если  $r = 0$ , получаем  $(-1)^{k+i} p_n(A^0, t_{j_k}) \geq 0$ ,  $k = \overline{1, n+1}$ . По непрерывности существуют точки  $\{\tau_k\}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $t_{j_k} \leq \tau_k \leq t_{j_{k+1}}$  :  $p_n(A^0, \tau_k) = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Поскольку  $p_n(A^0, t_{j_r}) = 0$ ,  $t_{j_r} < \tau_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , полином степени  $n$  имеет  $n+1$  нулей, значит,  $A^0 \equiv 0$ , что в действительности не так. Аналогично рассматривается случай  $r = n+1$ .

2. Пусть  $0 < r < n+1$ . По непрерывности существуют точки  $t_{j_k} \leq \tau_{k+1} \leq t_{j_{k+1}}$ ,  $k = \overline{0, r-2}$ ,  $t_{j_{k+1}} \leq \tau_{k+1} \leq t_{j_{k+2}}$ ,  $k = \overline{r, n-1}$ ,  $p_n(A^0, \tau_k) = 0$ ,  $k = \overline{1, r-1} \cup \overline{r+1, n}$ . Положим  $\tau_r = t_{j_r}$ , то  $p_n(A^0, \tau_r) = 0$ . Если существует  $\tau \in (\tau_{r-1}, \tau_r) \cup (\tau_r, \tau_{r+1})$ :  $p_n(A^0, \tau) = 0$ , тогда получаем, что  $p_n(A^0, t)$  имеет  $n+1$  нулей, что ведёт к противоречивому утверждению  $A^0 \equiv 0$ . В противном случае, заметим, что на каждом интервале  $(\tau_k, \tau_{k+1})$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  производная  $(p_n(A^0, t))'_t$  обращается в 0, и, кроме того,  $p_n(A^0, t_{j_{r-1}})$  и  $p_n(A^0, t_{j_{r+1}})$  имеют один знак, а  $p_n(A^0, t_{j_r}) = 0$ , то есть в точке  $\tau_r$  функция  $p_n(A^0, t)$  достигает локального экстремума, поэтому полином  $(p_n(A^0, t))'_t$  в этой точке тоже обращается в 0, то есть имеет  $n$  нулей, что возможно только если он тождественно равен нулю, следовательно,  $p_n(A^0, t) = \text{const}$ , что очевидно не так.

Теорема доказана.

Приведём алгоритм решения задачи (1), считая, что её решение единственно. Выберем произвольно  $\sigma \in \Omega$ . Положим  $\beta = 0$ , если  $h_0(\sigma) \geq h_1(\sigma)$ , и  $\beta = 1$ , в противном случае. Пусть  $\tilde{A}$  – решение системы

(3) —(4) при  $i = \beta$ . Несложно показать, что  $h_\beta(\sigma) \geq 0$ , следовательно,  $\rho_\beta^*(\sigma) = \rho_\beta(\tilde{A}, \sigma) = h_\beta(\sigma)$ . Проверяем условие

$$\rho(\tilde{A}) = \rho_\beta^*(\sigma). \quad (6)$$

Если (6) выполнено, то алгоритм завершается и решение задачи (1) совпадает с решением задачи (2) на текущем базисе при  $i = \beta$ . Если это не так, то ввиду единственности решения задачи (1) найдётся  $k_0 \in \overline{0, N} : t_{k_0} \notin \sigma : f(\tilde{A}, k_0) = \max_{t_k \in \sigma} f(\tilde{A}, k)$ . Возможны следующие варианты расположения точки  $t_{k_0}$  относительно узлов текущего базиса.

1)  $t_{j_0} < t_{k_0} < t_{j_{n+1}}$ . 1.1.  $\exists v \neq r : t_{j_v} < t_{k_0} < t_{j_{v+1}}$ . Полагаем  $\bar{j}_l := j_l$ ,  $l = \overline{0, n+1}$ ,  $l \neq v$ ,  $l \neq v+1$ ,  $\bar{\beta} := \beta$ . Если для  $i \in \{0, 1\}$  справедливы:

$$\begin{aligned} h_\beta(\sigma) &= (-1)^i (p_n(\tilde{A}, t_{j_v}) - y_{1+i, j_v}), \\ f(\tilde{A}, k_0) &= (-1)^i (p_n(\tilde{A}, t_{k_0}) - y_{1+i, k_0}), \end{aligned} \quad (7)$$

то осуществляем присвоение:  $\bar{j}_v := k_0, \bar{j}_{v+1} := j_{v+1}$ . Если равенства (7) не выполняются, то  $\bar{j}_v := j_v, \bar{j}_{v+1} := k_0$ . 1.2.  $v = 1, r = 0$  и  $t_{j_0} < t_{k_0} < t_{j_1}$ . Полагаем  $\bar{j}_0 := j_r, \bar{j}_1 := k_0$ . Если выполняются равенства (7) для  $i = 0$  или  $i = 1, v = 1$ , берём  $\bar{j}_l := j_l, l = \overline{2, n+1}$ ,  $\bar{\beta} := \beta$ . Если равенства (7) не выполняются, берём  $\bar{j}_l := j_{l-1}, l = \overline{2, n+1}$ ,  $\bar{\beta} := 1 - \beta$ . 1.3.  $v = n, r = n+1$  и  $t_{j_n} < t_{k_0} < t_{j_{n+1}}$ . Полагаем  $\bar{j}_{n+1} := j_r, \bar{j}_n := k_0$ . Если выполняются равенства (7) для  $i = 0$  или  $i = 1, v = n$ , берём  $\bar{j}_l := j_l, l = \overline{0, n-1}$ ,  $\bar{\beta} := \beta$ . Если равенства (7) не выполняются, берём  $\bar{j}_l := j_{l+1}, l = \overline{0, n-1}$ ,  $\bar{\beta} := 1 - \beta$ .

2)  $t_{k_0} < t_{j_0}$ . 2.1.  $r = 0$ . Полагаем  $\bar{j}_0 := k_0, \bar{j}_1 := j_r$ . Если выполняются равенства (7) для  $i = 0$  или  $i = 1, v = 1$ , берём  $\bar{j}_l := j_{l-1}, l = \overline{2, n+1}$  и  $\bar{\beta} := 1 - \beta$ . Если равенства (7) не выполняются, берём  $\bar{j}_l := j_l, l = \overline{2, n+1}$  и  $\bar{\beta} := \beta$ . 2.2.  $0 < r \leq n+1$ . Если выполняются равенства (7) для  $i = 0$  или  $i = 1, v = 0$ , берём  $\bar{j}_0 := k_0, \bar{j}_l := j_l, l = \overline{1, n+1}$  и  $\bar{\beta} := \beta$ . Если равенства (7) не выполняются, берём  $\bar{j}_0 := k_0, \bar{j}_l := j_{l-1}, l = \overline{1, n}$ ,  $\bar{\beta} := 1 - \beta$ ;  $\bar{j}_{n+1} := j_r$ , если  $r = n+1$ ;  $\bar{j}_{n+1} := j_n$ , если  $r < n+1$ .

3)  $t_{k_0} > t_{j_{n+1}}$ . 3.1.  $0 \leq r < n+1$ . Если выполняются равенства (7) для  $i = 0$  или  $i = 1, v = n+1$ , берём  $\bar{j}_l := j_l, l = \overline{0, n}$ ,  $\bar{j}_{n+1} := k_0$  и  $\bar{\beta} := \beta$ . Если равенства (7) не выполняются, берём  $\bar{j}_0 := j_r$ , если  $r = 0$ ;  $\bar{j}_0 := j_1$ , если  $r > 0$ ;  $\bar{j}_l := j_{l+1}, l = \overline{1, n}$ ,  $\bar{j}_{n+1} := k_0$ ;  $\bar{\beta} := 1 - \beta$ . 3.2.  $r = n+1$ . Полагаем  $\bar{j}_n := j_r, \bar{j}_{n+1} := k_0$ . Если выполняются равенства (7) для  $i = 0$  или  $i = 1, v = n$ , берём  $\bar{j}_l := j_{l+1}, l = \overline{0, n-1}$  и  $\bar{\beta} := 1 - \beta$ . Если равенства (7) не выполняются, берём  $\bar{j}_l := j_l, l = \overline{0, n-1}$  и  $\bar{\beta} := \beta$ .

Условие монотонности  $h_{\bar{\beta}}(\bar{\sigma}) > h_{\beta}(\sigma)$ , приводящее ввиду (5),(6) к решению задачи (1), вытекает из теоремы 3 (достаточно положить  $h := h_{\beta}(\sigma)$  и переобозначить  $\sigma := \bar{\sigma}$ ). Перебор базисов заканчивается с выполнением (6).

Обозначим  $M := \{k \in \overline{0, N} : y_{2,k} - y_{1,k} = \max_{k \in \{0, N\}} (y_{2,k} - y_{1,k})\}$ ,  $|M|$  – количество элементов во множестве  $M$ .

**Замечание.**

Одним из достаточных условий единственности решения задачи (1) является  $|M| \geq n + 1$ . В таком случае, в качестве начального базиса целесообразно брать  $\sigma \in \Omega$ :  $j_k \in M$ ,  $k = \overline{0, n+1} \setminus \{r\}$ . Тогда решение задачи (1) будет найдено уже на первой итерации алгоритма.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ – грант № 4383.2010.1).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И. Ю.* Об условной задаче наилучшего приближения сегментной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 12–15.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

**ОБОБЩЕННЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ  
НА МНОГООБРАЗИЯХ С ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ  
МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ**

Вводятся понятия геодезической пульверизации связности над гладким распределением и обобщенной гамильтоновой системы, в терминах которых дается инвариантное описание движения механической системы со связями.

В работе [1] В. В. Вагнер привлекает развитые им ранее геометрические методы для изучения конкретных динамических систем со связями. Используя специальные системы координат, Вагнер записывает уравнение движения неголономной системы при отсутствии внешних сил в следующем виде:

$$\frac{dx^n}{dt} = -\Gamma_a^n \frac{dx^a}{dt}, \quad \frac{dx^a}{dt} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0. \quad (1)$$

В настоящей статье мы показываем, что кривые, определяемые уравнениями (1), являются проекциями интегральных кривых векторного поля, называемого нами геодезической пульверизацией связности над распределением. В статье рассматривается векторное расслоение  $(D, \pi, X)$ ,

тотальное пространство  $D$  которого является гладким распределением контактной метрической структуры  $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ , заданной на многообразии  $X$  [2]. На многообразии  $D$  определяется геодезическая пульверизация связности над распределением, являющаяся аналогом геодезической пульверизации, заданной на пространстве касательного расслоения  $TX$ , и имеющая ясную физическую интерпретацию – проекции интегральных кривых геодезической пульверизации связности над распределением совпадают с допустимыми геодезическими (траекториями движения механической системы со связями). Хорошо известно, что в случае, когда  $D = TX$ , геодезическая пульверизация совпадает с гамильтоновой системой, естественным образом возникающей на касательном расслоении риманова многообразия. Существует несколько подходов к определению аналога гамильтоновой системы – контактного гамильтонова векторного поля на многообразии с почти контактной метрической структурой (см. [2]). Введенная в этой статье обобщенная гамильтонова система тесно связана с геодезической пульверизацией связности над распределением и в некоторых случаях совпадает с известными типами контактных гамильтоновых векторных полей.

Пусть  $X$  – гладкое многообразие нечетной размерности  $n$ ,  $\Xi(X) = C^\infty(X)$  – модуль гладких векторных полей на  $X$ . Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса  $C^\infty$ .

Пусть  $(D, \varphi, g, \lambda, \vec{\xi}, D^\perp)$  – контактная метрическая структура (см. [2]), заданная на многообразии  $X$ . Карту  $K(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$ ) ( $a, b, c, e = 1, \dots, n - 1$ ) на многообразии  $X$  будем называть адаптированной к распределению  $D$ , если  $D^\perp = \text{Span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$ .

**Теорема 1.** *Всякая внутренняя линейная связность определяет связность над распределением, и обратно, связность над распределением  $D$  определяет линейную связность в неголономном многообразии  $D$ , если имеет место равенство  $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a)x^{n+c}$ .*

Контактное гамильтоново векторное поле  $\vec{u}$  (см. [2]) определяется на многообразии с почти контактной метрической структурой посредством равенства  $i_{\vec{u}}d\eta = -df$ , где гладкая функция  $f$  называется *гамильтонианом*.

Равенство  $i_{\vec{u}}d\eta = -df$  выполняется лишь при условии  $\vec{\xi}f = 0$ , что эквивалентно обращению в ноль производных  $\partial_n f$  в адаптированной карте. В работах [3, с.180; 4, с.30] контактное гамильтоново векторное поле рассматривается как векторное поле, удовлетворяющее следующим условиям:  $i_{\vec{u}}\eta = f, i_{\vec{u}}d\eta = (\vec{\xi}f)\eta - df$ .

Ниже дано определение обобщенной гамильтоновой системы – анало-

га контактного векторного поля для случая почти контактной метрической структуры. Предварительно докажем теорему.

**Теорема 2.** Пусть  $\omega$  — допустимая симплектическая структура, т.е. 2-форма на  $X$ , удовлетворяющая следующим условиям: а)  $\omega(\vec{x}, \vec{\xi}) = 0$ ; б)  $rk \omega = n - 1$ ; в)  $d\omega = 0$ ,  $f$  — гладкая функция на многообразии  $X$ . Тогда существует единственное векторное поле  $\vec{u}$  на  $X$ , удовлетворяющее условиям:

$$1. i_{\vec{u}}\eta = \vec{\xi}f, \quad 2. i_{\vec{u}}\omega = (\vec{\xi}f)\eta - df.$$

**Доказательство.** Воспользуемся адаптированными координатами. Имеем:  $\eta = \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a$ ,  $\vec{u} = u^a \vec{e}_a + u^n \vec{e}_n$ ,  $\vec{\xi} = \partial_n$ ,  $\vec{\xi}f = \partial_n f$ ,  $\omega = \omega_{ab} dx^a \otimes dx^b$ ,  $df = \vec{e}_a f dx^a + \partial_n \theta^n$

Таким образом, равенства 1, 2 перепишутся соответственно в виде:

$$1.' u^n = \vec{\xi}f; \quad 2.' \omega_{ba} u^b = \vec{e}_a f.$$

Искомым векторным полем, таким образом, является поле, однозначно определяемое в адаптированных координатах равенством

$$\vec{u} = \omega^{ac} \vec{e}_c f \vec{e}_a + \partial_n f \partial_n. \quad \square \quad (2)$$

Назовем векторное поле (2) *обобщенной гамильтоновой системой* (ОГС), а функцию  $f$  — *обобщенным гамильтонианом*. ОГС в соответствии с (2) раскладывается в сумму  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ , где  $\vec{u}_1 = \omega^{ac} \vec{e}_c f \vec{e}_a$ ,  $\vec{u}_2 = \partial_n f \partial_n$ . Если  $\partial_n f = 0$  и  $\omega = d\eta$ , то  $\vec{u}_1$  является контактным гамильтоновым векторным полем в смысле [2].

Векторное поле  $\vec{S} \in \Gamma(\tilde{D})$  на многообразии  $D$  назовем *полупульверизацией*, если выполняется следующее условие:  $\pi_*(\vec{S}_{\vec{v}}) = \vec{v}$ ,  $\vec{v} \in D$ . Локальное представление поля  $\vec{S}$  в адаптированных координатах имеет вид  $\vec{S}(x^\alpha, x^{n+a}) = x^{n+a} \partial_a - x^{n+a} \Gamma_a^n \partial_n + S^{n+a} \partial_{n+a}$ . Интегральные кривые поля  $\vec{S}$  определяются системой уравнений, равносильной системе

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^a}{dt^2} = S^{n+a}(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{dt}), \\ \frac{dx^n}{dt} = -\Gamma_a^n \frac{dx^a}{dt}. \end{cases} \quad (3)$$

Полупульверизацию  $\vec{S}$  будем называть *пульверизацией*, если она удовлетворяет дополнительному условию  $[\vec{C}, \vec{S}] = \vec{S}$ , где  $\vec{C} = x^{n+a} \partial_{n+a}$ .

**Теорема 3.** Всякая внутренняя линейная связность  $\Gamma_{bc}^a$  определяет пульверизацию  $\vec{S}$ , координатное представление которой  $\vec{S}$  имеет вид  $\vec{S} = x^{n+a} \vec{e}_a$ , где  $\vec{e}_a \in HD$ ,  $\pi_*(\vec{e}_a) = \vec{e}_a$ ,  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$ .

Из теоремы 3 следует, что уравнения (3) для геодезической пульверизации совпадают с уравнениями (1) и, таким образом, оказывается справедливой следующая теорема.

**Теорема 4.** *Проекции интегральных кривых геодезической пульверизации  $\vec{S}$  совпадают с геодезическими внутренней линейной связности.*

Пусть  $D$  — распределение почти контактной метрической структуры и  $\Gamma_{bc}^a$  — коэффициенты внутренней симметричной метрической связности. На многообразии  $D$  в этом случае можно построить допустимую (по отношению к  $\tilde{D}$ ) симметрическую форму  $G$  [5], которая, в свою очередь, позволяет задать лагранжеву динамическую систему — обобщенную гамильтонову систему.

Пусть  $\lambda = \partial_{n+a} T dx^a$ , где  $T = \frac{1}{2} g_{ab} x^{n+a} x^{n+b}$  — допустимая (по отношению к  $\tilde{D}$ ) 1-форма. Тогда форма  $\Omega = d\lambda$  оказывается допустимой симплектической формой на  $D$ , если соответствующая контактная структура является  $K$ -контактной [6]. В более общем случае имеем равенство  $\Omega = \omega + \tilde{\omega}$ , где  $\omega$  — допустимая форма. В качестве обобщенного гамильтониана рассмотрим функцию  $T - \vec{C}T$ . Имеет место

**Теорема 5.** *Обобщенная гамильтонова система, определяемая формой  $\omega$  и обобщенным гамильтонианом  $T - \vec{C}T$ , совпадает с векторным полем  $\vec{S} + (\vec{\epsilon}T)\vec{\epsilon}$ , где  $\vec{S}$  — геодезическая пульверизация.*

**Доказательство.** Нам нужно доказать, что выполняются условия

$$\tilde{\eta}(\vec{X}) = \vec{\epsilon}T, \quad i_{\vec{X}}\omega = (\vec{\epsilon}T)\tilde{\eta} - dT, \quad (4)$$

где  $\vec{X} = \vec{S} + (\vec{\epsilon}T)\vec{\epsilon}$ . В адаптированных координатах мы имеем  $\Omega = \vec{\epsilon}_b T_{.a} dx^b \wedge dx^a + T_{.a.b} \Theta^{n+b} \wedge dx^a + \partial_n T_{.a} \Theta^n \wedge dx^a$ , и, следовательно,  $\omega = \vec{\epsilon}_b T_{.a} dx^b \wedge dx^a + T_{.a.b} \Theta^{n+b} \wedge dx^a$ , где точкой обозначается производная по слоевым координатам. Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в справедливости (4).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. Вып. 5. С. 301–327.
2. Pitis G. Hamiltonian Fields and Energy in Contact Manifolds // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2008. Vol. 5, №1, P. 63–77.
3. Eberard D. B., Maschke M., Van Der Schaft A. J. An extension of hamiltonian systems to the thermodynamic phase space: towards a geometry of nonreversible processes // Reports on mathematical physics. 2000. Vol. 60. № 2. P. 175–198.
4. Crasmareanu M. Completeness of hamiltonian vector fields in jacobi and contact geometry // U.P.B. Sci. Bull. Series A, 2011. Vol. 73, № 2. P. 23–36.



5. *Galaev S. V.* Contact structures with admissible Finsler metrics Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of International Meeting (Edited by M. C. Duffy, V. O. Gladyshev, A. N. Morozov, P. Rowlands), Moscow, 4 - 7 July 2011. Moscow : BMSTU, 2012. P. 80–87.

6. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М. : МПГУ, 2003.

УДК 517.54

В. Г. Гордиенко, К. А. Пилясова

## О ЛОКАЛЬНО ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИИ ПИКА

Обозначим через  $S^M$ ,  $M > 1$ , класс голоморфных однолистных в единичном круге  $E = \{z : |z| < 1\}$  функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad (1)$$

удовлетворяющих ограничению  $|f(z)| < M$ ,  $z \in E$ .

В настоящей статье устанавливается свойство граничной поверхности  $\partial V_5(M)$  множества значений  $V_5(M) = \{(a_2, a_3, a_4, \operatorname{Re} a_5) : f \in S^M\}$  в окрестности точки  $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ , доставляемой симметризованной функцией Пика

$$P_{M^4}(z) = \sqrt{\frac{2z^2}{M^4(M^2(1+z^4) + \sqrt{(1+z^4)^2 - 4z^4})}}, \quad z \in E.$$

Следующая теорема развивает и дополняет результат работ [1],[2],[3].  
**Теорема.** Точка  $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$  граничной поверхности  $\partial V_5(M)$ , доставляемая функцией  $P_{M^4}(z)$ , вдоль направления  $It a_3$  имеет угловой характер.

### Доказательство теоремы.

Функции  $f \in S^M$ , доставляющие точки граничной поверхности  $\partial V_5(M)$  отображают  $E$  на круг радиуса  $M$  с не более чем четырьмя кусочно аналитическими разрезами. Известно [4], что все такие функции можно представить в виде  $f(z) = Mw(z, \log M)$ , где

$$w(z, t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \dots) \quad (2)$$

является интегралом обобщённого дифференциального уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^4 \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad 0 \leq t \leq \log M, \quad (3)$$

с непрерывными функциями  $u_k = u_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , и постоянными числами  $\lambda_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, 4$ ,  $\sum_{k=1}^4 \lambda_k = 1$ . Кроме того, управляющие функции  $u_k$  удовлетворяют необходимым условиям оптимальности скользящего режима. Пусть  $a_k(t)$ ,  $k \leq 5$ , определяются разложением (2). Совершим замену переменной  $t \rightarrow 1 - e^{-t}$  и обозначим  $a_k(t) = x_{2k-3}(t) + ix_{2k-2}(t)$ ,  $k = 2, \dots, 5$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  в равенстве (3), после произведённой замены получим управляемую систему дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение относительно  $\dot{x}_4(t)$  этой системы

$$\dot{x}_4(t) = 2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [2(x_1 \sin u_k - x_2 \cos u_k) + (1-t) \sin 2u_k], \quad x_4(0) = 0, \quad (4)$$

$$0 \leq t \leq 1 - 1/M.$$

Следуя принципам оптимизационного формализма, введём вектор множителей Лагранжа  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_7)^T$  и запишем функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H(t, x, \Psi, u, \lambda) = & -2 \sum_{k=1}^4 \lambda_k [\cos u_k \Psi_1 - \sin u_k \Psi_2 + (2(x_1 \cos u_k + \\ & + x_2 \sin u_k) + (1-t) \cos 2u_k) \Psi_3 - (2(x_1 \sin u_k - x_2 \cos u_k) + (1- \\ & - t) \sin 2u_k) \Psi_4 + ((2x_3 + x_1^2 - x_2^2) \cos u_k + 2(x_4 + x_1 x_2) \sin u_k + 3(1- \\ & - t)(x_1 \cos 2u_k + x_2 \sin 2u_k) + (1-t)^2 \cos 3u_k) \Psi_5 - ((2x_3 + x_1^2 - \\ & - x_2^2) \sin u_k - 2(x_4 + x_1 x_2) \cos u_k - 3(1-t)(x_2 \cos 2u_k - x_1 \sin 2u_k) + \\ & + (1-t)^2 \sin 3u_k) \Psi_6 + (2((x_5 + x_1 x_3 - x_2 x_4) \cos u_k + (x_6 + x_1 x_4 + \\ & + x_2 x_3) \sin u_k) + 3(1-t)((x_3 + x_1^2 - x_2^2) \cos 2u_k + (x_4 + \\ & + 2x_1 x_2) \sin 2u_k) + 4(1-t)^2(x_1 \cos 3u_k + x_2 \sin 3u_k) + \\ & + (1-t)^3 \cos 4u_k) \Psi_7], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ,  $\lambda_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, 4$ ,  $\sum_{k=1}^4 \lambda_k = 1$ ,  $x = (x_1, \dots, x_7)^T$  удовлетворяет системе (4), а  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_7)^T$ ,  $\Psi_7 = 1$ , удовлетворяет сопряжённой системе дифференциальных уравнений и условиям трансверсальности  $\Psi_j(1 - 1/M) = 0$ ,  $j = 1, \dots, 6$ .

Оптимальная управляющая функция  $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$ , соответствующая экстремальной функции  $f^* \in S^M$  в (5), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [5]

$$\max_{u, \lambda} H(t, x, \Psi, u, \lambda) = H(t, x^*, \Psi^*, u^*, \lambda), \quad 0 \leq t \leq 1 - 1/M,$$

где  $(x^*, \Psi^*)$  является решением системы (4) и сопряжённой системы с  $u = u^*$  в их правых частях. Следовательно, при положительных значениях  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  каждая из координат  $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$  является корнем уравнения

$$H_{u_k}(t, x, \Psi, u, \lambda^k) = 0, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (6)$$

где  $x = x^*$ ,  $\Psi = \Psi^*$ , а  $\lambda^k$  — это один из векторов  $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$  или  $(0, 0, 0, 1)$ . Наличие четырёх различных на  $[0, 2\pi)$  значений  $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$  координат оптимального управления  $u^*$  характеризует оптимальный скользящий режим.

Функции  $P_{M^4}$  соответствуют координаты  $u_1^* = \pi/4, u_2^* = 3\pi/4, u_3^* = 5\pi/4, u_4^* = 7\pi/4$  оптимального управления  $u^*$  и значения параметров  $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = \lambda_4^* = 1/4$ . Условия трансверсальности приводят к начальным условиям  $\Psi_k(0) = 0, k = 1, \dots, 6$ . Проварьируем эти начальные данные, положив  $\Psi_k(0) = \alpha_k, k = 1, \dots, 6$ . Сохранение скользящего режима в момент  $t = 0$  для варьированных значений  $\Psi(0)$  означает равенство между собой коэффициентов при  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  функции Гамильтона (5) при  $t = 0$  в точке  $u^* = u^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ .

Приравнивая коэффициенты при  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , получаем соотношения между координатами  $\Psi(0)$

$$\alpha_1 = \alpha_5 + r_1 \|(\alpha_1, \alpha_2)\|, \quad \alpha_2 = -\alpha_6 + r_2 \|(\alpha_1, \alpha_2)\|, \quad \alpha_4 = 0,$$

где  $r_1, r_2 \rightarrow 0$  при  $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0$ . Полагаем так же  $\alpha_3 = 0$ .

Таким образом, вариация начальных данных вектора  $\Psi(0)$ , сохраняющая скользящий режим, имеет вид

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0), \Psi_5(0), \Psi_6(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, \alpha_1, -\alpha_2) + o(\|(\alpha_1, \alpha_2)\|), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (0, 0).$$

Система дифференциальных уравнений (4) при  $u = u^*$  и  $\lambda = \lambda^*$  имеет решение  $x_k^*(t) = 0, k = 1, \dots, 6, x_7^*(t) \neq 0$ . Аналогично система дифференциальных уравнений сопряжённой системы с теми же  $u = u^*$  и  $\lambda = \lambda^*$  и с нулевыми начальными условиями в точке  $t = 0$  имеет решение  $\Psi^*(t) = 0$ .

Так как  $H_{u_k u_k}(t, x^*, \Psi^*, u^*, \lambda^k) \neq 0$ , то уравнения (6) однозначно определяют аналитические неявные функции  $u_k = u_k(t, x, \Psi)$ , в окрестности точки  $(x^*, \Psi^*)$ ,  $u_k(t, x^*, \Psi^*) = u_k^*, k = 1, 2, 3, 4$ . Если в правые части системы (4) и сопряжённой системы подставить  $u = u(t, x, \Psi) = (u_1(t, x, \Psi), u_2(t, x, \Psi), u_3(t, x, \Psi), u_4(t, x, \Psi))$ , то их решение  $(x, \Psi)$  аналитически зависит от начальных данных и параметра  $\lambda$ . Таким образом,

$(x, \Psi)$  имеет производные по  $\alpha$  до второго порядка. Следовательно, тем же свойством обладает и управление  $u = u(t, x(\alpha), \Psi(\alpha)) = u(\alpha)$ .

Продифференцируем систему (4) по  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда для уравнения относительно  $\dot{x}_4(t)$  имеем

$$\left[ \frac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} = \sum_{k=1}^4 ((x_1)_{\alpha_j} \sin u_k^* - (x_2)_{\alpha_j} \cos u_k^* + (1-t) \cos 2u_k^* (u_k)_{\alpha_j}) \quad (x_4)_{\alpha_j}(0) = 0, j = 1, 2.$$

Подставим значения  $u_1^* = \pi/4$ ,  $u_2^* = 3\pi/4$ ,  $u_3^* = 5\pi/4$ ,  $u_4^* = 7\pi/4$ , получим

$$\left[ \frac{d(x_4)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} = 0, \quad (x_4)_{\alpha_j}(0) = 0.$$

Это означает, что изменение координат вектора  $\Psi(0)$  не вызывает изменения координаты  $x_4$  фазового вектора, следовательно, вдоль направления  $Im a_3$  точка  $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$  граничной поверхности  $\partial V_5(M)$ , доставляемая функцией  $P_{M^4}(z)$ , имеет угловой характер, что завершает доказательство теоремы.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Charzynski Z., Janowski W.* Domaine de variation des coefficients  $A_2$  et  $A_3$  des fonctions univalentes bornées // Bull.Soc.Sci.et Lettre.:Lodz,1959.c1.3,v.10,№ 4.
2. *Гордиенко В. Г.* Множество значений начальных коэффициентов ограниченных однолистных функций // Известия вузов. Сер. Математика. 1988. № 8. С. 14 – 21.
3. *Захаров А. М., Прохоров Д. В.* Седловые точки множества начальных коэффициентов однолистных функций // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун.-та, 2003. Вып. 5. С. 33 – 36.
4. *Прохоров Д. В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659 – 1667.
5. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимального управления. М : Наука, 1969. 308 с.

В. Г. Гордиенко, Е. В. Разумовская

**О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ  
ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ  
ОГРАНИЧЕННЫХ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ  
ФУНКЦИЙ**

Обозначим через  $S^M$ ,  $M > 1$ , класс аналитических и однолистных в единичном круге  $E = \{z : |z| < 1\}$  функций  $f(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ , удовлетворяющих в  $E$  неравенству  $|f(z)| < M$ . Экстремальные задачи о начальных коэффициентах в классе  $S^M$  и его подклассах изучались многими авторами, см., например, [1, 2]. Класс  $S^M$  представим интегралами уравнения Лёвнера – Куфарева [3, 1]. По аналогии с этим определим класс  $S^M(\alpha, \gamma)$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{1-\alpha}$ . Пусть  $C$  – класс Каратеодори функций  $p(z)$ ,  $p(0) = 1$ , аналитических в  $E$ ,  $Re p(z) \geq 0$ . Выделим его подкласс  $C(\alpha, \gamma)$  функций  $h(z) = \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)p(z)+\alpha} + \gamma$ ,  $p(z) \in C$ . Обозначим через  $C_t(\alpha, \gamma)$  класс функций

$$h(z, t) = 1 + h_1(t)z + h_2(t)z^2 + \dots, \quad (1)$$

определенных на  $E \times [0, \log M]$  и удовлетворяющих условию:  $h(\cdot, t) \in C(\alpha, \gamma)$  для почти всех  $t \in [0, \log M]$ ;  $h(w, \cdot)$  измерима на  $[0, \log M] \forall w \in E$ . Будем говорить, что функция  $f(z) \in S^M(\alpha, \gamma)$ , если  $f(z)$  представима в виде

$$f(z) = M f(z, \log M, h), \quad (2)$$

где  $f(z, t, h)$  – решение дифференциального уравнения Левнера – Куфарева

$$\frac{dw}{dt} = -wh(w, t), t \in [0, \log M], h \in C_t(\alpha, \gamma)$$

с начальным условием  $w|_{t=0} = z, z \in E$ . Будем также говорить, что  $f(z) \in S_R^M(\alpha, \gamma)$ , если  $f(z) \in S^M(\alpha, \gamma)$  и удовлетворяет в  $E$ :  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ .

В работе [4] описана верхняя граница множества значений системы  $(a_2, a_2a_3)$  в классе  $S_R^M(\alpha, \gamma)$ . В настоящей статье исследуется нижняя граница этого множества. Рассматриваем задачу как задачу оптимального управления, введя вектор фазовых координат:  $x_1(t) = a_2(t), x_2(t) = a_3(t)$ :

$$\frac{dx_1}{dt} = -u_1 e^{-t} = f_1, x_1(0) = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1u_1e^{-t} - u_2e^{-2t} = f_2, x_2(0) = 0,$$

и поставим задачу о поиске минимума функционала:  $a_2a_3 = -\int_0^{\log M} [x_2(t)u_1(t)e^{-t} + 2x_1^2(t)u_1(t)e^{-t} + x_1(t)u_2(t)e^{-2t}] dt = -\int_0^{\log M} f_0 dt$ . В задаче введем вектор управлений  $u_1(t) = h_1(t)$ ,  $u_2(t) = h_2(t)$ ,  $(h_1, h_2) \in G$ , где  $G$  – множество взаимного изменения коэффициентов  $h_1(t)$  и  $h_2(t)$  функции (1) в классе  $C_R(\alpha, \gamma)$ , описанное в работе [1]. Составляя функцию Гамильтона и применяя принцип максимума Понтрягина, найдём, что оптимальное управление, доставляющее максимум функции Гамильтона при почти всех  $t \in [0, \log M]$ , принадлежит границе области  $G$ . Исследуя глобальный максимум на  $G$  функции Гамильтона при различных значениях параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  получаем условия выбора оптимального управления с учётом выхода на границу изменения управления  $u_1(t)$ . Последующее интегрирование динамической системы приводит к следующему утверждению.

**Теорема.** Нижняя граница множества значений системы функционалов  $(a_2, a_2a_3)$  в классе  $S_R^M(\alpha, \gamma)$  при  $0 \leq \gamma \leq 1$  в параметрическом виде определяется следующими условиями:

если  $0 \leq \xi \leq \frac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{M}$ , то

$$a_2 = \xi \log M, a_2a_3 \geq a_2^3 \left( 1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\gamma) \log M} \right) + (1-\alpha)(1-\gamma) \left( \frac{1}{M^2} - 1 \right) a_2, 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \xi \log^2 M, a_2a_3 \geq a_2^3 \left( 1 - \frac{1}{(1-\gamma) \log M} \right) + (1-\alpha)(1-\gamma) \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) a_2, \frac{1}{2} \leq \alpha < 1;$$

если  $\frac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{M} \leq \xi \leq (1-\alpha)(1-\gamma)$ , то

$$a_2 = \pm 2(1-\alpha)(1-\gamma) \left( \frac{1}{M} - 1 \right), a_2a_3 \geq a_2^3 \pm a_2^2 \left( \frac{1}{M} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} - \alpha \right).$$

Каждая точка границы этого множества значений доставляется единственной функцией, представимой в виде (2), где

$$h(z, t) = \frac{1 - \gamma}{(1 - \alpha)p(z, t) + \alpha} + \gamma.$$

$$p(z, t) = \frac{(1 + \frac{p_1(t)}{2})(1 + z)\frac{1+z}{1-z} + (1 - \frac{p_1(t)}{2})(1 - z)}{(1 + \frac{p_1(t)}{2})(1 - z)\frac{1+z}{1-z} + (1 - \frac{p_1(t)}{2})(1 + z)},$$

$$p_1(t) = \begin{cases} c - \xi e^t, & |\xi e^t| \leq 2(1 - \alpha)|1 - \gamma|, \\ 2(1 - \alpha)|1 - \gamma| \cdot \operatorname{sgn}(-\xi e^t), & |\xi e^t| \geq 2(1 - \alpha)|1 - \gamma|. \end{cases}$$

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

3. Александров И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.

1. Васильев А. Ю. Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных функций.- Мат. заметки.-1985.-Т.38, №1.-с.56-65.

2. Васильев А. Ю. Взаимное изменение начальных коэффициентов в подклассах однолистных функций. - Выч. методы и программирование. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985.-с.55-64.

4. Разумовская Е. В. Об одном коэффициентном функционале в подклассе однолистных ограниченных «типично» вещественных функций // Сб. науч. тр. Механика. Математика, Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. С. 52-54.

УДК 517.984

О. Ю. Дмитриев

## РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

На отрезке  $[0, 1]$  рассмотрим краевую задачу

$$y^{(6)} - \lambda y = 0, \quad (1)$$

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (2)$$

где  $a_i$  — константы и  $\lambda$  — спектральный параметр. Эта задача порождается соответствующим дифференциальным оператором шестого порядка  $L$ , заданным дифференциальным выражением  $y^{(6)}$  и краевыми условиями (2).

В данной статье продолжается изучение условий разложения произвольной функции в ряд по собственным функциям линейного дифференциального оператора  $n$ -го порядка с нерегулярными краевыми условиями. Ранее в литературе изучались случаи распадающихся краевых условий [1] или случаи нечетных значений  $n$  [2, 3].

Рассматриваемый случай четного  $n$  отличается от соответствующих нечетных случаев, кроме того, и уровнем нерегулярности. При этом функция Грина  $G(x, t, \lambda)$  имеет экспоненциальный рост как при  $t < x$ , так и при  $t > x$ , что представляет основную трудность при исследовании.

**Лемма 1.** Пусть  $b_j = \sum_{k=1}^6 a_k (\omega_j e^{\pi i/6})^{k-1}$ , где  $\omega_j = \exp \frac{2j-1}{6} \pi i$ ,  $j = \overline{1, 6}$ . Если  $b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$ ,  $b_1 \neq 0$ ,  $b_2 \neq 0$ , то краевые условия (2) нерегулярны по Биркгофу [4].

Положим  $\lambda = -\rho^6$ ,  $\arg \rho \in [-\pi/6, \pi/6]$ . Тогда функции  $y_j(x, \rho) = \exp \rho \omega_j x$ ,  $j = \overline{1, 6}$  образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

**Лемма 2.** Для собственных чисел  $\lambda_k$  данного дифференциального оператора  $L$  справедливы асимптотические формулы

$$\lambda_k = -\rho_k^6, \quad \rho_k = 2\pi k + O(1/k), \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots$$

Обозначим

$$\varphi(x, \rho) = \begin{vmatrix} y_1(x, \rho) & \dots & y_6(x, \rho) \\ U_2(y_1) & \dots & U_2(y_6) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_6(y_1) & \dots & U_6(y_6) \end{vmatrix}.$$

Если  $\rho = \rho_k$ , то  $\varphi(x, \rho)$  — собственные функции краевой задачи (1)–(2).

Обозначим через  $T_1$  многоугольник, описываемый системой неравенств:

$$\operatorname{Re}(\omega_j z) < 0, \quad j = \overline{1, 4},$$

$$\operatorname{Re}(\omega_j z) < \operatorname{Re}(\omega_j), \quad j = \overline{5, 6}.$$

Рассмотрим ряд по собственным функциям

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(x, \rho_k). \quad (3)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если ряд (3) сходится равномерно на  $[0, 1]$ ,  $f$  — его сумма и  $\mu$  не является собственным значением краевой задачи (1)–(2), то функция  $g(x) = R_\mu f = \int_0^1 G(x, t, \mu) f(t) dt$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1) аналитически продолжима в  $T_1$ ;
- 2) ограничена в угле  $|\arg z + \pi/3| \leq \pi/3$ ;



3) удовлетворяет уравнению

$$\Phi(f, x) = 0,$$

где  $\Phi(f, x) = b_1 f(\bar{\omega}_1 x) + b_2 f(\bar{\omega}_2 x) + 6f(1 - x)$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. 1966. Т. 70(112), № 3. С. 310–329.

2. Хромов А. П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Математика и ее приложения : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 17–24.

3. Дмитриев О. Ю. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора  $n$ -го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Математика и ее приложения : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 70–72.

4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

УДК 517.984

М. Ю. Игнатьев

### ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА НЕКОМПАКТНОМ А-ГРАФЕ

*A*-графом называется связный геометрический граф, в котором любые два цикла имеют не более одной общей вершины. Обратная задача Штурма – Лиувилля на компактных *A*-графах подробно исследована в [1]. Рассмотрим некомпактный *A*-граф  $G$  с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $\mathcal{E} \cup \mathcal{R}$ , где  $\mathcal{E}$  – множество компактных ребер и  $\mathcal{R}$  – множество лучей. Пусть  $y(\cdot)$  – некоторая функция, определенная на  $G$ . Следующее условие во внутренней вершине  $v$  назовем *стандартным условием склейки*  $MC(v)$ :

$$\sum_{r \in I(v)} \partial_r y(v) = 0 \quad (1)$$

где  $I(v)$  – множество ребер, инцидентных вершине  $v$ ,  $\partial_r y(v)$  – производная по направлению внутрь ребра  $r$ . Пусть множество граничных вершин  $\partial G$  представлено в виде объединения двух непересекающихся множеств:  $\partial G = \partial_K G \cup \partial_D G$ . Для вершин  $v \in \partial_K G$  мы определим условие склейки  $MC(v)$  соотношением (1) (что, очевидно, эквивалентно, однородному условию Неймана), для  $v \in \partial_D G$  мы определим условие  $MC(v)$  как однородное условие Дирихле

$$y(v) = 0.$$

Пусть  $q(x)$  – вещественнозначная суммируемая на  $G$  функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_r (1 + |x|)|q(x)| d|x| < \infty$$

для всех  $r \in \mathcal{R}$ , где  $|x|$  – натуральный параметр на  $r$ , отсчитываемый от начала луча. Рассмотрим на  $G$  оператор Штурма – Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell y := -y'' + q(x)y,$$

условием непрерывности и условиями склейки  $MC(v), v \in V$ .

Рассмотрим произвольный луч  $r \in \mathcal{R}$ . Функция  $\psi_r(x, \rho)$ ,  $x \in G$ ,  $\rho \in \Omega_+ := \{\text{Im} \rho > 0\}$  называется *решением типа Вейля, ассоциированным с  $r$* , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна по  $x$  на  $G$  и удовлетворяет условиям  $MC(v)$  для всех  $v \in V$ ;
- 2) является решением уравнения  $\ell \psi_r = \rho^2 \psi_r$ ,  $x \in \text{int } r'$ ,  $r' \in \mathcal{E} \cup \mathcal{R}$ ;
- 3)  $\psi_r(x, \rho) = O(\exp(i\rho|x|))$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \in r'$ ,  $r' \in \mathcal{R} \setminus \{r\}$ ;
- 4)  $\psi_r(x, \rho) = \exp(-i\rho|x|)(1 + o(1))$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \in r$ .

Справедливы следующие утверждения.

**Лемма 1.** Для  $x \in r$   $\psi_r(x, \rho)$  мероморфна по  $\rho$  в  $\Omega_+$  с конечным (возможно пустым) множеством полюсов  $Z_r^-$ . Все полюса простые и лежат на мнимой оси. Для вычетов  $\text{res}_{\rho=\rho_0} \psi_r(x, \rho)$ ,  $\rho_0 \in Z_r^-$  справедливы асимптотические представления:

$$\text{res}_{\rho=\rho_0} \psi_r(x, \rho) = i\alpha_r(\rho_0) \exp(i\rho_0|x|)(1 + o(1)), x \rightarrow \infty, x \in r,$$

где  $\alpha_r(\rho_0) \in (0, +\infty)$ .

**Лемма 2.** Для  $\rho_0 \in \mathbf{R} \setminus (\{0\} \cup Z_0^+)$  существуют предельные значения  $\psi_r(x, \rho_0) := \lim_{\rho \rightarrow \rho_0, \rho \in \Omega_+} \psi_r(x, \rho)$ . Если  $\rho_0 \in Z_0^+$ , то  $\psi_r(x, \rho)$  и  $\psi_r'(x, \rho)$  ограничены при  $\rho \rightarrow \rho_0, \rho \in \Omega_+$ . Здесь  $Z_0^+$  – некоторое не более, чем счетное множество вещественных чисел, обладающее следующим свойством: число элементов  $Z_0^+$  на отрезке  $[t, t+1]$  ограничено константой, не зависящей от  $t$ .

**Лемма 3.** Для  $\psi_r(x, \rho)$ ,  $\rho \in \mathbf{R} \setminus (\{0\} \cup Z_0^+)$  справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\psi_r(x, \rho) = \exp(-i\rho|x|) + s_r(\rho) \exp(i\rho|x|) + o(1), \quad x \in r, x \rightarrow \infty.$$

Набор  $J_r := \{s_r(\cdot), Z_r^-, \alpha_r(\rho), \rho \in Z_r^-\}$  назовем *данными рассеяния, ассоциированными с  $r$* .

Для однозначного восстановления оператора Штурма – Лиувилля на  $A$ -графе  $G$ , помимо данных рассеяния, ассоциированных с лучами графа, требуется также задание некоторых спектральных характеристик, связанных с частью его вершин.

Рассмотрим произвольную вершину  $v \in V$ . Функцию  $\Phi_v(x, \lambda, G)$ , назовем *решением Вейля, ассоциированным с  $v$* , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна по  $x$  на  $G$  и удовлетворяет условиям  $MC(u)$  для всех  $u \in V \setminus \{v\}$ ;
- 2) является решением уравнения  $\ell\Phi_v = \lambda\Phi_v$ ,  $x \in \text{int } r$ ,  $r \in \mathcal{E} \cup \mathcal{R}$ ;
- 3)  $\Phi_v(\cdot, \lambda, G) \in L_2(G)$ ;
- 4)  $\Phi_v(v, \lambda, G) = 1$ .

Величину

$$M_v(\lambda, G) := \sum_{r \in I(v)} \partial_r \Phi_v(v, \lambda, G)$$

назовем *функцией Вейля, ассоциированной с  $v$* .

Предположим для определенности, что множество граничных вершин графа  $G$  непусто. Выберем одну из них и будем считать ее корнем графа. Обозначим ее  $v^0$ . Обозначим через  $\mathcal{C}$  множество всех циклов графа. Для данного цикла  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$  определим граф  $G_{\mathbf{c}}$  следующим образом. Пусть  $\mathbf{c}$  состоит из ребер (последовательно)  $r_1, r_2, \dots, r_p$ , соединяющих  $v_0$  с  $v_1$ ,  $v_1$  с  $v_2$ , ...,  $v_{p-1}$  с  $v_0$ , где  $v_0 =: u_{\mathbf{c}}$  – ближайшая к корню из вершин  $\mathbf{c}$ . Тогда  $G_{\mathbf{c}}$  есть, по определению, граф, полученный из  $G$  заменой ребра  $r_p$ , соединяющего  $v_{p-1}$  и  $v_0$  ребром  $r'_p$  той же длины, соединяющим  $v_{p-1}$  и дополнительную вершину  $v_{\mathbf{c}}$ .

Сформулируем основной результат статьи.

**Теорема 1.** *Задание набора данных  $J_r$ ,  $r \in \mathcal{R}$ ,  $M_v(\cdot, G)$ ,  $v \in \partial G \setminus \{v^0\}$ ,  $M_{v_{\mathbf{c}}}(\cdot, G_{\mathbf{c}})$ ,  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$  однозначно определяет потенциал  $q(\cdot)$  почти всюду на  $G$ .*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V. A.* Uniqueness of recovering of Sturm – Liouville operators on  $A$ -graphs from spectra // Results in Mathematics. 2009. Vol. 55, № 1-2. P. 199–207.

**ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ  
СИСТЕМЫ ДИРАКА  
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Рассмотрим систему Дирака

$$y_1'(x) - q_2(x)y_2(x) = \lambda y_1(x), \quad (1)$$

$$y_2'(x) - q_1(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x) \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$y_1(0) = y_1(1), \quad y_2(0) = y_2(1), \quad (3)$$

где  $q_j(x)$  — комплекснозначные, непрерывные функции на отрезке  $[0, 1]$ . В отличие от случая краевых условий Дирихле  $y_1(0) = y_2(0)$ ,  $y_1(1) = y_2(1)$ , рассмотренных в [1], в случае периодических условий приходится сталкиваться с новыми трудностями из-за возможной кратности собственных значений.

В работе [2] получена следующая асимптотика собственных значений краевой задачи (1)–(3):

**Теорема 1.** *Собственные значения краевой задачи (1)–(3) за исключением некоторого конечного числа образуют две бесконечные последовательности*

$$\lambda_n' = 2n\pi i + \varepsilon_n', \quad \lambda_n'' = 2n\pi i + \varepsilon_n'', \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_n', \varepsilon_n'' \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \pm\infty$ .

В случае  $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n''$  собственные значения простые, а при  $\varepsilon_n' = \varepsilon_n''$  — двукратные.

В данной статье выводятся асимптотические формулы, уточняющие формулы (4).

Система (1)–(2) эквивалентна системе

$$z_1(x) = c_1 + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t) dt, \quad (5)$$

$$z_2(x) = c_2 + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) z_1(t) dt, \quad (6)$$

где  $z_1(x) = e^{-\lambda x}y_1(x)$ ,  $z_2(x) = e^{\lambda x}y_2(x)$ ;  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные.

Пусть  $z_{11}(x), z_{21}(x)$  — решение системы (5)–(6) при  $c_1 = 1, c_2 = 0$ , а  $z_{21}(x), z_{22}(x)$  — решение при  $c_1 = 0, c_2 = 1$ . Стандартные рассуждения показывают, что уравнение для собственных значений задачи (1)–(3) имеет вид

$$e^{2\lambda} - g_1(\lambda)e^\lambda + g_2(\lambda) = 0, \quad (7)$$

где  $g_1(\lambda) = z_{11}^{-1}(\lambda)(1 + z_{11}(1)z_{22}(1) - z_{12}(1)z_{21}(1))$ ,  $g_2(\lambda) = z_{11}^{-1}(1)z_{22}(1)$ .

В дальнейшем будем обозначать одним и тем же символом  $\alpha_n$  произвольные числа, для которых  $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ , а через  $\beta_n$  — такие  $\alpha_n$ , которые можно вычислить.

Согласно [3] при  $\lambda_n = 2n\pi i + \varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , справедливы асимптотические формулы

$$g_j(\lambda_n) = 2^{2-j} + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

где  $\omega_n = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \beta_n\varepsilon_n^2 + \beta_n\varepsilon_n^3 + \beta_n\varepsilon_n^4$ .

**Лемма 1.** Для чисел  $\varepsilon'_n$  и  $\varepsilon''_n$  из формул (4) справедливы оценки

$$\varepsilon'_n = \alpha_n^{1/2}, \quad \varepsilon''_n = \alpha_n^{1/2}.$$

**Доказательство.** Введем обозначения

$$L_\pm(\lambda) = e^\lambda - \frac{1}{2}g_1(\lambda) \mp \sqrt{g_3(\lambda)}, \quad g_3(\lambda) = \frac{1}{4}g_1^2(\lambda) - g_2(\lambda).$$

Рассмотрим собственные значения  $\lambda_n = 2n\pi i + \varepsilon_n$  краевой задачи (1)–(3). Они являются корнями уравнения (7). Следовательно,

$$L_+(\lambda_n) \cdot L_-(\lambda_n) = 0.$$

Пусть, для определенности,  $L_+(\lambda_n) = 0$ . В этом случае

$$e^{\varepsilon_n} = 1 + x_n, \quad (9)$$

где

$$x_n = \frac{1}{2}g_1(\lambda_n) + \sqrt{g_3(\lambda_n)} - 1. \quad (10)$$

На основании (8) заключаем, что

$$\begin{aligned} g_3(\lambda_n) &= \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \\ \sqrt{g_3(\lambda_n)} &= \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2), \\ x_n &= \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2), \\ x_n^2 &= \alpha_n + O(\varepsilon_n^2). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, из (9) получаем, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= x_n + O(x_n^2), \\ \varepsilon_n &= \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2),\end{aligned}\tag{11}$$

откуда следует, что

$$\varepsilon_n = \alpha_n^{1/2}.\tag{12}$$

Случай  $L_-(\lambda_n) = 0$  рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $\varepsilon_n$  — любое из  $\varepsilon'_n$  или  $\varepsilon''_n$ . Справедливы асимптотические формулы

$$\varepsilon_n = \pm \beta_n^{1/2} + \alpha_n^{3/4}.$$

**Замечание.** Вопрос о знаке перед  $\beta_n^{1/2}$  не ясен.

**Доказательство теоремы 2.** Пусть  $\lambda_n = 2n\pi i + \varepsilon_n$  являются собственными значениями задачи (1)–(3) и, для определенности,  $L_+(\lambda_n) = 0$ . В этом случае по формуле (10) имеем

$$x_n = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4) + \sqrt{\omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4)}.$$

В силу (12)  $\omega_n = \beta_n + \alpha_n^{3/2}$  и поэтому

$$x_n = \beta_n + \alpha_n^{3/2} + \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}}.$$

Отсюда с учетом (11) заключаем, что

$$\varepsilon_n = \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \alpha_n.\tag{13}$$

Возможны два случая. В первом случае

$$\left| \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \sqrt{\beta_n} \right| \leq \left| \alpha_n^{3/4} \right|.$$

В этом случае из (13) следует, что

$$\varepsilon_n = -\sqrt{\beta_n} + \alpha_n^{3/4}.\tag{14}$$

Во втором случае

$$\left| \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \sqrt{\beta_n} \right| > \left| \alpha_n^{3/4} \right|.$$

В этом случае

$$\left| \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} - \sqrt{\beta_n} \right| = \left| \beta_n + \alpha_n^{3/2} - \beta_n \right| \cdot \left| \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \sqrt{\beta_n} \right|^{-1} \leq \left| \alpha_n^{3/4} \right|.$$

Учитывая это, из (13) получаем, что

$$\varepsilon_n = \sqrt{\beta_n} + \alpha_n^{3/4}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует утверждение теоремы.

Случай  $L_-(\lambda_n) = 0$  рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Для кратных собственных значений можно получить еще более точную асимптотику.

**Теорема 3.** *Если  $g_3(\lambda_n) = 0$  для некоторого бесконечного множества  $\Lambda$  собственных значений  $\lambda_n$ , то достаточно большие по модулю  $\lambda_n$  из  $\Lambda$  двукратны, и для них справедлива асимптотика*

$$\lambda_n = 2n\pi i + \beta_n + \alpha_n^2.$$

**Доказательство.** По теореме 1 число корней уравнения (7) в круге  $|2n\pi i - \lambda| < \delta$  при больших  $|n|$  равно 2. Число  $\varkappa_+$  ( $\varkappa_-$ ) корней  $L_+(\lambda)$  ( $L_-(\lambda)$ ) в таком случае не больше 2, причем  $\varkappa_+ + \varkappa_- = 2$ . Поэтому, если  $g_3(\lambda_n) = 0$ , то  $L_{\pm}(\lambda_n) = 0$ ,  $\varkappa_{\pm} \geq 1$ . Следовательно,  $\varkappa_+ = \varkappa_- = 1$ , т. е.  $\lambda_n$  — двукратный корень. В этом случае (9) примет вид

$$e^{\lambda_n} = \frac{1}{2}g_1(\lambda_n).$$

Отсюда

$$e^{\lambda_n} = 1 + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \quad \varepsilon_n = y_n + O(y_n^2), \quad (16)$$

где  $y_n = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4) = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2)$ . Замечая, что  $y_n^2 = \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2)$ , из (16) получаем

$$\varepsilon_n = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2). \quad (17)$$

Отсюда следует, что  $\varepsilon_n = \alpha_n$ , и (17) переходит в  $\varepsilon_n = \beta_n + \alpha_n^2$ .

Теорема доказана.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).*

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П. Асимптотика собственных значений и собственных функций системы Дирака с квадратично суммируемым потенциалом // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Саратов. зимн. шк. 27 янв. – 3 февр. 2012 г.. Саратов : Научная книга, 2012. С. 34–35.
2. Бурлуцкая М. Ш. Система Дирака с непрерывным потенциалом и периодическими краевыми условиями // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения – XXIII». Воронеж : Издат.-полиграф. центр Воронеж. гос. ун-та, 2012. С. 34–35.
3. Хромов А. П. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений системы Дирака с периодическими краевыми условиями и непрерывным потенциалом // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения – XXIII». Воронеж : Издат.-полиграф. центр Воронеж. гос. ун-та, 2012. С. 194–196.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

## ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫША

Иерархические игры — это модели конфликтных ситуаций с неравноправными участниками, в которых важную роль играет информированность первого игрока об интересах второго [1]. Исследованию таких игр при различных вариантах информированности посвящены, в частности, работы [2-5]. В данной статье предполагается, что первый игрок не знает точно функции выигрыша второго, которая влияет и на его интересы. При этих предположениях находится наибольший гарантированный результат первого игрока. Полученная формула применяется для частного случая квадратичных функций выигрыша игроков.

Пусть  $X, Y$  — множества стратегий игроков,  $F_i$  и  $G_i$ , ( $i = 1, 2$ ) — их функции выигрыша. Таким образом, имеем систему  $\Gamma = (X, Y, F_1, F_2, G_1, G_2)$ . Рассмотрим иерархическую игру  $\tilde{\Gamma} = (\Phi_1, \Psi_2 \times Y, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{G}_1, \tilde{G}_2)$ , где  $\Phi_1 = \{\phi_1 \mid \phi_1 : Y \rightarrow 2^X\}$ ,  $\Psi_2 = \{\psi_2 \mid \psi_2 : 2^X \rightarrow X\}$ , причем при всех  $T \subset X$  выполняется условие  $\psi_2(T) \in T$ , функции  $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{G}_1, \tilde{G}_2$  определяются равенствами  $\tilde{F}_i(\phi_1, (\psi_2, y)) = F_i(\psi_2(\phi_1(y)), y)$ ,  $\tilde{G}_i(\phi_1, (\psi_2, y)) = G_i(\psi_2(\phi_1(y)), y)$ ,  $i = 1, 2$ .

Информационная интерпретация такого расширения исходной игры и доказательство его оптимальности приведены в [6]. Наибольший гарантированный результат первого игрока в построенной игре  $\tilde{\Gamma}$  определяется



равенством

$$\gamma = \sup_{\phi_1 \in \Phi_1} \min \left( \inf_{(\psi_2, y) \in M_1(\phi_1)} \tilde{F}_1(\phi_1, (\psi_2, y)), \inf_{(\psi_2, y) \in M_2(\phi_1)} \tilde{F}_2(\phi_1, (\psi_2, y)) \right),$$

где множества  $M_i(\phi_1)$ ,  $i = 1, 2$ , находятся из соотношений  $M_i(\phi_1) = \{(\psi'_i, y') \mid \tilde{G}_i(\phi_1, (\psi'_i, y')) > \sup_{(\psi_2, y)} \tilde{G}_i(\phi_1, (\psi_2, y)) - \delta_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\delta_1, \delta_2$  — некоторые малые положительные числа.

Аналогично выкладкам работы [5] для стохастической информированности первого игрока об интересах второго можно показать, что справедливо равенство

$$\gamma = \sup_{(l_1, l_2) \in L} \min(l_1, l_2),$$

где  $L = \{(l_1, l_2) \mid \exists(x_1, y_1), (x_2, y_2)(F_1(x_1, y_1) \geq l_1 \& F_2(x_2, y_2) \geq l_2 \& \forall y \exists x(G_1(x, y) \leq G_1(x_1, y_1) \& (G_1(x, y) \leq G_1(x_1, y_1) - \delta_1 \vee F_1(x, y) \geq l_1 \& G_2(x, y) \leq G_2(x_2, y_2) \& (G_2(x, y) \leq G_2(x_2, y_2) - \delta_2 \vee F_2(x, y) \geq l_2)))\}$ . Отсюда нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$\max_{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in Z^-} \min(F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)) = \gamma^- \leq \gamma, \quad (1)$$

$$\gamma \leq \gamma^+ = \max_{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in Z^+} \min(F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)), \quad (2)$$

где множества  $Z^-, Z^+$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} Z^- &= \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid \forall y \exists x(G_1(x, y) \leq G_1(x_1, y_1) - \delta_1 \& G_2(x, y) \leq \\ &\leq G_2(x_2, y_2) - \delta_2)\}; \\ Z^+ &= \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid \forall y \exists x(G_1(x, y) \leq G_1(x_1, y_1) \& G_2(x, y) \leq \\ &\leq G_2(x_2, y_2))\}. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли пределы  $[\gamma^-, \gamma^+]$ , в которых лежит  $\gamma$ . Если при  $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow (0, 0)$  выполняется условие  $\gamma^- \rightarrow \gamma^+$  и множества  $Z^-$  и  $Z^+$  допускают несложное описание, то задачу вычисления  $\gamma$  можно считать решенной. Эти условия верны для рассматриваемых ниже квадратичных функций выигрыша игроков.

Пусть  $X = Y = [0, 1]$ ,  $F_i(x, y) = -\sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$ ,  $G_i(x, y) = -\sqrt{(x - c_i)^2 + (y - d_i)^2}$ ,  $i = 1, 2$ . Введем обозначение  $r_i = \sqrt{(x_i - c_i)^2 + (y_i - d_i)^2}$ . Тогда геометрический смысл множества  $Z^+$  состоит в том, что на каждой горизонтали  $y = const$  квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$  существует точка, лежащая вне или на границе кругов с центрами в

точках  $E_1(c_1, d_1)$ ,  $E_2(c_2, d_2)$  и радиусами  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Множество  $Z^-$  интерпретируется аналогично. В зависимости от соотношений между числами  $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, d_1, c_2, d_2$  условия принадлежности точек этим множествам преобразуются различным образом. Предположим, например, что выполняются неравенства  $c_2 - c_1 > \frac{1}{2}$ ,  $d_1 > d_2$ ,  $c_2 > \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + (c_2 - 2 \cdot c_1)^2}$ ,  $1 - c_1 > \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + (2 \cdot c_2 - 1 - c_1)^2}$ ,  $D_1 + D_2 > D_{12}$ ,  $D_1 + D_{12} > D_2$ ,  $D_2 + D_{12} > D_1$ ,

$$\frac{c_1}{\cos(\alpha)} \leq \frac{D_1 - D_2 + D_{12}}{2} \leq \min(D_{12} - \frac{1 - c_2}{\cos(\alpha)}, D_1),$$

$$\frac{c_1}{\cos(\alpha)} \leq \frac{D_2 - D_1 + D_{12} + \delta_2 - \delta_1}{2} \leq \min(D_{12} - \frac{1 - c_2}{\cos(\alpha)}, D_1),$$

$$\frac{1 - c_2}{\cos(\alpha)} \leq \frac{D_2 - D_1 + D_{12}}{2} \leq \min(D_{12} - \frac{c_1}{\cos(\alpha)}, D_1),$$

$$\frac{1 - c_2}{\cos(\alpha)} \leq \frac{D_2 - D_1 + D_{12} + \delta_2 - \delta_1}{2} \leq \min(D_{12} - \frac{c_1}{\cos(\alpha)}, D_1),$$

где  $D_i = \sqrt{(c_i - a_i)^2 + (d_i - b_i)^2}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $D_{12} = \sqrt{(c_2 - c_1)^2 + (d_2 - d_1)^2}$ ,  $\alpha$  — угол между прямой  $E_1E_2$  и осью ординат.

Тогда можно показать, что максимум левой части (1)  $\gamma^-$  достигается в точках  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , где  $K_i(x_i, y_i)$  является точкой пересечения круга с центром в точке  $E_i$  радиуса  $\frac{D_i - D_j + D_{12} - \delta_1 - \delta_2}{2}$  и отрезка  $H_iE_i$  ( $i, j = 1, 2, i \neq j$ , точка  $H_i$  имеет координаты  $(a_i, b_i)$ ), а максимум правой части (2)  $\gamma^+$  достигается в точках  $(x'_1, y'_1)$ ,  $(x'_2, y'_2)$ , где  $K'_i(x'_i, y'_i)$  является точкой пересечения круга с центром в точке  $E_i$  радиуса  $\frac{D_i - D_j + D_{12}}{2}$  и отрезка  $H_iE_i$  ( $i, j = 1, 2, i \neq j$ ).

Величина  $\gamma$  в этом случае лежит в пределах  $[-\frac{D_1 + D_2 - D_{12} - \delta_1 - \delta_2}{2}, -\frac{D_1 + D_2 - D_{12}}{2}]$ . Таким образом, уменьшая  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , мы можем добиться произвольной близости  $\gamma$  к величине  $-\frac{D_1 + D_2 - D_{12}}{2}$ . Для других соотношений между параметрами задачи выкладки аналогичны.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. М. : Наука, 1976.
2. Кукушкин Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977.
3. Шолпо И. А. Об одном классе иерархических игр двух лиц // Вест. МГУ. серия Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 4. С. 58–62.
4. Кононенко А. Ф. Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // ЖМВ и МФ. 1973. Т. 13, № 2. С. 311–317.

5. Кузнецова И. А. Иерархические игры со случайными факторами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 77–79.

6. Шолпо И. А. Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983.

УДК 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

## О БАЗСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В данной статье рассматривается вопрос о базисности Рисса в пространстве  $L_2[0,1]$  собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) дифференциального оператора с инволюцией

$$Ly = l[y] = y'(1-x) + q(x)y(x), x \in [0,1], \quad (1)$$

$$y(0) = y(1), \quad (2)$$

где  $q(x) \in L_2[0,1]$ .

В случае, когда  $q(x) \in C^1[0,1]$ , базисность Рисса с.п.ф. оператора (1)–(2) может быть установлена методом из [1]. Значительные трудности, возникающие в случае, когда  $q(x) \in L_2[0,1]$  в данной работе преодолеваются с помощью метода статьи [2] нахождения уточненных асимптотических формул для собственных значений системы Дирака. Рассмотрим систему Дирака:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v'(x) + \begin{pmatrix} 0 & -q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix} v(x) = \mu v(x), \quad (3)$$

$$M_0 v(0) + M_1 v(1) = 0, \quad (4)$$

где  $q_1(x) = p(x)e^{2i\gamma(x)}$ ,  $q_2(x) = p(x)e^{-2i\gamma(x)}$ ,  $p(x) = \frac{1}{2}(q(x) - q(1-x))$ ,  $\gamma(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (q(t) + q(1-t)) dt$ ,  $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{-2i\gamma} \end{pmatrix}$ ,  $\gamma = \gamma(1)$ .

С помощью теоремы 1 из [2] (она легко обобщается и для случая  $q_j(x) \in L_2[0,1]$ ) стандартно получается

**Лемма 1.** *Собственные значения краевой задачи (3)–(4) достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы*

$$\mu_n = -i(\gamma + n\pi + \mathcal{E}_n) \quad (n = \pm n_0, \pm (n_0 + 1), \dots), \quad (5)$$

где  $\mathcal{E}_n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Ключевым моментом решения поставленной задачи о базисности Рисса с.п.ф. оператора  $L$  является уточнение асимптотических формул (5). Этот вопрос решается методом из статьи [2]. Обозначим одним и тем же  $\alpha_n$  произвольные числа, лишь бы  $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ ; и через  $\beta_n$  — такие  $\alpha_n$ , которые можно точно выписать.

**Лемма 2.** *Для собственных значений краевой задачи (3)–(4) имеют место асимптотические формулы*

$$\mu_n = -i(\gamma + n\pi) + \beta_n + \alpha_n^2 \quad (n = \pm n_0, \pm (n_0 + 1), \dots) \quad (6)$$

**Лемма 3.** *Число  $\lambda$ , достаточно большое по модулю, является собственным значением оператора  $L$  тогда и только тогда, когда число  $\mu = -i\lambda$  является собственным значением краевой задачи (3)–(4) и выполняется условие  $iv_1(0) + v_2(0) = ie^{i\gamma}v_1(1) + e^{-i\gamma}v_2(1)$ . При этом  $y(x) = ie^{i\gamma(x)}v_1(x) + e^{-i\gamma(x)}v_2(x)$  есть соответствующая собственная функция оператора  $L$ . Здесь  $v_j(x) = v_j(x, \mu)$  ( $j = 1, 2$ ) есть компоненты решения задачи (3)–(4).*

Леммы 1 — 3 используем для доказательства следующей теоремы

**Теорема 1.** *Собственные значения оператора  $L$ , достаточно большие по модулю, простые и для них имеют место асимптотические формулы*

$$\lambda_n = i\mu_{2n} \quad (n = \pm n_0, \pm (n_0 + 1), \dots),$$

где  $\mu_{2n}$  определяется в (6).

Обозначим через  $\varphi_n$  собственные функции оператора  $L$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_n$ , и через  $\varphi_n^*$  — собственные функции оператора  $L^*z = z'(1-x) + \bar{q}(x)z(x)$ ,  $z(0) = z(1)$ , соответствующие  $\bar{\lambda}_n$ .

Используем лемму 3 и теорему 1 в следующем утверждении.

**Теорема 2.** *Для любой  $f \in L_2[0, 1]$  имеет место:*

$$(f, \varphi_n) = \alpha_n, \quad (f, \varphi_n^*) = \alpha_n, \quad (\varphi_n, \varphi_n^*) = 2 + o(1),$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L_2[0, 1]$ .

**Теорема 3.** *Системы с.п.ф. операторов  $L$  и  $L^*$  полны в  $L_2[0, 1]$ .*

Из теорем 2 и 3 по теореме Бари ([3], с. 374—375) следует основной результат.

**Теорема 4.** *Системы с.п.ф. оператора  $L$  образует базис Рисса в  $L_2[0, 1]$ .*

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 2. С. 196—204.
2. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // Докл. АН. 2012. Т. 443. № 4. С. 414—417.
3. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М. : Наука, 1965. 445 с.

УДК 517.51

Д. С. Лукомский

### ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ХААРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Статья посвящена численному решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке  $[0, 1]$  с использованием разложения функций в ряд по системе Хаара [1]. Ранее, например, в работах [2, 3] рассматривалось применение функций Хаара для решения дифференциальных уравнений и вариационных задач. Однако в данной статье предложен другой подход. Ранее с помощью системы Хаара строилось само решение дифференциального уравнения. В этом случае приходилось вводить специальный оператор дифференцирования для кусочно-постоянных функций, что приводило к довольно громоздким вычислениям.

В данной работе по заданной ортогональной системе записывается разложение второй производной функции. И, после двойного интегрирования, искомое решение будет представимо в виде ряда по системе кусочно-квадратичных функций.

Рассмотрим задачу Коши на отрезке  $[0, 1]$  следующего вида:

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y(x) = f(x) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} . \quad (1)$$

Запишем функции  $p(x)$  и  $f(x)$  в виде их разложения в ряд по системе Хаара:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h_k(x),$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k h_k(x),$$

где  $h_k(x)$  – функции Хаара, а  $p_k$  и  $f_k$  – соответствующие коэффициенты разложений.

Так же представим  $y''(x)$  в виде разложения по системе Хаара

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(x), \quad (2)$$

здесь  $c_k$  – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Проинтегрируем равенство (2) от 0 до  $x$  на отрезке  $[0, 1]$

$$\int_0^x y''(t) dt = y'(x) - y'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

где  $\varphi_k(x)$  – функции Фабера – Шаудера, задаваемые равенствами

$$\varphi_{2^n+j}(x) = \begin{cases} x - \frac{j}{2^n}, & x \in \left[ \frac{j}{2^n}, \frac{j+1/2}{2^n} \right] \\ \frac{j+1}{2^n} - x, & x \in \left[ \frac{j+1/2}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right] \\ 0, & x \notin \left[ \frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right] \end{cases}.$$

Отсюда получаем выражение

$$y'(x) = y'(0) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x).$$

Еще раз проинтегрируем его от 0 до  $x$  на отрезке  $[0, 1]$ , получим

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(x), \quad (3)$$

где  $\psi_k(x)$  задаются следующими равенствами

$$\psi_{2^n+j}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{jx}{2^n} + \frac{j^2}{2^{2n+1}}, & x \in \left[ \frac{j}{2^n}, \frac{j+1/2}{2^n} \right] \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{x(j+1)}{2^n} - \frac{j}{2^{2n}} - \frac{j^2}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2^{2n+2}}, & x \in \left[ \frac{j+1/2}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right] \\ 0, & x \in \left[ 0, \frac{j}{2^n} \right] \\ \frac{1}{2^{2n+2}}, & x \in \left[ \frac{j+1}{2^n}, 1 \right] \end{cases}.$$

Следовательно, функции  $\psi_k(x)$  являются кусочно-квадратичными, и решение задачи Коши будем приближать с помощью квадратичных сплайнов.

Подставим полученные представления в уравнение (1), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} p_k h_k(x) \left( y(0) + y'(0)x + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi_j(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k h_k(x).$$

Выберем некоторое  $N = 2^n - 1$  и перепишем последнее равенство следующим образом:

$$\sum_{k=0}^N h_k(x) \left( c_k + p_k y(0) + p_k y'(0)x + p_k \sum_{j=0}^N c_j \psi_j(x) - f_k \right) = 0.$$

Рассмотрим последнюю сумму в точках  $\{x_i\}_{i=0}^N$ , получим

$$\sum_{k=0}^N h_k(x_i) \left( c_k + p_k y(0) + p_k y'(0)x_i + p_k \sum_{j=0}^N c_j \psi_j(x_i) - f_k \right) = 0. \quad (4)$$

Таким образом, (4) – это система линейных алгебраических уравнений вида  $Ax = b$  относительно неизвестных  $c_k$ . Коэффициенты системы задаются следующими равенствами

$$\begin{cases} a_{i,j} = h_j(x_i) + \psi_j(x_i) \sum_{k=0}^N p_k h_k(x_i), \\ b_i = \sum_{k=0}^N f_k h_k(x_i) - \sum_{k=0}^N p_k h_k(x_i) (y(0) + y'(0)x_i). \end{cases}$$

Решая систему (4) методом Гаусса, находим коэффициенты  $c_k$  и затем по формуле (3) находим решение задачи Коши  $y(x)$ .

По результатам данных исследований была написана программа и проведен ряд численных экспериментов, которые показали следующее. Если решением данной задачи Коши является квадратичная функция, то алгоритм дает точное решение уже при разбиении отрезка четырьмя точками. Если в качестве решения взять функцию  $y(x) = \sin(x)$  то при разбиении четырьмя точками погрешность решения порядка  $O(10^{-2})$ , при увеличении количества точек в 2 раза погрешность составляет  $O(10^{-3})$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00097-а).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кашин В. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. 2-е изд., доп. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.
2. *Razzaghi M., Ordokhani Y.* An application of rationalized Haar functions for variational problems// ELSEVIER Applied Mathematics and Computation. 2001. Vol. 122. P. 353–364

3. *Ohkita M., Kobayashi Y.* An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations// IEEE Transactions on Circuit and Systems.1986. Vol. 9. P. 853–862.

УДК 517.51

**Р. В. Мартенс**

## О ПОЛНОЙ МИНИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим систему функций Фабера — Шаудера  $(1, t, \{g_{k,j}(t)\})$ , где

$$g_{k,j}(t) = g(2^k t - j)$$

при  $k \geq 0$ ,  $0 \leq j \leq 2^k - 1$ , а функция  $g(t)$ , в свою очередь, определяется следующим образом:

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & \text{при } t \in [0, 1/2], \\ 2 - 2t & \text{при } t \in [1/2, 1], \\ 0, & \text{при } t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Известно, что система Фабера — Шаудера является базисом в пространстве непрерывных функций  $C[0, 1]$ , но при этом не является минимальной системой в пространствах Лебега  $L^p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Линейные комбинации функций Фабера — Шаудера совпадают с множеством всех кусочно-линейных функций с узлами в двоично-рациональных точках. В данной статье строится полная минимальная система сжатий и сдвигов, для которой частные суммы биортогонального ряда по-прежнему представляют собой кусочно-линейные функции с двоично-рациональными узлами, но не исчерпывают множество всех таких функций. Именно, возьмем функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} 8t & \text{при } t \in [0, 1/4], \\ 4 - 8t & \text{при } t \in [1/4, 3/4], \\ 8t - 8 & \text{при } t \in [3/4, 1], \\ 0 & \text{при } t \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Для  $n \in \mathbb{N}$  по стандартному представлению  $n = 2^k + j$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 \leq j \leq 2^k - 1$ , положим  $\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2} \varphi(2^k t - j)$ . Кроме того,  $\varphi_0(t) \equiv 1$ . Система функций  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется системой сжатий и сдвигов, порожденной функцией  $\varphi$ . Нетрудно убедиться, что эта система состоит из попарных разностей функций системы Фабера — Шаудера  $\varphi_{k,j} = 2^{k/2+1}(g_{k+1,2j} - g_{k+1,2j+1})$ .



**Лемма 1.** *Справедливо представление*

$$\varphi = \chi - \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-3k/2+1} \sum_{j=0}^{2^k-1} \varepsilon_{k,j} \chi_{k,j},$$

где  $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$  — классическая система функций Хаара и

$$\varepsilon_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0, \dots, 2^{k-2} - 1, \\ -1 & \text{при } j = 2^{k-2}, \dots, 3 \cdot 2^{k-2} - 1, \\ 1 & \text{при } j = 3 \cdot 2^{k-2}, \dots, 2^k - 1. \end{cases}$$

Каждому числу  $n \in \mathbb{N}$  по стандартному представлению  $n = 2^k + j$  поставим в соответствие набор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  коэффициентов двоичного разложения числа  $j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} 2^{k-\nu}$ . Через  $|\alpha|$  обозначим длину набора  $\alpha$ , в данном случае  $|\alpha| = k$ .

Следуя работе [1], введем в рассмотрение операторную структуру мультисдвига  $\{V_0, V_1\}$ , полагая

$$V_0\varphi(t) = 2^{1/2}\varphi(2t), \quad V_1\varphi(t) = 2^{1/2}\varphi(2t - 1),$$

где функция  $\varphi(t)$  имеет носитель на  $[0, 1]$ . Далее, положим

$$V^{\alpha}\varphi(t) = V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_k}\varphi(t),$$

где первым действует оператор  $V_{\alpha_k}$ , последним —  $V_{\alpha_1}$ . Нетрудно проверить, что

$$V^{\alpha}\varphi(t) = \varphi_n(t).$$

**Теорема 1.** *Система  $\{\varphi_n(t)\}_{n \geq 0}$  сжатий и сдвигов функции  $\varphi(t)$  является полной в пространстве  $L^2[0, 1]$ .*

**Доказательство.** Пусть функция  $f$  ортогональна системе  $\{\varphi_n(t)\}_{n \geq 0}$ , то есть  $\forall n \in \mathbb{N} (f, \varphi_n) = 0$ . Покажем, что тогда  $f = 0$ .

Преобразуем разложение функции  $\varphi(t)$  по системе Хаара:

$$\begin{aligned} \varphi &= \chi - \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-3l/2+1} \sum_{j=0}^{2^l-1} \varepsilon_{l,j} \chi_{l,j} = \\ &= \chi - 2 \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-3l/2} \sum_{|\beta|=l} \varepsilon_{\beta} V^{\beta} \chi. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим скалярные произведения

$$\begin{aligned} (f, \varphi_n) &= (f, V^\alpha \varphi) = \\ &= (f, V^\alpha \chi) - 2 \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-3l/2} \sum_{|\beta|=2} \varepsilon_\beta (f, V^\alpha V^\beta \chi) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$(f, V^\alpha \chi) = 2 \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-3l/2} \sum_{|\beta|=2} \varepsilon_\beta (f, V^\alpha V^\beta \chi).$$

Обозначим через  $f_\alpha$  коэффициенты Фурье — Хаара функции  $f$ , то есть  $f_\alpha = (f, \chi_n) = (f, \chi_\alpha) = (f, V^\alpha \chi)$ . Рассмотрим  $2^k$ -мерное евклидово пространство, состоящее из векторов

$$\bar{f} = \{f_\alpha\}_{|\alpha|=k}$$

с нормой  $\|\bar{f}\|_2 = \left( \sum_{|\alpha|=k} |f_\alpha|^2 \right)^{1/2}$ . Обозначим  $S_k = \left( \sum_{|\alpha|=k} |f_\alpha|^2 \right)^{1/2}$ . В принятых обозначениях

$$\bar{f} = 2 \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-3l/2} \sum_{|\beta|=l} \varepsilon_\beta \bar{f}_\beta.$$

Оценим по неравенству Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} \|\bar{f}\|_2 &\leq 2 \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-3l/2} \sum_{|\beta|=l} 1 \cdot \|\bar{f}_\beta\|_2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-3l/2} \left( \sum_{|\beta|=l} 1^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{|\beta|=l} \sum_{|\alpha|=k} |(f, V^\alpha V^\beta \chi)|^2 \right)^{1/2} = \\ &= 2 \sum_{l=2}^{\infty} 2^{-l} S_{k+l} \leq \sup_{l \geq 2} S_{k+l} \cdot 1. \end{aligned}$$

Получили, что  $S_k \leq \sup_{l \geq 2} S_{k+l}$ . Аналогичными рассуждениями продолжим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} S_k &\leq \sup_{l \geq 2} S_{k+l} = \sup_{l_1 \geq 2} S_{k+l_1} \leq \sup_{l_1 \geq 2} \sup_{l_2 \geq 2} S_{k+l_1+l_2} \leq \\ &\dots \leq \sup_{l_1 \geq 2} \dots \sup_{l_s \geq 2} S_{k+l_1+\dots+l_s} = \sup_{m \geq k+2s} S_{k+m} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $s \rightarrow \infty$ . Итак,  $S_k = 0$  и поэтому функция  $f = 0$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект МД-300.2011.1) и РФФИ (проект 10-01-00097).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Терехин П. А. О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространствах  $L^p[0, 1]$  // Математические заметки. 2008. Т. 83. Вып. 5. С. 722–740.

УДК 519.713.2, 512.534

**В. А. Молчанов**

### ОТНОСИТЕЛЬНО ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ КЛАССА УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ В КЛАССЕ ПОЛУГРУПП

Под плоскостью [1] будем понимать систему вида  $\Pi = (X, L)$ , где  $X$  – непустое множество точек и  $L$  – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам:  $(A_1)$  через любые две точки проходит одна и только одна прямая;  $(A_2)$  каждая прямая содержит по крайней мере три точки;  $(A_3)$  в множестве  $X$  есть три точки, не лежащие на одной прямой. В частности, плоскость  $\Pi = (X, L)$  является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой  $l \in L$  и любой точки  $x \in X \setminus l$  существует единственная прямая  $l'$ , удовлетворяющая условиям  $x \in l'$  и  $l \cap l' = \emptyset$ .

По определению [2] планарные автоматы являются структуризованными автоматами  $\mathbf{A} = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$  с множеством состояний  $X_1$  и множеством выходных сигналов  $X_2$ , наделенными структурами плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$  и  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ , полугруппой входных сигналов  $S$ , функцией переходов  $\delta : X_1 \times S \rightarrow X_1$  и выходной функцией  $\lambda : X_1 \times S \rightarrow X_2$ , для которых при каждом фиксированном  $s \in S$  преобразование  $\delta(x, s) : X_1 \rightarrow X_1$  является эндоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  и отображение  $\lambda(x, s) : X_1 \rightarrow X_2$  является гомоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ .

Для любых плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  автомат  $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$  с полугруппой входных сигналов  $S$ , состоящей из всех пар  $s = (\varphi, \psi)$  эндоморфизмов  $\varphi$  плоскости  $\Pi_1$  и гомоморфизмов  $\psi$  плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ , функцией переходов  $\delta(x, s) = \varphi(x)$  и выходной функцией  $\lambda(x, s) = \psi(x)$

(здесь  $x \in X_1$ ,  $s = (\varphi, \psi) \in S$ ) является планарным автоматом. Такие автоматы обозначаются символом  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  и называются универсальными планарными автоматами, так как их подавтоматы охватывают гомоморфные образы всех планарных автоматов.

Основной результат работы [3] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов.

В настоящей статье доказана относительно элементарная определимость (см. [3]) класса универсальных планарных автоматов в классе всех полугрупп. Полученный результат дает возможность проанализировать взаимосвязь важных свойств элементарных теорий классов планарных автоматов и элементарных теорий классов полугрупп, таких как проблема элементарной эквивалентности алгебраических систем, проблема алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов алгебраических систем и др.

Для описания свойств планарных автоматов  $\mathbf{A} = (\Pi_1, S, \Pi_2, \delta, \lambda)$  на языке УИП будем рассматривать  $\mathbf{A}$  в виде пятисортной алгебраической системы  $\mathbf{A} = ((X_1, L_1, \in_1), (S, \cdot), (X_2, L_2, \in_2), \delta, \lambda)$  с пятью базисными множествами  $X_1, L_1, S, X_2, L_2$  и сигнатурой  $\Omega = \{\in_1, \cdot, \in_2, \delta, \lambda\}$ . Напомним, что здесь  $X_1$  и  $L_1$  (соответственно  $X_2$  и  $L_2$ ) — множества точек и прямых плоскости состояний  $\Pi_1$  (соответственно плоскости выходных сигналов  $\Pi_2$ ),  $S$  — множество входных символов автомата  $\mathbf{A}$ ,  $\in_1$  (соответственно,  $\in_2$ ) — символ бинарного отношения принадлежности точек плоскости состояний  $\Pi_1$  (соответственно плоскости выходных сигналов  $\Pi_2$ ) ее прямым,  $\cdot$  — символ бинарной операции полугруппы  $S$ ,  $\delta$  и  $\lambda$  — символы бинарных операций функции переходов и выходной функции автомата  $\mathbf{A}$ .

Элементарная теория планарных автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка УИП с пятисортными переменными  $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ . Алфавит такого языка состоит (1) из счетного множества индивидуальных переменных  $A, B, \dots$  (соответственно  $A', B', \dots$ ) для обозначения точек плоскости состояний (соответственно плоскости выходных сигналов) автоматов; (2) из счетного множества индивидуальных переменных  $a, b, \dots$  (соответственно  $a', b', \dots$ ) для обозначения прямых плоскости состояний (соответственно, плоскости выходных сигналов) автоматов; (3) из счетного множества индивидуальных переменных  $s, t, \dots$  для обозначения входных сигналов автоматов; (4) из двухместного предикатного символа  $\in_1$  (соответственно  $\in_2$ ) для обозначения отношения принадлежности точек плоскости состояний (соответственно

плоскости выходных сигналов) автомата ее прямым; (5) из двухместного функционального символа  $\cdot$  для обозначения операции умножения полугруппы входных сигналов автоматов; (6) из двухместных функциональных символов  $\delta$  и  $\lambda$  для обозначения функции переходов и выходной функции автомата; (7) из конечного множества логических и технических символов, таких как  $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff, \forall, \exists, =, (, )$ .

Для языка  $\mathbf{L}_A$  термы трех сортов получаются обычным комбинированием символа  $\cdot$  — с двумя переменными третьего сорта и символов  $\delta$  и  $\lambda$  — с переменными первого и третьего сорта, т.е. это выражения вида  $A, a, A', a', s, t_1 \cdot t_2, \delta(t, t_3), \lambda(t, t_3)$ , где  $A$  и  $t$  — переменная и терм первого сорта,  $a$  — переменная второго сорта,  $s$  и  $t_1, t_2, t_3$  — переменная и термы третьего сорта,  $A'$  и  $a'$  — переменные четвертого и пятого сорта. При этом получают термы  $\delta(t, t_3), t_1 \cdot t_2$  и  $\lambda(t, t_3)$  первого, третьего и четвертого сорта соответственно. Термами второго и пятого сорта являются индивидуальные переменные второго и пятого сорта, обозначающие прямые, соответственно плоскости состояний и плоскости выходных сигналов автоматов.

Атомарные формулы языка  $\mathbf{L}_A$  получаются обычным комбинированием символа  $=$  с двумя термами одного сорта, символа  $\in_1$  — с термом первого сорта и термом второго сорта и символа  $\in_2$  — с термом четвертого сорта и термом пятого сорта, т.е. это выражения вида  $t = t', t_1 \in_1 t_2$  и  $t_4 \in_2 t_5$ , где  $t, t'$  — термы одного и того же сорта и  $t_i$  — термы  $i$ -го сорта (где  $i = 1, 2, 4, 5$ ). Формулы языка  $\mathbf{L}_A$  определяются по индукции обычным образом (см., например, [4]).

Полученная в работе [5] конкретная характеристика универсальных планарных автоматов позволяет доказать, что класс  $\mathbf{Aut}$  всех универсальных планарных автоматов относительно элементарно определим [6] в классе всех полугрупп  $\mathbf{Sem}$ .

**Теорема.** *Существуют такие формулы*

$$Z(x), \quad E_k(x, y), \quad L_k(\bar{x}), \quad \text{Eqv}_k(\bar{x}, \bar{y}), \quad \text{Ins}_k(x, \bar{y})$$

*сигнатуры языка элементарной теории полугрупп  $\mathbf{L}_S$  (здесь и далее  $k = 1, 2, \bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2)$ ), что любой универсальный планарный автомат  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  над плоскостями  $\Pi_1 = (X_1, L_1), \Pi_2 = (X_2, L_2)$  и его полугруппа входных сигналов  $S = \text{Inp}(\mathbf{A})$  удовлетворяют следующим условиям:*

- 1) множества  $\bar{Z} = \{x \in S : Z(x)\}$  и  $\bar{L}_k = \{\bar{x} \in S^2 : L_k(\bar{x})\}$  не пусты;

- 2) формула  $E_k(x, y)$  задает отношение эквивалентности  $\overline{E_k}$  на множестве  $\overline{Z}$  с классами эквивалентности  $\overline{E_k}(x) = [x]_k$  для элементов  $x \in Z$ ;
- 3) формула  $\text{Eqv}_k(\bar{x}; \bar{y})$  задает отношение эквивалентности  $\overline{\text{Eqv}_k}$  на множестве  $\overline{L_k}$ ;
- 4) формула  $\text{Ins}_k(x, \bar{y})$  задает бинарное отношение  $\overline{\text{Ins}_k}$  между элементами множества  $\overline{Z}$  и множества  $\overline{L_k}$ , которое согласовано с эквивалентностями  $\overline{E_k}$ ,  $\overline{\text{Eqv}_k}$  по следующей формуле:

$$(x, \bar{y}) \in \overline{\text{Ins}_k} \wedge x \equiv u(\overline{E_k}) \wedge \bar{y} \equiv \bar{z}(\overline{\text{Eqv}_k}) \implies (u, \bar{z}) \in \overline{\text{Ins}_k};$$

- 5) автомат  $A = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  изоморфен планарному автомату  $\overline{A} = (\overline{H_1}, S, \overline{H_2}, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$ , где  $\overline{H_k} = (\overline{Z}/\overline{E_k}, \overline{L_k}/\overline{\text{Eqv}_k}, \overline{\mu_k})$ , бинарное отношение  $\overline{\mu_k} \subset \overline{Z}/\overline{E_k} \times \overline{L_k}/\overline{\text{Eqv}_k}$  для элементов  $X \in \overline{Z}/\overline{E_k}$ ,  $Y \in \overline{L_k}/\overline{\text{Eqv}_k}$  определяется по формуле

$$(X, Y) \in \overline{\mu_k} \iff (x, \bar{y}) \in \overline{\text{Ins}_k} \text{ при любых } x \in X, \bar{y} \in Y,$$

и отображения  $\bar{\delta} : \overline{Z}/\overline{E_1} \times S \rightarrow \overline{Z}/\overline{E_1}$ ,  $\bar{\lambda} : \overline{Z}/\overline{E_1} \times S \rightarrow \overline{Z}/\overline{E_2}$  для элементов  $x \in Z$ ,  $s \in S$  определяются по формулам

$$\bar{\delta}([x]_1, s) = [x \cdot s]_1, \quad \bar{\lambda}([x]_1, s) = [x \cdot s]_2;$$

- 6) для любой формулы  $\Psi$  сигнатуры языка элементарной теории планарных автоматов  $\mathbf{L_A}$  эффективно строится такая формула  $\overline{\Psi}$  сигнатуры языка элементарной теории полугрупп  $\mathbf{L_S}$ , что  $\Psi$  в том и только том случае истинна на универсальном планарном автомате  $\mathbf{A}$ , если формула  $\overline{\Psi}$  истинна на его полугруппе входных сигналов  $\text{Inp}(\mathbf{A})$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Картези Ф. Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980.
2. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высшая школа, 1994.
3. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.
4. Молчанов В. А. Нестандартные многообразия топологических алгебраических систем // Известия РАН, Сер. МММИУ. 1999. Т. 3, № 1. С. 14–45.
5. Молчанов В. А. Конкретная характеристика универсальных планарных автоматов // Математика. Механика : Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 67–69.
6. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М. : Наука, 1980.

## РЕШЁТКИ РАЗБИЕНИЙ В ОДНОЗНАЧНОМ КОНТЕКСТЕ

Восстановим некоторые определения концептуального анализа [1]. Будем говорить, что задан *формальный полиатрибутный контекст*  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ , если заданы  $G$  — непустое конечное множество объектов,  $(M_i)$  — семейство непустых конечных множеств атрибутов с множеством индексов  $1 \leq i \leq n$  и  $\rho \subseteq G \times M_1 \times \dots \times M_n$  — некоторое  $(n+1)$ -арное отношение. При  $n = 1$  понятие полиатрибутного контекста полностью совпадает с понятием контекста обычного формального концептуального анализа [2]. Под словом "контекст" далее будем понимать "полиатрибутный контекст".

Чтобы использовать аппарат алгебры отношений В.В. Вагнера [3] на полиатрибутном контексте введём следующие обозначения. Пусть  $\rho \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$  —  $n$ -арное отношение. Обозначим  $\bar{n} = (1, 2, 3, \dots, n)$ ,  $M_{\bar{n}} = M_1 \times \dots \times M_n$ ,  $\bar{i}_1 = i_1$  и  $\bar{i}_k = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ ,  $x_{\bar{i}_k} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ ,  $M_{\bar{i}_k} = M_{i_1} \times M_{i_2} \times \dots \times M_{i_k}$  для произвольных  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ . Введём следующее обозначение для результата булевой операции объединения над данными множествами:  $\overline{i_k j_s} = \bar{i}_k \cup \bar{j}_s$ . При этом также обозначаем  $\bar{i}_k \subseteq \bar{n}$ . Говорим, что  $k$ -система  $x_{\bar{i}_k}$  *входит в отношение*  $\rho$ , если существует  $n$ -система  $x_{\bar{n}} \in \rho$ , для которой элементы  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  являются её соответствующими компонентами. Для  $\bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ ,  $a_{\bar{i}_s} \in M_{\bar{i}_s}$ ,  $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$  обозначим:

$$\pi_{\bar{j}_k}(\rho) = \{y_{\bar{j}_k} \in M_{\bar{j}_k} \mid y_{\bar{j}_k} \text{ входит в } \rho\}, \quad \sigma_{\{a_{\bar{i}_s}\}}(\rho) = \{x_{\bar{n}} \in \rho \mid a_{\bar{i}_s} \subseteq x_{\bar{n}}\},$$

$$\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle = \pi_{\bar{j}_k}(\sigma_{\{x_{\bar{i}_s}\}}(\rho)), \quad \widehat{\rho}_{\bar{j}_k}(X) = \cap \{\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle : x_{\bar{i}_s} \in X\},$$

$$\widehat{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X) = \widehat{\rho}_{\bar{i}_s}(\widehat{\rho}_{\bar{j}_k}(X)).$$

Пусть теперь задан формальный контекст  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ . В этом случае для  $(n+1)$ -арного отношения  $\rho \subseteq G \times M_1 \times \dots \times M_n$  в соответствии множеству  $G$  будем ставить нулевой индекс:  $\pi_0(\rho) = \{x \in G \mid x \text{ входит в } \rho\}$ ,  $\rho_0 \langle x_{\bar{i}_s} \rangle = \pi_0(\sigma_{\{x_{\bar{i}_s}\}}(\rho))$ ,  $\widehat{\rho}_0(X) = \cap \{\rho_0 \langle x_{\bar{i}_s} \rangle : x_{\bar{i}_s} \in X\}$ . Если для некоторого  $X \subseteq G$  существует  $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ , такое что выполняется

$$X = \widehat{\rho}_{0\bar{j}_k}(X),$$

то  $X$  называется *концептом по системе атрибутов*  $\bar{j}_k$  или просто *концептом* контекста  $\mathbb{K}$ . Концепты, отличные от  $\emptyset$  и  $G$ , будем называть *собственными*.

Будем говорить, что в отношении  $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$  имеет место  $F$ -зависимость  $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$ ,  $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ , если  $\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{l}_q} \rangle$ ,  $x_{\bar{l}_q} \in M_{\bar{l}_q}$ , определяет отображение  $\pi_{\bar{l}_q}(\rho) \rightarrow \pi_{\bar{j}_k}(\rho)$ .  $F$ -зависимость  $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$ ,  $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ , будем называть  $B$ -зависимостью, если определяемое им отображение  $\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{l}_q} \rangle: \pi_{\bar{l}_q}(\rho) \rightarrow \pi_{\bar{j}_k}(\rho)$  является взаимно-однозначным.

Будем говорить, что контекст  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$  однозначен относительно множества объектов, или просто однозначен, если отношение  $\rho$  имеет  $F$ -зависимость  $G \rightarrow M_{\bar{n}}$ . В частности однозначный контекст моделируется любой реляционной базой данных [4], в которой множество объектов является одним из ключей этой базы.

В [5] была установлена следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$  – однозначный контекст. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) множество собственных концептов по любому  $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$  образует разбиение множества  $\pi_0(\rho)$ , которое обозначаем  $\pi_0(\rho)/_{\bar{j}_k}$ ;

2) если  $\bar{l}_q \subseteq \bar{j}_p$  ( $\bar{l}_q, \bar{j}_p \subseteq \bar{n}$ ), то  $\pi_0(\rho)/_{\bar{j}_p} \leq \pi_0(\rho)/_{\bar{l}_q}$ , т.е.  $\pi_0(\rho)/_{\bar{j}_p}$  является измельчением разбиения  $\pi_0(\rho)/_{\bar{l}_q}$ ;

3) если  $\bar{l}_q, \bar{j}_p \subseteq \bar{n}$  и  $\pi_0(\rho)/_{\bar{j}_p} \leq \pi_0(\rho)/_{\bar{l}_q}$ , то  $\pi_0(\rho)/_{\bar{j}_p} = \pi_0(\rho)/_{\bar{l}_q \bar{j}_p}$ ;

4) если концепт  $X$  в решётке концептов не является атомом, то  $X$  покрывает не менее двух концептов контекста  $\mathbb{K}$ ;

5) высота решётки концептов этого контекста не превосходит значения  $\min\{n + 1, |\pi_0(\rho)|\}$ , а её ширина не превосходит значения  $|\pi_0(\rho)|$ .

Заметим, что если отношение  $\rho$  является полным относительно  $G$ , то  $\pi_0(\rho) = G$ . Если это не так, то всегда можно перейти к контексту  $\mathbb{K} = (G', (M_i), \rho)$ , где  $G' \subseteq G$  и  $G' = \pi_0(\rho)$ . Поэтому далее будем полагать, что однозначный контекст  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$  обладает отношением  $\rho$  полным относительно множества объектов  $G$ . Обозначим  $P_{\bar{j}_k} = \pi_0(\rho)/_{\bar{j}_k}$ ,  $\varepsilon_{\bar{j}_k}$  – это эквивалентность, соответствующая разбиению  $P_{\bar{j}_k}$ , и  $L_p(\mathbb{K}) = \{P_0, P_{\bar{j}_k} \mid \bar{j}_k \subseteq \bar{n}\}$ , где  $P_0$  – это разбиение множества  $G$ , состоящее из одного блока  $G$ . По утверждению 1 теоремы 1 получаем, что любой собственный концепт по любому  $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$  является одним из блоков разбиения  $P_{\bar{j}_k}$  множества  $G$ .

Пусть  $L_p(G)$  – решётка разбиений множества  $G$ .

**Теорема 2.** Для любого однозначного контекста  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$  множество  $L_p(\mathbb{K})$  является подрешёткой решётки разбиений  $L_p(G)$ . И для любой подрешётки  $L \subseteq L_p(G)$ , содержащей  $P_0$ , существует однозначный контекст  $\mathbb{K}(L)$  такой, что  $L = L_p(\mathbb{K}(L))$ .

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $L_p(\mathbb{K})$ . Для любых



$j_1, j_2 \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  по определению  $\bar{j}_2 = (j_1, j_2)$ , т.е.  $j_1, j_2 \subset \bar{j}_2$ , и по утверждению 2 теоремы 1  $P_{\bar{j}_2} \leq P_{j_1}$  и  $P_{\bar{j}_2} \leq P_{j_2}$ . Таким образом,  $P_{\bar{j}_2} = P_{j_1} \wedge P_{j_2}$ . И для любого  $\bar{j}_k = (j_1, j_2, \dots, j_k)$   $P_{\bar{j}_k} = P_{j_1} \wedge P_{j_2} \wedge \dots \wedge P_{j_k}$ , где  $\wedge$  операция пересечения в решётке разбиений множества объектов  $G$ . Следовательно, множество  $L_p(\mathbb{K})$  является подрешёткой решётки  $L_p(G)$ . При этом  $P_0$  является единицей в решётках  $L_p(\mathbb{K})$  и  $L_p(G)$ ,  $P_{\bar{n}}$  является нулём решётки  $L_p(\mathbb{K})$ . Разбиения  $P_j$ , где  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , являются коатомами решётки  $L_p(\mathbb{K})$ .

Обратно, пусть дана некоторая подрешётка  $L \subseteq L_p(G)$ , содержащая  $P_0$ , где  $G$  — конечное множество. Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_n$  — все коатомы этой решётки, а  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  — соответствующие эквивалентности на множестве  $G$ . Построим контекст  $\mathbb{K}(L) = (G, (P_i), \rho)$ , где  $\rho = \{(g, \varepsilon_1(g), \varepsilon_2(g), \dots, \varepsilon_n(g)) \mid g \in G\}$ . Построенный контекст является однозначным, поскольку любой  $g \in G$  попадает только в один блок  $\varepsilon_j(g)$  разбиения  $P_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Любой собственный концепт контекста  $\mathbb{K}(L)$  по любому  $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$  является одним из блоков разбиения  $P_{\bar{j}_k}$  множества  $G$ . И поскольку  $P_{\bar{j}_k} = P_{j_1} \wedge P_{j_2} \wedge \dots \wedge P_{j_k}$  (является пересечением некоторых коатомов решётки  $L$ ), то решётки  $L$  и  $L_p(\mathbb{K}(L))$  состоят из одних и тех же элементов, т.е.  $L = L_p(\mathbb{K}(L))$ .  $\square$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Novikov V. E.* Formal conceptual analysis within  $n$ -ary relation context // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2006. № 9 (15), вып. 2. С. 18–22.
2. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis. Mathematical Foundatoins. Berlin : Springer Verlag, 1999.
3. *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1965. Вып.1. С. 3–178.
4. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М. : Мир, 1987.
5. *Новиков В. Е.* Решётки концептов в однозначном контексте // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 52–55.

УДК 519.4

**В. В. Розен**

### АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПАРЕТО-ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Математическая модель задачи многокритериальной оптимизации может быть представлена в виде набора

$$G = \langle A, q_1, \dots, q_m \rangle, \quad (1)$$

где  $A$  — множество допустимых альтернатив,  $q_1, \dots, q_m$  — критерии оценки этих альтернатив. В данной статье рассматриваются задачи многокритериальной оптимизации с качественными критериями. Качественный критерий характеризуется тем, что шкалой для его измерения служит некоторое линейно упорядоченное множество (цепь)  $\langle C_j, \leq_j \rangle$ ; формально представляет собой отображение  $q_j : A \rightarrow C_j$ . Далее полагаем  $J = \{1, \dots, m\}$ ,  $q(a) = (q_1(a), \dots, q_m(a))$  — векторная оценка альтернативы  $a \in A$ .

Одна из важнейших задач многокритериальной оптимизации состоит в построении отношения предпочтения на множестве альтернатив. Решение этой задачи предполагает задание некоторого *решающего правила*. Наиболее известным решающим правилом является *Парето-предпочтение* [1], которое осуществляется по формуле

$$a_1 \leq^{Par} a_2 \Leftrightarrow (\forall j \in J) q_j(a_1) \leq q_j(a_2). \quad (2)$$

С каждой задачей многокритериальной оптимизации  $G$  вида (1) связана структура Парето-предпочтения  $\langle A, \leq^{Par} \rangle$ . В данной статье решается задача абстрактной характеристики структур Парето-предпочтений, ассоциированных с задачами вида (1) с фиксированным множеством шкал критериев  $\langle C_j, \leq_j \rangle_{j \in J}$ . Полагаем  $C = \prod_{j \in J} C_j$ . Мы предполагаем выполнение следующего дополнительного условия:

( $\alpha$ ) : если  $a_1 \neq a_2$ , то хотя бы для одного  $j \in J$  имеет место  $q_j(a_1) \neq q_j(a_2)$ .

**Основная теорема.** *Для того чтобы структура предпочтений  $\langle A, \omega \rangle$  совпадала со структурой Парето-предпочтений, ассоциированной с некоторой задачей  $G$  вида (1), необходимо и достаточно, чтобы  $\langle A, \omega \rangle$  было упорядоченным множеством, размерность которого не превосходит  $m$ .*

**Доказательство.** *Необходимость.* Из определения (2) непосредственно следует, что отношение  $\leq^{Par}$  является рефлексивным и транзитивным, т.е. отношением квазипорядка. В силу дополнительного условия ( $\alpha$ ) оно будет отношением порядка на множестве  $A$ . Оценим его размерность.

Пусть  $w_1 : 1 < 2 < \dots < m$  — отношение линейного порядка на множестве индексов  $J$ . Далее, для любого  $j^* = 1, \dots, m$  через  $w_{j^*}$  обозначаем линейный порядок на  $J$ , который совпадает с  $w_1$  на  $J - \{j^*\}$  и является первым (наименьшим) элементом относительно  $w_{j^*}$ . Пусть  $\lambda^{j^*}$  лексикографическое произведение семейства цепей  $\langle C_j, \leq_j \rangle_{j \in J}$ , где множество индексов  $J$  упорядочено отношением порядка  $w_{j^*}$ . Как известно

[1, 2],  $\lambda^{j^*}$  является линейным порядком на  $C$ . Определим на множестве  $A$  бинарное отношение  $\omega^{j^*}$ ,  $j^* = 1, \dots, m$ , по правилу

$$a_1 \leq^{\omega^{j^*}} a_2 \leftrightarrow q(a_1) \leq^{\lambda^{j^*}} q(a_2). \quad (3)$$

Учитывая дополнительное условие  $(\alpha)$ , получаем, что отношение  $\omega^{j^*}$  является отношением линейного порядка на  $A$ .

**Лемма 1.** *Имеет место равенство:*

$$\leq^{Par} = \bigcap_{j^* \in J} \omega^{j^*}. \quad (4)$$

**Доказательство.** Установим вначале при произвольном  $j^* \in J$  включение  $\leq^{par} \subseteq \omega^{j^*}$ . В самом деле, пусть  $a_1 \leq^{Par} a_2$ , то есть  $q_j(a_1) \leq q_j(a_2)$  при всех  $j \in J$ . Зафиксируем произвольно  $j^* = 1, \dots, m$ . Пусть  $j_0$  — первый номер в упорядочении  $w_{j^*}$ , при котором  $q_{j_0}(a_1) \neq q_{j_0}(a_2)$ . Так как справедливо  $q_{j_0}(a_1) \leq^{j_0} q_{j_0}(a_2)$  то выполнено строгое неравенство  $q_{j_0}(a_1) <^{j_0} q_{j_0}(a_2)$ , поэтому  $q(a_1) \leq^{\lambda^{j^*}} q(a_2)$  и согласно (3) имеем  $a_1 \leq^{\omega^{j^*}} a_2$ , что доказывает включение  $\leq^{par} \subseteq \omega^{j^*}$ . В силу произвольности  $j^* \in J$  получаем в (4) включение слева направо. Установим обратное включение. Пусть выполнено  $a_1 \leq a_2$  относительно порядка  $\bigcap_{j^* \in J} \omega^{j^*}$ . Тогда при каждом  $j^* \in J$  имеем  $a_1 \leq^{\omega^{j^*}} a_2$ , то есть  $q(a_1) \leq^{\lambda^{j^*}} q(a_2)$ . Полагая последовательно  $j^* = 1, \dots, m$ , имеем согласно определения лексикографического порядка  $\lambda^{j^*}$ :

$$q_1(a_1) \leq_1 q_1(a_2), \dots, q_m(a_1) \leq_m q_m(a_2),$$

то есть  $q(a_1) \leq^{Par} q(a_2)$ , что доказывает лемму 1. Из леммы 1 непосредственно следует, что размерность порядка  $\leq^{Par}$  не превосходит мощности множества  $J$ , то есть числа  $m$ , что доказывает необходимость.

**Достаточность.** Пусть  $\dim \langle A, \omega \rangle = m^* \leq m$ . Надо построить задачу многокритериальной оптимизации с качественными критериями так, чтобы отношение порядка  $\omega$  совпало с Парето-предпочтением этой задачи. По определению размерности упорядоченного множества существует  $m^* \leq m$  линейных порядков  $\omega_j$  на  $A$ , пересечением которых является  $\omega$ . Дублируя, в случае необходимости,  $m - m^*$  линейных порядков, приходим к равенству

$$\omega = \bigcap_{j=1 \dots m} \omega_j. \quad (5)$$

При каждом  $j \in J$  рассмотрим множество  $C_j$ , равномощное множеству  $A$ , и пусть  $q_j : A \rightarrow C_j$  — биекция, реализующая взаимно-однозначное соответствие между ними. Определим отношение  $\leq^j$  на  $C_j$ , полагая

$$q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2) \leftrightarrow a_1 \leq^{\omega_j} a_2. \quad (6)$$

Очевидно, что  $\leq^j$  является линейным порядком на  $C_j$ , то есть  $\langle C_j, \leq^j \rangle$  — цепь. В силу (5), (6) имеем

$$a_1 \leq^\omega a_2 \leftrightarrow (\forall j = 1, \dots, m) a_1 \leq^{\omega_j} a_2 \leftrightarrow (\forall j = 1, \dots, m) q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2).$$

Данная равносильность означает, что порядок  $\omega$  совпадает с Парето-предпочтением для задачи многокритериальной оптимизации  $\langle A, q_1, \dots, q_m \rangle$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Подиновский В. В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Наука, 1982.
2. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. М. : Наука, 1970.

УДК 514.133

**Л. Н. Ромакина**

### ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОРТРИСЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

На гиперболической плоскости  $\hat{H}$  положительной кривизны [1] зададим пучок  $\Theta$  прямых с центром в действительной точке  $S$  и действительную прямую  $l$ ,  $l \neq \Theta$ , полюс  $L$  которой относительно абсолютной линии  $\gamma$  не совпадает с точкой  $S$ . На каждой прямой пучка построим точку, сопряженную относительно абсолюта точке пересечения этой прямой с  $l$ . Множество всех таких точек назовем *ортрисой* с базой  $l$  и вершиной  $S$ . Прямую  $LS$  назовем *главной осью*, а пучок  $\Theta$  — *определяющим* пучком ортрисы. Соответственно типу прямой  $l$  ортрису будем называть *гиперболической*, *эллиптической* или *параболической*. В данной статье исследуем гиперболические ортрисы.

Если точка  $S$  является внешней (внутренней) относительно абсолюта плоскости  $\hat{H}$ , определяющий пучок  $\Theta$  соответственно типу измерения в нем будем называть *гиперболическим* (*эллиптическим*). Если  $S \in \gamma$ , пучок  $\Theta$  назовем *параболическим*.

В каноническом репере  $R^*$  первого типа [2] плоскости  $\hat{H}$  уравнение абсолюта в координатах текущей точки (касательной прямой) имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0), \quad (1)$$

а координаты  $(m_1 : m_2 : m_3)$  собственной (несобственной) на  $\hat{H}$  точки  $M$  удовлетворяют неравенству

$$m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 > 0 \quad (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0). \quad (2)$$

**Теорема.** *Гиперболическая ортриса плоскости  $\hat{H}$  с гиперболической главной осью является одноответственной гиперболической параболой, двуполостной бигиперболой или гиперболой тогда и только тогда, когда определяющий ее пучок параболический, гиперболический или соответственно эллиптический. Гиперболическая ортриса с эллиптической главной осью является однополостной бигиперболой. Гиперболическая ортриса с параболической главной осью является гиперболической прямой, параллельной базе ортрисы и проходящей через середину отрезка между вершиной ортрисы и полюсом относительно абсолюта базы ортрисы.*

**Доказательство.** Расходуя три параметра, свяжем с ортрисой  $\sigma$  единственный репер  $R^*$ , вершины  $A_2, A_3$  которого принадлежат  $l$ , и  $A_1 = L$ . В репере  $R^*$ :  $l(1 : 0 : 0)$ ,  $L(1 : 0 : 0)$ .

Рассмотрим три возможных случая.

**1.** Главная ось  $LS$  ортрисы  $\sigma$  является гиперболической прямой.

Вершину ортрисы можно задать в  $R^*$  координатами  $S(1 : 0 : s)$ , где  $s \in \mathbb{R}$  и  $s \neq 0$ , так как  $S \neq L$ . Текущей точке  $M$  ортрисы присвоим координаты  $(x_1 : x_2 : x_3)$ . Тогда каждая прямая  $MS$  пучка  $\Theta$  задана в  $R^*$  координатами  $(sx_2 : x_3 - sx_1 : -x_2)$  и пересекает прямую  $l$  в точке  $T(0 : 1 : \lambda)$ , а абсолют (1) — в точках  $H^1, H^2$ , отношение первых двух координат которых равно

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{sx_3 - s^2x_1 \pm \sqrt{(x_3 - sx_1)^2 + x_2^2(s^2 - 1)}}{x_2(1 - s^2)}. \quad (3)$$

По определению ортрисы точка  $M$  на прямой  $MS$  сопряжена относительно  $\gamma$  точке  $T$ , т.е.  $(MT H^1 H^2) = -1$ . Применяя данное равенство и условие (3), находим уравнение ортрисы в координатах текущей точки и в тангенциальных координатах:

$$x_2^2 + sx_1x_3 - x_3^2 = 0, \quad 4X_1^2 + 4sX_1X_3 + s^2X_2^2 = 0. \quad (4)$$

При заданных значениях  $s$  ( $s \neq 0$ ) ортриса  $\sigma$  (4) является овальной линией плоскости  $\hat{H}$ , содержащей свою вершину  $S$  и полюс  $L$  своей базы относительно абсолюта. Основные геометрические коварианты [2] линии  $\sigma$  заданы в  $R^*$  координатами:  $K_1(0 : 1 : 1)$ ,  $K_2(0 : 1 : -1)$ ,  $K_{3,4}(s : \pm\sqrt{1-s^2} : 1)$  — общие точки,  $k_{1,2}(-s : \pm 2\sqrt{1+s} : s+2)$ ,  $k_{3,4}(s : \pm 2\sqrt{1-s} : s-2)$  — общие касательные ортрисы с абсолютом.

Заметим, что при любом  $s$  точки  $K_1, K_2$  — действительные различные, причем полюсом прямой  $K_1K_2$  относительно абсолюта является точка  $L$ . Следовательно, ортриса с гиперболической главной осью имеет, по крайней мере, две общие действительные точки с абсолютом и содержит полюс прямой, соединяющей эти точки.

Положение точки  $S$  на главной оси определяет следующие варианты.

**1.1.** Пусть  $S \in \gamma$ . В этом случае прямые пучка  $\Theta$  являются параллельными. Координаты точки  $S$  удовлетворяют первому уравнению (1), значит,  $s = 1$  или  $s = -1$  и, следовательно,  $K_3 = K_4 = S$ , и либо  $k_1 = k_2$ , либо  $k_3 = k_4$ , причем совпавшие касательные содержат вершину  $S$  ортрисы. Согласно классификации (см. [2]) в этом случае  $\sigma$  — гиперболическая парабола. Определим ее тип.

В заданном репере полюсом главной оси  $LS$  ортрисы относительно абсолюта является вершина  $A_2$ . Через точку  $A_2$  проходят две параболические прямые, одна из них —  $SA_2$ , другую обозначим  $k$ . Каждая прямая пучка с центром  $A_2$ , разделяющая с  $k$  пару прямых  $SA_2, K_1K_2$ , может быть задана в  $R^*$  координатами  $(1 : 0 : -t)$ , где  $t \in (0; 1)$ , и пересекает ортрису (4) в двух действительных внутренних согласно (2) относительно  $\gamma$  точках с координатами  $(t : \pm\sqrt{1-t} : 1)$ . Все указанные точки образуют две дуги ортрисы ( $K_1S$  и  $K_2S$ ) с концами в точках абсолюта, т.е. несобственная часть линии  $\sigma$  состоит из двух ветвей. Но  $\sigma$  имеет с абсолютом три общие точки, следовательно, собственная на  $\hat{H}$  часть ортрисы состоит из одной связной ветви. Таким образом, ортриса — одноветвевая гиперболическая парабола (см. [2]).

**1.2.** Пусть  $S$  — собственная точка плоскости  $\hat{H}$ . Согласно соответствующему неравенству из (2)  $|s| < 1$ . В этом случае прямые пучка  $\Theta$  пересекающиеся, точки  $K_i$  (прямые  $k_i$ ),  $i = \overline{1, 4}$ , действительные и попарно различны. Согласно классификации овальных линий плоскости  $\hat{H}$  (см. [2]) ортриса  $\sigma$ , заданная уравнением (4), является двуполостной бигиперболой.

**1.3.** Пусть  $S$  — внутренняя относительно абсолюта точка. Согласно соответствующему неравенству из (2)  $|s| > 1$ . В этом случае прямые пучка  $\Theta$  являются расходящимися, точки  $K_3, K_4$  являются мнимо сопряженными, прямые в одной из пар  $k_1, k_2$  и  $k_3, k_4$  являются действительными

различными, в другой — мнимо сопряженными. Ни одна из точек  $K_i$  не лежит на прямой  $k_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Согласно классификации (см. [2]) в данном случае ортриса является гиперболой.

**2.** Главная ось  $LS$  ортрисы  $\sigma$  является эллиптической прямой.

В присоединенном репере  $R^*$  первого типа точку  $S$  можно задать координатами  $(1 : s : 0)$ , где  $s \in \mathbb{R}$  и  $s \neq 0$ , так как  $S \neq L$ .

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям случая 1, для координат  $(x_1 : x_2 : x_3)$  текущей точки  $M$  ортрисы в репере  $R^*$  получим:  $MS(sx_2 : x_3 - sx_1 : -x_2)$ ,  $T(0 : \lambda : 1)$ ,  $H^1(h_1 : h^1 : h_3)$ ,  $H^2(h_1 : h^2 : h_3)$ , где

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{s^2x_1 - sx_2 \pm \sqrt{x_3^2(1+s^2) - (x_2 - sx_1)^2}}{x_3(1+s^2)}. \quad (5)$$

Применяя равенство  $(MTH^1H^2) = -1$  и условие (5), определяющее ортрису, находим уравнение ортрисы в координатах текущей точки и в тангенциальных координатах:

$$x_2^2 - sx_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad 4X_1^2 + 4sX_1X_2 + s^2X_3^2 = 0. \quad (6)$$

При  $s \neq 0$  уравнения (6) задают овальную линию плоскости  $\hat{H}$ , содержащую свою вершину  $S$  и полюс  $L$  своей базы относительно абсолюта. Основные геометрические коварианты ортрисы  $\sigma$  (6) заданы в  $R^*$  координатами:  $K_1(0 : 1 : 1)$ ,  $K_2(0 : 1 : -1)$ ,  $K_{3,4}(-s : 1 : \pm\sqrt{1+s^2})$  — общие точки,  $k_{1,2}(-s : 2 - is : \pm 2\sqrt{1-is})$ ,  $k_{3,4}(-s : 2 + is : \pm 2\sqrt{1+is})$  — общие касательные ортрисы с абсолютом. Полюсом прямой  $K_1K_2$  ( $K_3K_4$ ) относительно абсолюта является точка  $L$  ( $S$ ), принадлежащая ортрисе.

При любом допустимом значении  $s$  точки  $K_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , — действительные различные, а прямые  $k_j$  — мнимо сопряжены в парах  $k_1, k_2$  и  $k_3, k_4$ . Согласно классификации [2] ортриса  $\sigma$ , заданная уравнением (6), является однополостной бигиперболой.

**3.** Главная ось  $LS$  ортрисы является параболической прямой.

В этом случае с ортрисой свяжем канонический репер  $R$  второго типа (см. [2]), помещая вершины  $A_1, A_2$  репера на базу ортрисы. Тогда третья вершина репера совпадет с точкой  $L$ . Вершину  $S$  ортрисы поместим на параболическую прямую  $LA_1$ . В репере  $R$ :  $l(0 : 0 : 1)$ ,  $L(0 : 0 : 1)$ ,  $T(1 : \lambda : 0)$ ,  $S(1 : 0 : s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$ . В используемых обозначениях точки  $H^1, H^2$  имеют следующее отношение координат:

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 4sx_2(x_3 - sx_1)}}{2sx_2}.$$

Уравнение ортрисы в репере  $R$  имеет вид  $2sx_1 - x_3 = 0$ . Это уравнение определяет гиперболическую прямую, проходящую через точку абсолю-

та  $A_2$  и, следовательно, параллельную прямой  $l$ , так как  $A_2 \in l$ . Середина  $N$  отрезка  $LS$  ( $(LSNA_1) = -1$ ) имеет в  $R$  координаты  $(1 : 0 : 2s)$  и принадлежит ортрисе.

Теорема доказана.  $\square$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М. : Наука, 1969.
2. Ромакина Л. Н. Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3. С. 37–44.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

### О РЕГУЛЯРНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 1-ГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Далее используются обозначения:  $\|\cdot\|_p$  есть норма в  $L_p[0, 1]$  ( $1 \leq p \leq \infty$ );  $W_p^1[0, 1] := \{y \in L_p[0, 1] : y' \in L_p[0, 1]\}$  с нормой  $\|y\|_{p,1} := \|y\|_p + \|y'\|_p$ ;  $\mathfrak{L}_p[0, 1]$  есть нормированное пространство  $n \times n$  матриц-функций (м.-ф.) с компонентами из  $L_p[0, 1]$  и с нормой  $\|X\|_p := \max_{i,j} \|\{X\}_{ij}\|_p$  для  $n \times n$  м.-ф.  $X(t)$  с компонентами  $\{X(t)\}_{ij}$ ;  $\mathfrak{W}_p^1[0, 1]$  есть нормированное пространство  $n \times n$  м.-ф. с компонентами из  $W_p^1[0, 1]$  и с нормой  $\|X\|_{p,1} := \max_{i,j} \|\{X\}_{ij}\|_{p,1}$ .

Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$Ly := y' - A(x, \lambda)y = 0, \quad My(0) + Ny(1) = 0, \quad (1)$$

где  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $A(x, \lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x)$ ,  $A_1, A_0$  есть  $n \times n$  м.-ф., а  $M$  и  $N$  числовые  $n \times n$  матрицы.

В [1] рассматривался скалярный случай и при минимальных требованиях на коэффициенты дифференциального оператора были получены теоремы о базисности Рисса корневых функций этого оператора в  $L_2[0, 1]$  и о равномерной равносходимости внутри отрезка  $[0, 1]$  разложений в ряды по корневым функциям и по обычной тригонометрической системе. На оператор накладывались условия усиленной регулярности в первом случае и регулярности во втором [2]. В случае оператора  $L$ , порождающего краевую задачу (1), ситуация усложняется тем, что корни характеристического уравнения являются, вообще говоря, произвольными функциями. Целью данной статьи является определение регулярности и



усиленной регулярности при минимальных требованиях на коэффициенты оператора  $L$ .

Предположим далее, что

$$1^\circ) A_1 \in \mathfrak{W}_1^1[0, 1], A_0 \in \mathfrak{L}_1[0, 1];$$

2°) корни  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  характеристического уравнения  $|A_1(x) - \varphi E| = 0$  различны при всех  $x$ , отличны от нуля, их аргументы и аргументы их разностей не зависят от  $x$ .

Предположение 2° вполне естественно при исследовании вопросов представления функций рядами по корневым функциям оператора  $L$  [3]. Так же, как и в (см. [3]), из этого предположения выводим, что

3<sub>1</sub>°) или  $\varphi_i(x) = \pi_i q(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $\pi_i$  есть различные отличные от нуля константы, а  $q(x)$  положительная функция из  $W_1^1[0, 1]$ ;

3<sub>2</sub>°) или  $\varphi_i(x) = \pm \pi_0 q_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $\pi_0 \neq 0$  есть константа, а  $q_i(x)$  есть положительные и различные при всех  $x \in [0, 1]$  функции из  $W_1^1[0, 1]$ .

Известно [3], что в этом случае комплексную плоскость прямыми  $\Re(\lambda \varphi_i) = \Re(\lambda \varphi_j)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ ) можно разбить на секторы  $S_1, S_2, \dots, S_{2h}$  с центрами в начале, где  $h \leq n$ . В каждом из таких секторов при определенной нумерации корней  $\varphi_i(x)$  выполняются неравенства

$$\Re(\lambda \varphi_1(x)) \leq \Re(\lambda \varphi_2(x)) \leq \dots \leq \Re(\lambda \varphi_n(x)). \quad (2)$$

Пусть  $S$  есть фиксированный сектор  $S_i$ , а  $\Psi(x)$  есть матрица-функция, которая преобразует  $A_1$  к диагональному виду:

$$\Psi^{-1}(x)A_1(x)\Psi(x) = \text{diag}\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\} =: \Phi_1(x).$$

Если  $A_1 \in \mathfrak{W}_1^1[0, 1]$ , то  $\Psi, \Psi^{-1} \in \mathfrak{W}_1^1[0, 1]$  и  $\varphi_i \in W_1^1[0, 1]$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Обозначим  $B_0 := \Psi^{-1}A_0\Psi - \Psi^{-1}\Psi' - \Phi_0$ , где  $\Phi_0 := \text{diag}\{\varphi_{01}, \dots, \varphi_{0n}\}$ ,  $\varphi_{0j} := \{\Psi^{-1}A_0\Psi - \Psi^{-1}\Psi'\}_{jj}$ . Очевидно,  $B_0 \in \mathfrak{L}_1[0, 1]$ . Пусть  $\varphi_j(\cdot, \lambda) := \lambda \varphi_j + \varphi_{0j}$ ,  $\chi_{ij}(\cdot, \lambda) := \varphi_i(\cdot, \lambda) - \varphi_j(\cdot, \lambda)$ . Для  $i, j = \overline{1, n}$  положим  $l(i, j) = 0$  при  $i \leq j$  и  $l(i, j) = 1$  при  $i > j$ .

Обозначим через  $T_c = S - \{c\}$  сектор с центром в точке  $-c$ , где  $c \in \mathbb{C}$ . Если  $\lambda \in T_c$ , то  $\lambda + c \in S$ . Таким образом, для  $\lambda \in T_c$  выполняются неравенства

$$\Re((\lambda + c)\varphi_1(x)) \leq \Re((\lambda + c)\varphi_2(x)) \leq \dots \leq \Re((\lambda + c)\varphi_n(x)). \quad (3)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполняются предположения 1°, 2°. Тогда для каждого сектора  $T_c$  существует фундаментальная матрица решений

$y(\cdot, \lambda)$  дифференциальной системы в (1), имеющая следующую асимптотику:

$$y(x, \lambda) = (\psi(x) + \varepsilon(x, \lambda)) e^{\lambda \int_0^x \Phi_1(\xi) d\xi} \quad (4)$$

при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , где  $\psi(x) = \Psi(x) \exp(\int_0^x \Phi_0(\xi) d\xi)$ , а  $\varepsilon(\cdot, \lambda) \in \mathfrak{W}_1^1[0, 1]$  и имеет оценку

$$\|\varepsilon(\cdot, \lambda)\|_\infty \leq C \left( \delta(\lambda) + \frac{1}{|\lambda|} \right), \quad (5)$$

$$\delta(\lambda) = \max_{i \neq j} \left\{ \left\| \int_{l(i,j)}^x e^{\int_x^t \chi_{ji}(\xi, \lambda) d\xi} \{B_0(t)\}_{ij} dt \right\|_\infty \right\}. \quad (6)$$

При этом  $\delta(\lambda) \rightarrow 0$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Кроме того,  $y(\cdot, \lambda)$  есть аналитическая матрица-функция в  $\mathfrak{W}_1^1[0, 1]$  при  $|\lambda|$  достаточно больших. Если  $A_1 \in \mathfrak{W}_p^1[0, 1]$ ,  $A_0 \in \mathfrak{L}_p[0, 1]$ , то  $B_0 \in \mathfrak{L}_p[0, 1]$ .

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1 [4], если сделать предварительно замену  $\tilde{\lambda} = \lambda + c$ . Тогда  $\tilde{\lambda} \in S$ , для  $\tilde{\lambda}$  в соответствии с (3) выполняются неравенства (2) и дифференциальная система (1) преобразуется в аналогичную систему вида  $y' - \tilde{\lambda} A_1(x)y - A_0(x, c)y = 0$ , где  $A_0(x, c) = A_0 - cA_1$  и, следовательно, обладает теми же свойствами гладкости, что и  $A_0(x)$ . Переформулируя для этой системы теорему 1 из [4] и возвращаясь к параметру  $\lambda$ , получим утверждение сформулированной теоремы.

Пусть  $\Omega := \text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , где  $\omega_i := \int_0^1 \varphi_i(\xi) d\xi$ . Очевидно, числа  $\omega_i$  простые. В силу предположений 2° в секторах  $S$  при той же нумерации чисел  $\omega_i$ , что и для  $\varphi_i$ , имеют место неравенства

$$\Re(\lambda\omega_1) \leq \Re(\lambda\omega_2) \leq \dots \leq \Re(\lambda\omega_n).$$

Определение регулярности дадим аналогично определению из [5]. Будем использовать для  $n \times n$  матрицы  $A$  обозначение  $[A] := A + \varepsilon(\lambda)$ , где компоненты матрицы  $\varepsilon(\lambda)$  имеют оценки  $O(\delta(\lambda) + 1/|\lambda|)$ .

Пусть  $\mu_{J_k} = \sum_{\alpha \in J_k} \omega_\alpha$ , где  $J_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — произвольный набор различных  $k \in \mathbb{N}$ . При  $k = 0$  положим  $\mu_{J_0} = 0$ . Отметим в комплексной плоскости точки  $\mu_{J_k}$  и обозначим через  $M$  наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти точки. Точки  $\mu_{J_k}$ , которые оказались на границе многоугольника  $M$ , назовем граничными, а точки, лежащие в вершинах  $M$ , — угловыми.

С учетом асимптотики (4) и вида краевых условий в (1) характеристический определитель оператора  $L$  есть

$$\Delta(\lambda) = |[M\psi(0)] + [N\psi(1)]e^{\lambda\Omega}|.$$

Раскрывая этот определитель, получим  $\Delta(\lambda) = \sum_{J_k} [F_{J_k}] e^{\lambda \mu_{J_k}}$ . Заметим, что асимптотика  $[F_{J_k}]$  имеет место лишь в секторах  $S$ . Но в каждом из секторов коэффициенты этих разложений одинаковые.

**Определение 1.** Оператор  $L$  назовем *регулярным*, если выполняются условия 1°–2° и числа  $F_{J_k}$ , отвечающие угловым точкам  $\mu_{J_k}$ , отличны от 0.

**Определение 2.** Регулярный оператор  $L$  назовем *усиленно регулярным*, если нули характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$  асимптотически простые и отделены друг от друга некоторым положительным числом  $\delta > 0$ .

Необходимые и достаточные условия отделённости корней  $\Delta(\lambda)$  в терминах граничных точек  $\mu_{J_k}$  и соответствующих им чисел  $F_{J_k}$  имеются в [3].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рыхлов В. С.* Разложения по собственным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1981. 129 с.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
3. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград : Тип. М. П. Фроловой, 1917. 308 с.
4. *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Result. Math. 1999. V. 36. С. 342–353.
5. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара. им. И. Г. Петровского. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.

УДК 519.4

Д. С. Смирнова

### ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПО КАЧЕСТВЕННЫМ КРИТЕРИЯМ

Будем рассматривать задачу многокритериальной оптимизации по качественным критериям в виде

$$G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle, \quad (1)$$

где  $A$  — произвольное множество, содержащее не менее двух элементов (множество альтернатив),  $q_j$  —  $j$ -й критерий, который формально может

быть задан как отображение  $q_j : A \rightarrow C_j$ , где  $\langle C_j, \leq^j \rangle$  — некоторая цепь; будем предполагать, что каждая цепь  $C_j$  содержит не менее трех элементов. Множество  $J$  в общем случае может быть бесконечным. Элемент  $q_j(a) \in C_j$  представляет собой значение  $j$ -го критерия для альтернативы  $a \in A$ . Набор  $q(a) = (q_j(a))_{j \in J}$  называется *векторной оценкой альтернативы  $a$* . Заметим, что формально  $q$  есть отображение множества  $A$  в  $\prod_{j \in J} C_j$ .

Иногда на отображение  $q$  накладывают дополнительное условие  $(\alpha)$ :

$$(\forall j \in J) q_j(a_1) = q_j(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2. \quad (2)$$

Ясно, что условие  $(\alpha)$  обеспечивает инъективность отображения  $q$ .

Обозначим через  $K$  класс задач многокритериальной оптимизации вида (1) с дополнительным условием  $(\alpha)$ . Будем предполагать, что на множестве  $J$  задан строгий частичный порядок  $<$ , причем условие  $i < j$  интерпретируется таким образом, что критерий  $i$  важнее критерия  $j$ .

Для задачи  $G \in K$  на множестве альтернатив  $A$  определим бинарное отношение предпочтения  $\omega$  по следующей формуле:

$$a_1 \leq^\omega a_2 \Leftrightarrow (\forall j \in J)(q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2) \vee (\exists i < j) q_i(a_1) <^i q_i(a_2)). \quad (3)$$

*Замечание.* Отношение  $\omega$  является рефлексивным.

Действительно, условие  $a \leq^\omega a$  выполняется при любом  $a \in A$ , так как для любого  $j \in J$  имеет место  $q_j(a) \leq^j q_j(a)$ .

Основной результат данной статьи представляет следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы для любой задачи  $G \in K$  отношение  $\omega$  было отношением порядка, необходимо и достаточно чтобы упорядоченное множество  $\langle J, < \rangle$  удовлетворяло условию обрыва убывающих цепей (условию ОУЦ).*

Докажем вначале вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $a_1 \leq^\omega a_2$ . Тогда для всякого минимального элемента  $j^*$  в  $\langle J, < \rangle$  выполнено  $q_{j^*}(a_1) \leq^{j^*} q_{j^*}(a_2)$ .

**Доказательство.** По основному определению (3) для  $j^* \in J$  выполняется дизъюнкция:

$$q_{j^*}(a_1) \leq^{j^*} q_{j^*}(a_2) \vee (\exists i < j^*) q_i(a_1) <^i q_i(a_2).$$

Так как по предположению  $j^*$  — минимальный элемент в  $\langle J, < \rangle$ , то второй член дизъюнкции ложен, следовательно истинен, первый член дизъюнкции, то есть  $q_{j^*}(a_1) \leq^{j^*} q_{j^*}(a_2)$ .

Перейдем к доказательству теоремы.

*Достаточность.* Для доказательства надо проверить условия антисимметричности и транзитивности.

*Транзитивность.* Пусть  $a_1 \leq^\omega a_2$  и  $a_2 \leq^\omega a_3$ , то есть выполнены следующие формулы:

$$\begin{aligned} & (\forall j \in J)(q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2) \vee (\exists i < j)q_i(a_1) <^i q_i(a_2)), \\ & (\forall j \in J)(q_j(a_2) \leq^j q_j(a_3) \vee (\exists k < j)q_k(a_2) <^k q_k(a_3)). \end{aligned}$$

Надо показать, что  $a_1 \leq^\omega a_3$ , то есть

$$(\forall j \in J)(q_j(a_1) \leq^j q_j(a_3) \vee (\exists l < j)q_l(a_1) <^l q_l(a_3)). \quad (4)$$

Предположим, что (4) неверно, тогда по логическому закону де Моргана получаем

$$(\exists j \in J)(q_j(a_1) >^j q_j(a_3) \wedge (\forall l < j)q_l(a_1) \geq^l q_l(a_3)). \quad (5)$$

Покажем, что тогда справедливо следующее утверждение.

*Утверждение 1.* Существует бесконечная последовательность  $j_1 > j_2 > \dots$  такая, что для каждого  $k = 1, 2, \dots$  выполнено

$$q_{j_k}(a_1) > q_{j_k}(a_2) \vee q_{j_k}(a_2) > q_{j_k}(a_3). \quad (6)$$

Проведем доказательство данного утверждения по индукции.

*База индукции.* В силу (4) можно положить  $j_1 = j$ , тогда (6) будет выполнено для  $j_1$ , действительно, в противном случае имеет место:

$$q_{j_1}(a_1) \leq^{j_1} q_{j_1}(a_2) \wedge q_{j_1}(a_2) \leq^{j_1} q_{j_1}(a_3),$$

и в силу транзитивности отношения  $\leq^{j_1}$  получаем  $q_{j_1}(a_1) \leq^{j_1} q_{j_1}(a_3)$ , что противоречит формуле (5).

*Шаг индукции.* Пусть существует последовательность  $j_1 > j_2 > \dots > j_n$  такая, что для всех  $j_k, k = 1, \dots, n$  выполняется  $q_{j_k}(a_1) > q_{j_k}(a_2) \vee q_{j_k}(a_2) > q_{j_k}(a_3)$ .

Рассмотрим первый случай (для второго случая рассуждения аналогичны). По определению (3), учитывая, что  $q_{j_n}(a_1) \leq^{j_n} q_{j_n}(a_2)$  не выполнено, имеем  $(\exists i < j_n)q_i(a_1) <^i q_i(a_2)$ . Тогда условие  $q_i(a_2) \leq^i q_i(a_3)$  не может быть выполнено, так как в этом случае получаем, что  $q_i(a_1) <^i q_i(a_3)$ , где  $i < j_n < \dots < j_1 = j$ , то есть  $i < j$ , что противоречит условию (5). Поэтому получаем, что  $q_i(a_2) > q_i(a_3)$ . Это позволяет положить  $j_{n+1} = i$ , что доказывает утверждение 1.

Таким образом исходя из предположения, что не выполнено  $a_1 \leq^\omega a_3$  мы доказали утверждение 1, которое противоречит условию ОУЦ для упорядоченного множества  $\langle J, < \rangle$ . Следовательно, наше предположение неверно, то есть выполняется  $a_1 \leq^\omega a_3$ , что завершает доказательство транзитивности.

Антисимметричность доказывается аналогично.

*Необходимость.* Покажем, что если упорядоченное множество  $\langle J, < \rangle$  не удовлетворяет условию ОУЦ, то существует задача  $G \in K$ , для которой  $\omega$  не является отношением порядка.

Так как  $\langle J, < \rangle$  не удовлетворяет условию ОУЦ, то существует бесконечная цепь вида  $j_1 > j_2 > \dots > j_n > \dots$ . По предположению каждая цепь  $C_j$  содержит не менее трех элементов. Зафиксируем в цепи  $C_{j_s}$  элементы  $0_s < 1_s < 2_s$ .

Рассмотрим задачу  $G$  вида (1), для которой  $A = a_1, a_2, a_3$  и функции  $q_{j_s}$  заданы таблицей (для всех остальных  $j \in J$  полагаем  $q_j(a_1) = q_j(a_2) = q_j(a_3) = 1_s$ ).

a \ q	$q_{j_1}$	$q_{j_2}$	$q_{j_3}$	$q_{j_4}$	$\dots$
$a_1$	$1_1$	$2_2$	$1_3$	$2_4$	$\dots$
$a_2$	$2_1$	$0_2$	$2_3$	$0_4$	$\dots$
$a_3$	$0_1$	$1_2$	$0_3$	$1_4$	$\dots$

Согласно определению (3) и из анализа таблицы получаем:  $a_1 \leq^\omega a_2$ . В самом деле, при нечетных  $s$  имеем  $q_{j_s}(a_1) = 1_s < 2_s = q_{j_s}(a_2)$ , то есть  $q_{j_s}(a_1) \leq^\omega q_{j_s}(a_2)$ . Если  $s$  четно, то мы переходим к более важному критерию с номером  $s + 1$  и получаем  $q_{j_{s+1}}(a_1) < q_{j_{s+1}}(a_2)$ . Аналогично выполнено  $a_2 \leq^\omega a_3$ .

Однако, условие  $a_1 \leq^\omega a_3$  здесь не имеет места, так как  $q_{j_s}(a_1) > q_{j_s}(a_3)$  для всех  $s = 1, 2, \dots$ . Таким образом отношение  $\omega$  для построенной задачи  $G$  нетранзитивно, а значит, не является отношением порядка.

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М. : Наука, 1970.

К. Б. Турашвили

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ  
ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ  
ЗНАЧЕНИЙ  
ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ**

Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля:

$$u'' + (\lambda - q(x))u = 0, \quad (1)$$

$$u'(0) - hu(0) = 0, \quad u'(\pi) + Hu(\pi) = 0, \quad (2)$$

где  $h$  и  $H$  — произвольные действительные числа (причем допускается возможность  $h, H = \infty$ ), а потенциал  $q$  ограниченной вариации на отрезке  $[0, \pi]$  исчезает в нуле и не обязательно непрерывен.

**Теорема 1.** Пусть  $u_n$  — собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda_n$  регулярной задачи Штурма — Лиувилля,  $x_{k,n}$  — нули  $u_n(x)$ . Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:

1)  $h \neq \infty, H \neq \infty$

$$u_n(x) = \gamma(x, n) \cos\left(n + \frac{c}{n}\right)x + \beta(x) \frac{\sin\left(n + \frac{c}{n}\right)x}{n + \frac{c}{n}} + O(n^{-2}), \quad (3)$$

$$u'_n(x) = \beta(x) \cos\left(n + \frac{c}{n}\right)x - \gamma(x, n) \left(n + \frac{c}{n}\right) \sin\left(n + \frac{c}{n}\right)x + O(n^{-1}), \quad (4)$$

$$u''_n(x) = -\left(n + \frac{c}{n}\right)^2 \gamma(x, n) \cos\left(n + \frac{c}{n}\right)x - \beta(x) \left(n + \frac{c}{n}\right) \sin\left(n + \frac{c}{n}\right)x + O(1),$$

$$u'_n(x_{k,n}) = (-1)^k \left(n + \frac{c}{n}\right) \gamma(x_{k,n}, n) + O(n^{-1}), \quad (5)$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2\left(n + \frac{c}{n}\right)} \pi + \frac{\beta(x_{k,n})}{\gamma(x_{k,n}, n) \left(n + \frac{c}{n}\right)^2} + O(n^{-3}), \quad (6)$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (7)$$

где  $\beta(x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau$ ,  $\gamma(x, n) = 1 - \frac{h}{2\lambda_n} \int_0^x q(\tau) d\tau$ ,

$$c = \frac{1}{\pi} (h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau)$$

2)  $h = \infty, H \neq \infty$

$$u_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x}{n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})}} + \delta(x, n) \cos(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x + O(n^{-3}),$$

$$u'_n(x) = \cos(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x + (n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})\delta(x, n) \sin(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x + O(n^{-2}),$$

$$u''_n(x) = \delta(x, n)(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})^2 \cos(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x - (n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})}) \sin(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})x + O(n^{-1}),$$

$$u'_n(x_{k,n}) = (-1)^k \delta(x_{k,n}, n)(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})}) + O(n^{-2}),$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})} \pi + \frac{1}{(n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})})^2 \delta(x_{k,n}, n)} + O(n^{-4}),$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})} + O(n^{-2}),$$

где  $H_1 = H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau$ ,  $\delta(x, n) = \frac{1}{2\lambda_n} \int_0^x q(\tau) d\tau$ ;

3) Так как случай  $h \neq \infty, H = \infty$  с помощью подстановки  $t = \pi - x$  сводится к пункту 2);

4)  $h = \infty, H = \infty$

$$u_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{\alpha_1}{n})x}{n + \frac{\alpha_1}{n}} + \delta(x, n) \cos(n + \frac{\alpha_1}{n})x + O(n^{-3}),$$

$$u'_n(x) = \cos(n + \frac{\alpha_1}{n})x + (n + \frac{\alpha_1}{n})\delta(x, n) \sin(n + \frac{\alpha_1}{n})x + O(n^{-2}),$$



$$u_n''(x) = \delta(x, n) \left(n + \frac{\alpha_1}{n}\right)^2 \cos\left(n + \frac{\alpha_1}{n}\right)x - \left(n + \frac{\alpha_1}{n}\right) \sin\left(n + \frac{\alpha_1}{n}\right)x + O(n^{-1}),$$

$$u_n'(x_{k,n}) = (-1)^k \left(n + \frac{\alpha_1}{n}\right) \delta(x_{k,n}, n) + O(n^{-2}),$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2\left(n + \frac{\alpha_1}{n}\right)}\pi + \frac{1}{\left(n + \frac{\alpha_1}{n}\right)^2 \delta(x_{k,n}, n)} + O(n^{-4}),$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\alpha_1}{n} + O(n^{-2}),$$

где  $\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(\tau) d\tau$ ,  $\delta(x, n) = \frac{1}{2\lambda_n} \int_0^x q(\tau) d\tau$ .

Доказательства формул для собственных функций и их производных смотрите в [1 – 3].

1) Убедимся в справедливости (6) и (5).

Пусть  $x_{k,n}$  –  $k$ -й нуль собственной функции  $u_n(x)$ , имеющий ровно  $n$  простых нулей в интервале  $(0, \pi)$ . Тогда из (3) следует

$$\left| \gamma(x_{k,n}, n) \cos\left(n + \frac{c}{n}\right)x_{k,n} + \frac{\beta(x_{k,n}, n)}{n + \frac{c}{n}} \sin\left(n + \frac{c}{n}\right)x_{k,n} \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Положив

$$\frac{\gamma(x_{k,n}, n) \left(n + \frac{c}{n}\right)}{\sqrt{\gamma^2(x_{k,n}, n) \left(n + \frac{c}{n}\right)^2 + \beta^2(x_{k,n}, n)}} = \cos \alpha_{k,n},$$

$$\frac{\beta(x_{k,n}, n)}{\sqrt{\gamma^2(x_{k,n}, n) \left(n + \frac{c}{n}\right)^2 + \beta^2(x_{k,n}, n)}} = \sin \alpha_{k,n},$$

получим

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(n + \frac{c}{n}\right)x_{k,n} - \alpha_{k,n}\right) \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Другими словами, найдется константа  $C_1$  такая, что

$$-\arcsin \frac{C_1}{n^2} + \pi k \leq \frac{\pi}{2} + \left(n + \frac{c}{n}\right)x_{k,n} - \alpha_{k,n} \leq \arcsin \frac{C_1}{n^2} + \pi k.$$

Следовательно,  $\left|\frac{\pi}{2} + \left(n + \frac{c}{n}\right)x_{k,n} - \alpha_{k,n} - \pi k\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Но  $\beta(x, n)$ ,  $\gamma(x, n) \in C^1[0, \pi]$ , поэтому

$$\begin{aligned} x_{k,n} &= -\frac{\pi}{2\left(n + \frac{c}{n}\right)} + \frac{\alpha_{k,n}}{\left(n + \frac{c}{n}\right)} + \frac{\pi k}{\left(n + \frac{c}{n}\right)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \\ &= \frac{2k-1}{\left(n + \frac{c}{n}\right)}\pi + \frac{1}{n + \frac{c}{n}} \arcsin \frac{\beta(x_{k,n}, n)}{\sqrt{\gamma^2(x_{k,n}, n) \left(n + \frac{c}{n}\right)^2 + \beta^2(x_{k,n}, n)}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{2k-1}{2(n+\frac{c}{n})}\pi + \frac{\beta(x_{k,n}, n)}{\gamma(x_{k,n}, n)(n+\frac{c}{n})^2} + O(n^{-3}).$$

Осталось получить (5). Подставим  $x_{k,n}$  в (4).

$$\begin{aligned} u'(x_{k,n}) &= \beta(x_{k,n}, n) \sin \pi k + \gamma(x_{k,n}, n) \left(n + \frac{c}{n}\right) \cos \pi k + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= (-1)^k \left(n + \frac{c}{n}\right) \gamma(x_{k,n}, n) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Таким образом пункт 1 леммы доказан.

Аналогично пункту 1 доказываются пункты 2, 3 и 4.

Таким образом лемма доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 72–79.
2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию // М.: Наука, 1970.
3. *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001.

УДК 517.984

**А. Е. Федосеев**

### ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

В данной статье исследуется обратная задача спектрального анализа для оператора Штурма — Лиувилля на полуоси, имеющего неинтегрируемую особенность во внутренней точке.

Рассмотрим краевую задачу  $\mathcal{L}$  вида

$$\ell y = -y'' + \left( \frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x) \right) y = \lambda y, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$y(0) = 0$$

на полуоси с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя в точке  $a > 0$ , где  $q(x)$  — комплекснозначная функция,  $\nu_0$  — комплексное число. Положим  $\lambda = \rho^2$ ,  $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$  и, для определенности,  $\text{Im } \rho \geq 0$ ,  $\text{Re } \nu > 0$ ,

$\nu \neq 1, 2, \dots$ . Предположим, что  $q(x)|x-a|^{\min(0, 1-2\operatorname{Re}\nu)} \in L(0, T)$  при некотором  $T > a$  и  $q(x) \in L(T, \infty)$ . Уравнение (1) с другими краевыми условиями ранее исследовалось в [1].

Рассмотрим функции

$$C_j(x, \lambda) = (x-a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(\rho(x-a))^{2k}, \quad j = 1, 2,$$

где

$$\mu_j = (-1)^j \nu + 1/2, \quad c_{10}c_{20} = (2\nu)^{-1},$$

$$c_{jk} = (-1)^k c_{j0} \left( \prod_{s=1}^k ((2s + \mu_j)(2s + \mu_j - 1) - \nu_0) \right)^{-1}.$$

Здесь и в дальнейшем  $z^\mu = \exp(\mu(\ln|z| + i \arg z))$ ,  $\arg z \in (-\pi, \pi]$ . При  $x > a$  и  $x < a$  функции  $C_j(x, \lambda)$  являются решениями уравнения (1) при  $q(x) \equiv 0$ . Пусть функции  $s_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$ , являются решениями следующих интегральных уравнений при  $x > a$  и  $x < a$ :

$$s_j(x, \lambda) = C_j(x, \lambda) + \int_a^x g(x, t, \lambda) q(t) s_j(t, \lambda) dt,$$

где  $g(x, t, \lambda) = C_1(t, \lambda)C_2(x, \lambda) - C_1(x, \lambda)C_2(t, \lambda)$ . При каждом фиксированном  $x$  функции  $s_j(x, \lambda)$  являются целыми по  $\lambda$  порядка  $1/2$  и образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Пусть задана матрица  $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$ ,  $\det A \neq 0$  с комплексными  $a_{jk}$ . Введем функции  $\{\sigma_j(x, \lambda)\}_{j=1,2}$ ,  $x \in J_- \cup J_+$ ,  $J_\pm = \{\pm(x-a) > 0\}$  по формуле

$$\sigma_j(x, \lambda) = \begin{cases} s_j(x, \lambda), & x \in J_-, \\ \sum_{k=1}^2 a_{kj} s_k(x, \lambda), & x \in J_+. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений  $\{\sigma_j(x, \lambda)\}$  будет использоваться для склейки решений в окрестности особой точки  $x = a$ .

Введем числа  $\xi_{jk}$  ( $j, k = 1, 2$ ) по формуле

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \pi \nu} \begin{bmatrix} -a_{11}e^{2\pi i \nu} + a_{22}e^{-2\pi i \nu} & -i(a_{11}e^{\pi i \nu} - a_{22}e^{-\pi i \nu}) \\ -i(a_{11}e^{\pi i \nu} - a_{22}e^{-\pi i \nu}) & a_{11} - a_{22} \end{bmatrix}.$$

Поведение спектра краевой задачи  $\mathcal{L}$  зависит от величин  $\xi_{jk}$ . Для определенности в дальнейшем будем рассматривать наиболее важный частный случай, когда  $|\xi_{jj}| > |\xi_{12}| > 0$  и  $a_{12} = 0$ . В этом случае, в отличие от

классических операторов Штурма — Лиувилля, дискретный спектр является неограниченным, и возникают новые качественные эффекты при исследовании прямых и обратных задач спектрального анализа.

Обозначим через  $\Pi_+$   $\lambda$  — плоскость с двухсторонним разрезом  $\Pi_0$  вдоль луча  $\Lambda_+ := \{\lambda : \lambda \geq 0\}$  и положим  $\Pi := \overline{\Pi_+} \setminus \{0\}$ . Тогда при отображении  $\rho \rightarrow \rho^2 = \lambda$  множества  $\Pi_+$ ,  $\Pi_0$  и  $\Pi$  соответствуют множествам  $\Omega_+ = \{\rho : \text{Im } \rho > 0\}$ ,  $\Omega_0 = \{\rho : \text{Im } \rho = 0\}$  и  $\Omega = \{\rho : \text{Im } \rho \geq 0, \rho \neq 0\}$ . Пусть  $e(x, \rho)$ ,  $x \geq 0, \text{Im } \rho \geq 0$  — разрывное решение Йоста, введенное в [1], для уравнения (1). Обозначим  $S_{k_0} = \left\{ \rho : \arg \rho \in \left( \frac{k_0\pi}{2}, \frac{(k_0+1)\pi}{2} \right) \right\}$ ,  $k_0 = 0, 1$  и

$$\Delta(\rho) = e(0, \rho), \quad \text{Im } \rho \geq 0.$$

Функция  $\Delta(\rho)$  называется характеристической функцией краевой задачи  $\mathcal{L}$  и имеет счетное множество нулей вида

$$\rho_k = \rho_k^\pm + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \pm\infty,$$

где  $\rho_k^\pm = \frac{\pi}{a}(k + \theta_\pm)$  — нули функций

$$\Delta^\pm(\rho) = \xi_{12} - \xi_{jj} \exp(2i\rho a), \quad \rho \in S_{2-j}, \quad j = 1, 2,$$

и

$$\theta_\pm = -\frac{i}{2\pi} \ln \left| \frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}} \right| + \frac{1}{2\pi} \arg \left( \frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}} \right)$$

(“−” при  $j = 1$ , “+” при  $j = 2$ ). Для определенности пусть  $\arg \left( \frac{\xi_{12}}{\xi_{jj}} \right) \in [0, 2\pi)$ . Обозначим  $\Lambda = \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega, \Delta(\rho) = 0\}$ ,  $\Lambda' = \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega_+, \Delta(\rho) = 0\}$ ,  $\Lambda'' = \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega_0, \rho \neq 0, \Delta(\rho) = 0\}$ . Тогда  $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$ ,  $\Lambda'$  — счетное неограниченное множество и  $\Lambda''$  — ограниченное множество. Положим

$$\Phi(x, \lambda) = e(x, \rho) / \Delta(\rho), \quad M(\lambda) := \Phi'(0, \lambda).$$

Функция  $\Phi(x, \lambda)$  удовлетворяет уравнению (1) и условиям  $\Phi(0, \lambda) = 1$ ,  $\Phi(x, \lambda) = O(\exp(i\rho x))$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $\rho \in \Omega$  и называется *решением Вейля* для  $\mathcal{L}$ . Функцию  $M(\lambda)$  будем называть *функцией Вейля* для  $\mathcal{L}$ . Пусть заданы фиксированная матрица  $A$  и число  $\nu_0$ .

**Задача 1.** По заданной функции Вейля  $M(\lambda)$  построить функцию  $q(x)$ .

Функция Вейля  $M(\lambda)$  является аналитической в  $\Pi_+ \setminus \Lambda'$  и непрерывной в  $\Pi \setminus \Lambda$ . Множество особенностей  $M(\lambda)$  (как аналитической функции) совпадает с множеством  $\Lambda_0 := \Lambda_+ \cup \Lambda$ . Введем область

$$G_\delta := \{\rho : \text{Im } \rho \geq 0, |\rho - \rho_k| \geq \delta, \rho_k \in \Lambda\}.$$

Функция Вейля имеет следующую асимптотику при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\rho \in G_\delta \cap \bar{S}_{2-j}$ ,  $j = 1, 2$ :

$$M(\lambda) = i\rho \left( M_0^\pm(\lambda) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad (2)$$

$$M_0^\pm(\lambda) = \frac{\xi_{12} + \xi_{jj} \exp(2i\rho a)}{\xi_{12} - \xi_{jj} \exp(2i\rho a)},$$

где “ $-$ ” соответствует  $j = 1$ , “ $+$ ” соответствует  $j = 2$ .

**Теорема 1.** *Функция Вейля  $M(\lambda)$  однозначно определяет краевую задачу  $\mathcal{L}$ .*

Доказательство теоремы дает процедуру решения обратной задачи 1. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости. При этом используются и развиваются идеи метода спектральных отображений [2].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. О восстановлении сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов с особенностью внутри интервала // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 645–659.
2. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

УДК 517.984

В. А. Халова

### ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ РАВНОСХОДИМОСТИ

Пусть  $A$  — оператор вида

$$Af = \int_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x), t) f(t) dt,$$

где ядро  $A(x, t)$  непрерывно по  $x$  и  $t$  вместе с производными  $A_x, A_t, A_{xt}, A_{x^2t}, A_{xt^2}$  ( $A_{x^s t^j} = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x, t)$ ) при  $0 \leq t \leq x$  и  $A(x, x) \equiv 1$ , функция

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}x + 1, & x \in [0, \gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(x-1), & x \in [\gamma, 1], \end{cases} \quad \gamma < 1/2,$$

непрерывна, монотонно убывает,  $\vartheta(0) = 1$ ,  $\vartheta(1) = 0$ ,  $\vartheta^2(x) = \vartheta(\vartheta(x)) \equiv x$ . Таким образом,  $\vartheta(x)$  — инволюция, производная которой имеет разрыв при  $x = \gamma$ , что создает дополнительные трудности в изучении сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям. Случай, когда инволюция  $\vartheta(x)$  — произвольная трижды непрерывно дифференцируемая на  $[0, 1]$  функция и  $\vartheta'(x) < 0$ , был рассмотрен в статье [1]. Для этого оператора была установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$  при любом  $\varepsilon > 0$ .

В настоящей статье получена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям операторов

$$A_1 = TAT^{-1} \quad \text{и} \quad A_2 f = \int_0^{1-x} \varphi'(t) f(t) dt.$$

Здесь  $Tf = f(\varphi(\tau))$ ,  $\varphi(\tau)$  — непрерывная, монотонно возрастающая на отрезке  $[0, 1]$  функция следующего вида:

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 2\gamma\tau, & \tau \leq 1/2, \\ 2(1-\gamma)\tau + 2\gamma - 1, & \tau \geq 1/2. \end{cases} \quad (1)$$

**Лемма 1.** *Справедлива формула  $\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(\tau))) = 1 - \tau$ .*

**Доказательство.** В силу (1) имеем

$$\begin{aligned} \vartheta(\varphi(\tau)) &= \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}\varphi(\tau) + 1, & \varphi(\tau) \in [0, \gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(\varphi(\tau) - 1), & \varphi(\tau) \in [\gamma, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}2\gamma\tau + 1, & \tau \leq 1/2, \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}[2(1-\gamma)\tau + 2\gamma - 1 - 1], & \tau \geq 1/2 \end{cases} = \begin{cases} 2(\gamma-1)\tau + 1, & \tau \leq 1/2, \\ 2\gamma(1-\tau), & \tau \geq 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\varphi^{-1}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\xi, & \xi \in [0, \gamma], \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\xi + 1 - 2\gamma], & \xi \in [\gamma, 1], \end{cases}$  получаем:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(\tau))) &= \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\vartheta(\varphi(\tau)), & \vartheta(\varphi(\tau)) \in [0, \gamma], \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\vartheta(\varphi(\tau)) + 1 - 2\gamma], & \vartheta(\varphi(\tau)) \in [\gamma, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\vartheta(\varphi(\tau)), & \tau \geq 1/2, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\vartheta(\varphi(\tau)) + 1 - 2\gamma], & \tau \leq 1/2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}[-2\gamma\tau + 2\gamma], & \tau \geq 1/2, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[2(\gamma-1)\tau + 1 + 1 - 2\gamma], & \tau \leq 1/2 \end{cases} = 1 - \tau. \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Справедлива формула  $A_1 f = \int_0^{1-x} A_1(1-x, t) f(t) dt$ , где  $A_1(x, t) = A(\varphi(x), \varphi(t)) \varphi'(t)$ .

**Доказательство.** Имеем

$$AT^{-1}f = \int_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x), t) f(\varphi^{-1}(t)) dt. \quad (2)$$

Выполним в интеграле (2) замену переменных  $\tau = \varphi^{-1}(t)$ :

$$AT^{-1}f = \int_0^{\varphi^{-1}(\vartheta(x))} A(\vartheta(x), \varphi(\tau)) \varphi'(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} TAT^{-1}f &= \int_0^{\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(x)))} A(\vartheta(\varphi(x)), \varphi(\tau)) \varphi'(\tau) f(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{1-x} A(\varphi(\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(x)))) \varphi'(\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{1-x} A_1(1-x, t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

Обозначим  $R_{1,\lambda} = (E - \lambda A_1)^{-1} A_1$  и  $R_{2,\lambda} = (E - \lambda A_2)^{-1} A_2$ .

**Лемма 3.** Если  $y = R_{1,\lambda} f$ , то

$$-(E + N) \left( \frac{1}{\varphi'(x)} y'(1-x) \right) - \lambda y(x) = f(x), \quad y(1) = 0,$$

где  $(E + N) = (E + N_1)^{-1}$ ,  $N_1 f = \int_0^x N_1(x, t) f(t) dt$  и  $N_1(x, t) = \frac{1}{\varphi'(x)} A'_{1x}(x, t)$ .

**Доказательство.** Пусть  $y = R_{1,\lambda} f$ . Тогда

$$y(x) - \lambda \int_0^{1-x} A_1(1-x, t) y(t) dt = \int_0^{1-x} A_1(1-x, t) f(t) dt. \quad (3)$$

Отсюда справедливость условия  $y(1) = 0$  очевидна.

Далее, выполнив в (3) замену  $x$  на  $1 - x$ , продифференцировав по  $x$  и разделив почленно на  $\varphi'(x)$ , получим

$$-\frac{1}{\varphi'(x)}y'(1-x) - \lambda \left[ y(x) + \int_0^x N_1(x,t)y(t) dt \right] = f(x) + \int_0^x N_1(x,t)f(t) dt.$$

Применив оператор  $(E + N)$ , приходим к утверждению леммы.  $\square$

**Лемма 4.** Если  $y = R_{2,\lambda}f$ , то

$$-\frac{1}{\varphi'(x)}y'(1-x) - \lambda y(x) = f(x), \quad y(1) = 0.$$

Эта лемма очевидна.

Действуя так же, как и в работе [2], получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** Для любой  $f(x) \in L[0, 1]$  имеет место соотношение:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [R_{1,\lambda} - R_{2,\lambda}]f d\lambda \right\|_{\infty} = 0,$$

где  $\|\cdot\|$  — норма в  $L_{\infty}[0, 1]$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П., Кувардина Л. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией // Известия вузов. Сер. Математика. 2008. № 5. С. 67–76.

2. Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции. : Информац-й бюллетень. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55.

УДК 519.624

А. А. Хромов

### О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ОПЕРАТОРОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для указанного уравнения приведен метод его приближенного решения в случае, когда точное решение удовлетворяет интегральному условию.

Рассматривается уравнение

$$Au \equiv \int_0^x u(t)dt = f(x). \quad (1)$$



Предполагается, что оператор  $A$  действует в пространстве  $C[0,1]$ , точное решение  $u(x)$  удовлетворяет условию

$$U(u) \equiv \int_0^1 u(t)dt = 0, \quad (2)$$

а правая часть  $f(x)$  задана ее приближением  $f_\delta(x) : \|f_\delta(x) - f(x)\| \leq \delta$ .

Решается задача нахождения по  $f_\delta(x)$  и  $\delta$  приближенного решения уравнения (1) такого, которое удовлетворяет условию (2). Рассмотрим семейство операторов  $R_r, r > 0$  из [1].

**Лемма 1.** Имеет место представление

$$R_r u = \int_0^1 K_r(x, t)u(t)dt = 0,$$

где

$$K_r(x, t) = -(1 - e^{-r})^{-1} e^{r(x-t)} \begin{cases} e^{-r}, & t \leq x, \\ 1, & t > x. \end{cases}$$

**Доказательство.** следует из леммы 1 в [1].

Построим семейство операторов

$$T_r f = -r R_r A^{-1} f.$$

**Лемма 2.** Имеет место представление

$$T_r f = -r^2 \int_0^1 K_r(x, t)f(t)dt - r f(x). \quad (3)$$

**Доказательство.** Имеем:  $A^{-1} f = f', f(0) = 0$ . Отсюда  $R_r A^{-1} f = R_r f' = \int_1^0 K_r(x, t)f'(t)dt$ .

Берем этот интеграл по частям. Получаем

$$\begin{aligned} R_r f' &= [K_r(x, t)f(t)]_0^x + [K_r(x, t)f(t)]_x^1 - \int_0^1 K'_{rt}(x, t)f(t)dt = \\ &= [K_r(x, x-0) - K_r(x, x+0)] \cdot f(x) - K_r(x, 0)f(0) + \\ &\quad K_r(x, 1)f(1) - \int_0^1 K'_{rt}(x, t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Поскольку скачок ядра  $K_r(x, t)$  при  $t = x$  равен 1,  $f(0) = 0, f(1) \equiv \int_0^1 u(t)dt = 0$ , а  $K'_{rt}(x, t) = -rK_r(x, t)$ , то отсюда следует, что  $R_r f' = f(x) + r \int_0^1 K_r(x, t)f(t)dt$ . Из последнего равенства вытекает утверждение леммы.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, T_r, u) \equiv \sup \{ \|T_r f_\delta - u\| : \|f_\delta - f\| \leq \delta \}$$

Известно [2], что для ее стремления к нулю при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  необходимо и достаточно: 1) сходимости

$$\|T_r A u - u\| \rightarrow \infty \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (4)$$

2) согласования

$$r = r(\delta), \text{ при котором } r(\delta) \rightarrow \infty \text{ и } \|T_{r(\delta)}\| \delta \rightarrow \infty \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

**Лемма 3.** Для сходимости (4) необходимо и достаточно, чтобы функция  $u(x)$  удовлетворяла условию (2) и условию  $u(0) = u(1)$ .

**Доказательство** вытекает из равенства  $T_r A = -r R_r$  и следствия из теоремы 2 в [1].

**Лемма 4.** Справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{r}{2}(1 - e^{-r}) \leq \|T_r\| \leq 2r. \quad (5)$$

**Доказательство.** Обозначим через  $K_r$  интегральный оператор в выражении (3). Очевидно, справедлива оценка

$$\|T_r f\| \leq \|K_r\| \|f\| + r \|f\|.$$

Далее, имеем

$$\|K_r\| = r^2 \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K_r(x, t)| dt.$$

Отсюда вытекает правая часть оценки (5). Для получения оценки снизу пользуемся оценкой:

$$\|K_r\| \geq \|T_r f_0\| \geq |T_r f_0|_{x=0},$$

где  $f_0(x) = e^{-rx}$ .

Из лемм 3 и 4 следует

**Теорема.** Сходимость  $\Delta(\delta, T_r, u) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  имеет место тогда и только тогда, когда функция  $u(x)$  удовлетворяет условию (2) и условию  $u(0) = u(1)$ , а  $r = r(\delta)$  такое, что  $r(\delta) \rightarrow \infty$  и  $r(\delta)\delta \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. А., Хромова Г. В. О построении приближений к непрерывным функциям с интегральными граничными условиями // ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51, № 8. С. 1370–1375.

2. Иванов В. К. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.

УДК 517.51

А. П. Хромов, Г. В. Хромова

### ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

В работе [1] рассмотрен простой по конструкции оператор, полученный из оператора Стеклова, с разрывной в точке  $x = 1/2$  областью значений, обеспечивающий равномерную сходимость к произвольной непрерывной функции на всем отрезке  $[0, 1]$  (в отличие от классического оператора Стеклова). В [1] сформулирована теорема, в которой получена двусторонняя неулучшаемая по порядку оценка погрешности приближений к функциям из класса Липшица, причем, с лучшими константами и более простым доказательством по сравнению с другим модифицированным оператором Стеклова из [2].

Операторы из [1] имеют вид

$$T_h u = \begin{cases} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} u(t) dt \equiv T_{2h} u, & x \in [0, 1/2]; \\ \frac{1}{h} \int_x^{x+h} u(t) dt \equiv T_{1h} u, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Функция  $T_h u$  рассматривается как элемент пространства  $L_\infty[0, 1]$  с нормой:  $\|\cdot\|_\infty = \max \left\{ \|\cdot\|_{C[0, 1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2, 1]} \right\}$ .

Рассматриваются величины:

$$\Delta(\delta, T_h, Lip_1 1) = \sup \left\{ \|T_h u_\delta - u\|_\infty : u \in Lip_1 1, \|u_\delta - u\|_{L_2[0, 1]} \leq \delta \right\},$$

$$\Delta_1(T_h, Lip_1 1) = \sup \left\{ \|T_h u - u\|_\infty : u \in Lip_1 1 \right\}.$$

**Лемма.** *Справедлива оценка*

$$\Delta(\delta, T_h, Lip_1 1) \geq \max \{ \Delta_1(T_h, Lip_1 1), \delta \|T_h\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} \}.$$

**Доказательство** вытекает из двух оценок:

$$\begin{aligned} \Delta_1(T_h, Lip_1 1) &\leq \Delta(\delta, T_h, Lip_1 1), \\ \delta \|T_h\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} &\leq \Delta(\delta, T_h, Lip_1 1), \end{aligned}$$

которые следуют из равенств

$$\Delta_1(T_h, Lip_1 1) = \Delta_{|\delta=0}, \quad \delta \|T_h\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} = \Delta_{|u=0}.$$

**Теорема.** *Справедлива двусторонняя оценка*

$$\delta^{2/3} \leq \Delta(\delta, T_{h(\delta)}, Lip_1 1) \leq 3/2 \delta^{2/3} \quad (2)$$

где  $h(\delta) = \delta^{2/3}$ .

**Доказательство.** Для  $\Delta(\delta, T_h, Lip_1 1)$  справедлива оценка

$$\Delta(\delta, T_h, Lip_1 1) \leq \Delta_1(T_h, Lip_1 1) + \delta \|T_h\|_{L_2 \rightarrow L_\infty}. \quad (3)$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\|T_h\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} = \frac{1}{\sqrt{h}}. \quad (4)$$

Найдем выражение для  $\Delta_1(T_h, Lip_1 1)$ , используя определение класса Липшица. Имеем

$$|T_{1h} u - u| = \left| \frac{1}{h} \int_{x-h}^x |u(t) - u(x)| dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x-h}^x (x-t) dt = \frac{h}{2}.$$

Такая же оценка справедлива для  $|T_{2h} u - u|$ .

Отсюда следует оценка

$$\Delta_1(T_h, Lip_1 1) \leq \frac{h}{2}.$$

Она достигается на функции  $u_0(x) = x$ . Отсюда вытекает равенство

$$\Delta_1(T_h, Lip_1 1) = \frac{h}{2}. \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (3), приходим к оценке

$$\Delta(\delta, T_h, Lip_1 1) \leq \frac{h}{2} + \frac{\delta}{\sqrt{h}}. \quad (6)$$

Выбирая  $h = h(\delta)$  из условия минимума правой части оценки (6) и подставляя это  $h(\delta)$  в (6), получаем оценку сверху в (2).

Из (4), (5) и леммы при  $h = h(\delta)$  получаем оценку снизу в (2).

Теорема доказана.

**Замечание.** Если вместо  $T_h$  рассмотреть модифицированный оператор Стеклова  $\tilde{S}_h$  из [2] и провести рассуждения по той же схеме, то приходим к оценке

$$2^{-1/3}\delta^{2/3} \leq \Delta(\delta, \tilde{S}_h, Lip_1 1) \leq 3 \cdot 2^{-1/3}\delta^{2/3}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00270).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П., Хромова Г. В. Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 15-й Саратов. зим. школы. Саратов, 27 янв.-3 февр. 2010 г. Саратов : : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. С. 181.
2. Хромова Г. В. О задаче восстановления функций // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.

УДК 517.51

О. И. Шаталина

### МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А. Н. ТИХОНОВА В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В данной статье рассматривается задача восстановления непрерывной функции  $\bar{u}(x)$ , заданной ее  $\delta$ -приближением  $u_\delta(x)$  в метрике пространства  $L_2[0, 1]$ . Приближенное решение этой задачи находится методом регуляризации А. Н. Тихонова, которому соответствует множество операторов  $T_\alpha$  [1]. По Тихонову точное решение должно принадлежать пространству  $W_2^1[0, 1]$ . Но в [2] доказано, что это ограничение можно снять, и сходимость приближенных решений имеет место для любой непрерывной функции  $\bar{u}(x)$ . При этом берется случай, когда функционал Тихонова представим в виде

$$M_\delta^\alpha[u, u_\delta] = \|u - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|u\|_{W_2^1}^2, \alpha > 0. \quad (1)$$

Приближенное решение задачи восстановления находится из последовательности функций  $u_\delta^\alpha(x)$ , минимизирующих функционал (1). Пусть функция  $\bar{u}(x)$  удовлетворяет краевому условию  $\beta_1\bar{u}(0) + \beta_2\bar{u}(1) = 0$ . Случай  $\beta_2 = 0$  рассмотрен в [3]. Переходя к уравнению Эйлера для функционала (1), получаем, что  $u_\delta^\alpha$  является решением краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} -y'' + \alpha_1^2 y = \frac{1}{\alpha} u_\delta, \\ \beta_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \\ \beta_2 y'(0) + \beta_2 y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 1}$ .

Справедлива

**Теорема.** Если функция  $\bar{u}(x)$  удовлетворяет краевому условию  $\beta_1\bar{u}(0) + \beta_2\bar{u}(1) = 0$ , то семейство регуляризующих операторов для метода Тихонова имеет интегральный вид и представим в виде

$$T_\alpha u_\delta = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 G(x, t, -\frac{1}{\alpha}) u_\delta(t) dt,$$

где

$$G(x, t, -\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{2\alpha_1 A} \begin{cases} -\frac{3}{4} \text{sh}\alpha_1(x-t)A + C(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, x, t) & t \leq x \\ -\frac{3}{4} \text{sh}\alpha_1(t-x)A + C(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, x, t), & t \geq x \end{cases} \quad (3)$$

$$A(\alpha_1, \beta_1, \beta_2) = (\beta_1^2 + \beta_2^2) \text{ch}\alpha_1 + 2\beta_1\beta_2.$$

$$\begin{aligned} C(\alpha_1, \beta_1, \beta_2, x, t) = & \text{sh}\alpha_1(t+x)[(\beta_1^2 - \beta_2^2) \text{ch}\alpha_1] + \\ & + \text{ch}\alpha_1(x-t)[(\beta_1^2 + \beta_2^2) \text{sh}\alpha_1] - \\ & - \text{ch}\alpha_1(x+t)[(\beta_1^2 - \beta_2^2) \text{sh}\alpha_1]. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Интегральный вид операторов  $T_\alpha$  следует из (2). Применяется метод вариации произвольных постоянных. Решение дифференциального уравнения ищется в виде суммы:

$$y(x) = C_1(x)e^{\alpha_1 x} + C_2(x)e^{-\alpha_1 x}.$$

Для  $C_1^1(x)$  и  $C_2^1(x)$  согласно этому методу справедлива система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{\alpha_1 x} + C_2'(x)e^{-\alpha_1 x} = 0 \\ -C_1'(x)\alpha e^{\alpha_1 x} + C_2'(x)\alpha e^{-\alpha_1 x} = \frac{1}{\alpha}u_\delta, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\begin{cases} C_1(x) = -\frac{1}{2\alpha_1} \int_0^x u_\delta(t)e^{-\alpha_1 t} dt + C_1^0, \\ C_2(x) = \frac{1}{2\alpha_1} \int_0^x u_\delta(t)e^{\alpha_1 t} dt + C_2^0. \end{cases}$$

$C_1^0$  и  $C_2^0$  вычисляются при проверке краевых условий.

Найденное решение выглядит в виде суммы четырех слагаемых, где каждое представимо интегралом либо по отрезку  $[0, x]$ , либо по отрезку  $[0, 1]$ . Раскладывая интегралы по полному отрезку  $[0, 1]$  на суммы двух интегралов по отрезку  $[0, x]$  и по отрезку  $[x, 1]$  и перегруппировывая слагаемые, окончательно получаем

$$y(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x G(x, t, -\frac{1}{\alpha})u_\delta(t)dt + \frac{1}{\alpha} \int_x^1 G(x, t, -\frac{1}{\alpha})u_\delta(t)dt,$$

где функция  $G(x, t, -\frac{1}{\alpha})$  из первого интеграла — это функция Грина при  $t \leq x$ , а функция  $G(x, t, -\frac{1}{\alpha})$  из второго интеграла — функция Грина при  $t \geq x$ .

Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
2. Хромова Г. В. О тихоновской регуляризации // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2001. Сер. Математика. Механика. Т. 1, вып. 1. С. 75–78.
3. Хромова Г. В., Шаталина О. И. Решение задачи типа Колмогорова — Никольского для регуляризирующих операторов Тихонова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2001. Сер. Математика. Механика. вып. 13. С. 121–123.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА // ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ // С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В статье рассматриваются дифференциальные операторы второго порядка с постоянным запаздыванием. Исследуется обратная спектральная задача восстановления операторов по их спектрам. Дифференциальные уравнения с запаздыванием возникают в различных задачах математики и приложениях (см. [1, 2] и литературу в них). Обратные спектральные задачи для классических операторов Штурма — Лиувилля изучены достаточно подробно [3]. Наличие запаздывания в математической модели приводит к существенным качественным изменениям в исследовании обратных задач спектрального анализа, и в настоящее время отсутствуют серьезные результаты в этом направлении.

Пусть  $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 1}$ ,  $(j = 0, 1)$  — собственные значения краевых задач  $L_j(q)$ :

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \quad (1)$$

где  $q(x) \in L(a, \pi)$ ,  $a \in (0, \pi)$  и  $q(x) \equiv 0$  при  $x \in [0, a]$ . Пусть  $N \in \mathcal{N}$  такое, что  $aN < \pi \leq a(N+1)$ . Пусть  $S(x, \lambda)$  — решение уравнения (1) при условиях  $S(0, \lambda) = 0$ ,  $S'(0, \lambda) = 1$ . Тогда

$$S(x, \lambda) = S_0(x, \lambda) + S_1(x, \lambda) + \dots + S_N(x, \lambda), \quad (2)$$

где  $S_0(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho}$ ,  $x \geq 0$ ,  $\lambda = \rho^2$ ,

$$S_k(x, \lambda) = \int_{ka}^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t) S_{k-1}(t-a, \lambda) dt, \quad (3)$$

$$x \geq ka, S_k(x, \lambda) = 0, \quad x \leq ka,$$

при  $k \geq 1$ . В частности,

$$S_1(x, \lambda) = -\frac{\cos \rho(x-a)}{2\rho^2} \int_a^x q(t) dt + \frac{1}{2\rho^2} \int_a^x q(t) \cos \rho(2t-x-a) dt. \quad (4)$$

Используя (3),(4), можно показать по индукции, что



$$S_k^{(j)}(x, \lambda) = O(\rho^{j-k-1} \exp(|\operatorname{Im} \rho|(x - ka))), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad x \geq ka. \quad (5)$$

Обозначим  $\Delta_j(\lambda) := S^{(j)}(\pi, \lambda)$ ,  $j = 0, 1$ . Функции  $\Delta_j(\lambda)$  являются целыми по  $\lambda$  порядка  $1/2$ . Нули  $\Delta_j(\lambda)$  совпадают с собственными значениями  $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 1}$  задач  $L_j(q)$ . Функция  $\Delta_j(\lambda)$  называется характеристической функцией задачи  $L_j(q)$ . Учитывая (2), (4) и (5), выводим следующие асимптотические формулы при  $|\rho| \rightarrow \infty$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0(\lambda) &= \frac{\sin \rho \pi}{\rho} - \frac{\cos \rho(\pi - a)}{2\rho^2} \int_a^\pi q(t) dt + \\ &\quad + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\operatorname{Im} \rho|(\pi - a))\right), \\ \Delta_1(\lambda) &= \cos \rho \pi + \frac{\sin \rho(\pi - a)}{2\rho^2} \int_a^\pi q(t) dt + \\ &\quad + o\left(\frac{1}{\rho} \exp(|\operatorname{Im} \rho|(\pi - a))\right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Используя (6), получаем асимптотические формулы для собственных значений  $\lambda_{nj} = \rho_{nj}^2$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\left. \begin{aligned} \rho_{n0} &= n + \frac{\cos na}{2\pi n} \int_a^\pi q(t) dt + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \rho_{n1} &= \left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{\cos(n - 1/2)a}{2\pi n} \int_a^\pi q(t) dt + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

**Лемма 1.** *Задание спектра  $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 1}$ ,  $j = 0, 1$ , однозначно определяет характеристическую функцию  $\Delta_j(\lambda)$  по формуле*

$$\Delta_0(\lambda) = \pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n0} - \lambda}{n^2}, \quad \Delta_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1} - \lambda}{(n - 1/2)^2}.$$

Обозначим  $\mathcal{L}(\rho) := \Delta_1(\lambda) + i\rho\Delta_0(\lambda)$ . Функция  $\mathcal{L}(\rho)$  является характеристической функцией для краевой задачи типа Редже  $L(q)$  для уравнения (1) с краевыми условиями  $y(0) = y'(\pi) + i\rho y(\pi) = 0$ . Из (2) следует, что

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathcal{L}_0(\rho) + \mathcal{L}_1(\rho) + \dots + \mathcal{L}_N(\rho), \quad (8)$$

где  $\mathcal{L}_k(\rho) = S'_k(\pi, \lambda) + i\rho S_k(\pi, \lambda)$ . В частности,  $\mathcal{L}_0(\rho) = \exp(i\rho\pi)$ . Используя (3), вычисляем

$$\mathcal{L}_k(\rho) = \int_{ka}^\pi \exp(i\rho(\pi - t))q(t)S_{k-1}(t - a, \lambda) dt, \quad k \geq 1. \quad (9)$$

Кроме того, из (4) вытекает, что

$$\mathcal{L}_1(\rho) = \frac{\exp(i\rho(\pi - a))}{2i\rho} \int_a^\pi q(t) dt - \frac{\exp(i\rho(\pi + a))}{2i\rho} \int_a^\pi q(t) \exp(-2i\rho t) dt. \quad (10)$$

Учитывая (9) и (5), получаем

$$\mathcal{L}_k(\rho) = O\left(\frac{1}{\rho^k} \int_{ka}^\pi q(t) \exp(-i\rho(2t - \pi - ka)) dt\right), \\ \text{Im } \rho \geq 0, |\rho| \rightarrow \infty, k \geq 1.$$

Пусть  $\{\tilde{\lambda}_{nj}\}_{n \geq 1}$ ,  $j = 0, 1$  – собственные значения краевых задач  $\tilde{L}_j = L_j(\tilde{q})$  с  $\tilde{q}(x) \equiv 0$ . Обозначим  $\tilde{\mathcal{L}}(\rho)$  – характеристическая функция для  $\tilde{L} = L(\tilde{q})$ .

**Теорема 1.** Если  $\lambda_{nj} = \tilde{\lambda}_{nj}$  при всех  $n \geq 1$ ,  $j = 0, 1$ , то  $q(x) = 0$  п.в. на  $(a, \pi)$ .

**Доказательство.** В силу леммы 1 имеем  $\mathcal{L}(\rho) = \exp(i\rho\pi)$ . Используя (8), выводим

$$\mathcal{L}_1(\rho) = -\mathcal{L}^+(\rho), \quad \mathcal{L}^+(\rho) := \sum_{k=2}^N \mathcal{L}_k(\rho). \quad (11)$$

Из (7) следует, что  $\int_a^\pi q(t) dt = 0$ . Вместе с (10) это дает

$$\mathcal{L}_1(\rho) = -\frac{\exp(i\rho(\pi + a))}{2i\rho} \int_a^\pi q(t) \exp(-2i\rho t) dt.$$

При  $N = 1$  теорема очевидна. Ниже будем предполагать, что  $N \geq 2$ .

**Лемма 2.** Если  $q(x) = 0$  п.в. на  $(2a, \pi)$ , то  $q(x) = 0$  п.в. на  $(a, \pi)$ .

В самом деле, пусть  $q(x) = 0$  п.в. на  $(2a, \pi)$ . Тогда в силу (9)  $\mathcal{L}_k(\rho) \equiv 0$  при  $k \geq 2$ , поэтому  $\mathcal{L}^+(\rho) \equiv 0$ . Вместе с (11) это дает  $\mathcal{L}_1(\rho) \equiv 0$ , и следовательно,  $q(x) = 0$  п.в. на  $(a, \pi)$ .

Для определенности предположим, что  $N = 2M + 1$ ,  $M \geq 1$ , т.е.  $N$  нечетно (случай четного  $N$  требует небольших технических изменений).

**Лемма 3.** Зафиксируем  $\nu = \overline{0, 2M - 1}$ . Если  $q(x) = 0$  п.в. на интервале  $(\pi - \nu a/2, \pi)$ , то  $q(x) = 0$  п.в. на интервале  $(\pi - (\nu + 1)a/2, \pi)$ .

Применяя лемму 3 последовательно при  $\nu = 0, 1, \dots, 2M - 1$ , получаем, что  $q(x) = 0$  п.в. на интервале  $(\pi - Ma, \pi)$ .

**Лемма 4.** Если  $q(x) = 0$  п.в. на интервале  $(\pi - Ma, \pi)$ , то  $q(x) = 0$  п.в. на интервале  $((M + 2)a/2, \pi)$ .

Если  $M = 1$  или  $M = 2$ , то мы доказали, что  $q(x)$  п.в. на  $(2a, \pi)$ . Согласно лемме 2 заключаем, что  $q(x)$  п.в. на  $(a, \pi)$ . Итак, теорема 1 доказана для  $M = 1$  и  $M = 2$ . Пусть теперь  $M \geq 3$ . Зафиксируем  $\nu = \overline{5, M + 2}$ . Обозначим  $s := [(\nu + 1)/2]$ . Ясно, что  $s < \nu$ .

**Лемма 5.** Если  $q(x) = 0$  п.в. на интервале  $(\nu a/2, \pi)$ , то  $q(x) = 0$  п.в. на интервале  $(sa/2, \pi)$ .

Применяя лемму 5 последовательно несколько раз, начиная с  $\nu = M + 2$ , приходим к соотношению  $q(x) = 0$  п.в. на  $(2a, \pi)$ . Тогда, в силу леммы 2,  $q(x) = 0$  п.в. на интервале  $(a, \pi)$ . Теорема 1 доказана.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Hale J. Theory of functional-differential equations. Springer-Verlag, New-York : 1977.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М. : Наука, 1972.
3. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

УДК 539.3

Н. С. Анофрикова, М. В. Вильде

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ  
ДВУМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГОЙ  
ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ**

В работах [1, 2] описаны асимптотические методы, разработанные для решения двумерных задач для упругих и вязкоупругих однослойных пластин и тонкостенных оболочек с помощью асимптотических методов. В данной статье предложен метод решения модельной задачи об определении двумерной безмоментной составляющей в случае вязкоупругой двухслойной пластины.

Рассмотрим полубесконечную двухслойную пластину, оба слоя которой выполнены из вязкоупругих материалов. Считаем, что вязкоупругое поведение материалов описывается моделью стандартного вязкоупругого тела с условием упругого объемного расширения. Введем декартову систему координат  $(x_1, x_2, z)$ , совмещая плоскость  $Ox_1x_2$  со срединной плоскостью пластины и направляя ось  $z$  по нормали к срединной плоскости. Примем следующие обозначения:  $l$ —номер слоя ( $l = 1, 2$ ),  $2h_l$  — толщина слоя,  $2h$ — толщина пластины. Будем предполагать, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки. Граничные условия на стыке двух слоев пластины — условия непрерывного контакта. Двумерные уравнения для безмоментной составляющей в указанном случае были получены в [3] из трехмерных уравнений вязкоупругости методом асимптотического интегрирования. В случае осесимметричной задачи последние запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \\ 2 [h_1 E_1 f_{21} f_{31} (f_{32}^2 - f_{42}^2) + h_2 E_2 f_{22} f_{32} (f_{31}^2 - f_{41}^2)] \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \\ &= (f_{31}^2 - f_{41}^2)(f_{32}^2 - f_{42}^2) T_1, \\ -2 [h_1 E_1 f_{21} f_{41} (f_{32}^2 - f_{42}^2) + h_2 E_2 f_{22} f_{42} (f_{31}^2 - f_{41}^2)] \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \\ &= (f_{31}^2 - f_{41}^2)(f_{32}^2 - f_{42}^2) T_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $f_{il} = \left( \frac{1}{t_{il}} + \frac{\partial}{\partial t} \right)$ ,  $f_{3l} = \frac{1}{3} \left( \frac{1-2\nu_l}{t_{2l}} + 2\frac{1+\nu_l}{t_{1l}} \right) + \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $f_{4l} = \frac{1}{3} \left( \frac{1-2\nu_l}{t_{2l}} - \frac{1+\nu_l}{t_{1l}} \right) - \nu_l \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $i \neq j = 1, 2$ ;  $l = 1, 2$ ,  $u_1$  — перемещение вдоль оси  $x_1$ ,  $T_i$  — нормальные усилия,  $t_{1l}$  — характерное время релаксации,  $t_{2l}$  — характерное время ползучести,  $E_l, \nu_l$  — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициент Пуассона материала  $l$ -го слоя,  $\rho$  — усредненная плотность, задаваемая формулой

$$\rho = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h}.$$

Предположим, что к торцу пластины  $x_1 = 0$ , находящейся в состоянии покоя в начальный момент времени прикладывается ударное продольное воздействие тангенциального типа, симметричное относительно  $x_2$ . В этом случае граничное условие на торце  $x_1 = 0$  можно взять в виде

$$T_1 = 2hIH(t), \quad (2)$$

где  $I$  — амплитуда,  $H(t)$  — единичная функция Хевисайда.

Начальные условия берем в форме

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{при } t = 0. \quad (3)$$

Таким образом, нам нужно решить систему (1) при граничных условиях (2) и начальных условиях (3).

Перейдем в уравнениях (1), граничных условиях (2) и начальных условиях (3) к безразмерным переменным и к безразмерным параметрам

$$\xi = \frac{x_1}{h}, \tau = \frac{tc}{h}, \tau_{il} = \frac{t_{il}c}{h}, \quad (4)$$

где  $c^2 = \frac{\tilde{E}}{\rho h}$ ,  $\tilde{E} = \sum_{l=1}^2 \frac{E_l h_l}{1-\nu_l^2}$ . Так же введем безразмерные усилия и перемещения

$$T_i = 2\tilde{E}T_i^*, u_1 = hu_1^*. \quad (5)$$

Применим к решению системы уравнений, записанной в безразмерной форме, интегральное преобразование Лапласа по переменной  $\tau$ . В результате получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения изображения перемещения  $u_1^L$ :

$$\frac{d^2 u_1^L}{d\xi^2} - \frac{s^2}{A(s)} u_1^L = 0, \quad (6)$$

где  $s$  — параметр интегрального преобразования и

$$A(s) = \frac{E_1 h_1}{\tilde{E}} \frac{L_{21}}{L_{11}} + \frac{E_2 h_2}{\tilde{E}} \frac{L_{22}}{L_{12}}, L_{1k} = \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1-2\nu_k}{\tau_{2k}} + 2 \frac{1+\nu_k}{\tau_{1k}} \right) + s \right)^2 - \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1-2\nu_k}{\tau_{2k}} - \frac{1+\nu_k}{\tau_{1k}} \right) - \nu_k s \right)^2, \\ L_{2k} = \left( \frac{1}{\tau_{2k}} + s \right) \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1-2\nu_k}{\tau_{2k}} + 2 \frac{1+\nu_k}{\tau_{1k}} \right) + s \right).$$

Выражение для изображения продольного усилия получаем в виде

$$T_1^L = A(s) \frac{du_1^L}{d\xi}. \quad (7)$$

Граничное условие (2) в изображениях принимает вид

$$T_1^L = \frac{Ih}{\tilde{E}s} \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (8)$$

Решение (6) имеет экспоненциальный вид, определяемый квадратным характеристическим уравнением. При построении безмоментного решения, затухающего с удалением от торца  $\xi = 0$ , выбираем корень, имеющий отрицательную действительную часть. Подставляя полученное решение в (7) и удовлетворяя условию (8), получим следующее решение для изображения продольного усилия:

$$T_1^L = \frac{Ih}{\tilde{E}s} \exp \left( \left( -\frac{s}{\sqrt{A(s)}} \right) \xi \right). \quad (9)$$

Решение в оригиналах будем искать с помощью разложения изображений в ряд по отрицательным степеням

$$T_1^L = \frac{Ih}{\tilde{E}s} \exp \left( - \left( s + D_1 - \frac{D_2}{s} \right) \xi \right), \quad (10)$$

$$D_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right), D_2 = \frac{1}{2} D_1^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{c_1}{a_1} - \frac{c_2}{a_2} - 2D_1 \frac{b_2}{a_2} \right), a_1 = (1 - \nu_1^2) (1 - \nu_2^2),$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^2 (n_k + \nu_k m_k) (1 - \nu_l^2), c_1 = \sum_{k=1}^2 (n_k^2 - m_k^2) (1 - \nu_l^2) + 4(n_1 + \nu_1 m_1) (n_2 + \nu_2 m_2),$$

$$a_2 = \sum_{k=1}^2 p_k (1 - \nu_l^2), b_2 = \sum_{k=1}^2 \left( 2p_l (n_k + \nu_k m_k) + p_l \left( n_l + \frac{1}{\tau_{2l}} \right) (1 - \nu_k^2) \right), p_l = \frac{E_l h_l}{\tilde{E}},$$

$$c_2 = \sum_{k=1}^2 \left( p_l (n_k^2 - m_k^2) + 2p_l \left( n_l + \frac{1}{\tau_{2l}} \right) (n_k + \nu_k m_k) + p_l \frac{n_l}{\tau_{2l}} (1 - \nu_k^2) \right),$$

$$n_i = \frac{1}{3} \left( \frac{1 - 2\nu_i}{\tau_{2i}} + 2 \frac{1 + \nu_i}{\tau_{1i}} \right),$$

$$m_i = \frac{1}{3} \left( \frac{1 - 2\nu_i}{\tau_{2i}} - \frac{1 + \nu_i}{\tau_{1i}} \right), i = 1, 2, \quad l \neq k = 1, 2.$$

Воспользуемся формулой обратного перехода (см. [1])

$$\frac{1}{s^{n+1}} \exp \left( - \left( \frac{s}{c} - \frac{g}{s} \right) \xi \right) \Rightarrow \left( \frac{c\tau - \xi}{cg\xi} \right)^{\frac{n}{2}} I_n \left( 2\sqrt{\frac{g}{c}\xi(c\tau - \xi)} \right) H(c\tau - \xi),$$

где  $I_n(t)$  — модифицированные функции Бесселя.

Выпишем окончательное решение, ограничиваясь первым членом ряда:

$$T_1^* = \frac{Ih}{\tilde{E}} e^{-D_1\xi} I_0 \left( 2\sqrt{D_2\xi(\tau - \xi)} \right) H(\tau - \xi). \quad (11)$$

Путем предельного перехода в выражении (11) при  $t_{1l} \rightarrow \infty$  и  $t_{2l} \rightarrow \infty$  можно получить решение для упругой двухслойной пластины. Если кроме того в полученных выражениях положить  $E_1 = E_2$  и  $\nu_1 = \nu_2$ , то придем к соответствующим решениям для случая однослойных пластин.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Karlnov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. Academic Press, San Diego, 1998. 226 p.
2. *Бажанова Н. С., Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С.* Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Изв. высш. учеб. завед. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки. 2000. № 2. С. 17–24.
3. *Анофрикова Н. С., Шевцова Ю. В.* Низкочастотные длинноволновые тангенциальные приближения трехмерных динамических уравнений теории вязкоупругости для случая двухслойных пластин // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып.12. С. 126–130.

## ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ОСИ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Удлиненные цилиндрические оболочки (трубопроводы большого диаметра, горизонтальные резервуары, корпуса летательных аппаратов) под действием поперечных нагрузок изгибаются как балки с деформацией контура поперечного сечения. Форма продольной оси такой оболочки зависит от условий её закрепления как балки. Эти условия эквивалентны действию на оболочку дополнительных нагрузок.

При изгибе кривых труб круглого поперечного сечения [1] эти нагрузки вызывали овализацию поперечного сечения (эффект Т. Кармана), что приводило к появлению напряжений, связанных с деформацией контура поперечных сечений. Эффект Кармана для тонкостенных оболочек, как показали исследования [2,3], может быть оценен с позиций теории оболочек в форме [4].

Решая задачу в рядах, все усилия и перемещения представляются через функцию кольцевых изгибающих моментов

$$m_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \psi_n(x) \cos n\varphi,$$

где  $\psi_n(x)$  — неизвестные функции осевой координаты,  $n = 2, 3, \dots$  — числа натурального ряда. Осевую деформацию продольного волокна оболочки так же представим суммой деформаций, в которую входит радиус кривизны оси оболочки  $\rho$  [3]. Получим систему зацепляющихся дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\psi_n^{IV}(x) + 4k_n^4(1 + \bar{p}_n)\psi_n(x) - \lambda_{n\pm 1}\psi_{n\pm 1}''(x) = 4k_n^4 N(x); \quad (1)$$

$$k_n^4 = \frac{D_2 n^4 (n^2 - 1)^2}{4R^6 E_1 \delta_1};$$

$$\bar{p}_n = \frac{pR^3}{D_2(n^2 - 1)}; \lambda_{n\pm 1} = \frac{a_{n\mp 1} \pm b_{n\mp 1}}{c_n \rho(x)}; N(x) = \begin{cases} \psi_{n0}(x) - \frac{R^3 E_1 \delta_1}{4\rho^2(x)} & (n = 2) \\ \psi_{n0}(x) & (n = 3) \end{cases}$$

где  $p$  — величина внутреннего давления.



В выражении коэффициента  $\lambda_{n\mp 1}$  знак «плюс» соответствует членам  $n - 1$ , знак «минус» — членам  $n + 1$ :

$$\lambda_{n-1} = \frac{1}{\rho(x)R} \frac{n^2(n+1)}{n-2} \Big|_{n \geq 3};$$

Система уравнений (1) в правой части уравнения, соответствующего  $n = 2$ , содержит член, учитывающий закон изменения кривизны оси оболочки, который удобно представлять в виде

$$\rho(x) = \frac{EI}{M(x)},$$

где  $M(x)$  — изгибающий момент в сечении оболочки, деформирующейся как балка;  $EI$  — изгибная жесткость поперечного сечения оболочки с моментом инерции  $I = \pi R^3 \delta_1$ ; зависимость  $M(x)$  определяется методами сопротивления материалов.

Для горизонтальных цилиндрических оболочек длиной  $l$ , края которых шарнирно оперты, поперечной нагрузкой является вес жидкости и оболочки (бака), равномерно распределенные по длине:

$$q = \gamma R^2 f(\beta), f(\beta) = \beta - 0,5 \sin 2\beta,$$

где приведенный удельный вес

$$\gamma = k_6 \gamma_6, k_6 = 1 + m_1/m_6,$$

если  $\gamma_6$  — удельный вес жидкости,  $m_1$  и  $m_6$  — масса бака и масса жидкости. Коэффициент  $k_6$  учитывает увеличение удельного веса жидкости за счет веса бака:

$$k_6 = 1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_6} \frac{2\pi}{f(\beta)} \frac{\delta}{R} \left(1 + k_\partial \frac{R}{l}\right),$$

где  $\gamma_1$  — удельный вес материала бака,  $k_\partial$  — коэффициент формы днища (для плоских днищ  $k_4 = 1$ , для полусферы — 2),  $\beta$  — угол заполнения бака жидкостью ( $\beta=0$  — пустой бак,  $\beta = \pi$  — полный бак). Максимальный изгибающий момент в этом случае соответствует среднему сечению ( $M = ql^2/8$ ). В случаях пустого и полного бака величина грузового члена в (1)  $\psi_{n0} = 0$ .

Напряжения вычислялись по формулам (см. [4]), преобразованным к виду

$$\sigma_1 = \sigma_{10} + \sigma_{14>\text{доп}}; \sigma_2 = \pm \frac{6m_2}{\delta^2}, \text{ где } \sigma_{10} = \frac{M}{I} R \cos \varphi; \sigma_{14>\text{доп}} = -\frac{1,65N}{\delta^2 \sqrt{1+\bar{p}}} \bar{\psi}''(x) \cos 2\varphi;$$

$$m_2 = \frac{N}{1+\bar{p}} [1 + \bar{\psi}_{4>\text{доп}}(x)] \cos 2\varphi;$$

где  $\bar{\psi}''(x), \bar{\psi}_{4>\text{доп}}(x)$  — функции влияния граничных условий, зависящие от параметра  $\frac{l}{R} \sqrt{\frac{\delta}{R}}$ , входящего в коэффициент дифференциального уравнения при длине оболочки  $l$ .

Выразим изгибающий момент, входящий в  $N$ , через осевые нормальные напряжения и, считая  $\bar{p} = 0$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{10 \max} [\cos \varphi - 0, 412A \bar{\psi}''(x) \cos 2\varphi]; \\ \sigma_2 &= \pm \sigma_{10 \max} \{1, 5A [1 + \bar{\psi}_{4>\text{доп}}(x)] \cos 2\varphi\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_{10 \max} = \frac{M}{I} R, A = \frac{\sigma_{10 \max} R}{E \delta}$ .

Результат расчетов по формулам (2) приведен на рис. 1, 2.

Анализ результатов расчета по третьей теории прочности показал, что опасным участком конструкции является внутреннее волокно, соответствующее углу  $\varphi = 0$ . Для оболочек с относительной длиной  $\bar{l} = \frac{l}{R} \sqrt{\frac{\delta}{R}} < 0,4$  учет овализации не целесообразен, так как эквивалентные напряжения практически равны  $\sigma_{10 \max}$ .

Mech/Antonenko/image1.jpg

Рис. 1

Mech/Antonenko/image2.jpg

Рис. 2

Овализация поперечных сечений наиболее опасна для конструкций с параметром  $\bar{l} \approx 3$ . При этом напряжения могут превышать напряжение  $\sigma_{10 \max}$  в три раза. Учет тонкостенности оболочки обязателен при параметре  $A > 0.6$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аксельрад Э. Л., Ильин В. П. Расчет трубопроводов. Л. : Машиностроение, 1972. 240 с.
2. Кан С. Н. несущая способность круговых цилиндрических оболочек при изгибе // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника, 1963. № 4. С. 18–21.
3. Антоненко Э. В. Учет искривления оси в расчете на прочность круговой цилиндрической оболочки // Прикладная механика. 1981. Т. XVII, № 5. С. 83–88.
4. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М. : Машиностроение, 1966. 508 с.

УДК 531.383:532.516

А. Ю. Блинкова

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ВЯЗКО-УПРУГИМИ СТЕНКАМИ ТРУБЫ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ

Волновые процессы в вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках, не взаимодействующих с вязкой жидкостью, рассмотрены в [1–3].

Рассмотрим бесконечно длинную вязкоупругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, x$  записываются в случае осесимметричного течения в виде

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{1}{2} V^2 + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \cdot p = -\nu \text{rot} \text{rot} \bar{V}, \quad (1)$$

$$\text{div} \bar{V} = 0.$$

$\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости

$$V_r = -\frac{\partial W}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_1 - W. \quad (2)$$

Здесь  $V_r, V_x$  — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат;  $t$  — время;  $W$  — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки;  $U$  — продольное упругое перемещение оболочек по оси  $x$ ;  $R_1$  — внутренний радиус оболочки.

Связь между компонентами напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и деформаций зададим уравнениями квадратичной теории вязкоупругости [4], учитывающей линейную упругость объёмных деформаций

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_y) - \frac{E}{1 + \mu_0}\alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)}(1 + a\varepsilon_u^2)e_x d\tau, \quad (3)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu_0^2}(\varepsilon_y + \mu_0\varepsilon_x) - \frac{E}{1 + \mu_0}\alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)}(1 + a\varepsilon_u^2)e_y d\tau. \quad (4)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга,  $\mu_0$  — коэффициент Пуассона материала оболочек (считая их одинаковыми),  $t$  — время;  $\alpha, \beta$  — параметры вязкоупругости;  $\varepsilon_u^2$  — квадрат интенсивности деформаций,  $e_x, e_y$  — компоненты девиатора деформаций:

$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y); \quad e_x = \frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y, \quad e_y = \frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_x. \quad (5)$$

Связь между компонентами деформации  $e_x, e_y$  и перемещениями  $U, W$  — стандартная.

Разлагая функции  $(1 + a\varepsilon_u^2)e_x$ ,  $(1 + a\varepsilon_u^2)e_y$  в ряд Тейлора по степеням  $(t - \tau)$ , при условии  $\beta t \gg 1$  сохраняем два члена разложения их формул (3), получим приближенные уравнения состояния (см. [1–3])

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_y) + p\left[\frac{2}{3}\varepsilon_x - \frac{1}{3}\varepsilon_y + a(e_u^2 e_x)\right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu_0^2}(\varepsilon_y + \mu_0\varepsilon_x) + p\left[\frac{2}{3}\varepsilon_y - \frac{1}{3}\varepsilon_x + a(\varepsilon_u^2 e_y)\right], \end{aligned} \quad (6)$$

где введен оператор  $p$  такой, что

$$pf = \frac{E}{1 + \mu_0}\left(\frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta} f\right). \quad (7)$$

Вычисляя с использованием (6) усилия и моменты по формулам

$$N_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_y dz, \quad M_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_y z dz \quad (8)$$

и подставим (8) в систему уравнений динамики оболочек

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - p_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x, \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} N_x \right) - p_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -q_n. \quad (9)$$

Здесь  $h_0$  — толщина оболочки;  $q_x, q_n$  — напряжения, действующие со стороны жидкости на поверхность оболочки, снесенные на невозмущаемую поверхность оболочки ( $W \ll R$ ),  $R$  — радиус срединной поверхности оболочки.

$$q_x = [\rho\nu(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x})]_{r=R}, q_n = [-\rho + 2\rho\nu\frac{\partial V_r}{\partial r}]_{r=R}$$

За характерную длину примем длину волны деформации  $l$ , перейдем к безразмерным переменным

$$W = w_m u_{30}, U = u_m u_{10}, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{x}{l}, c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1 - \mu_0^2)}},$$

где  $c_0$  — скорость звука в материале оболочки.

Применяя методы возмущений, найдем связь

$$\frac{w_m}{R} u_{30} = \mu_1 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \mu_1 = \frac{\mu_0 + \frac{1}{3}(1 - \mu_0)\frac{\alpha}{\beta}}{1 - \frac{2}{3}(1 - \mu_0)\frac{\alpha}{\beta}},$$

определим безразмерную скорость волны

$$c^2 = [1 - \frac{2}{3}(1 - \mu_0)\frac{\alpha}{\beta}](1 - \mu_1^2)$$

и уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m c}{l \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l}\right)^2 \mu_1^2 \frac{c}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \\ & - \frac{2a}{3\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l}\right)^2 (1 - \mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \frac{1 + \mu_1^4 + (1 + \mu_1)^4}{c} \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ & - \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l \varepsilon} (1 - \mu_0)(1 + \mu_1 + \mu_1^2) \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} - 2[1 - (2\mu_1)^2] \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\xi = x^* - ct^*, \tau = \varepsilon t^*, \quad \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1),$$

а  $\varepsilon$  — малый параметр задачи.

При отсутствии жидкости ( $\rho = 0$ ) последнее слагаемое выпадает и уравнение превращается в модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза — Бюргерса для  $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}$ , имеющее точное частное решение.

В зависимости от физических параметров величина  $\mu_1$  может быть больше  $\frac{1}{2}$ , меньше  $\frac{1}{2}$  или равна  $\frac{1}{2}$ . Последний случай эквивалентен отсутствию жидкости, но означает, что жидкость не влияет на волну деформации.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента (проект МД-1025.2012.8).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. 132 с.
2. *Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН. Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117
3. *Аршинов Г. А., Могилевич Л. И.* Статические и динамические задачи вязкоупругости. Саратов : Сарат. гос. агр. ун-т, 2000. 152 с
4. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязко-упругих материалов. М. : Наука, 1972. 328 с.

УДК 539.3

**Г. М. Иванов**

### **ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАСТЯЖЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ И СВОБОДНЫМ ОТВЕРСТИЯМИ**

В статьях [1–4] разработаны приближенные методы решения обратных задач плоской теории упругости и изгиба тонких изотропных плит для многосвязных областей с неизвестной границей. В данной статье приводится решение задачи по определению равнопрочных контуров двух отверстий в растягиваемой изотропной пластинке при условии, что одно из них подкреплено жестким кольцом, а другое свободно от внешних усилий.

Рассмотрим всестороннее растяжение усилиями  $p$  тонкой изотропной пластинки, ослабленной двумя криволинейными отверстиями, причем размер одного из них значительно превышает размер другого. На первом равнопрочном контуре, подкрепленном жестким кольцом, должны выполняться граничные условия

$$\sigma_r = P; \quad \sigma_\theta = \nu P; \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad (1)$$

а на втором равнопрочном контуре, свободном от внешних усилий, — условия:

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = Q; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $P$ ,  $Q$  — постоянные подлежащие определению.

Пусть формы искомым контуров  $L_1$  и  $L_2$  определяются отображающими функциями

$$z = R_1\omega_1(\zeta_1), \quad z = R_2\omega_2(\zeta_2) + l, \quad (3)$$

где  $l$  — расстояние между центрами отверстий, а  $R_2 > R_1$ .

Граничные условия (1) и (2) на равнопрочных контурах  $L_k$  ( $k = 1, 2$ ) можно представить в виде

$$\operatorname{Re}\Phi(t_k) = A_k; \quad (4)$$

$$\sigma^2\omega'_k(\sigma)(\overline{t_k}\Phi'(t_k) + \Psi(t_k)) = B_k\overline{\omega'_k(\sigma)}. \quad (5)$$

Здесь

$$A_1 = P(1 + \nu)/4; \quad B_1 = -P(1 - \nu)/2; \quad A_2 = Q/4; \quad B_2 = Q/2. \quad (6)$$

Комплексные потенциалы имеют представления [2]

$$\Phi(z) = p/2; \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z). \quad (7)$$

Каждая функция  $\Psi_k(z)$ , характеризующая возмущение напряженного состояния возле соответствующего отверстия, является голоморфной вне его контура и имеет на бесконечности порядок  $O(1/z^2)$ .

Из граничных условий (5) находим величины, определяющие постоянные напряжения в точках каждого из равнопрочных контуров:

$$\sigma_r = P = \frac{2}{1 + \nu}p; \quad \sigma_\theta = \nu P = \frac{2\nu}{1 + \nu}p; \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L_1; \quad (8)$$

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = Q = 2p; \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L_2. \quad (9)$$

Для оставшихся неопределенными функций выберем представления

$$\omega_k(\zeta_k) = \zeta_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{kn}}{\zeta_k^n}; \quad \Psi_k(z) = \Psi_k^*(\zeta_k) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{kn}}{\zeta_k^n}. \quad (10)$$

При удовлетворении граничного условия на контуре большего отверстия пренебрежем возмущением напряженного состояния, вызванного наличием малого отверстия, полагая  $\Psi_1(t_2) = 0$ . Это позволяет достаточно просто найти функции

$$\omega_2(\zeta_2) = \zeta_2; \quad \Psi_2(z) = \frac{B_2 R_2^2}{(z-l)^2}. \quad (11)$$

Следовательно, больший равнопрочный контур, свободный от внешних усилий, является окружностью.

Рассмотрим граничное условие на меньшем подкрепленном равнопрочном контуре. Вблизи этого контура представим функцию  $\Psi_2(z)$  разложением по малому параметру  $\varepsilon_1 = R_1/l$ . С точностью до квадрата этого параметра имеем

$$\Psi_2(t_1) = B_2 \varepsilon_2^2 (1 + 2\varepsilon_1 \omega_1(\sigma) + 3\varepsilon_1^2 \omega_1^2(\sigma) + \dots). \quad (12)$$

Здесь отношение  $\varepsilon_2 = R_2/l$  также является малым (меньшим 1). Функцию  $\Psi_2(z)$  будем считать определенной вторым выражением (12). Используя приближенное представление (13), из граничного условия на меньшем равнопрочном контуре методов рядов для функции, определяющей форму этого контура, найдем следующее приближенное представление:

$$\omega_1(\sigma) = \sigma + \frac{m_{11}}{\sigma} + \frac{m_{12}}{\sigma^2} + \frac{m_{13}}{\sigma^3}. \quad (13)$$

Здесь

$$m_{11} = \frac{\varepsilon_2^2}{(1-\nu)/(1+\nu) - 3\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}; \quad m_{12} = \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \frac{1+\nu}{1-\nu}; \quad m_{13} = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \frac{1+\nu}{1-\nu}. \quad (14)$$

Следовательно, форма подкрепленного равнопрочного контура от относительных размеров отверстий и расстояния между ними, так и от механических свойств материала пластинки.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Иванов Г. М., Космодамианский А. С.* Определение формы равнопрочных отверстий в тонких изотропных плитах // Докл. АН УССР. Сер. «А». 1973, № 7. С. 634–636.
2. *Иванов Г. М., Космодамианский А. С.* Определение формы равнопрочных контуров отверстий, подкрепленных жесткими кольцами // Докл. АН УССР. Сер. «А». 1973. № 10. С. 913–919.
3. *Иванов Г. М., Космодамианский А. С.* Обратные задачи изгиба тонких изотропных плит // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1974, № 5. С. 53–56.
4. *Иванов Г. М.* Обратная задача изгиба изотропной плиты с подкрепленным и свободными отверстиями // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела : материалы IV Междунар. науч. конф., посв. памяти акад. НАН Украины А. С. Космодамианского. Донецк : ООО «Юго-Восток, Лтд», 2006. С. 61–63.



## ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТОВ В КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ

В теории управления движением движущихся аппаратов важное место занимает задача определения ориентации аппарата в инерциальной системе координат по его измеренной абсолютной угловой скорости. Ориентацию твердого тела относительно заданной системы координат можно описать с помощью кватерниона — гиперкомплексного числа, компонентами которого являются параметры Эйлера (Родрига-Гамильтона):

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_i = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  — направляющие косинусы оси конечного поворота,  $\varphi$  — угол конечного поворота вокруг этой оси.

Для кватернионов можно ввести операцию умножения таким образом, что в результате произведения двух кватернионов получается кватернион, соответствующий последовательному применению двух поворотов. Таким образом, в кватернионных переменных  $\boldsymbol{\lambda}$  формула сложения конечных поворотов имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}_{12} = \boldsymbol{\lambda}_1 \circ \boldsymbol{\lambda}_2. \quad (3)$$

Целый класс алгоритмов определения ориентации можно получить, перейдя от классических кватернионных переменных  $\boldsymbol{\lambda}$  к переменным в кососимметрических операторах  $\boldsymbol{x}$ , которые связаны следующим образом:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1 - \|\boldsymbol{x}\| + 2\boldsymbol{x}}{1 + \|\boldsymbol{x}\|}, \quad (4)$$

где  $\|\boldsymbol{x}\| = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

Цель данной работы — получить формулу сложения конечных поворотов в кососимметрических операторах  $\boldsymbol{x}$ , а так же получить ее приближенные аналоги вместе с оценкой их погрешности.

### Получение точной формулы сложения.

Итак, задача состоит в том, чтобы по известным кватернионам  $\boldsymbol{x}_1$  и  $\boldsymbol{x}_2$ , соответствующим двум различным поворотам, найти кватернион  $\boldsymbol{x}_{12}$ , соответствующий сумме этих двух поворотов.

Из формулы (4) можно получить формулу обратного перехода:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathit{vect}(\boldsymbol{\lambda})}{\mathit{scal}(\boldsymbol{\lambda}) + 1}, \quad (5)$$

где  $\mathit{scal}(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0$  — скалярная,  $\mathit{vect}(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$  — векторная части кватерниона  $\boldsymbol{\lambda}$ .

Теперь, воспользовавшись сначала формулой перехода (4), найдем кватернионы  $\boldsymbol{\lambda}_1$  и  $\boldsymbol{\lambda}_2$  как функции от  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  соответственно, затем, пользуясь формулой сложения (3), найдем кватернион  $\boldsymbol{\lambda}_{12}$ , и, наконец, по формуле (5) можно найти искомый кватернион  $\mathbf{x}_{12}$ . Опуская промежуточные вычисления, приведём результат, который можно получить после упрощения выражений:

$$\mathbf{x}_{12} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_1 \|\mathbf{x}_2\| - \mathbf{x}_2 \|\mathbf{x}_1\|}{1 + \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| - 2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)}. \quad (6)$$

### Приближенные варианты формулы сложения.

Формула (6) является довольно громоздкой и неудобной как для теоретических выкладок, так и для программных вычислений.

Будем считать, что рассматриваемые повороты достаточно малы, т.е. углы конечного поворота  $\varphi_i$  имеют малую абсолютную величину. Из соотношений (2) и (5) видно, что при малых углах  $\varphi$  конечного поворота компоненты кватерниона  $\mathbf{x}$  также малы. Поэтому нашей задачей будет получить приближенные варианты формулы (6) при  $|\mathbf{x}_1|, |\mathbf{x}_2| \rightarrow 0$ .

Пусть  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  таковы, что их модули меньше некоторой малой фиксированной константы  $\delta$ :

$$\max(|\mathbf{x}_1|, |\mathbf{x}_2|) < \delta, \quad (7)$$

где  $\delta \ll 1$ .

Тогда в числителе выражения (6) стоит сумма пяти величин:  $O(\delta)$ ,  $O(\delta)$ ,  $O(\delta^2)$ ,  $O(\delta^3)$ ,  $O(\delta^3)$ , а в знаменателе — сумма единицы и двух величин:  $O(\delta^4)$  и  $O(\delta^2)$ . Отсюда следует, что величину знаменателя можно приближенно считать равной единице, а в числителе — оставить только несколько первых слагаемых с наименьшим порядком малости.

Рассмотрим два следующих приближенных выражения, полученных отбрасыванием всех членов, начиная со второго и с третьего порядка соответственно:

$$\mathbf{x}_{12} \approx \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_{12} \approx \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2). \quad (9)$$

Оценим формально погрешность, допускаемую приближенными формулами (8) и (9) по сравнению с точным решением (6).

Разложим в точной формуле (6) знаменатель в ряд Тейлора, оставив только член нулевого порядка:

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_1 \|\mathbf{x}_2\| - \mathbf{x}_2 \|\mathbf{x}_1\| \right) \cdot \\ & \cdot \left( 1 + O \left( \left| \|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\| + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \right| \right) \right) = \\ & = \left( \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_1 \|\mathbf{x}_2\| - \mathbf{x}_2 \|\mathbf{x}_1\| \right) (1 + O(\delta^2)). \end{aligned} \quad (10)$$

Выписывая разность выражения (10) и приближенного решения (8), раскрывая скобки и переходя к оценкам относительно  $\delta$ , получаем, что определяющим членом является слагаемое  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ , являющееся величиной  $O(\delta^2)$ .

Продельвая то же самое с приближенным решением (9), мы получим выражение, в котором останутся только члены третьего и большего порядков малости, т.е. выражение порядка  $O(\delta^3)$ .

Таким образом, приближенные решения (8) и (9) имеют соответственно второй и третий порядок точности.

**Заключение.** В данной статье была получена в явном виде (6) формула сложения конечных поворотов в кососимметрических операторах. Так же получены приближенные варианты этой формулы (8) и (9), и исследована аналитическая погрешность, допускаемая этими формулами.

Простота формулы (9) и то, что она обеспечивает третий порядок погрешности, позволяет использовать ее в аналитических выкладках, а так же при разработке алгоритмов определения ориентации, работающих непосредственно в кососимметрических операторах. Кроме того, эта формула может использоваться в бортовых компьютерах, работающих с высокой частотой дискретизации входных данных.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и динамика движения. М.: Физматлит, 2006.
2. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. М.: Проспект, 2004.

С. В. Иванов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЯЗКОЙ  
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ФИЗИЧЕСКИ  
И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ  
УПРУГОЙ СТЕНКОЙ ТРУБЫ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ  
ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ**

Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, x$  записываются в случае осесимметричного течения в виде

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{1}{2} V^2 + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \cdot p = -\nu \text{rot} \text{rot} \bar{V}, \quad (1)$$

$$\text{div} \bar{V} = 0.$$

Здесь  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости и условия на оси

$$V_r = -\frac{\partial W}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{при } r = R_1 - W; \quad V_r, V_x < \infty \quad \text{при } r = 0. \quad (2)$$

Здесь  $V_r, V_x$  — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат;  $t$  — время;  $W$  — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки;  $U$  — продольное упругое перемещение оболочек по оси  $x$ ;  $R_1$  — внутренний радиус оболочки.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа — Ляве, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений  $\sigma_1$  от интенсивности деформаций  $e_1$  [1-3]

$$\sigma_1 = E e_1 - m e_1^3. \quad (3)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга;  $m$  — константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Уравнения динамики физически нелинейных оболочек с учетом (3) записываются в виде

$$\frac{Eh_0}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0}{24} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right] \{1 - \right.$$

$$\left. - \frac{4m}{3E} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} + \left( \frac{W}{R} \right)^2 \right] \right\rangle - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x;$$

$$\frac{Eh_0}{1-\mu_0} \left\langle \frac{h_0}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{U}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0}{24} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right] \{1 - \right.$$

$$\left. - \frac{4m}{3E} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} + \left( \frac{W}{R} \right)^2 \right] \right\} - \frac{1}{R} \left\{ \mu_0 \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0}{24} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right] - \frac{W}{R} \right\} \{1 +$$

$$\left. + \frac{4m}{3E} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} + \left( \frac{W}{R} \right)^2 \right] \right\rangle - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q_n. \quad (4)$$

Здесь  $\mu_0$  — коэффициент Пуассона;  $R$  — радиус срединной поверхности оболочки;  $\rho_0$  — плотность материала оболочки;  $h_0$  — толщина оболочки;  $q_x, q_n$  — напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения.

Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочек ( $W \ll R$ ), то можно считать, что поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$q_x = \left[ \rho \nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R}, \quad q_n = \left[ -p + 2\rho \nu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R}. \quad (5)$$

За характерную длину примем длину волны  $l$ , перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (4)

$$W = w_m u_{30}, \quad U = u_m u_{10}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}},$$

где  $c_0$  — скорость звука в материале оболочки.

Применяя методы возмущений, найдем связь

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi},$$

определим безразмерную скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2$$

и уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{u_m}{l} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \\ - \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ - 2 \left[ 1 - (2\mu_0)^2 \right] \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 \varepsilon R_1 c_0} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1),$$

а  $\varepsilon$  — малый параметр задачи.

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c\varphi, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau \quad (7)$$

позволяет записать уравнение (6) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} - 6\sigma_1 \varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \sigma \varphi = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\sigma = +1$  (при  $\mu_0 < 1/2$  — неорганические материалы),  $\sigma = -1$  (при  $\mu_0 > 1/2$  — живые организмы) и  $\sigma = 0$  (при  $\mu_0 = 1/2$  — резина), а

$$\sigma_1 = \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \frac{c^2 c_1}{c_2}.$$

Постоянные  $c, c_1, c_2$  определяются через физические константы задачи и  $\sigma$ .

При отсутствии жидкости ( $\rho = 0$ ) последнее слагаемое в уравнении (8) выпадает и оно превращается в модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза, имеющее точное частное решение.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. 132 с.
2. Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН. Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117
3. Москвитин В. В. Сопротивление вязко-упругих материалов. М. : Наука, 1972. 328 с.

И. А. Ковалева

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЯЗКОЙ  
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ФИЗИЧЕСКИ  
И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМИ  
УПРУГИМИ СТЕНКАМИ ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО  
СЕЧЕНИЯ  
ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ**

Рассмотрим бесконечно длинные соосные упругие цилиндрические оболочки, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрических оболочек в перемещениях для модели Кирхгофа — Ляве, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений  $\sigma_1$  от интенсивности деформаций  $e_1$  [1-3]

$$\sigma_1 = Ee_1 - me_1^3. \quad (1)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга;  $m$  — константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Уравнения динамики физически нелинейных оболочек с учетом (1) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{E^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ & + \frac{h_0^{(i)}}{24} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left. \left. \left\{ 1 - \frac{4m^{(i)}}{3E^{(i)}} \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right\} \right] \right\rangle - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = -q_x^{(i)}; \\ & \frac{E^{(i)}h_0^{(i)}}{1-\mu_0^{(i)2}} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{U^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^{(i)}}{24} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left\{ 1 - \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4m^{(i)}}{3E^{(i)}} \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] \} - \frac{1}{R^{(i)}} \{ \mu_0^{(i)} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^{(i)}}{24} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right] - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \} \{ 1 + \\
& \quad + \frac{4m^{(i)}}{3E^{(i)}} \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] \} - \\
& \quad - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} = q_n (-1)^{i-1}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\mu_0^{(i)}$  — коэффициент Пуассона;  $R^{(i)}$  — радиус срединной поверхности оболочки;  $\rho_0^{(i)}$  — плотность материала оболочки;  $h_0^{(i)}$  — толщины оболочек;  $(h_0^{(1)}/2 = R^{(1)} - R_1, h_0^{(2)}/2 = R_2 - R^{(2)})$ ;  $q_x^{(i)}, q_n$  — напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения.

Волновые процессы в упругих оболочках, не взаимодействующих с вязкой жидкостью, рассмотрены в [1, 2].

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, x$  записываются в случае осесимметричного течения в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{1}{2} V^2 + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \cdot p &= -\nu \text{rot} \text{rot} \bar{V}, \\
\text{div} \bar{V} &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости

$$V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_i - W^{(i)}. \tag{3}$$

Здесь  $V_r, V_x$  — проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат;  $t$  — время;  $W^{(i)}$  — прогиб, положительный к центру кривизны оболочки;  $U^{(i)}$  — продольное упругое перемещение оболочек по оси  $x$ ;  $R_1$  — внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2$  — внешний радиус внутренней оболочки ( $R_1 = R_2 + \delta$ );  $\delta$  — толщина слоя жидкости в кольцевом сечении трубы;  $i = 1$  относится к внешней, а  $i = 2$  — к внутренней оболочке.

Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочек ( $W^{(i)} \ll R_i$ ), то можно считать, что поверхностные напряжения со сто-



роны жидкости определяются формулами

$$q_x^{(i)} = \left[ \rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R_i}, \quad q_n = \left[ -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R_i}. \quad (4)$$

Принимая за характерную длину длину волны  $l$  и считая, что соосные оболочки изготовлены из одного материала, то есть, опуская индекс  $i$  у  $E, m, \rho_0, \mu_0$ , перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (2)

$$W^{(i)} = w_m u_{30}^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_{10}^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}},$$

где  $c_0$  – скорость звука в материале оболочки.

Применяя методы возмущений, найдем связь

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi},$$

определим безразмерную скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2$$

и уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{u_m}{l} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} - \\ & - \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \\ & - 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) (-1)^i = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1),$$

а  $\varepsilon$  – малый параметр задачи.

В случае отсутствия жидкости ( $\rho = 0$ ), последние два слагаемых  $\partial u_{10}^{(1)}/\partial \xi - \partial u_{10}^{(2)}/\partial \xi$  в уравнениях (6) исчезают и система распадается на два независимых уравнения МКдВ (модифицированные уравнения Кортевега–де Вриза), каждое из которых имеет точное частное решение в виде кинк–антикинк для  $\partial u_{10}^{(i)}/\partial \xi$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. 132 с.
2. *Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117
3. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязко-упругих материалов. М. : Наука, 1972. 328 с.

УДК 532.5:533.6.011.5

**В. С. Кожанов**

### О ДВУХ РЕЖИМАХ СХЛОПЫВАНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Изучается заключительный (автомодельный) этап схлопывания одномерной сферической полости в идеальной сжимаемой жидкости. Решение строится в предположении, что течение на рассматриваемом этапе не является гомэнтропическим. Проводится сравнение с соответствующими результатами [1], полученными в рамках традиционного подхода, согласно которому течение вплоть до момента фокусировки сохраняет свойство гомэнтропии.

Полная система уравнений, описывающих неустановившиеся одномерные сферически симметричные течения идеального совершенного газа, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{\rho u}{r} = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial c^2}{\partial r} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{r} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho = \rho(r, t)$  — плотность,  $t$  — время,  $u = u(r, t)$  — скорость частицы жидкости,  $r$  — координата,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $c^2 = c^2(r, t)$  — квадрат скорости звука.

Пусть начальная плотность жидкости распределена в пространстве по степенному закону  $\rho_0 = ar^\omega$ ,  $a, \omega = \text{const}$ . Соответствующие автомодельные решения имеют вид ( $\alpha$  — показатель автомодельности)

$$\begin{aligned} r = C(-t)^\alpha \xi, \quad u = -\alpha C(-t)^{\alpha-1} F(\xi), \quad c^2 = \alpha^2 C^2 (-t)^{2\alpha-2} G(\xi), \\ \rho = aC^\omega (-t)^{\alpha\omega} R(\xi), \quad C = \text{const}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\xi$  — независимая автомодельная переменная,  $F(\xi)$ ,  $G(\xi)$  и  $R(\xi)$  — автомодельные представители скорости частицы жидкости  $u$ , квадрата скорости звука  $c^2$  и плотности  $\rho$  соответственно.

Подставляя (2) в (1), получим три обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ), которые с учётом замены  $F(\xi) = \xi V(\xi)$ ,  $G(\xi) = \xi^2 Z(\xi)$  приводят к уравнению на фазовой плоскости  $(V, Z)$  и двум квадратурам:

$$\frac{dZ(V)}{dV} = \frac{Z(V) [[2(1 - \alpha V) - (\gamma - 1)\varkappa] \Delta_0 - (\gamma - 1)(V - 1)\Delta_4]}{[-2\alpha V + \varkappa]\Delta_0 + (V - 1)\Delta_4}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (1 - V)^2 - Z(V), \quad \Delta_4 = 2\alpha V^2 + (1 - 3\alpha - \varkappa)V + \varkappa, \\ \varkappa &= 2(1 - \alpha - \alpha\omega/2)/\gamma. \end{aligned}$$

Введём в рассмотрение энтропийную функцию  $s(r, t)$ :

$$s = p\rho^\gamma = \gamma^{-1}c^2\rho^{1-\gamma}. \quad (4)$$

Подстановка (2) в (4) даёт

$$\begin{aligned} s &= \alpha^2 C^{2+\omega(1-\gamma)} a^{1-\gamma} (-t)^{2\alpha-2+\alpha\omega(1-\gamma)} S(\xi), \\ S(\xi) &= \gamma^{-1} G(\xi) R^{1-\gamma}(\xi). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5), привлекая 1-е соотношение (2), можно восстановить начальный закон распределения  $s$ :

$$s_0 = \alpha^2 C^{2/\alpha} a^{1-\gamma} r^{2-2/\alpha+\omega(1-\gamma)}. \quad (6)$$

Вдоль траектории частицы  $s$  сохраняет постоянное значение, которое соответствует начальному положению частицы в пространстве. Из (6) следует, что в общем случае (при произвольных значениях  $\gamma$ ,  $\omega$  и  $\alpha$ ) частицы, находящиеся до начала процесса на разных расстояниях от центра, будут нести в себе различную энтропию. При этом будет сформирован некоторый профиль  $s(r, t) \neq \text{const}$ . Однако если в начальный момент все частицы будут обладать одинаковой энтропией, то это вместе со свойством сохранения энтропии в частице приведёт к постоянству  $s$  во всей области течения. Такое возможно, если  $s_0$ , определяемое выражением (6), не будет явно зависеть от координаты  $r$ , т.е. если

$$\omega = \omega_h = -\frac{2(1 - \alpha)}{\alpha(1 - \gamma)} < 0. \quad (7)$$

Свойство сохранения энтропии в пространстве носит название *гом-энтропии*. Соответствующий режим течения называется гомэнтропическим, а условие (7) для автомодельных движений является условием гом-энтропии.

В соответствии с традиционным подходом [1, 2] к изучению задачи о схлопывании полости течение предполагается гомэнтропическим вплоть до момента фокусировки полости в центре. Вместо 3-го уравнения (1) используется условие  $\gamma^{-1}c^2\rho^{1-\gamma} = s_0 = \text{const}$ , которое позволяет исключить из рассмотрения плотность. При изучении автомодельных движений оказывается, что требование  $s_0 = \text{const}$  неявно задаёт степенной закон распределения начальной плотности жидкости  $\rho_0 = ar^{\omega_h}$ . Если же потребовать  $\rho_0 = \text{const}$ , то  $\omega = 0$ , и режим схлопывания полости на заключительной стадии в соответствии с (6) уже не будет гомэнтропическим. Отметим, что в рамках автомодельной теории нельзя построить течение с одновременно произвольными начальными профилями плотности и энтропии.

Таким образом, будем рассматривать два режима: 1)  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $s_0 = s_0(r)$  и 2)  $s_0 = \text{const}$ ,  $\rho_0 = \rho_0(r)$ .

Чтобы найти течение в области за границей полости, необходимо при заданных значениях  $\gamma$  и  $\omega$  решить краевую задачу для уравнения (3), связанную с подбором показателя автомодельности  $\alpha$ . При искомом значении  $\alpha$  интегральная кривая уравнения (3), соединяющая точки  $P_1(1, 0)$  и  $P_4(0, 0)$ , будет определённым образом проходить через особую точку типа узел  $P_{23}$  с координатами (см. [1])

$$V_{23} = \left( -B \pm \sqrt{B^2 - 8\alpha\kappa} \right) / (4\alpha), \quad Z_{23} = (1 - V_{23})^2, \quad B = 1 - 3\alpha - \kappa.$$

Точки  $P_1$  и  $P_4$  отвечают граничным условиям на свободной поверхности и на  $\infty$ , точка  $P_{23}$  является образом предельной характеристики (ПХ).

Если  $\gamma_1 \leq \gamma$ , то интегральная кривая должна проходить через точку  $P_{23}$  вдоль уса отдельного направления, а если  $3/2 \leq \gamma < \gamma_1$ , — то вдоль уса общего направления. В случае  $\rho_0 = \text{const}$   $\gamma_1 = 10.0813$ , а в случае  $s_0 = \text{const}$   $\gamma_1 = 8.4635$ . При  $\gamma = 3/2$  показатель  $\alpha = 1$ , откуда следует, что  $\omega_h = 0$ , и решения для двух режимов совпадают. При  $\gamma < 3/2$  искомый показатель  $\alpha > 1$ , т.е. скорость границы полости в центре фокусировки равна нулю.

На рис. 1–4 демонстрируются распределения автомодельных представителей скорости, давления, плотности и энтропийной функции на стадии схлопывания для двух режимов. Сплошные кривые соответствуют 1-му режиму, а пунктирные — 2-му режиму; знаком «□» отмечена граница полости, знаком «◇» — ПХ.

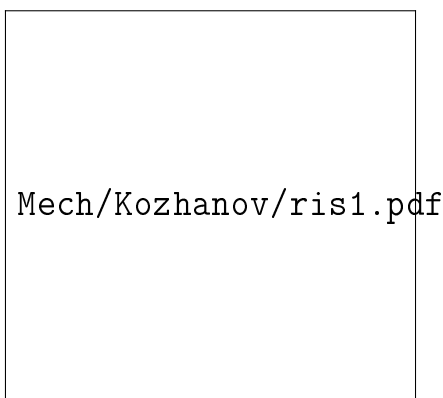


Рис. 1

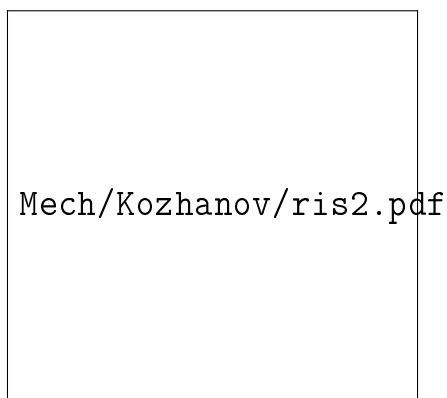


Рис. 2

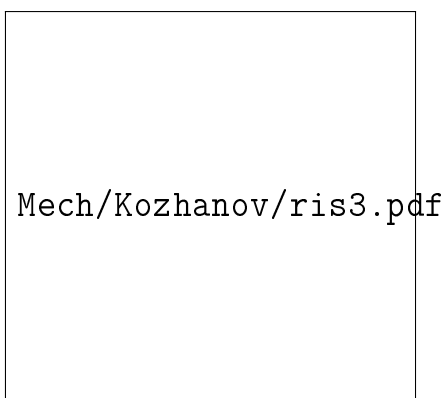


Рис. 3

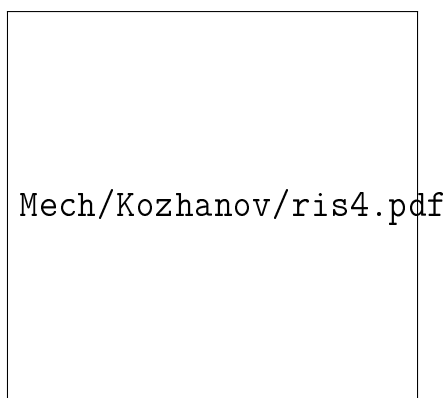


Рис. 4

Из графиков следует, что наиболее существенные отличия в распределении имеют плотность и энтропия. При этом для первой модели энтропия принимает экстремально высокие значения на границе полости. Подобное поведение энтропии наблюдается в центре симметрии при изучении автомодельных задач о сильном взрыве и сходящейся ударной волне для случая негомэнтропических течений. Напротив, в поведении скоростей частиц качественное и количественное различие для двух моделей не существенно.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кожанов В. С.* Расчет отраженных ударных волн в задаче о схлопывании пустой полости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2010. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 10, вып. 1. С. 44–54.
2. *Хантер К.* О захлопывании пустой полости в воде // Механика : период. сб. пер. иностр. ст. 1961. № 3 (67). С. 77–100.

М. Ю. Логинов, Ю. Н. Челноков

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК БИНС,  
ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ В НОРМАЛЬНОЙ  
ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ,  
ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕПОДВИЖНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО  
ЗЕМЛИ ОБЪЕКТА**

При построении и изучении алгоритмов функционирования бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) используются так называемые уравнения идеальной работы БИНС, т.е. дифференциальные и функциональные соотношения, связывающие проекции векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта, измеряемые чувствительными элементами БИНС (при условии их идеального функционирования), с навигационными параметрами (координатами местонахождения и проекциями скорости) и параметрами ориентации объекта. Возможны различные варианты таких уравнений [1–3]. В данной статье используются уравнения идеального функционирования БИНС в нормальной географической системе координат (НГСК), в которых в качестве промежуточных кинематических параметров ориентации используются параметры Эйлера (Родрига — Гамильтона) (см. [3]). Такого рода уравнения используются в настоящее время для построения высокоточных алгоритмов функционирования современных отечественных БИНС, построенных на волоконно-оптических или лазерных гироскопах и кварцевых акселерометрах.

В работе [4] для этих уравнений выведены полные и линеаризованные дифференциальные уравнения ошибок, которые позволяют изучать влияние на работу БИНС погрешностей чувствительных элементов (акселерометров и гироскопов), ошибок начального задания параметров ориентации и навигации, а также законов движения объекта. Для аналитического исследования, как правило, используются линеаризованные дифференциальные уравнения ошибок БИНС.

В некоторых частных случаях движения объекта становится возможным найти аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок. В работе [1] В. Д. Андреевым построены аналитические решения линейных дифференциальных уравнений ошибок определения декартовых координат объекта во вращающейся системе координат, имеющей начало в центре масс Земли и координатные оси, параллельные

осям геоцентрического сопровождающего трёхгранника, для случаев, когда объект неподвижен в инерциальной системе координат; движется с постоянной в инерциальной системе координат скоростью в неподвижной относительно инерциальной системы координат плоскости, проходящей через центр Земли; движется с постоянной скоростью вдоль земной параллели.

С помощью решения, полученного для движения объекта вдоль параллели с постоянной скоростью, В. Д. Андреев находит решение дифференциальных уравнений ошибок для случая неподвижного относительно Земли объекта. При этом для нахождения корней характеристического уравнения интегрируемых уравнений ошибок, которые входят в построенное решение, используются приближённые формулы, полученные с помощью метода Ньютона линейного уточнения корня. Этот случай, таким образом, рассмотрен в приближённой постановке, а для корней характеристического уравнения не получены точные формулы, позволяющие выразить их через коэффициенты исходной системы.

В данной статье рассматривается построенное точное аналитического решение линейных дифференциальных уравнений ошибок БИНС определения криволинейных координат объекта (долготы, широты, высоты) и проекций относительной скорости объекта на оси НГСК (см. [4]), образующих сложную систему уравнений шестого порядка, для случая неподвижного по отношению к Земле объекта при отсутствии погрешностей акселерометров и гироскопов. Найденное решение позволяет установить свойства уравнений функционирования БИНС в данном конкретном случае движения, а также аналитически оценить влияние неточного задания начальных условий интегрирования (погрешностей начальной выставки БИНС) на точность нахождения параметров навигации, и следовательно, может быть использовано при анализе точности работы БИНС, установленной на неподвижном относительно Земли основании.

Решение представлено в удобном для исследования виде, а для нахождения корней характеристического уравнения интегрируемых уравнений ошибок получены в явном виде точные формулы, которые выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} &= \pm\sqrt{\zeta_1}, & \beta_{3,4} &= \pm\sqrt{\zeta_2}, & \beta_{5,6} &= \pm\sqrt{\zeta_3}, & \zeta_1 &= 2\sqrt[3]{L} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - \frac{b}{3}, \\ \zeta_2 &= 2\sqrt[3]{L} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{b}{3}, & \zeta_3 &= 2\sqrt[3]{L} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{b}{3}, \\ L &= \sqrt{-p^3/27}, & \cos\phi &= -q/(2L), & p &= \frac{3c - b^2}{3}, & q &= \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d, \end{aligned}$$

$$b = 4u^2, \quad c = \frac{1}{R_1^*} \left[ \left( 4(u_N^*)^2 - 8(u_H^*)^2 - \frac{3g^*}{R_1^*} \right) g^* - 4u_N^* u_H^* a_{25} \right],$$

$$d = -2(g^*/R_1^*)^3, \quad u_N^* = u \cos \varphi^*, \quad u_H^* = u \sin \varphi^*, \quad u = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1},$$

$$g^* = g_{eo} \tilde{a}^2 (1 + \delta \sin^2 \varphi^*) / (\tilde{a} + H^*)^2, \quad R_1^* = \tilde{a} + H^*, \quad g_{eo} = 9,78049 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{25} = -2g_{eo} \tilde{a}^2 \delta \sin \varphi^* \cos \varphi^*, \quad \tilde{a} = 6378245 \text{ м}, \quad \delta = 5,317 \cdot 10^{-3},$$

где  $\varphi^*$  и  $H^*$  — невозмущённые широта и высота объекта соответственно.

Построенное аналитическое решение выглядит следующим образом:

$$\Delta X(t) = S(t)M\Delta X^0 + \int_0^t S(t-\tau)MB(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$\Delta X(t) = [\Delta v_N(t), \Delta v_H(t), \Delta v_E(t), \Delta H(t), \Delta \varphi(t), \Delta \lambda(t)]^T,$$

$$\Delta X^0 = [\Delta v_N^0, \Delta v_H^0, \Delta v_E^0, \Delta H^0, \Delta \varphi^0, \Delta \lambda^0]^T.$$

Здесь  $\Delta X$  — вектор-столбец, состоящий из погрешностей определения проекций относительной скорости и криволинейных координат местоположения объекта,  $\Delta X^0$  — вектор-столбец, состоящий из начальных погрешностей задания тех же параметров,  $S$  и  $M$  представляют собой матрицы размерности  $6 \times 6$ , элементы которых выражаются через невозмущённые (точные) параметры движения объекта,  $B$  — вектор-столбец, элементы которого выражаются через невозмущённые (точные) параметры движения объекта и погрешности начального задания его ориентации.

Первое слагаемое в правой части (1) описывает ошибки определения проекций относительной скорости и криволинейных координат местоположения объекта, обусловленные неточным заданием начальных значений проекций относительной скорости и криволинейных координат местоположения объекта, а второе слагаемое — ошибки определения этих величин, обусловленные неточным заданием начальной ориентации объекта в инерциальной системе координат.

Анализ построенного решения показывает, что все ошибки включают гармонические колебания с периодами, близкими к периоду Шулера (84,4 мин). Кроме того, собственное движение неустойчиво по всем переменным, а именно  $\Delta v_N$ ,  $\Delta v_H$ ,  $\Delta v_E$ ,  $\Delta H$ ,  $\Delta \varphi$  и  $\Delta \lambda$ .

Отметим, что точные аналитические решения построены авторами статьи не только для случая неподвижного относительно Земли объекта, но и для случаев движения объекта вдоль экватора и вдоль параллели с постоянной скоростью на постоянной высоте.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М. : Физматгиз, 1966.
2. *Бромберг П. В.* Теория инерциальных систем навигации. М. : Наука, 1979.
3. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твёрдого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006.
4. *Челноков Ю. Н., Логинов М. Ю.* Дифференциальные уравнения ошибок корректируемой БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 64–72.

УДК 531.38; 681.5

**Е. И. Ломовцева, Ю. Н. Челноков**

## ПРИМЕНЕНИЕ БИКВАТЕРНИОНОВ В КИНЕМАТИКЕ СТАНФОРДСКОГО РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА

**1. Схема манипулятора и системы координат.** Станфордский манипулятор представляет собой шестизвенный манипулятор, имеющий шесть степеней свободы: пять вращательных и одну поступательную. В качестве обобщенных координат выступают углы  $\varphi_i$  поворота  $i$ -го звена относительно  $i-1$ -го [1]. Схема манипулятора и вводимые системы координат приведены на рисунке.

Mech/Lomovceva/ris.jpg

**2. Прямая задача кинематики.** Для данного манипулятора по известному вектору обобщенных координат

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_6(t)) = \\ = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), d_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t)), \varphi_i = \theta_i$$

и заданным геометрическим параметрам звеньев определить положение и ориентацию схвата манипулятора относительно абсолютной системы координат  $X_0Y_0Z_0$ .

Для решения обратной задачи кинематики используется следующая схема конечных перемещений звеньев манипулятора:

$$X_0Y_0Z_0 \rightarrow X_1Y_1Z_1 \rightarrow X_2Y_2Z_2 \rightarrow X_3Y_3Z_3 \rightarrow \\ \rightarrow X_4Y_4Z_4 \rightarrow X_5Y_5Z_5 \rightarrow X_6Y_6Z_6 \quad (1)$$

Здесь  $X_iY_iZ_i$  — система координат, связанная с  $i$ -ым звеном манипулятора,  $X_0Y_0Z_0$  — система координат, связанная с основанием манипулятора.

В основе решения прямой задачи кинематики лежат соотношения для матрицы дуальных направляющих косинусов углов, бикватерниона и бикватернионных матриц  $M$  и  $N$  типа, построенные с использованием формул сложения конечных перемещений [2]. Матрица дуальных направляющих косинусов, бикватернион и бикватернионные матрицы  $M$  и  $N$  типа конечного перемещения выходного звена (схвата) относительно основания имеют вид

$$C = C_6 \cdot C_5 \cdot C_4 \cdot C_3 \cdot C_2 \cdot C_1, \quad (2)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_5 \circ \Lambda_6, \quad (3)$$

$$M(\Lambda) = M(\Lambda_6) \cdot M(\Lambda_5) \cdot M(\Lambda_4) \cdot M(\Lambda_3) \cdot M(\Lambda_2) \cdot M(\Lambda_1), \quad (4)$$

$$N(\Lambda) = N(\Lambda_1) \cdot N(\Lambda_2) \cdot N(\Lambda_3) \cdot N(\Lambda_4) \cdot N(\Lambda_5) \cdot N(\Lambda_6). \quad (5)$$

Здесь  $C_i, \Lambda_i, M(\Lambda_i), N(\Lambda_i)$  — соответственно матрица дуальных направляющих косинусов, бикватернион и бикватернионные матрицы  $M$  и  $N$  типа конечного перемещения  $i$ -го звена относительно  $i-1$ -го.

В частности, для конечного перемещения первого звена относительно основания они имеют вид

$$C_1 = \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 + sd_1 \cos \varphi_1 & -\cos \varphi_1 + sd_1 \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \cos \varphi_1 - sd_1 \sin \varphi_1 & \sin \varphi_1 + sd_1 \cos \varphi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}(p_1 + s\frac{d_1}{2}q_1) - \frac{1}{2}(p_1 + s\frac{d_1}{2}q_1)i_1 + \frac{1}{2}(q_1 - s\frac{d_1}{2}p_1)i_2 + \\ + \frac{1}{2}(-q_1 + s\frac{d_1}{2}p_1)i_3, \quad (7)$$

$$M(A_1) = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 & -n_1 & n_1 \\ -m_1 & m_1 & n_1 & n_1 \\ n_1 & -n_1 & m_1 & m_1 \\ -n_1 & -n_1 & -m_1 & m_1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$N(A_1) = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 & -n_1 & n_1 \\ -m_1 & m_1 & -n_1 & -n_1 \\ n_1 & n_1 & m_1 & -m_1 \\ -n_1 & n_1 & m_1 & m_1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

где  $p_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2}$ ,  $q_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2}$ ,  $m_1 = \frac{1}{2}(p_1 + s \frac{d_1}{2} q_1)$ ,  $n_1 = \frac{1}{2}(q_1 - s \frac{d_1}{2} p_1)$ ,  $s$  — символ (комплексность) Клиффорда:  $s^2 = 0$ .

**3. Кинематические уравнения движения манипулятора.** Кинематические уравнения были получены из выражений для линейной и угловой скорости выходного звена манипулятора

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi}_1 \bar{k}_0 + \dot{\varphi}_2 \bar{k}_1 + \dot{\varphi}_4 \bar{k}_3 + \dot{\varphi}_5 \bar{k}_4 + \dot{\varphi}_6 \bar{k}_5, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = & \bar{\omega}_1 \times \bar{d}_1 + (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{d}_2 + \dot{d}_3 \bar{k}_2 + (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times (d_3 \bar{k}_2) + \\ & + (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6) \times \bar{d}_6, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\bar{d}_i$  — вектор линейного перемещения  $i$ -го звена манипулятора относительно  $i-1$ -го.

Полученные кинематические уравнения в матричной записи имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{\varphi}_4 \\ \dot{\varphi}_5 \\ \dot{\varphi}_6 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где  $\varphi_i$  — обобщенные координаты манипулятора,  $\omega_k, v_k$  — проекции вектора мгновенной абсолютной угловой и линейной скоростей выходного звена манипулятора на оси связанной со схватом системы координат  $X_6 Y_6 Z_6$ , матрица  $A$  размерами  $6 \times 6$  (якобиан) является сложной функцией обобщенных координат  $\varphi_1, \varphi_2, d_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ .

Соотношения (12) — это кинематические уравнения движения выходного звена робота-манипулятора. Они представляют собой систему шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат  $\varphi_i, d_3$ . Эти уравнения планируются использовать для решения обратной задачи кинематики станфордского ма-

нипулятора с использованием бикватернионной теории кинематического управления [3].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. М. : Мир, 1989. 634 с.
2. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. :Физматлит, 2006. 512 с.
3. Челноков Ю. Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2012. № 5. С. 30–42.

УДК 624.131+539.215

**А. Г. Маркушин**

### **К ПЛАНИРОВАНИЮ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ИСТЕЧЕНИЮ СЫПУЧЕГО ТЕЛА С ТВЕРДЫМ ЗЕРНОМ**

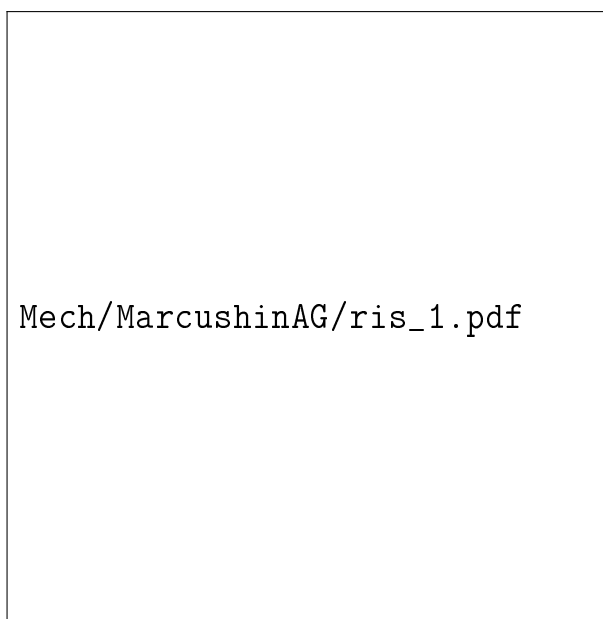
При решении инженерных задач, связанных с проектированием оборудования, взаимодействующего с сыпучими материалами, возникает, как правило, необходимость в знании напряженно-деформированного состояния его конструктивных элементов, что требует, в свою очередь, знания давления сыпучего материала на эти элементы в процессе эксплуатации оборудования. Последнее невозможно без создания теории движения сыпучей среды, адекватно описывающей ее главные свойства, проявляющиеся, например, при истечении из бункерных устройств. К числу таких свойств сыпучего тела относится, прежде всего, свойство образования запирающих динамических сводов, полностью прекращающих истечение или ответственных за явление пульсации при истечении [1]. Поставщиками подобных инженерных задач могут быть пищевая, горно-рудная, топливно-энергетическая промышленности, а также производства строительных машин и механизмов различного назначения и др.

Построение указанной теории начато в работах [2-8]. В качестве поверочного эксперимента для разрабатываемой теории был выбран соответствующим образом обобщенный и усовершенствованный эксперимент Р. Квапила [9].

Под аппаратным обеспечением технических расчетов здесь понимается комплекс специального оборудования, состоящий из экспериментальной установки для исследования истечения сыпучих тел и набора укомплектованных поршнями толстостенных стальных стаканов с полированными внутренними поверхностями, предназначенных для испытания

сыпучих материалов на сжатие с целью определения их механических характеристик.

Приведем описание экспериментальной установки (рисунок) состоящей из: А — рамного стола размерами  $a, b, c$ ; В — демонстрационного шкафа размерами  $H, c, h$ ; С — приемного ящика на колесиках размерами  $a_1, b_1, c_1$ ; D — нижней заслонки; E — растрового затвора, состоящего из двух задвижек, расположенных выше заслонки D и выдвигаемых-задвигаемых с боков шкафа; F — укладочной решетки с размерами  $h_1 = 0.34h$  и  $c_1, H_1$  несколько меньшими  $c, H$ ; G — препятствие для течения материала.



Передняя стенка шкафа В является одновременно остекленной дверкой. В задней стенке шкафа на вертикальной оси его симметрии имеются несколько отверстий, благодаря которым над отверстием выпуска может быть установлена планка — кронштейн длиной  $h$ , представляющая собой препятствие для истекающего материала. Планка может быть установлена над выпускным отверстием на различных высотах и может иметь различную ширину. Предусмотренное препятствие для истекающего сыпучего тела как раз и является обобщением эксперимента Р. Квапила и позволяет сравнивать наблюдаемый экспериментально динамический угол откоса сыпучего тела на этой планке с расчетным, определяемым теоретически решением последовательности соответствующих начально — краевых задач [6-8]. Шкаф В имеет ось вращения Q, жестко связанную со столом А, на который перед засыпкой сыпучего материала он и кладется. Для установки шкафа в строго горизонтальном положении под него должен подкладываться деревянный брусок соответствующих

размеров. При открытой дверке в горизонтально положенный шкаф В засыпается сыпучий неокрашенный материал до высоты  $h_2 = 0.66h$ , и затем вставляется укладочная решетка. В клетки-ячейки укладочной решетки засыпается сыпучий окрашенный и неокрашенный материал (в шахматном порядке). После чего решетка вынимается, дверка закрывается, шкаф В устанавливается в вертикальное положение. Понятно, что перед засыпкой материала с помощью растрового затвора устанавливается нужная ширина выпускного отверстия.

Затем устанавливаются и включаются осветительные приборы и видеокамера с таймером. Выдергивание из пазов заслонки D приводит установку в действие, причем выдергивание производится через щель сзади шкафа.

Размеры установки и ее деталей для проверки теории были выбраны для сыпучего материала «гранитная крошка».

Внутренний диаметр толстостенного стакана для проведения эксперимента на сжатие сыпучего материала с целью определения его механических характеристик: пределов пропорциональности и текучести предполагается взять более чем на порядок большим, чем средний максимальный размер зерна сыпучего материала и таким, чтобы усилия в 50 тонн имеющейся машины сжатия оказалось достаточно для определения предела текучести. Определение необходимых механических характеристик сыпучего тела предполагается осуществить как для материала с естественной укладкой зерен (насыпью), так и для идеально уложенного материала.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Богомягких В. А.* Теория и расчет бункеров для зернистых материалов. Ростов Н/Д : // Изд-во Рост. ун-та, 1973.
2. *Маркушин А. Г.* К построению модели истечения сыпучего материала // Математика, механика и их приложения : материалы науч.-практ. конф. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1998. С. 56.
3. *Маркушин А. Г.* Об алгоритме учета истории нагружения в задаче истечения сыпучего материала //.
4. *Маркушин А. Г.* Алгоритм решения задачи истечения сыпучего тела с твердым зерном // Математика. Механика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 120–126.
5. *Маркушин А. Г.* К построению модели истечения сыпучего материала с твердым зерном // материалы межвуз. науч. конф. Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами. Саратов, март 2000 г. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 74–82.
6. *Контарев А. А., Королева О. А., Маркушин А. Г.* Об уравнениях движения сыпучего тела и их решении средствами теории пластичности при переменных нагружениях // .
7. *Маркушин А. Г.* Метод дополнительных деформаций в решении задачи истечения сыпучего материала с твердым зерном // Математика. Механика. Саратов :

Изд-во. Саратов. ун-та. 2010. Вып. 12. С. 159–164.

8. *Маркушин А. Г.* К разработке динамической теории сыпучего тела с твердым зерном // *Аэродинамика. Ударно-волновые процессы* : межвуз. сб. науч. тр. Саратов, Вып. 15(18). 2001. С. 96.

9. *Биргер И. А.* Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // *Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение*. 1964. № 1. С. 193.

10. *Квапил Р.* Движение сыпучих материалов в бункерах. М. : Госгортехиздат, 1961. -80 с. 33.

УДК 539.3

**В. Ю. Ольшанский, А. В. Серебряков, И. Ф. Паршина**

## **ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ДАТЧИКА ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Рассматривается датчик инерциальной информации. Это устройство предназначено для измерения одного из компонент угловой скорости вращения контролируемого объекта. Конструкция датчика включает в себя чувствительный элемент в форме упругого куба массой  $M$  с ребром  $l$ , а также микроэлектромеханические структуры в виде двух взаимно, перпендикулярных пьезокерамических пластин  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Обе пластины имеют равные толщины  $h_1 = h_2 = h$ . У каждой пластины одно из оснований закреплено, а другое находится в контакте с чувствительным элементом. Контакт реализован так, что на пластины передаются только нормальные механические усилия. На пластину  $\Pi_1$  подается переменный ток. Вследствие этого за счет обратного пьезоэффекта возбуждаются упругие волны, которые вызывают колебания чувствительного элемента. При наличии угловой скорости переносного вращения чувствительный элемент как присоединенная масса воздействует на пластину  $\Pi_2$ . За счет прямого пьезоэффекта в этой пластине генерируется электрический ток. Учитывается, что выбор материала для изготовления чувствительного элемента определяет его податливость, которая в свою очередь влияет на распространение в чувствительном элементе упругих волн и тем самым — на положение его центра масс. Требуется рассчитать амплитудно-частотные характеристики датчика.

Рассматривается связанная динамическая задача электроупругости для системы упругих тел. Микроэлектромеханические структуры (МЭМС) — пластины, у которых по толщине распространяются упругие

волны. Эти волны связаны с электрическим полем за счет явления пьезоэффекта. Рассматривается режим установившихся колебаний, потому что период колебаний пластин мал и за один период угловая скорость  $\Omega$  изменяется незначительно. Учитывается наличие вязкого трения. Выбрав систему координат с осями, нормальными к основаниям пластин, представим упругие перемещения функциями  $u_k(x_k, t)$  и электрические потенциалы — функциями  $\psi_k(x_k, t)$ , где  $k = 1, 2$ .

В безразмерной форме уравнения механических колебаний можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}, k = 1, 2. \quad (1)$$

Для электрических потенциалов используются уравнения вынужденной электростатики [1] в виде

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_k^2} = \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}, k = 1, 2. \quad (2)$$

В формулы (2) входит коэффициент  $k_{33}^2$  — продольный статический коэффициент электромеханической связи. Считается, что обе пластины закреплены на корпусе датчика.

Граничные условия на контакте МЭМС с чувствительным элементом (ЧЭ) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(h_1, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1(h_1, t)}{\partial x_1} &= m \left( -\frac{\partial^2 u_{C1}(t)}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u_{C2}(t)}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial u_2(h_2, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2(h_2, t)}{\partial x_2} &= m \left( -\frac{\partial^2 u_{C2}(t)}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial u_{C1}(t)}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

куда входят безразмерные комплексы  $m = Ms_{33}c^2/Ah$ ,  $\omega = \Omega_3 h/c$ .

Движения центра масс  $C$  ЧЭ получаются в результате осреднения по объему ЧЭ перемещений элементов сплошной среды. Используется приближенная оценка механических колебаний в ЧЭ. При этом полагается, что колебания можно разложить на независимые составляющие  $v_1(x_1, t)$  и  $v_2(x_2, t)$  вдоль осей координат. Тогда

$$\frac{\partial u_{Ck}(t)}{\partial t} = \frac{1}{l} \int_{h_k}^{h_k+l} \frac{\partial v_k(x_k, t)}{\partial t} dx_k, \quad \frac{\partial^2 u_{Ck}(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{l} \int_{h_k}^{h_k+l} \frac{\partial^2 v_k(x_k, t)}{\partial t^2} dx_k, k = 1, 2. \quad (4)$$



Для перемещений  $v_1(x_1, t)$ ,  $v_2(x_2, t)$  приходим к волновым уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + 2\alpha_v \frac{\partial v_k}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2}, k = 1, 2, \quad (5)$$

где величина  $a^2$  определяется отношением скоростей упругих волн в МЭМС и в ЧЭ. К уравнениям (5) добавляются условия неразрывного контакта между пьезопластинами и ЧЭ, а также условия на свободных поверхностях ЧЭ.

Краевая задача решалась для случая, когда внешнее напряжение изменяется по закону  $U(t) = U_0 \sin \beta t$ . Перемещения удается выразить в виде

$$\begin{aligned} u_k(x_k, t) &= 2\operatorname{Re}((A_{k1} \operatorname{ch} \lambda x_k + A_{k2} \operatorname{sh} \lambda x_k) \exp(i\beta t)), k = 1, 2, \\ v_k(x_k, t) &= 2\operatorname{Re}((B_{k1} \operatorname{ch} \mu x_k + B_{k2} \operatorname{sh} \mu x_k) \exp(i\beta t)), k = 1, 2. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулы (6) входят волновые числа  $\lambda$ ,  $\mu$ . Эти величины зависят от упругих и вязких свойств пьезокерамики и материала ЧЭ. Константы  $A_{11}, \dots, B_{22}$  определяются из граничных условий.

Силу тока удается представить [2] в виде

$$I(t) = \left( A \frac{c}{h} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{d_{33}}{s_{33}} \cdot \frac{\partial u_2(h_2, t)}{\partial x_2} - \frac{\epsilon_{33}}{d_{33}} \cdot \frac{\partial \psi_2(h_2, t)}{\partial x_2} \right). \quad (7)$$

Здесь  $d_{33}$  — пьезоэлектрическая постоянная,  $\epsilon_{33}$  — диэлектрическая проницаемость при постоянных деформациях.

Были проведены численные эксперименты и получены амплитудно-частотные характеристики датчика при различных отношениях скоростей упругих волн в МЭМС и ЧЭ. При этом упругие характеристики МЭМС взяты для пьезокерамики марки ЦТС-19. Упругие свойства ЧЭ варьировались в диапазоне значений, которые характерны для соединений на основе кремния. Установлено, что по мере увеличения жесткости ЧЭ расчетные результаты приближаются к полученным ранее [3] для модели с недеформируемым ЧЭ. Так, при  $c_v = 1,6 \cdot c$  наблюдается несколько пиков амплитуд тока. Это объясняется тем, что МЭМС и ЧЭ работают как одно тело, в нем распространяются упругие волны. В случае, когда материал ЧЭ более жесткий по сравнению с пьезокерамикой ( $c_v = 6 \cdot c$ ), выделяется одно пиковое значение, достигаемое при значении вынуждающей частоты  $\beta$ , близком к первой собственной частоте колебаний пластины.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. Киев : Наук. думка, 1989. 280 с.

2. *Ольшанский В. Ю., Серебряков А. В., Абитова И. Ф.* О влиянии граничных условий на динамику чувствительного элемента пьезогироскопа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Сер. Физика. Т. 11, вып. 2. С. 51–54.

3. *Панкратов В. М., Ольшанский В. Ю., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В.* Влияние диссипации на характеристики измерителя угловой скорости на основе взаимного пьезоэффекта // Авиакосмическое приборостроение. 2010. № 8. С. 3–8.

УДК 517.51

**И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков**

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ  
ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ  
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ**

В настоящей статье исследуется следующая задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА): необходимо определить ограниченное по модулю управление  $\mathbf{u}$  :

$$-u_{max} \leq u \leq u_{max} < \infty, \quad u = \pm|\mathbf{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = u\frac{r}{c}\mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2}\mathbf{i}_3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const},$$

из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ \left( \cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

в конечное состояние

$$t = t_1 = ?, \quad \varphi(t_1) = \varphi_1, \quad \text{vect} \left[ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t_1) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] = 0.$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J_1 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt \quad \text{или} \quad J_2 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0.$$

При  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$  имеем задачу быстродействия.

Здесь  $\lambda$  — кватернион ориентации орбитальной системы координат,  $\Lambda$  — кватернион ориентации орбиты КА,  $r$  — модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА,  $c$  — постоянная площадей,  $p$  и  $e$  — параметр и эксцентриситет орбиты,  $\varphi$  — истинная аномалия. Верхняя волна — символ сопряжения. Величины  $c, p, e, \varphi_0, \Lambda^0, \Lambda^*$  — заданы; подлежат определению  $t_1, \varphi_1$  и оптимальный закон управления  $u = u(t)$ .

Поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Понтрягина. Были построены система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных, законы оптимального управления. Исходная задача сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории 10-го порядка. Авторами предложен оригинальный алгоритм численного решения указанных дифференциальных краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА, являющийся комбинацией методов Рунге — Кутты 4-го порядка точности, Ньютона, градиентного спуска. Приводятся примеры расчетов. Построены графики оптимальных траекторий и управлений, функции переключения управления.

Начальные и конечные значения угловых элементов орбиты задавались равными:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= 40.00^\circ, & I_0 &= -70.57^\circ, & \omega_{\pi 0} &= 84.98^\circ; \\ \Omega_1 &= 72.00^\circ, & I_1 &= 47.00^\circ, & \omega_{\pi 1} &= 45.02^\circ.\end{aligned}$$

Здесь  $\Omega$  — долгота восходящего узла,  $I$  — наклонение орбиты,  $\omega_\pi$  — угловое расстояние до перицентра.

Начальное и конечное положения орбиты КА рассчитаны по значениям декартовых координат и проекций скорости КА, приведенным в [1, стр. 95].

Начальное и конечное значения кватерниона ориентации орбиты, соответствующие этим значениям угловых элементов, равны:

$$\begin{aligned}\Lambda^0 &= (0.678275, -0.245862, -0.593909, -0.353860); \\ \Lambda^* &= (-0.440542, -0.522476, -0.125336, -0.719189).\end{aligned}$$

При этом начальное значение кватерниона ориентации орбитальной системы координат равно ( $\varphi_0 = 3.940323$  рад.):

$$\lambda^{(0)} = (0.061834, -0.451574, 0.457446, 0.763545).$$

На рис. 1 приведены результаты решения в безразмерных переменных краевой задачи для функционала  $\int_0^{t_1} (1 + 4.2u^2) dt \rightarrow \min$  ( $e = 0.25$ ),

на рис. 2 — для  $\int_0^{t_1} |u| dt \rightarrow \min$  ( $e = 0.5$ ), на рис. 3 — для случая быстрого действия ( $e = 0.0$ ).  $\mu_j, \nu_j, j = \overline{0,3}$ , — компоненты кватерниона  $\boldsymbol{\mu}$ , сопряженного по отношению к фазовому кватерниону  $\boldsymbol{\lambda}$ , и  $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$  соответственно. Отметим, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях появляется характерный безразмерный параметр  $N = u_{\max} p^3 / c^2$ . При численном решении полагалось, что  $N = 0.35$ .

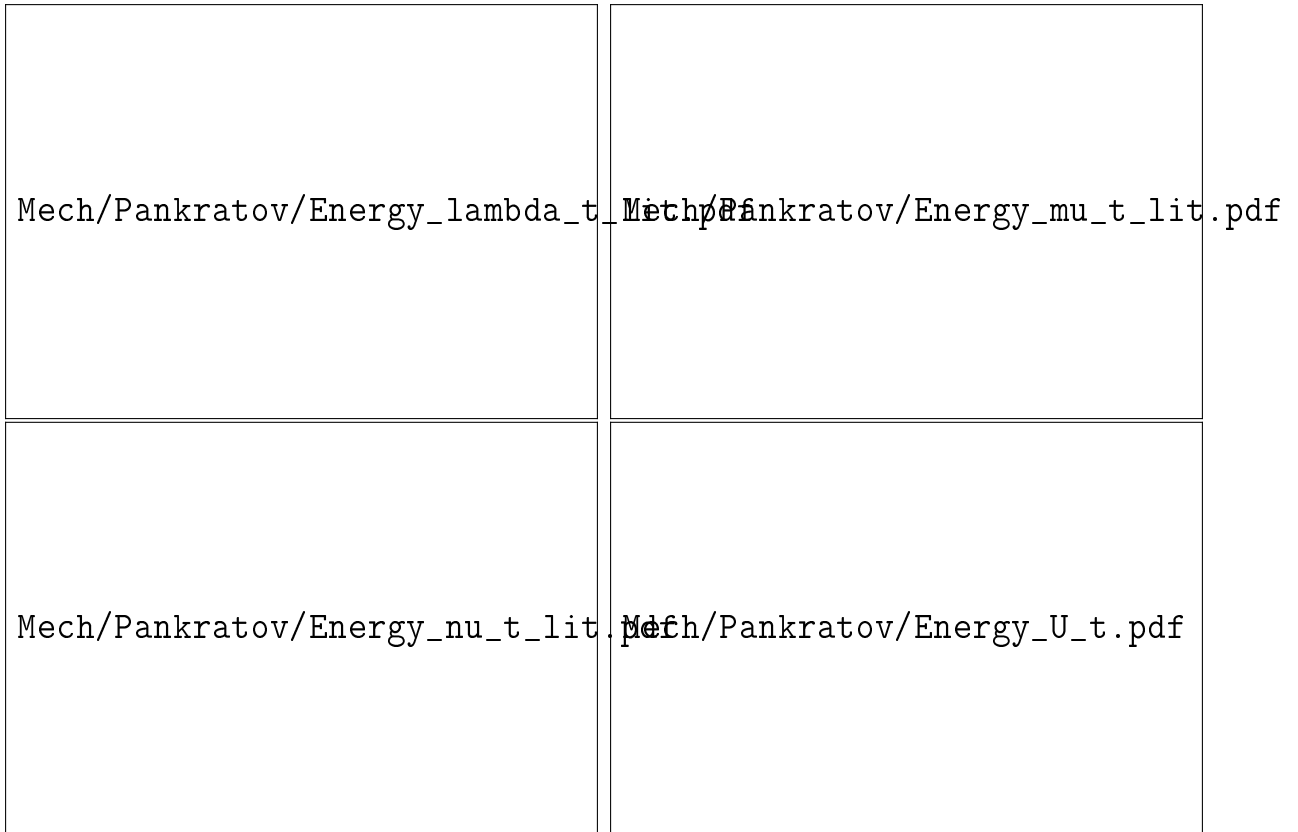


Рис. 1

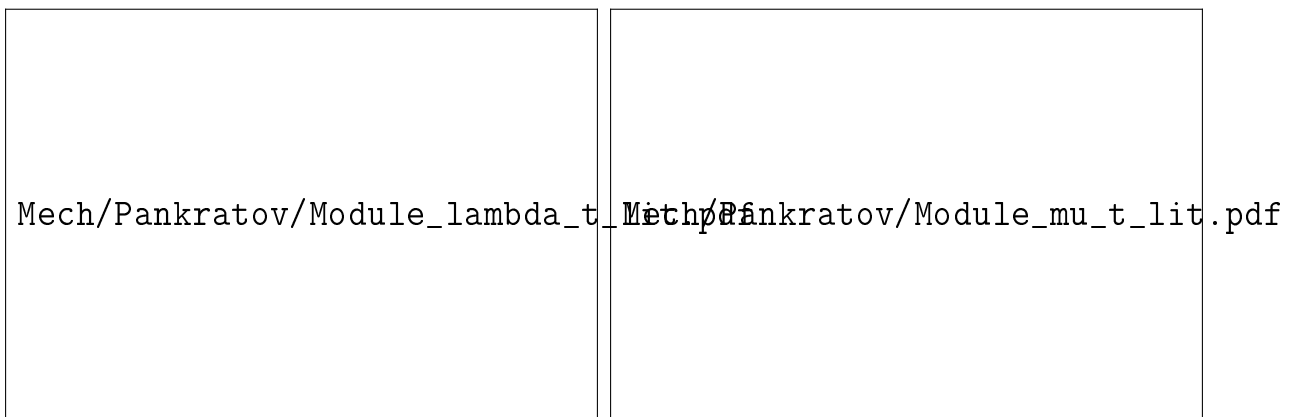


Рис. 2

Mech/Pankratov/Module_nu_t_lit.pdf	Mech/Pankratov/Module_U_t.pdf
------------------------------------	-------------------------------

Продолжение рис. 2

Mech/Pankratov/Time_lambda_t_lit.pdf	Mech/Pankratov/Time_mu_t_lit.pdf
Mech/Pankratov/Time_nu_t_lit.pdf	Mech/Pankratov/Time_U_t.pdf

Рис. 3

Отметим, что длительности процесса переориентации орбиты КА и значения минимизируемых функционалов совпадают с результатами, полученными в [2]. При этом отличаются начальные значения и законы изменения сопряженных переменных.

В работе [3] приведены различные варианты условий трансверсальности для рассматриваемой задачи. Наилучшая сходимость наблюдалась при выборе условий трансверсальности

$$\text{при } t = t_1 \quad 2\chi + \nu_3 = 0, \quad \nu_0 \cos \frac{\varphi}{2} + 2\chi \sin \frac{\varphi}{2} = 0,$$

где  $\chi$  – переменная, сопряженная по отношению к истинной аномалии  $\varphi$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00 165).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бордовицына Т. В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1983. 136 с.
2. *Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.* Численное исследование задачи управления ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 170-173.
3. *Челноков Ю. Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231-234.

УДК 539.3

**Ю. О. Растегаев**

### **ВЛИЯНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО РАСШИРЕНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ НА ВЕЛИЧИНУ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ПЬЕЗОГИРОСКОПА**

В настоящей статье изучается влияние температурного поля на характеристики пьезогироскопа. Учитывается температурное расширение пьезоэлектрических пластинок и несимметричность их расположения по отношению к источнику тепла. Рассматривается модель пьезогироскопа, предложенная в работе [1].

Решение поставленной задачи проводилось в несколько этапов. В первую очередь необходимо было решить подзадачу нахождения температурного поля пьезогироскопа в любой момент времени при различных вариациях конфигурации прибора.

Считаем, что рассматриваемый прибор состоит из  $n$  обособленных частей, далее называемых элементами конструкции (ЭК), каждая из которых представляет собой прямоугольный параллелепипед. При построении температурной модели прибора использовался метод теплового баланса [2]. Для применения метода использовалась трехмерная сетка и все элементы конструкции разбивались на равные кубы. Для каждого элемента разбиения (ЭР) составлялось уравнение теплового баланса. Благодаря данному способу разбиения, каждый ЭР имеет контакт максимум с шестью другими элементами и соприкасается с ними по всей поверхности грани.

Формула для расчета температуры ЭР имеет вид

$$\begin{aligned}
T^{i+1} = T^i + \Delta t \cdot \frac{2}{C_{y\rho} \cdot V_0 \cdot h} \times \\
\times \left[ \frac{S_0}{h} \cdot K \cdot K_L \cdot \frac{T_L^i - T^i}{K + K_L} + \frac{S_0}{h} \cdot K \cdot K_R \cdot \frac{T_R^i - T^i}{K + K_R} + \right. \\
+ \frac{S_0}{h} \cdot K \cdot K_{BK} \cdot \frac{T_{BK}^i - T^i}{K + K_{BK}} + \frac{S_0}{h} \cdot K \cdot K_F \cdot \frac{T_F^i - T^i}{K + K_F} + \\
\left. + \frac{S_0}{h} \cdot K \cdot K_T \cdot \frac{T_T^i - T^i}{K + K_T} + \frac{S_0}{h} \cdot K \cdot K_B \cdot \frac{T_B^i - T^i}{K + K_B} \right]. \quad (1)
\end{aligned}$$

Индексы  $L, R, BK, F, T, B$  — обозначают относительное положение соседних ЭР по отношению к рассматриваемому. L(Left) — элемент слева от текущего, R(Right) — справа, BK(Back) — сзади, F(Front) — спереди, T(Top) — сверху от текущего, B(Bottom) — снизу от текущего. На основе данной модели был написан программный комплекс PiezoGiroscope Temperature Field Calculator 1.1.

В состав PTFC 1.1 входят следующие модули:

1. Модуль визуализации, создающий 3D изображения обсчитываемого прибора, с функциями вращения, приближения и удаления прибора. Величине температуры соответствует градация цвета от синего к красному.
2. Модуль получения графиков изменения температуры со временем в различных ЭР прибора.
3. Модуль, интегрирующий температурную модель и модель пьезогироскопа для расчета выходного сигнала.

Для нахождения величины выходного сигнала в зависимости от амплитуды и частоты гармонического потенциала, возбуждающего плоские деформационные волны в пьезоэлементе на входе в прибор, использовалась следующая математическая модель [3]:

$$\frac{1}{(c^E)^2} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{c^E} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_i^2}, \quad i = 2, 3 \quad (2)$$

Здесь  $\xi(x_i, t)$  — перемещение плоского слоя с координатой  $x_i$  в пластине  $\Pi$ ,  $\alpha$  — коэффициент затухания,  $c^E$  — скорость звука в пьезокерамической пластине. Получена зависимость величины выходного сигнала от температуры. На рисунке показано изменение величины выходного сигнала при изменении температуры и фиксированной частоте, совпадающей с резонансной частотой для  $t=0^\circ\text{C}$ . При достижении  $t=100^\circ\text{C}$  амплитуда уменьшается на 15 %. При температурах порядка  $100^\circ\text{C}$  имеем потерю 1-2%, что является ощутимым для точных приборов.

Mech/Rastegaev/ris1.png

Зависимость выходного сигнала от температуры, учитывающая несимметричное термическое расширение пьезопластин

При нагревании прибора изменятся линейные размеры пластинок, пьезомодуль, модуль Юнга и т.д. На величину выходного сигнала имеет значительное влияние соотношение площадей пьезопластинок [4]. В настоящей статье учтены тепловое расширение пьезопластинок и их различный прогрев, обусловленный несимметричным расположением относительно источника тепла. Как показали численные эксперименты, в приборе размером 20мм x 20мм x 20мм и первоначальной площадью пластин 12 мм разница температур составила 1.5 градуса при максимальной температуре нагрева прибора 75°C. В данном случае неоднородное температурное поле оказывает незначительное влияние на разницу площадей пластин.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нагар Ю. Н., Ольшанский В. Ю., Панкратов В. М., Серебряков А. В.* Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2.
2. *Афонин С. М.* Параметрическая структурная схема пьезопреобразователя // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 6. С. 101–107.
3. *Джашитов В. Э., Панкратов В. М.* Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий //СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор 2005. 404 с.
4. *Растегаев Ю. О.* Влияние геометрических параметров на величину выходного сигнала пьезогироскопа // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд. Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 173–175.



## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КА С КОМБИНИРОВАННОЙ ТЯГОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

В статье для космического аппарата (КА), снабженного солнечным парусом и двигателем малой тяги, с использованием кватернионных элементов орбиты с помощью принципа максимума Понтрягина решена пространственная задача об оптимальном выводе аппарата на заданную круговую орбиту. Даны результаты численного решения.

1. В безразмерных кватернионных элементах орбиты

$$\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3), \mathbf{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$$

движение КА с комбинированной тягой (двигатель малой тяги и солнечный парус) описывается системой уравнений ( $t$  — время,  $\varphi$  — независимая вспомогательная переменная) [1, 2]

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -Q\mathbf{F}_1 \sin \varphi, \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = Q\mathbf{F}_1 \cos \varphi, \frac{dt}{d\varphi} = u^2 \sqrt{2Q},$$

$$Q = A^2 + B^2, \mathbf{q} = P(\mathbf{u}) \left( \mathbf{p} + \varepsilon \frac{(P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{n})^2}{(u^2)^4} \mathbf{n} \right), \mathbf{F}_1 = u^2 \mathbf{q} + (\mathbf{w}, \mathbf{q})\mathbf{w},$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cos \varphi + \mathbf{B} \sin \varphi, \mathbf{w} = -\mathbf{A} \sin \varphi + \mathbf{B} \cos \varphi.$$

Радиус-вектор положения КА  $\mathbf{r}$  и вектор скорости  $\mathbf{v}$  связаны с кватернионными элементами орбиты соотношениями

$$\mathbf{r} = P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{v} = \frac{2}{r(2Q)^{1/2}} P^T(\mathbf{u})\mathbf{w}, P(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_0 \\ -u_3 & -u_0 & u_1 \end{vmatrix}.$$

Безразмерные управляющие векторные параметры, характеризующие малую тягу  $\mathbf{p}$  и единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости солнечного паруса, удовлетворяют ограничениям  $|\mathbf{p}| \leq p_{\max}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ . Размерные масштабные множители для расстояния, скорости, времени, малой тяги и тяги, создаваемой солнечным парусом, определяются выражениями

$$R, (\gamma M/R)^{1/2}, R^{3/2}/(\gamma M)^{1/2}, \gamma M/R^2, p_{\max} = \frac{p_{\max}^*}{\gamma M R^{-2}},$$

$$\mathbf{p}_{\text{сол. пар}}^* = d \frac{\cos^2 \theta}{r^{*2}} \mathbf{n} = d \frac{(R^T(\mathbf{u}^*)\mathbf{u}^*, \mathbf{n})^2}{(u^{*2})^4} \mathbf{n}, \frac{d}{\gamma M} = \varepsilon \ll 1.$$

Здесь  $R$  — масштаб расстояния,  $M$  — масса притягивающего центра,  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $p_{\text{max}}^*$  — максимальное значение малой тяги,  $\mathbf{p}_{\text{сол. пар}}^*$  — величина тяги, которую создаёт солнечный парус (обе тяги отнесены к единице массы КА),  $\theta$  — угол между нормалью к солнечному парусу и радиус-вектором КА,  $d$  — величина, характеризующая размер паруса и массу КА. Состояние КА в начальный момент времени

$$t = 0, \varphi = 0, \mathbf{A} = \mathbf{A}_n, \mathbf{B} = \mathbf{B}_n. \quad (1)$$

Круговая орбита, на которую необходимо перевести КА, характеризуется классическими элементами орбиты  $a = a_k, e = 0, i = i_k, \Omega = \Omega_k$ . Критерий оптимальности процесса управления определяется функционалом с весовыми множителями  $\alpha_i \geq 0, i = 0, 1$ :

$$I = \int_0^{t_k} (\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{p}^2) dt = \int_0^{\varphi_k} (\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{p}^2) u^2 (2Q)^{1/2} d\varphi.$$

Оптимальному процессу соответствует минимальное значение функционала.

**2.** Функция Гамильтона – Понтрягина выражается через сопряженные кватернионные переменные  $\psi_a, \psi_b$ , соответствующие кватернионным элементам  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , по формуле

$$H = -(\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{p}^2) u^2 (2Q)^{1/2} + Q(\mathbf{F}_1, \mathbf{\Pi}), \mathbf{\Pi} = \psi_b \cos \varphi - \psi_a \sin \varphi.$$

Сопряженные переменные удовлетворяют сопряженной системе дифференциальных уравнений.

Условия для фазовых координат на правом конце траектории имеют вид

$$A^2 - a_k = 0, B^2 - a_k = 0, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0, \quad (2)$$

$$l(\mathbf{B}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1) - a_k \sin i_k \sin \Omega_k = 0, l(\mathbf{B}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_3) - a_k \cos i_k = 0.$$

Условия трансверсальности на правом подвижном конце траектории

$$l(\psi_a, \mathbf{A}) + l(\psi_b, \mathbf{B}) = 0, l(\psi_a, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_1) + l(\psi_b, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1) = 0, \quad (3)$$

$$a_k [l(\psi_a, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_3) + l(\psi_b, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_3)] +$$

$$+ l(\mathbf{A}, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_2) [l(\psi_a, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_1) - l(\psi_b, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1)] = 0.$$

Функция Гамильтона – Понтрягина на правом конце траектории удовлетворяет условию

$$H_{\text{opt}} = 0. \quad (4)$$

Оптимальное управление согласно условию максимума для функции Гамильтона – Понтрягина выражается через фазовые и сопряженные переменные [1, 2].

Решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы уравнений для фазовых и сопряженных переменных с граничными условиями (1) в начальный момент времени и условиями (2), (3), (4) в конечный момент времени.

**3. Пример расчета.** Начало декартовой системы координат  $Ox_1x_2x_3$  совпадает с центром притяжения, плоскость  $Ox_1x_2$  совпадает с плоскостью орбиты Земли, на которой находится КА в начальный момент времени. Начальное состояние КА определяется координатами:

$$x_1 = 1.0, x_2 = 0, x_3 = 0, \nu_1 = 0, \nu_2 = 1.0, \nu_3 = 0.$$

Классические элементы конечной орбиты определяются соотношениями

$$a_k = 1.52, e_k = 0, i_k = 4.0^\circ, \Omega_k = 25.0^\circ.$$

Весовые множители в функционале качества процесса:  $\alpha_0 = 0.5$ ,  $\alpha_1 = 1.0$ . Ограничения на управляющие параметры:  $p_{\max} = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . Конечное состояние КА в момент выхода на заданную орбиту при  $t = 3.7376$  определяется координатами

$$x_1 = -1.3263, x_2 = 0.7424, x_3 = -0.0079,$$

$$\nu_1 = -0.3955, \nu_2 = -0.7059, \nu_3 = 0.0564.$$

Время перелета составляет 0.59486 земного года.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00165).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я. Г. Оптимальный вывод на орбиту космического аппарата с комбинированной тягой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 180–183.

2. Сапунков Я. Г. Оптимальное управление движением космического аппарата с солнечным парусом // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 176–179.

Г. Д. Севостьянов

## РАВНОБЕДРЕННАЯ КОНФИГУРАЦИЯ В ПЛОСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ. ЧАСТЬ 2.

В дополнение к работе [1], (где исследованы относительные траектории тел), изучены абсолютные траектории трех тел (относительно центра масс). Интеграл энергии записан в относительных скоростях.

Пусть три тела  $M_0, M_1, M_2$  (с массами  $m_0, m_1, m_2$ ) под действием гравитационных сил движутся в неподвижной плоскости около центра масс  $G$ , образуя *равнобедренную* конфигурацию (с постоянными боковыми сторонами  $\Delta_{01} = \Delta_{02} = a$  и переменными углами).

Такая конфигурация с постоянными углами сводится к равносторонней конфигурации Лагранжа (1772 г.) [2, гл. XXIX, с. 590]. Обзор и методы решения задач даны в [2-7].

Для вектора  $\overrightarrow{GM_0} = \mathbf{r}_0$  имеем уравнение изотропного осциллятора

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_0} = f \frac{m_0}{a^3} (m_1 \Delta_{01} + m_2 \Delta_{02}) = -m_0 k^2 \mathbf{r}_0, \\ k^2 &= \frac{\mu}{a^3}, \quad \mu = f(m_0 + m_1 + m_2), \end{aligned} \quad (1)$$

т.е. тело  $M_0$  движется под действием упругой силы по эллипсу с центром в  $G$ . Центр масс  $\Gamma$  для тел  $M_1$  и  $M_2$  также движется по подобному эллипсу ( $\mathbf{r}_\Gamma = \overrightarrow{G\Gamma} = -\frac{m_0}{m_1+m_2} \mathbf{r}_0$ ).

Так как

$$M_0 \Gamma = \Delta_\Gamma = \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2} r_0, \quad m_1 l_1 = m_2 l_2,$$

где  $l_1 = \Gamma M_1$ ,  $l_2 = \Gamma M_2$ ,  $\Delta = l_1 + l_2 = M_1 M_2$ , то из теоремы косинуса для  $\triangle M_0 \Gamma M_1$  получим ( $\Delta = 2a \cos \varphi$ )  $\Delta_\Gamma^2 = a^2 - l_1 l_2$ .

Тогда

$$l_1 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} (a^2 - \Delta_\Gamma^2)}, \quad l_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2} (a^2 - \Delta_\Gamma^2)}, \quad a > \max \Delta_\Gamma. \quad (2)$$

Таким образом, задача определения положения тел  $M_1$  и  $M_2$  — геометрическая (они — в точках пересечения окружности радиуса  $a$  с центром в  $M_0$  и окружности радиуса  $l_1$  ( $l_2$ ) с центром в  $\Gamma$ ).

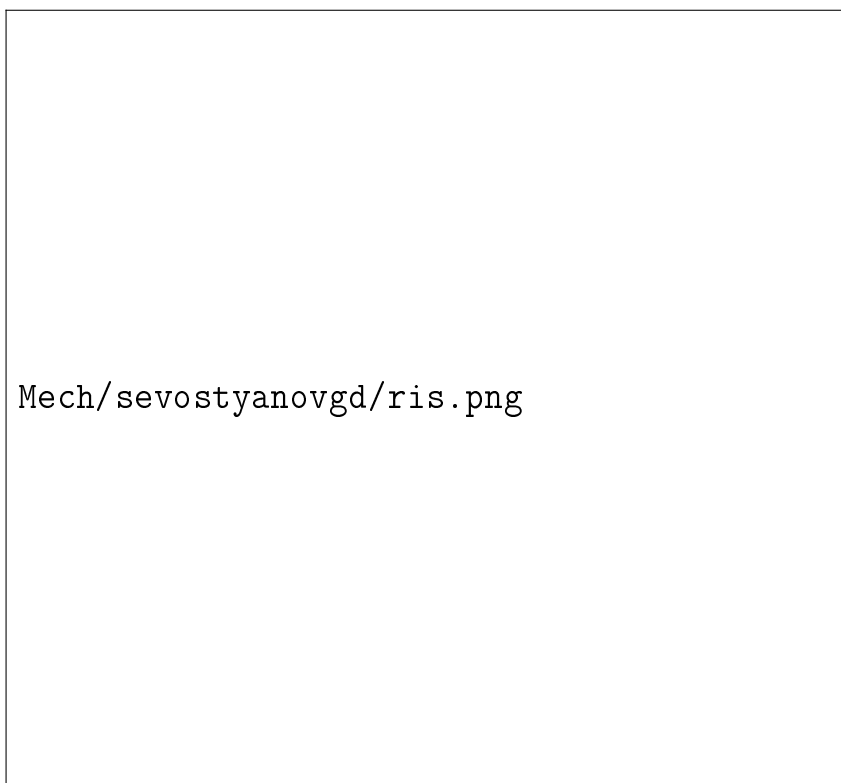
При приближении по эллипсу тела  $M_0$  к  $G$  тела  $M_1$  и  $M_2$  удаляются друг от друга; при удалении  $M_0$  от  $G$  они сближаются. В барицентрической системе  $Gxy$  тело  $M_0(x_0, y_0)$  движется согласно уравнению (1) по закону изотропного осциллятора:

$$x_0 = A \sin(kt + \alpha), \quad y_0 = B \sin(kt + \beta), \quad (3)$$

где постоянные  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  задаются.

При  $B = 0$ ,  $m_1 = m_2$  тело  $M_0$  совершает прямолинейное гармоническое колебание, а другие тела колеблются вдоль симметричных дуг (три тела имеют одновременную остановку, при некотором  $A$  тела  $M_1$  и  $M_2$  касаются).

Иногда одно из тел основания треугольника в общем случае может иметь точки "остановки" (рисунок).



Задача захвата третьего тела системой двух тел имеет свою историю (см. [3, с. 353]).

В задаче одного тела  $M_1$  относительно притягивающего неподвижного центра  $M_0$  траектория будет эллиптической при условии

$$V_1^2 - 2\frac{\mu}{r_1} < 0, \quad \mu = fm_0.$$

В задаче двух тел эллиптическая траектория тела  $M_1$  относительно тела  $M_0$  будет при условии

$$(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)^2 - 2\frac{\mu}{\Delta_{01}} < 0, \quad \mu = f(m_0 + m_1). \quad (4)$$

В задаче трех тел запишем интеграл энергии при движении тел в барицентрической системе координат

$$T + \Pi = E_0,$$

$$T = \frac{m_0 \mathbf{V}_0^2}{2} + \frac{m_1 \mathbf{V}_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathbf{V}_2^2}{2}, \quad (5)$$

$$\Pi = -f \left( \frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_2 m_0}{\Delta_{20}} \right).$$

Умножив интеграл энергии на  $2(m_0 + m_1 + m_2)$ , обозначив  $\mu = f(m_0 + m_1 + m_2)$  и учитывая неподвижность центра масс  $G$  ( $m_0 \mathbf{V}_0 + m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 = 0$ ), получим

$$\begin{aligned} m_0 m_1 \left[ (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)^2 - 2 \frac{\mu}{\Delta_{01}} \right] + m_1 m_2 \left[ (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)^2 - 2 \frac{\mu}{\Delta_{12}} \right] + \\ + m_2 m_0 \left[ (\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_2)^2 - 2 \frac{\mu}{\Delta_{02}} \right] = 2(m_0 + m_1 + m_2) E_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Три тела могут образовать при  $t \rightarrow +\infty$  систему в ограниченной области при отрицательности трех слагаемых в (6) в некоторый момент, когда  $E_0 < 0$ .

Условие выполнено, например, в случае равносторонней конфигурации Лагранжа (стороны постоянны).

Система  $(M_0, M_1)$  может захватить тело  $M_2$ , (см. [6]), если в данный момент времени известны величины относительных скоростей, расстояния между тремя телами и некоторые условия. В случае  $m_2 = 0$  из (6) получим условие (4).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г. Д. Равнобедренная конфигурация в плоской неограниченной задаче трех тел // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 187-189.
2. Парс Л. Аналитическая динамика // пер. с англ. М. : Наука, 1971.
3. Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. Общая и прикладная механика. М. : Наука, ГРФМЛ, 1968.
4. Абалакин В. К. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников М. : Наука, 1976.
5. Маршалл А. Задача трех тел / Пер. с англ. М. : -Ижевск : Ин-т компьют. исслед. 2005.

6. *Тхай В. Н.* Исследование плоской неограниченной задачи трех тел // ПММ : 1996. Т. 60. вып. 3. С. 355–374.

7. *Голубев В. Г., Гребеников Е. А.* Проблема трех тел в небесной механике. М : Изд-во Моск. ун-та, 1985.

УДК 539.3

**Н. В. Сергеева**

## АСИМПТОТИКИ КОРНЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО СЛОЯ

В работах [1-3] на примере упругого слоя и цилиндрической оболочки показана возможность построения дисперсионных кривых с помощью асимптотических приближенных теорий. В [4] приведено численное решение дисперсионного уравнения для наследственно-упругого слоя, материал которого описывается с помощью модели Работнова [5], и его анализ. Настоящая статья посвящена исследованию асимптотического поведения корней дисперсионного уравнения, приведенного в работе [4], при малых частотах.

Будем рассматривать распространение волн в бесконечном наследственно-упругом слое, ограниченном плоскостями  $z = \pm h$ , в направлении оси  $x$  (рис. 1). Свойства материала будем описывать уравнениями состояния, взятыми в интегральной форме. В качестве ядра интегрального оператора возьмем дробно-экспоненциальную функцию Работнова [5]:

$$\mathfrak{D}_{-\frac{1}{2}}(-\beta, t) = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

где  $\beta$  — параметр материала,  $t$  — время.

При изучении собственных колебаний будем исследовать свойства тех мод, которые изменяются по времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения, уравнениям состояния, записанным в перемещениях и напряжениях, и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях. Тогда решение для перемещений  $v_i$  будем искать в виде

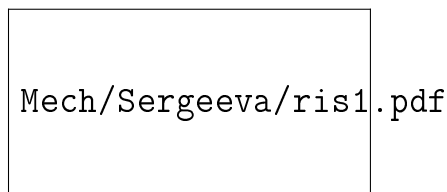


Рис. 1

$$v_i = v_i(z) \exp(i\omega t - (\alpha + i\chi)x), \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота,  $\chi$  — волновое число,  $\alpha > 0$  — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты  $x$ .

Рассмотрим случай симметричного по нормальной координате НДС, когда перемещение  $v_1$  и напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$  являются четными по нормальной координате функциями, а  $v_3$ ,  $\sigma_{13}$  — нечетными. В этом случае приходим к следующему дисперсионному уравнению

$$\gamma^4 \cosh(a) \frac{\sinh(b)}{b} - a^2 \tilde{\chi}^2 \frac{\sinh(a)}{a} \cosh(b) = 0, \quad (2)$$

где  $\gamma^2 = \tilde{\chi}^2 - \frac{\Omega^2}{2}$ ,  $i\tilde{\chi} = \alpha_* + i\chi_*$ ,  $\alpha_* = h\alpha$ ,  $\chi_* = h\chi$ ,  $a^2 = \tilde{\chi}^2 - \kappa_F^2 \Omega^2$ ,  $b^2 = \tilde{\chi}^2 - \Omega^2$ ,  $\kappa_F^2 = \frac{1 - 2\nu^F}{2 - 2\nu^F}$ ,  $\Omega^2 = \omega_*^2 \frac{2(1 + \nu^F)}{(1 + \nu)E^F}$ ,  $\omega_* = \frac{h}{c_2}\omega$ ,  $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \nu)\rho}}$ ,  $\nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}$ ,  $E^F = 1 - \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}$ ,  $k_* = \sqrt{\frac{h}{c_2}}k$ ,  $\beta_* = \sqrt{\frac{h}{c_2}}\beta$ .  $k$  — параметр материала,  $\rho$  — плотность материала. В дальнейшем звездочки опускаем.

Дисперсионное уравнение (2) было решено численно в [4] методом математического микроскопа [6]. Кроме того, был проведен анализ полученных численных решений при различных значениях параметров материала. В данной статье получены асимптотики корней дисперсионного уравнения для малых  $\omega$ .

Анализ уравнения и численного решения показал, что один корень при  $\omega \rightarrow 0$  ведет себя как  $O(\omega)$ , а остальные имеют порядок  $O(1)$ . Поэтому асимптотики корней при  $\omega \rightarrow 0$  ищем в виде

$$\chi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_{1m} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad \alpha_1 = \sum_{m=1}^{\infty} d_{1m} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad (3)$$

$$\chi_n = c_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad \alpha_n = d_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \omega^{\frac{m}{2}}, \quad n > 1. \quad (4)$$

Найдем сначала коэффициенты формул (3), для этого подставляем (3) в уравнение (2) и раскладываем функции  $a$ ,  $b$ , гиперболические синусы и косинусы от них в степенные ряды по степеням  $\sqrt{\omega}$ , группируем



элементы с одинаковыми степенями  $\omega$ . Поскольку получившийся степенной ряд по  $\sqrt{\omega}$  равен нулю тождественно только в том случае, когда равны нулю все его коэффициенты, то получаем бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомых коэффициентов разложения. Решая полученную систему, находим следующие асимптотики корней для первых мод в окрестности нулевой частоты с точностью  $O(\omega^2)$ :

$$\chi_1 = c_{12}\omega + c_{13}\omega^{\frac{3}{2}} + O(\omega^2), \quad \alpha_1 = d_{13}\omega^{\frac{3}{2}} + O(\omega^2), \quad (5)$$

где  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $d_{13}$  — функции, зависящие от  $\nu$ ,  $k$ ,  $\beta$ .

Подставляя (4) в уравнение (2), получим бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомых коэффициентов разложения, из которой имеем следующее уравнение для определения нулевых приближений  $c_{n0}$ ,  $d_{n0}$  рядов (4):

$$\sinh(2(c_{n0} + id_{n0})) + (2(c_{n0} + id_{n0})) = 0. \quad (6)$$

Решая уравнение (6) асимптотическим методом, получаем выражения для коэффициентов разложения  $c_{n0}$ ,  $d_{n0}$  в виде

$$c_{n0} = \frac{1}{2} \ln(4\pi n), \quad d_{n0} = \frac{3\pi}{4}n - \frac{\ln(4\pi n)}{4\pi n}.$$

Подставляя  $c_{n0}$ ,  $d_{n0}$  в следующее уравнение системы, находим  $c_{n1}$ ,  $d_{n1}$  и т.д. Асимптотики корней при  $n > 1$  примут вид:

$$\chi_n = c_{n0} + c_{n1}\omega^{\frac{1}{2}} + O(\omega), \quad \alpha_n = d_{n0} + d_{n1}\omega^{\frac{1}{2}} + O(\omega), \quad (7)$$

где  $c_{n1}$ ,  $d_{n1}$  — функции, зависящие от  $\nu$ ,  $k$ ,  $\beta$ , причем  $c_{n1} \ll 1$ ,  $d_{n1} \ll 1$ .

При  $k = 0$  асимптотика корней дисперсионного уравнения, соответствующая первой моде, совпадает с аналогичной асимптотикой, полученной в [1] для случая упругого слоя.



Рис. 2

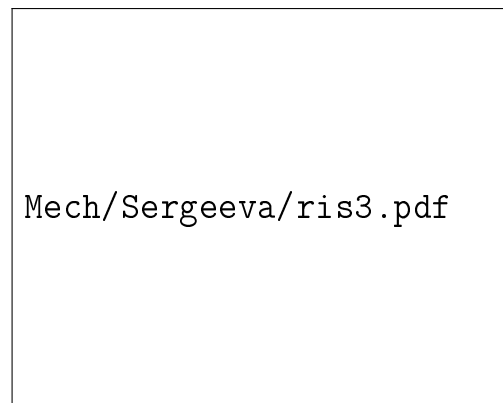


Рис. 3

На рис. 2 приведены проекции на плоскость  $(\omega, \chi)$  ветвей дисперсионного спектра и асимптотик корней для нескольких первых мод для случая  $\nu = 0.3$ ,  $k = 0.53$ ,  $\beta = 1$ . Асимптотики корней изображены серыми линиями. Численные решения представлены черными линиями. На рис. 3 приведены проекции на плоскость  $(\omega, \alpha)$  ветвей дисперсионного спектра и асимптотик корней для нескольких первых мод для того же случая.

Из графиков видно, что численные и асимптотические решения хорошо совпадают на интервале  $0 \leq \omega \leq 0.4$ . А с увеличением номера  $n$  наблюдается расширение интервала совпадения асимптотик с численным решением.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю. Дисперсионные уравнения Релея — Лэмба". Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. 21 с.
2. Karapınar J. D., Kossovich L. Ju., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies Jan Diego : Academic Press, 1998. PP. 226.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев : Наук. думка, 1981. 284 с.
4. Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В. Гармонические волны в наследственно-упругом слое: случай симметричного по нормальной координате НДС //Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 119–122.
5. Работнов Ю. И. Элементы наследственной механики твердых тел. Наука. 1977. 384 с.
6. Березин В. Л., Харитонова К. Ю. Применение метода математического микроскопа при решении трансцендентных уравнений //Проблемы точной механики и управления : Сб. науч. тр./ Институт проблем точной механики и управления РАН. Саратов. 2004. С. 119–122.

УДК 532.5:533.6.011.5

**И. А. Чернов**

#### **ОБ УЧЕТЕ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВЗРЫВЕ С ОБРАЗОВАНИЕМ ПУСТОТЫ В ЦЕНТРЕ ВЗРЫВА**

Л. И Седов и независимо от него Тейлор [1] показали, что при сильном точечном взрыве в случаях показателя адиабаты  $\gamma > 7$  в центре взрыва (ЦВ) возникает пустота, граница которой движется от ЦВ. В статье приведены детали двух типов (с- и без каверны) таких течений в автомобильной постановке, дано обсуждение задачи об учете противодействия для течения с каверной и расчет поправки к автомобильному течению. Обширная библиография по задаче о точечном взрыве есть в [2].

1. Система уравнений, описывающих неустановившиеся одномерные сферически симметричные течения идеального совершенного газа, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\rho u}{r} = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial c^2}{\partial r} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $r$  — координата,  $u = u(r, t)$  — скорость частицы жидкости,  $a^2 = a^2(r, t)$  — квадрат скорости звука,  $\rho = \rho(r, t)$  — плотность,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Если ударная волна (УВ) распространяется по области покоя с  $\rho = \rho_1$ ,  $c = c_1$ ,  $u_1 = 0$ , то сразу за УВ имеем  $u_2$ ,  $\rho_2$ ,  $p_2$  — давление:

$$u_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1 - q}{\sqrt{q}} a_1, \quad \rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2q} \rho_1, \quad p_2 = \frac{2\gamma - (\gamma - 1)q}{(\gamma + 1)q} p_1, \quad (2)$$

где  $q = \frac{a_1^2}{c^2} = \frac{1}{M_1^2}$ ,  $c$  — скорость УВ,  $r_2 = r_2(t)$  — закон движения УВ.

В задаче о точечном взрыве при условии адиабатичности есть 5 определяющих параметров  $\{\gamma, r, t, \rho_1, p_1, E_0 - \text{энергия заряда}\}$ . Так как размерности  $\{\rho_1, p_1, E_0\}$  независимы и их три, а не две, то это означает [1], что задача неавтономельна.

Переход к безразмерным переменным осуществляется введением  $\{\lambda, q\}$  вместо  $\{r, t\}$  по формулам

$$\left\{ \lambda = \frac{r}{r_2(t)}, q \right\} \quad (3)$$

в качестве независимых переменных и

$$f(\lambda, q) = \frac{u}{u_2}, g(\lambda, q) = \frac{p}{p_2} \quad (4)$$

— в роли искомых безразмерных скорости, плотности и давления.

Траектория УВ определяется дифференциальным уравнением (здесь коэффициенты  $A_1, A_2, \dots$  определяют ее отклонение от обобщенной параболы  $r_2 q^{\frac{1}{3}}$ , что реализуется в автомодельном случае (когда пренебрегают давлением  $p_1$  в зоне покоя))

$$r_2 \cdot \frac{d}{dr_2} q = \frac{3q}{1 + A_1 q + \dots}. \quad (5)$$

В [3, с. 44, ф-лы (1.44)] выписана система трех дифференциальных уравнений, эквивалентная системе (1) для  $\{f, g, h\}$  в зависимости от  $\{\lambda, q\}$ .

Решение задачи о точечном взрыве представляют в виде асимптотических рядов (см. [3]) по степеням  $q$ :

$$\{f, g, h\}(\lambda, q) = \{f_0, g_0, h_0\}(\lambda) + q \{f_1, g_1, h_1\} + O(q^2). \quad (6)$$

Функции

$$\{f_0, g_0, h_0\}$$

это автомодельное решение Седова-Тейлора [1]. Удивительно то, что это решение записывается в явной аналитической форме. В фазовых переменных

$$V = \frac{f_0(\lambda)}{\lambda}, z = \frac{h_0(\lambda)}{\lambda^2 g_0(\lambda)} \quad (7)$$

оно сводится к алгебраической кривой третьего порядка ( $ga = \gamma$ ):

$$z(V) = -\frac{V^2(-ga + 2V - 1)}{-1 - ga + 2gaV} \quad (8)$$

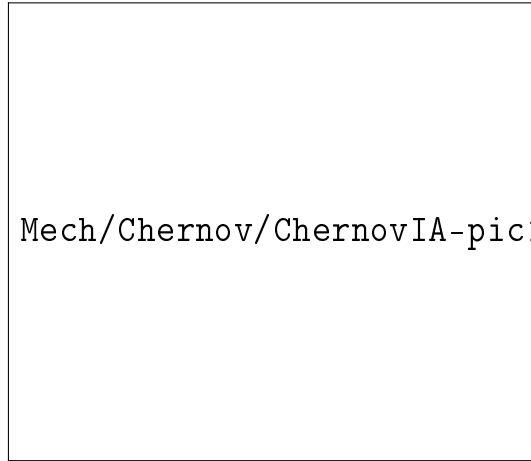


Рис. 1

На рис. 1 показаны кривые (8) для  $\gamma = \frac{7}{5}, 3, \frac{15}{2}, 10, 20$ . Начало координат  $(0, 0)$  изображает область покоя, по которой движется УВ. Скачок из точки  $(0, 0)$  в  $(1, 1)$ , — это разрыв на УВ. Течение позади УВ может развиваться двояко: 1) если  $\gamma < 7$  (на рис.1 это две кривые с  $\gamma = \frac{7}{5}$  и 3), то следует идти налево-вверх с вертикальной асимптотой вплоть до бесконечности по  $z$ , где интегральная кривая совпадает с сепаратриссой расположенной там особой точки типа седла. Такое поведение соответствует приходу в ЦВ с условием  $f_0 = 0$  при  $\lambda = 0$ ; 2) если  $\gamma > 7$  (на рис.1 это три кривые с  $\gamma = \frac{15}{2}, 10, 20$ ), то течение изображается кривой, идущей от  $(1, 1)$  вправо и затем вниз до оси  $z = 0$  и попадающей на сепаратриссу другого седла при  $z = 0$ . Это соответствует границе каверны с  $0 < \lambda_0 < 1$ , где выполняется условие  $g_0(\lambda_0) = h_0(\lambda_0) = 0$ . При

$\gamma = 7$  течение позади УВ вырождается (изображается точкой бифуркации  $(1, 1)$ ).

На рис. 2 показана величина относительного радиуса каверны  $\lambda_0$  при различных  $\gamma > 7$ . Максимум его реализуется при  $\gamma$  близком к 15.4987.

На рис. 3 изображены *скорость частиц*  $f_0$ , *плотность*  $g_0$  и *давление*  $h_0$  для автомодельного течения при  $\gamma = 15$ , которое выбрано в качестве примера.

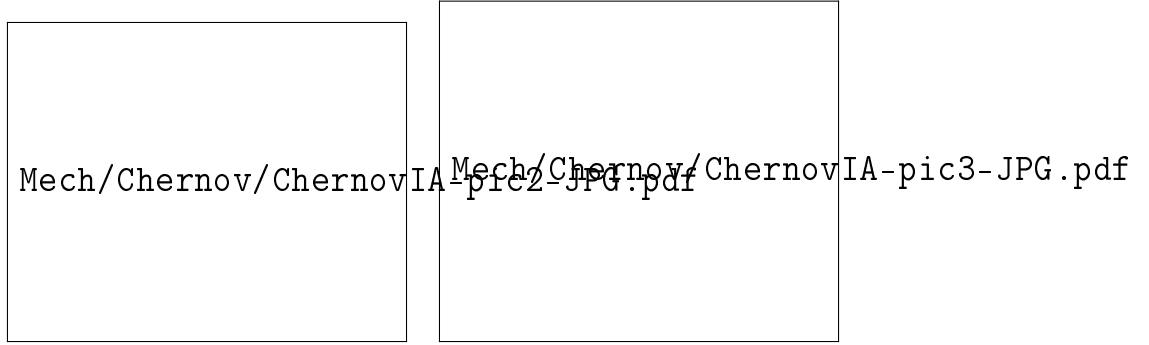


Рис. 2

Рис. 3

**3.** Построение поправки к автомодельному приближению  $\{f_1, g_1, h_1\}(\lambda)$  в целом соответствует методике, изложенной в [1-3], но осложняется наличием второй деформируемой в силу метода ПЛГ границы в краевой задаче для систем ОДУ — это граница каверны:  $\lambda_k = \lambda_0 + q \cdot \lambda_1 + O(q^2)$ . Для нахождения ее формы в неавтомодельном случае используется ОДУ вида (5) с заменой  $r_2$  на  $r_k$ ; а  $(1 + A_1 \cdot q + \dots)$  — на  $(\lambda_0 + \lambda_1 \cdot q + \dots)$ . Другая деталь — это вычисление коэффициента  $\alpha$  (см. [1-3]), который отвечает за сохранность полной энергии движущегося объема жидкости и вводится по формуле  $E_0 = (\alpha_0 + q \cdot \alpha_1 + \dots) \cdot E$ , при этом

$$\alpha_0 = \frac{16}{25} \pi \int_{\lambda_0}^1 \left( \frac{h_1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} g_1 f_0^2 + g_0 f_0 f_1 \right) d\lambda.$$

По автомодельному приближению находим  $\lambda_0 = 0.249384$ ;  $\alpha_0 = 0.269510$ .

На рис. 4 представлены функции  $\{f_1, g_1, h_1\}$  первой поправки. Для определения двух коэффициентов  $\{A_1, \lambda_1\}$  использовались краевые условия:

$$h_1(\lambda_0) \cdot \frac{d}{d\lambda} g_0(\lambda_0) - g_1(\lambda_0) \cdot \frac{d}{d\lambda} h_0(\lambda_0) = 0, \lambda_1 = -\frac{h_1(\lambda_0)}{\frac{d}{d\lambda} h_0(\lambda_0)},$$

которые следуют из равенств:  $h(\lambda_k) = g(\lambda_k) = 0$ ,  $\lambda_k = \lambda_0 + q \cdot \lambda_1 + O(q^2)$  В результате получилось:  $Ax_1 = 1.802244876422$ ,  $\lambda_1 = -0.255763$ ;  $\alpha_1 = -0.0449122$ .

Mech/Chernov/ChernovIA-pic4-JPG.pdf

Рис. 4

Этих данных достаточно для вычисления траекторий УВ и каверны на плоскости  $((R_2, R_k), \tau)$ , а также оценки эволюции течения на малом интервале времени, когда начинает сказываться противодействие.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М. : Наука, 1965. 386 с.
2. Коробейников В. П. Задачи точечного взрыва. М. : Наука, 1985. 400 с.
3. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М. : Физматгиз, 1961. 332 с.

УДК 517.984

Г. П. Шиндяпин, Р. И. Ливеровский

### РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ

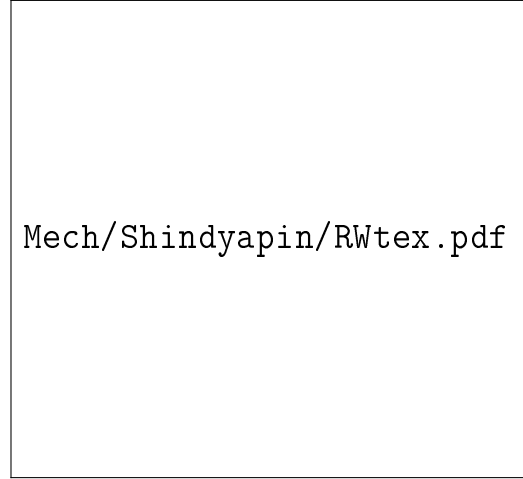
Исследованы процессы нелинейной рефракции ударных волн (УВ) на свободной поверхности, разделяющей газожидкостные среды (ГАЗ/ГАЗ; ГАЗ/ ГЖС; ГЖС/ГЖС), методами асимптотической теории коротких волн [1]. Для режимов с возникновением волны разрежения (RR, RRW) и режимов с возникновением отраженной ударной волны (RW) при падении ударной волны со стороны более плотной среды (режим *fast-slow*) получены аналитические выражения для основных характеристик  $(q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0), \omega)$  в пространстве параметров подобия. Результаты развивают [2, 3] и представляют практический интерес для многочисленных приложений [4].

1. При падении УВ (AR) (рис. 1, 2) относительно малой интенсивности  $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0^-$ ,  $B_0^- = \rho_0^- c_0^{-2}$  под углом  $\alpha$  к вертикали на свободную поверхность AE, разделяющую различные газожидкостные среды  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$ , возникают различные режимы рефракции: RR (рис. 1),

RW (рис. 2), характеризующиеся фронтами УВ ( $AR$  – падающий,  $AD$  – преломленный,  $AC$  – отраженный), волной разрежения  $B_1AB_k$  и изломом свободной поверхности  $AE$ . Параметр  $q^+$  характеризует интенсивность волны разрежения или отраженной УВ,  $p_3 = p_2$ .



*RR*  
Рис. 1



*RW*  
Рис. 2

Анализ задач рефракции УВ при относительно малой интенсивности падающей УВ ( $AR$ ) ( $\bar{\varepsilon} \ll 1$ ;  $\bar{\varepsilon} = P_{10}R_0(\gamma_-) = \varepsilon_{10}L(\gamma_-)$ ;  $\varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$ ), характерных для ГЖС пузырькового типа, может быть проведен на трех различных уровнях точности: точных соотношений на фронтах УВ и решений для волн разрежения (модель Эйлера); адиабатических потенциальных течений (обобщенная на ГЖС модель Лайтхилла) с точностью  $P_{10}^2$  включительно; асимптотической теории коротких волн (ТКВ) до  $P_{10}$  включительно (см. [1-3]).

При асимптотическом анализе задач рефракции относительно слабых УВ с помощью ТКВ в окрестности точки взаимодействия  $A$  ( $\xi_A, \eta_A = 0$ ) в автомодельных переменных  $\xi = \frac{x}{c_0t}$ ,  $\eta = \frac{y}{c_0t}$  вводят разложение

$$\xi = 1 + \bar{\varepsilon}X, \quad \eta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y, \quad \frac{R}{c_0t} = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \quad \Theta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y, \quad \delta = X + \frac{1}{2}Y^2,$$

$$\frac{u}{c_0} = P_{10}\frac{u^{(1)}}{c_0} + \dots, \quad \frac{v}{c_0} = P_{10}^{3/2}R_0^{1/2}\frac{v^{(1)}}{c_0} + \dots,$$

$$\frac{U}{c_0} = P_{10}\mu + \dots, \quad \frac{V}{c_0} = P_{10}^{3/2}R_0^{1/2}\nu + \dots,$$

$$\frac{p - p_0}{B_0} = P_{10}p^{(1)} + \dots, \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = P_{10}H^{(1)} + \dots, \quad \bar{\varepsilon} = R_0P_{10} = L\varepsilon_{10}. \quad (1)$$

получим, что течение в области возмущения (за фронтом УВ) описывается системой уравнений коротких волн (см. [1])

$$[\mu(\mu - 2\delta)]_\delta + \nu_Y + 3\mu = 0, \quad \mu_Y = \nu_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)} \quad (2)$$

с условиями на фронтах УВ ( $X = X^*(Y)$ ,  $\mu', \nu'$  – значения перед фронтом)

$$X - \Psi^\nu Y = \frac{1}{2}(\Psi^{\nu^2} + \mu + \mu'), \quad \Psi^\nu = \frac{dX}{dY}, \quad (\mu - \mu')(\Psi^\nu + Y) = \nu' - \nu, \quad P^{(1)} = \mu \quad (3)$$

Решение (2) для волны разрежения  $B_1AB_k$  имеет вид

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, \quad \nu = \frac{1}{3}z^3 - \mu Y + d, \quad z = (X - X_A)/Y. \quad (4)$$

**2.** При использовании модели гомогенной локально-равновесной пузырьковой среды, с газосодержанием  $\gamma = m_{II}/m_I$ , было установлено в [2], что для процессов рефракции на свободной поверхности  $\xi = \xi(\eta)$ , разделяющей ГЖС с газосодержаниями  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$ , имеют место в точке  $A$  ( $\xi_A, \eta_A = 0$ ) инварианты ( $I$  и  $II$ )

$$c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad (v^\pm - c_0^\pm \eta_A^\pm)/(u^\pm - c_0^\pm \xi_A^\pm) = 1/\xi',$$

которые для относительно слабых УВ принимают вид

$$c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad v^+ = v^- = c_0^- \xi_A^- \operatorname{tg} \delta. \quad (5)$$

При использовании решения (4) и условий на прямолинейных фронтах УВ (3) для расчета течений в верхней и нижней областях ( $q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0)$ ,  $p_3 = p_2$ ) получим инвариант для случая RR (с волной разрежения)

$$I: \quad \omega^{\nu^2} = 2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1, \quad \omega^\nu = \operatorname{tg} \omega / \bar{\varepsilon}^{1/2}, \quad \alpha^\nu = \operatorname{tg} \alpha / \bar{\varepsilon}^{1/2};$$

$$II: \quad q^{+2} (\bar{\rho} \bar{c})^2 (2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1) = \left[ \frac{1}{3} (2X_A - 2q^+)^{3/2} + d \right]^2. \quad (6)$$

В случае RW (с отраженной УВ) в правой части (6) для  $II$  (в скобках) имеем выражение:  $\nu_2 = \alpha^\nu - (q^+ - 1)\sqrt{\alpha^{\nu^2} - q^+}$ . Исключая  $\omega^\nu$  из  $I$ ,  $II$ , получим для RR

$$q^{+2} (\bar{\rho} \bar{c})^2 (2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1) = \left[ \frac{1}{3} (2X_A - 2q^+)^{3/2} + d \right]^2, \quad (7)$$



$$X_A = (\alpha^{\nu^2} + 1)/2, \quad d = \alpha^\nu - \frac{1}{3}(\alpha^{\nu^2} - 1)^{3/2},$$

для RW

$$q^{+2}(\bar{\rho}\bar{c})^2(2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + 1) = [\alpha^\nu - (q^+ - 1)\sqrt{\alpha^{\nu^2} - q^+}]^2.$$

Выражение (7) устанавливает зависимость  $q^+$  от параметров подобия ( $\bar{\rho} = \rho^-/\rho^+$ ,  $\bar{c} = c_0^-/c_0^+$ )

$$\bar{L} = L^-/L^+, \quad c_\gamma = \frac{c_0^- - c_0^+}{c_0^- \bar{c}}, \quad \alpha^\nu, \quad \bar{\rho}\bar{c}. \quad (8)$$

**3.** Остановимся на анализе зависимости (7)  $q^+$  от параметров подобия (8). Ранее рассматривалась эта зависимость для случая рефракции на поверхностях, разделяющих ГАЗ/ГАЗ (см. [2]), когда параметр подобия  $\bar{\rho}\bar{c} = 1.0$ . Отмечалось, что линия раздела  $K$  поверхностей RR и RW, где  $q^+ = 1.0$ , совпадает при различных  $\alpha^\nu$  и дается уравнением

$$2c_\gamma = \frac{1}{\bar{L}} - 1. \quad (9)$$

На рис. 3 построены поверхности для  $q^+/\bar{L}$ ,  $c_\gamma$  для режимов RR и RW при  $\alpha^\nu = 1.0$  (переход к NR) и  $\alpha^\nu = 2.1$  (переход к RRW). Отмечены минимальные значения  $q^+$  при предельных  $\bar{L}$ .



ГАЗ/ГЖС ( $\bar{\rho}\bar{c} = 1.0$ )

Рис. 3

Для случаев рефракции на поверхности, разделяющей ГАЗ/ГЖС (поверхность океана и др.), характерны большие значения параметра

$\bar{\rho}\bar{c}$  ( $90 \leq \bar{\rho}\bar{c} \leq 3500$  при  $10^{-4} \geq \gamma \geq 0$ ). В этих условиях правые части (7) для RR и RW могут быть отброшены и решение для  $q^+$  дается выражением

$$q^+ = \bar{L}(2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} + 1). \quad (10)$$

При значительных  $c_\gamma$  ( $10 < c_\gamma \leq 1.5 \cdot 10^5$ ,  $10^{-7} > \gamma \geq 0$ ) линия раздела  $K$  ( $q^+ = 1.0$ ) поверхностей RR и RW не зависит от  $\alpha^\nu$  и дается выражением

$$2c_\gamma \bar{L} = 1, \quad (11)$$

а поверхность  $q^+/\bar{L}, c_\gamma$  дается уравнением  $q^+ = 2c_\gamma \bar{L}$ . На рис. 4 построены поверхности RR и RW  $q^+/\bar{L}, c_\gamma$  при  $\alpha^\nu = 1.0$  согласно (7). Следует отметить, что предельные значения  $q^+$  на поверхности RW соответствуют предельным значениям  $\bar{L}$ . Эти значения  $q^+$  возрастают с увеличением  $c_\gamma$  (пунктирная линия), т.е. с уменьшением  $\gamma$ .



ГАЗ/ГЖС ( $\bar{\rho}\bar{c} = 3500$ )

Рис. 4

Зависимость решения от  $\alpha^\nu$  становится существенной при возрастании газосодержания  $\gamma$  (т.е. уменьшении  $c_\gamma$ ), когда значения на поверхности и линия  $K$  достигают предельных значений  $\bar{L}$  (при  $\gamma \geq 10^{-6}$ ). Это обстоятельство может служить причиной исчезновения режима RW при относительно больших (предельных  $\gamma^*$ ) газосодержаниях ( $\gamma > \gamma^*$ ).

В то же время режим RR характеризуется малыми значениями  $\bar{L}$  и соответственно при больших  $c_\gamma$  малыми значениями  $q^+$ . Это обстоятельство известно в литературе (см. [4]) как вырождение фронта преломленной УВ. Подробные исследования такого случая с помощью более общей модели адиабатических потенциальных течений ГЖС (с точностью до  $P_{10}^2$ ) проведены авторами в [3]. Показано, что  $q^+$  имеет значения  $10^{-5} \leq q^+ \leq 10^{-3}$  при  $10^{-8} \leq \gamma \leq 10^{-4}$  в широком диапазоне изменения углов  $\alpha$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейное взаимодействие ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1997. 104 с.
2. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.
3. Шиндяпин Г. П., Маркушин А. Г. Рефракция ударной волны на свободной поверхности в газожидкостной среде с образованием волны разрежения // Аэродинамика : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1991. Вып. 12(15). С. 24–39.
4. Henderson L. F., Ma J., Sakurai A., Takayama K. Refraction of a shock wave at an air-water interface // Fluid Dynamics Research. 1990. Vol 5. P. 337–350.

УДК 539.3

Д. А. Шишков, Ю. В. Лысункина

### О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ТОЛСТОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ КОНТУРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе [1] рассмотрена задача вибрационного изгиба толстой прямоугольной пластинки из изотропного материала, два противоположных края которой свободно оперты при произвольном закреплении остальной части боковой поверхности.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) пластинки при статическом изгибе описывается системой уравнений, состоящей из уравнений равновесия сплошной среды и уравнений закона Гука в форме [2]:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*). \quad (2)$$

Здесь  $\boldsymbol{\sigma}$  — симметричный тензор напряжений,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещения,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\mu, \nu$  — параметры материала.

Предполагается, что края пластинки закреплены произвольно, а на верхней лицевой плоскости приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q = q(x, y)$  (рис. 1).

Рис. 1

Сформулированная краевая задача для определения НДС является трехмерной по пространственным переменным. Для понижения размерности системы применим метод сплайн-коллокаций [3], следуя которому искомые компоненты вектора перемещений представим в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \gamma_i(x) \alpha_j(y) U_{i,j}(z) = \sum_{r=0}^R F_r(x, y) U_r(z), \\
 v(x, y, z) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_i(x) \gamma_j(y) V_{i,j}(z) = \sum_{r=0}^R \Phi_r(x, y) V_r(z), \\
 w(x, y, z) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_i(x) \alpha_j(y) W_{i,j}(z) = \sum_{r=0}^R \Psi_r(x, y) W_r(z).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $R = (N + 1)^2 - 1$ ,  $\alpha_i, \gamma_i$  — линейные комбинации В-сплайнов 3-й степени, подобранные так, чтобы условия на краях пластинки  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$  тождественно выполнялись.

Введём в рассмотрение вектор-функции

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}(\zeta) &= \{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \frac{d\mathbf{U}}{d\zeta}, \frac{d\mathbf{V}}{d\zeta}, \frac{d\mathbf{W}}{d\zeta}\}, \quad \mathbf{U} = \{U_r(\zeta)\}_{r=0}^R \\
 \mathbf{V} &= \{V_r(\zeta)\}_{r=0}^R, \quad \mathbf{W} = \{W_r(\zeta)\}_{r=0}^R
 \end{aligned}$$

Тогда краевая задача, записанная в безразмерных координатах, может быть представлена в векторной форме:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{Y}}{d\zeta} &= D\mathbf{Y}(\zeta) \\
 H_l \mathbf{Y}(0) &= 0, H_r \mathbf{Y}(1) = \mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Количество уравнений в (4) существенно зависит от числа точек колокации  $R + 1$  и, следовательно, при использовании численных методов является актуальной задача сокращения времени вычислений.

В статье был реализован метод Ю. И. Виноградова [4] на основе технологии NVIDIA CUDA [5]. Реализация вычислений на видеокарте позволила в несколько раз уменьшить время работы алгоритма, основные шаги которого разобраны в [6]. В частности, время, затрачиваемое на умножение матриц с использованием технологии NVIDIA CUDA на ПК с видеокартой GeForce 9600 и 2-ядерным процессором Intel Core2Duo E8400 3.00GHz и на одной из машин кластерного сервера, на котором для вычислений использовалось одно ядро 8-ядерного процессора, приведено на рис. 2.

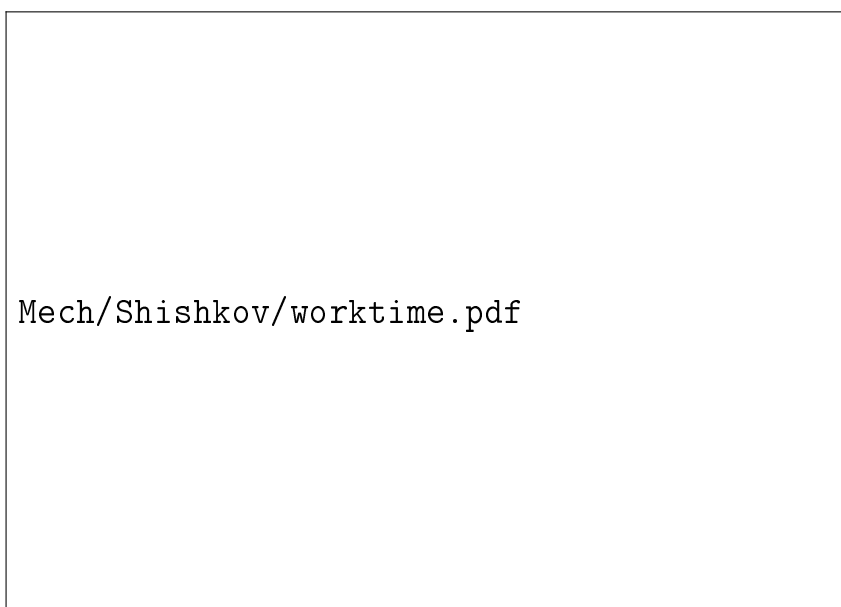


Рис. 2

В таблице указано время выполнения ортогонализации с использованием технологии NVIDIA CUDA, выполняющегося на 10 машинах с видеокартой GeForce 9600 и 2-ядерным процессором Intel Core2Duo E8400 3.00GHz, а так же на одной машине с теми же характеристиками и на одной из машин кластера, на котором для вычислений полностью использовался 8-ядерный процессор Intel Xeon E5335 2.00GHz при  $M=10000$  (параметр метода),  $N=5000$ .

Время работы метода с использованием NVIDIA CUDA с использованием 10 машин	Время работы метода с использованием NVIDIA CUDA с использованием 1 машины	Время работы метода с использованием NVIDIA CUDA на одной из машин кластерного сервера
40 мин.	4.5 ч.	62 ч.

Таким образом, реализация с использованием технологии NVIDIA CUDA позволила существенно снизить время работы алгоритма. Результаты расчетов НДС шарнирно опертой по контуру стальной пластинки согласуются с [1].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Недорезов П. Ф. К вопросу об установившихся колебаниях толстой прямоугольной пластинки из изотропного материала // Проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского ун-та, 2010. Вып. 72. С. 177–183.
2. Лурье А. И. Теория упругости. М. : Наука, 1970. 940 с.
3. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн – функций (Обзор) // Прикл. механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3–26.
4. Виноградов Ю. И. Численный метод переноса краевых условий для жёстких дифференциальных уравнений строительной механики / Виноградов А. Ю., Гусев Ю. А. // Математическое моделирование. 2002. Т. 14, № 9. С. 3–8.
5. URL: <http://www.nvidia.ru> (дата обращения: 01.07.2012)
6. Барышев А. А. О реализации алгоритма решения краевой задачи вибрационного изгиба вязкоупругой пластины-полосы с использованием технологий параллельного программирования / Федюкина М.А. // Математика. Механика : сб. нач. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 136–140.

# СОДЕРЖАНИЕ

## СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

БОНДАРЕНКО Н. П. Единственность решения обратной спектральной задачи для пучка матричных дифференциальных операторов . . . . .	3
БРЕДИХИН Д. А. О группоидах бинарных отношений с диофантовыми операциями . . . . .	7
БРЕДИХИН Д. А., ПОПОВИЧ А. В. О бесконечной базирруемости алгебр бинарных отношений . . . . .	10
БУКУШЕВА А. В. О некоторых классах распределений с финслеровой структурой . . . . .	13
ВОДОЛАЗОВ А. М. Кольцо целозначных $p$ -адических многочленов . . . . .	17
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. О монотонном алгоритме решения задачи аппроксимации сегментной функции алгебраическим полиномом с ограничением . . . . .	20
ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. Обобщенные гамильтоновы системы на многообразиях с почти контактной метрической системой . . . . .	23
ГОРДИЕНКО В. Г., ПИЛЯСОВА К. А. О локально экстремальном свойстве функций Пика . . . . .	27
ГОРДИЕНКО В. Г., РАЗУМОВСКАЯ Е. В. О множестве значений системы функционалов для однолистных ограниченных типично вещественных функций . . . . .	31
ДМИТРИЕВ О. Ю. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи шестого порядка . . . . .	33
ИГНАТЬЕВ М. Ю. Единственность решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на некомпактном $A$ -графе . . . . .	35
КОРНЕВ В. В., ХРОМОВ А. П. Об асимптотике собственных значений системы Дирака с периодическими краевыми условиями . . . . .	38
КУЗНЕЦОВА И. А. Иерархические игры с квадратичными функциями выигрыша . . . . .	42
КУРДЮМОВ В. П., ХРОМОВ А. П. О базисах Рисса из собственных функций дифференциального оператора с недифференцируемым потенциалом. . . . .	45
ЛУКОМСКИЙ Д. С. Применение системы Хаара для решения задачи Коши . . . . .	47
МАРТЕНС Р. В. О полной минимальной системе функций . . . . .	50
МОЛЧАНОВ В. А. Относительно элементарная определимость класса универсальных планарных автоматов в классе полугрупп . . . . .	53
НОВИКОВ В. Е. Решётки разбиений в однозначном контексте . . . . .	57
РОЗЕН В. В. Абстрактная характеристика Парето-предпочтений . . . . .	59

РОМАКИНА Л. Н. Гиперболические ортрисы гиперболической плоскости положительной кривизны . . . . .	62
РЫХЛОВ В. С. О регулярности дифференциального оператора 1-го порядка в пространстве вектор-функций . . . . .	66
СМИРНОВА Д. С. Об одном способе задания отношения предпочтения в задаче оптимизации по качественным критериям . . . . .	69
ТУРАШВИЛИ К. Б. Асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля . . . . .	73
ФЕДОСЕЕВ А. Е. Единственность решения обратной задачи для оператора Штурма — Лиувилля на полуоси с неинтегрируемой особенностью . . . . .	76
ХАЛОВА В. А. Об одной теореме равносходимости . . . . .	79
ХРОМОВ А. А. О регуляризации уравнения первого рода с оператором интегрирования . . . . .	82
ХРОМОВ А. П., ХРОМОВА Г. В. Об одной модификации оператора Стеклова	85
ШАТАЛИНА О. И. Метод регуляризации А. Н. Тихонова в задаче восстановления функции с краевыми условиями . . . . .	87
ЮРКО В. А. Обратная задача для дифференциальных уравнений с запаздыванием . . . . .	90

### СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНОФРИКОВА Н. С., ВИЛЬДЕ М. В. Нестационарные продольные двумерные волны в вязкоупругой двухслойной пластине . . . . .	94
АНТОНЕНКО Э. В., ИВАНОВ А. А. Влияние деформации оси на напряженное состояние тонкостенной цилиндрической оболочки . . . . .	98
БЛИНКОВА А. Ю. Взаимодействие вязкой несжимаемой жидкости с вязкоупругими стенками трубы кругового сечения при воздействии волны деформации . . . . .	101
ИВАНОВ Г. М. Обратная задача растяжения изотропной пластинки с подкрепленным и свободным отверстиями . . . . .	104
ИВАНОВ М. К. Формула сложения конечных поворотов в кососимметрических операторах . . . . .	107
ИВАНОВ С. В. Моделирование взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости с физически и геометрически нелинейной упругой стенкой трубы кругового сечения при воздействии волны деформации . . . . .	110
КОВАЛЕВА И. А. Моделирование взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости с физически и геометрически нелинейными упругими стенками трубы кольцевого сечения при воздействии волны деформации . . . . .	113
КОЖАНОВ В. С. О двух режимах схлопывания одномерной сферической полости . . . . .	116
ЛОГИНОВ М. Ю., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат, для случая неподвижного относительно земли объекта . . . . .	120
ЛОМОВЦЕВА Е. И., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Применение бикватернионов в кинематике станфордского робота-манипулятора . . . . .	123
МАРКУШИН А. Г. К планированию эксперимента по истечению сыпучего тела с твердым зерном . . . . .	126
ОЛЬШАНСКИЙ В. Ю., СЕРЕБРЯКОВ А. В., ПАРШИНА И. Ф. Влияние жесткости чувствительного элемента на характеристики датчика инерциальной информации . . . . .	129



ПАНКРАТОВ И. А., САПУНКОВ Я. Г., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Численное исследование задачи переориентации орбиты космического аппарата с использованием орбитальной системы координат . . . . .	132
РАСТЕГАЕВ Ю. О. Влияние несимметричного температурного расширения пьезоэлементов на величину выходного сигнала пьезогироскопа . . . . .	136
САПУНКОВ Я. Г. Решение задачи оптимального управления движением КА с комбинированной тягой с использованием кватернионных элементов орбиты . . . . .	139
СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Равнобедренная конфигурация в плоской неограниченной задаче трех тел. Часть 2. . . . .	142
СЕРГЕЕВА Н. В. Асимптотики корней дисперсионного уравнения в случае наследственно-упругого слоя . . . . .	145
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">ЧЕРНОВ И. А.</span> Об учете противодействия в задаче о взрыве с образованием пустоты в центре взрыва . . . . .	148
ШИНДЯПИН Г. П., ЛИВЕРОВСКИЙ Р. И. Режимы нелинейной рефракции ударных волн в газожидкостных средах . . . . .	152
ШИШКОВ Д. А., ЛЫСУНКИНА Ю. В. О решении задачи статического изгиба толстой упругой пластинки при произвольном закреплении контура с использованием алгоритмов параллельного программирования . . . . .	157