

УДК 519.853+517.518.82

Д. Д. Беляев, С. И. Дудов

**ВНЕШНЯЯ ОЦЕНКА СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ  
ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ  
С ВАРЬИРУЕМОЙ ШИРИНОЙ  
И НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДЬЮ**

1. В работе [1] рассматривалась задача о внешней оценке сегментной функции полиномиальной полосой постоянной наименьшей ширины за счет выбора полиномиальной оси. Ниже мы рассматриваем аналогичную по характеру задачу, в которой не только ось полосы, но и её ширина могут полиномиально меняться. Итак, пусть сегментная функция  $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$  задается на отрезке  $[c, d]$  непрерывными функциями  $f_1(t) \leq f_2(t)$ . Через  $P_n(A, t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$  обозначим полином степени  $n$  с вектором коэффициентов  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . График сегментной функции  $\Pi_{n,m}(A, B, t) = [P_n(A, t) - P_m(B, t), P_n(A, t) + P_m(B, t)]$  представляет собой полиномиальную полосу, осью которой является график полинома  $P_n(A, t)$ , а её ширину в точке  $t$  выражает  $2P_m(B, t)$ . Здесь  $B = (b_0, b_1, \dots, b_m)$  – вектор коэффициентов полинома  $P_m(B, t)$ .

Рассмотрим задачу

$$\psi(A, B) \equiv \frac{1}{d-c} \int_c^d P_m(B, t) dt \rightarrow \min_{(A,B) \in \mathbb{R}^{n+m+2}}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varphi(A, B) \equiv \max_{t \in [c,d]} \max \{ & P_n(A, t) - P_m(B, t) - f_1(t), \\ & f_2(t) - P_m(B, t) - P_n(A, t) \} \leq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Величина  $(d-c)\psi(A, B)$  выражает площадь полиномиальной полосы  $\Pi_{n,m}(A, B, \cdot)$  на отрезке  $[c, d]$ , а условие (2) означает, что она содержит в себе график сегментной функции  $F(t)$  на этом отрезке. Таким образом, задача (1)–(2) требует построения полиномиальной полосы  $\Pi_{n,m}(A, B, \cdot)$  с наименьшей площадью, которая содержит в себе график сегментной

функции  $F(t)$ . Легко понять, что при  $m = 0$  данная задача совпадает с задачей из [1].

Цель статьи – получить необходимые и достаточные условия решения задачи (1)–(2).

**2.** Нетрудно видеть, что функция  $\varphi(A, B)$  является выпуклой по  $(A, B)$  на всем пространстве  $\mathbb{R}^{n+m+2}$ , а функция  $\psi(A, B)$  – даже линейной. Поэтому для исследования задачи (1)–(2) можно использовать средства выпуклого анализа.

Введем обозначения:  $D = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{n+m+2} : \varphi(A, B) \leq 0\}$ ,

$\partial\varphi(A, B)$  – субдифференциал выпуклой функции  $\varphi(A, B)$ ,

$co\{ \}$  – выпуклая оболочка множества  $\{ \}$ ,

$R(A, B) = \{t \in [c, d] : \varphi(A, B) = 0\}$ ,

$R_1(A, B) = \{t \in R(A, B) : P_n(A, t) - P_m(B, t) - f_1(t) > f_2(t) - P_m(B, t) - P_n(A, t)\}$ ,

$R_2(A, B) = \{t \in R(A, B) : f_2(t) - P_m(B, t) - P_n(A, t) > P_n(A, t) - P_m(B, t) - f_1(t)\}$ ,

$R_3(A, B) = \{t \in R(A, B) : P_n(A, t) - P_m(B, t) - f_1(t) = f_2(t) - P_m(B, t) - P_n(A, t)\}$ .

**Теорема.** Для того чтобы функция  $\psi(A, B)$  достигала в точке  $(A^*, B^*) \in D$  своего минимального на  $D$  значения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение

$$(0, \dots, 0, 1, \frac{d+c}{2}, \frac{d^2+dc+c^2}{3}, \dots, \frac{\sum_{k=0}^m d^{m-k}c^k}{m}) \in \in co \begin{cases} [(-1, -t, \dots, -t^n, 1, t, \dots, t^m), (1, t, \dots, t^n, 1, t, \dots, t^m)], \\ t \in R_3(A, B), \\ (1, t, \dots, t^n, 1, t, \dots, t^m), t \in R_2(A, B), \\ (-1, -t, \dots, -t^n, 1, t, \dots, t^m), t \in R_1(A, B). \end{cases} \quad (3)$$

**Доказательство.** В соответствии с критерием решения задачи выпуклого программирования [2, с. 142] точка  $(A^*, B^*) \in D$  доставляет минимум функции  $\psi(A, B)$  на выпуклом множестве  $D$  тогда и только тогда, когда

$$\partial\psi(A^*, B^*) \cap K^+((A^*, B^*), D) \neq \emptyset, \quad (4)$$

где  $K^+((A^*, B^*), D)$  – сопряженный конус к конусу  $K((A^*, B^*), D)$  возможных направлений множества  $D$  в точке  $(A^*, B^*)$ .

Известно [3, с. 31, 39], что

$$K((A, B), D) = \begin{cases} \mathbb{R}^{n+m+2}, & \text{если } \varphi(A, B) < 0, \\ -K^+(\partial\varphi(A, B)), & \text{если } \varphi(A, B) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь под  $K(\partial\varphi(A, B))$  понимается коническая оболочка субдифференциала  $\partial\varphi(A, B)$ .

Функция  $\psi(A, B)$  является дифференцируемой, и поэтому, учитывая её явный вид после интегрирования, получаем

$$\partial\psi(A, B) = (0, \dots, 0, 1, \frac{d+c}{2}, \frac{d^2+dc+c^2}{3}, \dots, \frac{\sum_{k=0}^m d^{m-k} c^k}{m}). \quad (6)$$

Из (5)–(6) вытекает, что выполнение соотношения (4) возможно только в случае  $\varphi(A^*, B^*) = 0$ . Как и в [1], использование субдифференциального исчисления приводит к формуле

$$\partial\varphi(A, B) = co \begin{cases} [(-1, -t, \dots, -t^n, -1, -t, \dots, -t^m), \\ (1, t, \dots, t^n, -1, -t, \dots, -t^m)], t \in R_3(A, B), \\ (-1, -t, \dots, -t^n, -1, -t, \dots, -t^m), t \in R_2(A, B), \\ (1, t, \dots, t^n, -1, -t, \dots, -t^m), t \in R_1(A, B). \end{cases} \quad (7)$$

Подстановка (6) и (7) в (4) с учетом формулы (5) для случая  $\varphi(A^*, B^*) = 0$  и несложный анализ приводят к заключению об эквивалентности соотношений (3) и (4).

Теорема доказана.

Включение (3) влечет выполнение включения

$$0_{n+1} \in co \begin{cases} [-(1, t, \dots, t^n), (1, t, \dots, t^n)], t \in R_3(A, B), \\ -(1, t, \dots, t^n), t \in R_2(A, B), \\ (1, t, \dots, t^n), t \in R_1(A, B). \end{cases} \quad (8)$$

Как и в [1], можно показать, что соотношение (8) эквивалентно выполнению одного из условий:

- 1)  $R_3(A^*, B^*) \neq \emptyset$ ,
- 2)  $\exists \{t_i\}_{i=1}^{n+2} \in R_1(A^*, B^*) \cup R_2(A^*, B^*)$ :

если  $t_i \in R_1(A^*, B^*)(R_2(A^*, B^*))$ , то  $t_{i+1} \in R_2(A^*, B^*)(R_1(A^*, B^*))$ .

Условие 2) является аналогом явления альтернанса для известной задачи П. Л. Чебышева о приближении непрерывной функции полиномом. Однако простые примеры говорят о том, что выполнение одного из условий 1)–2) не является достаточным условием решения задачи (1)–(2).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Выгодчикова И. Ю., Дудов С. И., Сорина Е. В. Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49, № 7. С. 1175–1183.

2. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.

3. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 340 с.

о

УДК 514.764

А. В. Букушева

## ФИНСЛЕРОВО ПРОСТРАНСТВО С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА – МООРА КАК ОБОБЩЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

На многообразии с метрикой Бервальда – Моора естественным образом определяется полиаффинорная алгебра, являющаяся обобщением алгебры поличисел [1, 2]. Определяются условия, при которых многообразие с полиаффинорной алгеброй наделяется структурой пространства над алгеброй поличисел.

**Введение.** Под *пространством поличисел* понимается коммутативная ассоциативная алгебра, естественным образом согласованная с метрической функцией Бервальда – Моора (БМ). Алгебра поличисел  $P_n$  является обобщением алгебры двойных чисел. В алгебре поличисел  $P_n$  существует базис  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  такой, что  $\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha$ . Исследование пространств такого вида получило свое развитие в работах [1, 2]. Если алгебру поличисел рассматривать как гладкое многообразие  $M$ , то соответствующая метрика БМ определяется функцией, не зависящей от выбора точки многообразия  $M$ . В настоящей статье на многообразии  $M$  с метрикой БМ, определяемой полилинейной формой  $g$ , естественным образом задается полиаффинорная алгебра с аффинорами  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ . В случае, когда тензорная структура  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)$  интегрируема, мы получаем уже известное пространство поличисел. Используя сведения по интегрируемым аффинорным структурам и пространствам над алгебрами, содержащиеся в обзорах [3, 4], а также работу по гиперкомплексным структурам [5], мы находим условия, при которых финслерово многообразие с метрикой БМ и согласованной с ней полиаффинорной структурой является пространством над алгеброй поличисел.

**1. Определение полиаффинорной структуры.** Пусть  $M$  – связное  $C^\infty$ -многообразие размерности  $n$ . Все встречающиеся на  $M$  функции

и геометрические объекты будем считать бесконечно дифференцируемыми. Рассмотрим на многообразии  $M$  алгебраическую метрику  $n$ -го порядка, т.е. поле  $n$ -линейных симметрических форм  $g$  с компонентами  $g_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}(x)$  относительно произвольного, вообще говоря, неголономного поля базисов  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ .

Будем говорить, что ненулевой вектор  $\vec{e}$  определяет *нулевое направление формы  $g$* , если

$$g(\vec{e}, \vec{e}, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n) = 0.$$

Не нулевая алгебраическая метрика называется *метрикой Бервальда – Моора*, если существует поле базисов  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  таких, что каждый вектор  $\vec{e}_\alpha$  базиса задает нулевое направление формы  $g$ . Такое поле базисов будем называть *адаптированным базисом формы  $g$*  или просто адаптированным базисом. Форма  $g$  в адаптированном базисе имеет единственную, с точностью до перестановки индексов, отличную от нуля компоненту  $g_{12\dots n}$ . В области определения поля адаптированных базисов  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  определим  $n$ -гладких одномерных распределений  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , полагая

$$D_\alpha = \langle \vec{e}_\alpha \rangle. \quad (1)$$

Из сформулированного ниже предложения следует, что распределения  $D_1, D_2, \dots, D_n$  могут быть корректно определены на всем многообразии  $M$ .

**Предложение.** *Всякий вектор  $\vec{e}$ , задающий нулевое направление формы  $g$ , коллинеарен одному из векторов адаптированного базиса  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ .*

Таким образом, определение распределений  $D_\alpha$  не зависит от выбора адаптированного базиса, и метрика БМ определяет на  $M$  структуру почти произведения:

$$TM = \bigoplus_{\alpha=1}^n D_\alpha. \quad (2)$$

Очевидно, что две метрики  $g_1, g_2$  БМ конформны ( $g_1 = \lambda(x)g_2$ ) тогда и только тогда, когда они определяют одно и то же разложение (2).

Рассмотрим  $n$  распределений  $D_{\hat{\alpha}}$ , определяемых следующим образом:

$$D_{\hat{\alpha}} = D_1 \oplus \dots \oplus D_{\alpha-1} \oplus D_{\alpha+1} \oplus \dots \oplus D_n.$$

Для любого  $\alpha$ , таким образом, получаем разложение

$$TM = D_\alpha \oplus D_{\hat{\alpha}}. \quad (3)$$

Разложение (3) определяет семейство проекторов

$$\varphi_\alpha : TM \rightarrow D_\alpha .$$

Совокупность аффиноров  $\varphi_\alpha$  относительно операции композиции образует  $n$ -мерную полиаффинорную алгебру, обозначаемую нами  $AH_n$ , изоморфную алгебре  $P_n$ . Будем говорить, что алгебра  $AH_n$  согласована с метрикой  $g$ . Еще раз подчеркнем, что задание метрики БМ влечет задание полиаффинорной алгебры специального вида. Обратно, если на гладком многообразии задана полиаффинорная алгебра, определяемая разложением (2), то всякая полилинейная форма, удовлетворяющая равенству

$$g(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma} g(\varphi_1(\vec{x}_{\sigma(1)}), \varphi_2(\vec{x}_{\sigma(2)}), \dots, \varphi_n(\vec{x}_{\sigma(n)})), \quad (4)$$

представляет собой метрику БМ, согласованную с полиаффинорной структурой. Любые две такие метрики конформны.

Базис, адаптированный форме  $g$ , естественно назвать адаптированным к полиаффинорной алгебре. Впредь такой базис будем называть *адаптированным*.

Если на многообразии  $M$  существует атлас, состоящий из карт, адаптированных к метрике  $g$ , то алгебра  $AH_n$  оказывается интегрируемой. В этом случае многообразии  $M$  может рассматриваться как многообразие  $M(P_n, g)$  над алгеброй поличисел  $P_n$ . Будем считать, что полиаффинорная алгебра интегрируема, а любая используемая система координат – адаптированная.

**2. Связности, совместимые с метрикой БМ.** Рассмотрим задачу нахождения связности, совместимой с метрикой БМ. Имеет место

**Теорема 1.** *На многообразии  $M(P_n, g)$  существует единственная связность нулевого кручения, совместимая с метрикой БМ  $g$ .*

Предположим, что на  $M(P_n, g)$  существует линейная связность  $\nabla$ , совместимая с метрикой  $g$ . Используя равенство  $\nabla g = 0$ , получаем, что её коэффициенты  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  обращаются в нуль, если  $\beta \neq \gamma$ , кроме того, выполняется равенство

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \frac{\partial_\alpha g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}.$$

Если потребовать обращения кручения  $S$  в нуль, то отличными от нуля компонентами связности  $\nabla$  будут

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{\partial_\alpha g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}. \quad (5)$$

В равенстве (5) суммирования по  $\alpha$  нет.

Для доказательства существования связности нулевого кручения, совместимой с метрикой БМ  $g$ , достаточно в адаптированных картах задать её ненулевые компоненты с помощью равенства (5) и показать корректность такого задания связности.

*Тензорной структурой на гладком многообразии* называется определенная совокупность тензорных полей. Таким образом, в нашем рассмотрении находится тензорная структура, включающая в себя систему полиаффиноров и согласованную с этой системой полилинейную форму.

Тензорная структура называется *интегрируемой*, если на многообразии можно найти такой атлас, что всякий тензор структуры имеет в любой карте из этого атласа постоянные компоненты. Г. И. Кручкович в своей работе [5] сформулировал следующее утверждение: "Если тензорная структура допускает совместимую связность нулевой кривизны без кручения, то такая структура интегрируема. Всякая интегрируемая тензорная структура допускает связность нулевой кривизны без кручения, по крайней мере, локально".

Предложение Кручковича позволяет сформулировать следующую теорему.

**Теорема 2.** *Тензорная структура  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)$  интегрируема тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности (5) равен нулю.*

Найдем условия, при которых на многообразии с тензорной структурой  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)$  допускается структура многообразия над алгеброй поличисел. Последнее означает, что среди действительных карт можно составить атлас из карт, связанных между собой  $H$ -аналитическими преобразованиями. Известно [5], что  $H$ -аналитичность эквивалентна выполнению следующего условия:  $C_\alpha D = DC_\alpha$ . Нетрудно убедиться в том, что две действительные карты  $\chi_1(x^\alpha)$ ,  $\chi_2(y^\alpha)$  связаны между собой  $H$ -аналитическими преобразованиями тогда и только тогда, когда  $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Таким образом, имеет место

**Теорема 3.** *Многообразие с тензорной структурой  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)$  является пространством над алгеброй поличисел тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности (5) равен нулю.*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1 (1). С. 5–19.
2. Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Геометрия невырожденных поличисел // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №1 (7), т. 4. С. 3–25.

3. Широков А. П. Пространства над алгебрами и их применения // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения / ВИНТИ. М., 2002. Т. 73. С. 135–161.

4. Вишневский В. В. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения / ВИНТИ. М., 2002. Т. 73. С. 5–64.

5. Кручкович Г. И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1972. Т. 16. С. 174–201.

УДК 514.764

А. В. Букушева, С. В. Галаев, И. П. Иванченко

## О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СВЯЗНОСТЬЮ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ С ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

Вводятся понятия внутренней и продолженной связности над гладким распределением  $D$  контактной структуры с допустимой финслеровой метрикой. С помощью продолженной связности на распределении  $D$  как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется и исследуется методами внутренней геометрии неголономного многообразия почти контактная метрическая структура.

**Введение.** В работе R. Miron [1] было положено начало исследованию геометрии финслеровых векторных расслоений, являющихся естественным обобщением касательных расслоений многообразий с финслеровой метрикой. Финслерово векторное расслоение характеризуется заданием на тотальном пространстве векторного расслоения класса линейных связностей, специальным образом ассоциируемых с некоторой инфинитезимальной связностью. В работе [2] было введено понятие гладкого распределения  $D$  с допустимой финслеровой метрикой, позволяющее с новой точки зрения взглянуть на проблематику финслеровых векторных расслоений. В работе [2] связность над распределением была названа внутренней связностью распределения, там же было дано определение продолженной связности и определена процедура, позволяющая при дополнительных предположениях перейти от внутренней связности к некоторой продолженной связности. В нашем случае продолженная связность является инфинитезимальной связностью в векторном расслоении  $(D, \pi, X)$ , где  $D$  – гладкое распределение контактной структуры с допустимой финслеровой метрикой [2]. Мы покажем, что распределение



$D$  с допустимой финслеровой структурой наделяется внутренней (вообще говоря, нелинейной) и продолженной связностями. В этом случае на распределении  $D$  естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, свойства которой в значительной степени определяются геометрией распределения  $D$ . В работе получены инвариантные характеристики некоторых классов почти контактных метрических структур, возникающих на распределении  $D$ .

**1. Связности над распределением.** Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии  $D$  [3] понимается отображение  $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \rightarrow \Gamma D$ , удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \nabla_{f_1 \vec{u}_1 + f_2 \vec{u}_2} = f_1 \nabla_{\vec{u}_1} + f_2 \nabla_{\vec{u}_2}, \quad 2) \nabla_{\vec{u}} f \vec{v} = f \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} f) \vec{v},$$

где  $\Gamma D$  – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения  $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$ .

Кручение внутренней линейной связности  $S$  по определению полагается равным  $S(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}} \vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}} \vec{X} - P[\vec{X}, \vec{Y}]$ . Таким образом, в адаптированных координатах [4] мы имеем  $S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c$ . Так же как и связность в объемлющем пространстве, внутренняя связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает тройка  $\mu = (D, \pi, X)$ , где  $\pi : D \rightarrow X$  – естественная проекция. Для того чтобы задать связность над распределением  $D$ , необходимо предварительно ввести на  $D$  структуру гладкого многообразия, которая задается следующим образом. Каждой адаптированной карте  $K(x^\alpha)$  на многообразии  $X$  ставится в соответствие карта  $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+\alpha})$  на многообразии  $D$ , где  $x^{n+\alpha}$  – координаты допустимого вектора в базисе  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ .

Говорят, что задана связность над распределением  $D$ , если распределение  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$ , где  $\pi : D \rightarrow X$  – естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  – вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ . Таким образом, задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта  $G_b^a(X^a, X^{n+a})$  такого, что  $HD = \text{Span}(\vec{e}_a)$ , где  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$ . В работе [2] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность получается из внутренней связности с помощью равенства  $\widetilde{TD} = \widetilde{HD} \oplus VD$ , где  $HD \subset \widetilde{HD}$ . По существу, продолженная связность является связностью в векторном расслоении. Будем называть продолженную связность естественным продолжением связности над распределением, если  $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\partial_n)$ . Заметим, что векторное поле  $\partial_n$  задано глобаль-

но на всем многообразии  $D$ . Использование внутренней и продолженной связностей дает возможность по-новому охарактеризовать уже известные почти контактные метрические пространства [5].

**Теорема 1** ([4]). *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:  $L_{\xi}\varphi = 0$ ,  $\nabla\varphi$ , где  $\nabla$  – внутренняя метрическая связность.*

**Теорема 2** ([4]). *Почти комплексная структура  $\varphi$  интегрируема тогда и только тогда, когда выполняется равенство  $\nabla^1\varphi = 0$ , где  $\nabla^1$  – естественное продолжение связности  $\nabla$ .*

Проводя необходимые вычисления, получаем:

$$\begin{aligned} [\vec{\epsilon}_a, \vec{\epsilon}_b] &= 2\omega_{ab}\partial_n + R_{ab}^c\partial_{n+c}, \\ [\vec{\epsilon}_a, \partial_n] &= \partial_n\Gamma_a^n\partial_n + \partial_nG_a^b\partial_{n+b}, \\ [\vec{\epsilon}_a, \partial_{n+b}] &= G_{ab}^c\partial_{n+c}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $R_{ba}^c = 2(\vec{\epsilon}_{[b}G_{a]}^c - G_{[a}^dG_{b]}^c)_{,d}$  и  $\partial_n\Gamma_a^n$  соответственно первый и второй тензоры кривизны Схоутена. Если определить распределение  $\widetilde{HD}$  равенством  $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\vec{u})$ , где  $\vec{u} = \partial_n - G_n^a\partial_{n+a}$ ,  $G_n^d(x^\alpha, v^c) = \omega^{ba}(x^\alpha)R_{ab}^d(x^\alpha, v^c)$ , то равенства (1) перепишутся в виде  $[\vec{\epsilon}_a, \vec{\epsilon}_b] = 2\omega_{ab}\vec{u} + K_{ab}^c\partial_{n+c}$ ,  $[\vec{\epsilon}_a, \vec{u}] = \partial_n\Gamma_a^n\vec{u} + K_{na}^c$ , где  $K_{ab}^c$  и  $K_{na}^c$  определяют тензор кривизны Вагнера [3].

**2. Допустимые финслеровы структуры и почти контактные метрические структуры на гладком распределении.** Предположим, что на многообразии  $D$  задана функция  $L(x^\alpha, x^{n+a})$  такая, что выполняются следующие условия:

1.  $L$  – гладкая положительная функция на  $D^0 = D \setminus \vec{0}$ ;
2.  $L$  – однородна степени 1 относительно слоевых координат;
3. Квадратичная форма  $L^2_{\cdot a \cdot b} \xi^a \xi^b = \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a} \partial x^{n+b}}$  положительно определена.

Назовем функцию  $L(x^\alpha, x^{n+a})$  допустимой финслеровой метрикой, а пару  $(D, L)$  – контактным финслеровым распределением. Допустимым финслеровым тензорным полем типа  $(p, q)$  назовем морфизм  $t : D^0 \rightarrow T_q^p(X)$  такой, что  $t(z) \in T_{\pi(z)q}^p(X)$ , где  $T_q^p(X)$  – расслоение тензоров типа  $(p, q)$  на многообразии  $X$ . Непосредственно проверяется, что объект  $g_{ab}(x^\alpha, x^{n+c}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^{n+a} \partial x^{n+b}} = \frac{1}{2} F_{\cdot a \cdot b}$  является допустимым финслеровым тензорным полем. Покажем, что с каждым контактным финслеровым распределением ассоциируется некоторая внутренняя и соответствующая ей продолженная связность. Как следует из изложенного выше,

для задания внутренней и продолженной связностей необходимо задать объект внутренней связности  $G_b^a(x^a, x^{n+a})$ , а также задать разложение  $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$ , где  $HD \subset \widetilde{HD}$ . Имеет место

**Теорема 3** ([2]). *Для распределения  $D$  с допустимой финслеровой метрикой существует единственная продолженная метрическая связность такая, что выполняется условие  $G_{b.c}^a = G_{c.b}^a$ .*

В процессе доказательства теоремы, в частности, доказываем, что продолженная метрическая связность порождается распределением  $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\vec{u})$ . Если на многообразии  $X$  задана допустимая финслерова структура, то в  $D$  возникает внутренняя связность, порождаемая распределением  $HD = \text{span}(\vec{\epsilon}_\alpha)$ , где  $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}$ ,  $G_{bc}^a = G_{b.c}^a = \partial_{n+b} \partial_{n+c} G^a$ ,  $G^a = g^{ab} (\partial_c L_b^2 x^{n+c} - \vec{e}_b L^2)$ ,  $g_{ab} = \frac{1}{2} L_{.a.b}^2$ . Определим на многообразии  $D$  допустимое к распределению  $\tilde{D}$  поле аффинора  $J$ , полагая  $J(\vec{\epsilon}_a) = \partial_{n+a}$ ,  $J(\partial_{n+a}) = -\vec{\epsilon}_a$ . С помощью равенств  $\tilde{g}(\vec{u}^h, \vec{v}^h) = \tilde{g}(\vec{u}^v, \vec{v}^v) = g(\vec{u}, \vec{v})$ ,  $\tilde{g}(\vec{u}^h, \vec{v}^v) = 0$ , где  $g$  – допустимая финслерова структура, на многообразии  $D$  определяется допустимая риманова метрика. Учитывая равенство  $\tilde{g}(J(\vec{u}), J(\vec{v})) = \tilde{g}(\vec{u}, \vec{v})$ , получаем следующую теорему.

**Теорема 4.** *Пара допустимых структур  $(J, \tilde{g})$  определяет на многообразии  $D$  почти контактную метрическую структуру.*

Найдем условия, при которых допустимая почти комплексная структура  $J$  является интегрируемой. Сверхкарта порождает на многообразии  $D$  поле неголономного базиса  $(\vec{\epsilon}, \partial_n, \partial_{n+a})$ . Используя равенства (1) и теорему 2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

**Теорема 5.** *Почти комплексная структура  $J$  является интегрируемой тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:  $R_{ab}^c = 0$ ,  $\partial_n G_a^b = 0$ .*

Таким образом, на распределении  $D$  возникает почти контактная метрическая структура  $(\tilde{g}, J, \tilde{D}, \vec{\epsilon}, \lambda)$ ,  $\lambda = \eta \circ \pi_*$ ,  $\vec{\epsilon} = \partial_n$ .

**Теорема 6.** *Почти контактная метрическая структура является квазисасакиевой тогда и только тогда, когда тензоры кривизны Схутена обращаются в нуль.*

**Доказательство.** Прямым вычислением проверяется, что фундаментальная форма структуры имеет вид  $\Omega = g_{ab} dx^a \wedge \Theta^{n+b}$ . После вычисления ее дифференциала, убеждаемся в справедливости теоремы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Miron R. Techniques of Finsler geometry in the theory of vector bundles // Acta Sci. Math. 1985. № 49. P. 119–129.

2. *Galaev S. V.* Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric // URL : <http://arxiv.org/abs/1103.4337>.

3. *Вагнер В. В.* Геометрия  $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

4. *Galaev S. V.* The Intrinsic Geometry of Almost Contact Metric Manifolds // URL : <http://arxiv.org/abs/1107.5532>.

5. *Blair D. E.* Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Birkhauser, Boston, 2002.

УДК 517.984

М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов

## АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

В статье предложен новый элементарный метод получения асимптотических формул для решения двумерного уравнения Дирака. Используя этот метод, получены уточненные асимптотические формулы решений при больших значениях спектрального параметра.

Рассматривается следующая система Дирака:

$$y'(x) + P(x)y(x) = \lambda Dy(x), \quad (1)$$

где  $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$  ( $T$  – знак транспонирования),  $y_j \in C^1[0, 1]$ ,  $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $q_j \in C^1[0, 1]$ ,  $\lambda$  – комплексный параметр.

В случае подобного скалярного уравнения (если  $P(x)$ ,  $y(x)$  – скалярные функции) слагаемое  $P(x)y(x)$  уничтожается известной подстановкой. В векторном случае этого, вообще говоря, сделать нельзя. Здесь используется метод, называемый *L-диагонализацией*: с помощью определенной подстановки слагаемое  $P(x)y(x)$  не уничтожается, но делается сколь угодно малым (имеет оценку  $O(\frac{1}{\lambda})$ ). Этот метод, описанный, например, у И. М. Раппопорта [1], позволяет получить для общего решения уравнения (1) следующую асимптотическую формулу:

$$y(x, \lambda) = (E + O(\lambda^{-1})) e^{\lambda D x} c, \quad (2)$$

где  $E$  – единичная матрица  $2 \times 2$ ,  $c = (c_1, c_2)^T$  – произвольный вектор, матрица-функция  $O(\lambda^{-1})$  регулярная<sup>1</sup> в полуплоскостях  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  и

<sup>1</sup>Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.

$\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  при  $|\lambda|$  достаточно больших. Формула (2) имеет важное значение при изучении спектральных свойств соответствующих операторов и в различных приложениях.

В данной статье предлагается новый простой элементарный метод доказательства формулы (2), используя который получаются уточненные асимптотические формулы решений системы (1) при больших значениях  $|\lambda|$ . Эти формулы применяются, например, при решении методом Фурье смешанных задач с инволюцией, порождающих уравнение вида (1) [2].

Отметим, что  $P(x)$  может быть произвольной матрицей с непрерывно дифференцируемыми компонентами  $p_{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Легко показать, что замена  $y(x) = \operatorname{diag}(e^{-\int_0^x p_{11}(t) dt}, e^{-\int_0^x p_{22}(t) dt})u(x)$  приводит к уравнению с матрицей рассматриваемого вида.

**1.** Приведем описание нового элементарного метода, с помощью которого можно получить (2). Для проведения различных оценок будет использоваться утверждение, легко следующее из формулы интегрирования по частям.

**Лемма 1.** Если  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  и  $q(x) \in C^1[0, 1]$ , то

$$\int_t^x e^{-2\lambda\tau} q(\tau) d\tau = O(\lambda^{-1} e^{-2\lambda t}), \quad \int_t^x e^{2\lambda\tau} q(\tau) d\tau = O(\lambda^{-1} e^{2\lambda x}). \quad (3)$$

Система (1) в покомпонентной записи имеет вид

$$y_1'(x) - \lambda y_1(x) = -q_2(x) y_2(x), \quad (4)$$

$$y_2'(x) + \lambda y_2(x) = -q_1(x) y_1(x). \quad (5)$$

Проинтегрировав (4), (5) и выполнив замену  $w_1(x) = y_1(x)e^{-\lambda x}$ ,  $w_2(x) = y_2(x)e^{\lambda x}$ , получим

$$w_1(x) = c_1 - \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) dt, \quad (6)$$

$$w_2(x) = c_2 - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) w_1(t) dt. \quad (7)$$

Чтобы построить фундаментальную матрицу решений системы (6), (7), найдем две пары линейно независимых решений.

Пусть для определенности  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Выполним подстановку (7) в (6):

$$w_1(x) = c_1 - c_2 \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) dt + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) w_1(t) dt \int_t^x e^{-2\lambda \tau} q_2(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Полагая  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  и учитывая (3), получим  $w_1(x) = 1 + O(\lambda^{-1})$ , и отсюда и из (7)  $w_2(x) = O(\lambda^{-1} e^{2\lambda x})$ .

Далее, положим  $c_2 = 1$  и подставим (6) в (7). Тогда

$$\begin{aligned} w_2(x) &= 1 - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) \left[ c_1 - \int_0^t e^{-2\lambda \tau} q_2(\tau) w_2(\tau) d\tau \right] dt = \\ &= 1 - c_1 \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) dt \int_t^x e^{2\lambda \tau} q_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Положим  $\varphi(x, \lambda) = \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt$ . Тогда  $\int_t^x e^{2\lambda \tau} q_1(\tau) d\tau = \varphi(x, \lambda) - \varphi(t, \lambda)$ ,

и

$$\begin{aligned} w_2(x) &= 1 - \varphi(x, \lambda) \left[ c_1 - \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) dt \right] - \\ &\quad - \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) \varphi(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

По лемме 1  $\varphi(x, \lambda) = O(\lambda^{-1} e^{2\lambda x})$ . Поэтому, полагая  $c_1 = 1$  и  $\int_0^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) dt$  и снова учитывая оценки (3), из (9) получим, что

$$w_2(x) = 1 + \int_0^1 O(\lambda^{-1}) w_2(t) dt.$$

Отсюда  $w_2(x) = 1 + O(\lambda^{-1})$ . Тогда  $w_1(x) = \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) dt = O(\lambda^{-1} e^{-2\lambda x})$ .

Выполняя обратную замену, придем к следующему утверждению.

**Теорема 1.** При  $q_j(x) \in C^1[0, 1]$  фундаментальная матрица решений системы (1) имеет асимптотическое представление

$$Y(x, \lambda) = (E + O(\lambda^{-1})) e^{\lambda D x}.$$

**2.** Используя описанный в п. 1 метод, получим уточненные асимптотические формулы решений системы (1) при больших  $|\lambda|$ .

**Теорема 2.** Если  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ ,  $q_j(x) \in C^1[0, 1]$ , то для общего решения уравнения (1) имеем следующую асимптотическую формулу:

$$y(x, \lambda) = U(x, \lambda)e^{\lambda D x} c,$$

где  $U(x, \lambda) = (u_{ij}(x, \lambda))_{i,j=1,2}$ ,  $c = (c_1, c_2)^T$  – произвольный вектор и

$$u_{11}(x, \lambda) = 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{12}(x, \lambda) = \frac{1}{2\lambda} \left( q_2(x) - q_2(1)e^{-2\lambda(1-x)} + \int_x^1 e^{2\lambda(x-t)} q_2'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{21}(x, \lambda) = -\frac{1}{2\lambda} \left( q_1(x) - q_1(0)e^{-2\lambda x} - \int_0^x e^{-2\lambda(x-t)} q_1'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{22}(x, \lambda) = 1 - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

**Доказательство.** Получим уточненные асимптотические формулы для решений системы (6), (7). Константы  $c_k$  выбираем так же, как в п. 1.

1) Положим сначала в (6), (7)  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ , откуда по доказанному  $w_1(x) = 1 + O(\lambda^{-1})$ . Подставляя теперь эту оценку в правую часть (8), получим

$$\begin{aligned} w_1(x) &= 1 + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) O(\lambda^{-1}) dt \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 последнее слагаемое имеет оценку  $O(\lambda^{-2})$ . Так как

$$\int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau) d\tau = -\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau) \Big|_t^x + \frac{1}{2\lambda} \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2'(\tau) d\tau,$$

то

$$\begin{aligned} w_1(x) &= 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x e^{2\lambda(t-x)} q_1(t)q_2(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2'(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Подставляя теперь это выражение в (7), получим

$$\begin{aligned}
w_2(x) &= - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) \left[ 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^t q_1(\tau) q_2(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] dt = \\
&= - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt \int_0^t q_1(\tau) q_2(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) e^{2\lambda x} = \\
&= -\frac{1}{2\lambda} \left[ e^{2\lambda x} q_1(x) - q_1(0) - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1'(t) dt \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) e^{2\lambda x}.
\end{aligned}$$

Отсюда для решений системы (4), (5) имеем

$$y_1(x) = w_1(x) e^{\lambda x} = \left( 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) e^{\lambda x},$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) = w_2(x) e^{-\lambda x} &= -\frac{1}{2\lambda} \left[ q_1(x) - q_1(0) e^{-2\lambda x} - \int_0^x e^{2\lambda(t-x)} q_1'(t) dt \right] e^{\lambda x} + \\
&+ O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) e^{\lambda x}. \tag{10}
\end{aligned}$$

2) Положим теперь в (6), (7)  $c_1 = \int_0^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) dt$ ,  $c_2 = 1$ . Тогда по доказанному в п. 1 из (9) имеем

$$w_2(x) = 1 - \varphi(x, \lambda) \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) dt - \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) \varphi(t, \lambda) dt, \tag{11}$$

и справедлива оценка  $w_2(x) = 1 + O(\lambda^{-1})$ . Подставим эту оценку в (11):

$$\begin{aligned}
w_2(x) &= 1 - \varphi(x, \lambda) \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) dt - \varphi(x, \lambda) \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) O(\lambda^{-1}) dt - \\
&- \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) \varphi(t, \lambda) dt - \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) O(\lambda^{-1}) \varphi(t, \lambda) dt. \tag{12}
\end{aligned}$$



Далее имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) \varphi(t, \lambda) dt = \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) dt \int_0^t e^{2\lambda\tau} q_1(\tau) d\tau = \\
& = \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) \left\{ \frac{1}{2\lambda} [q_1(t)e^{2\lambda t} - q_1(0)] - \frac{1}{2\lambda} \int_0^t e^{2\lambda\tau} q_1'(\tau) d\tau \right\} dt = \\
& = \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).
\end{aligned}$$

Остальные интегральные слагаемые в (12) имеют оценку  $O(\lambda^{-2})$ . Поэтому из (12)

$$w_2(x) = 1 - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (13)$$

Подставим (13) в (6):

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) w_2(t) dt = \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) dt - \\
& - \frac{1}{2\lambda} \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) dt \int_0^t q_1(\tau) q_2(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2(t) dt.
\end{aligned} \quad (14)$$

Выполняя в первом интеграле интегрирование по частям, во втором – замену порядка интегрирования и применяя оценки (3), получим из (14)

$$w_1(x) = \frac{1}{2\lambda} \left[ q_2(x) e^{-2\lambda x} - q_2(1) e^{-2\lambda} + \int_x^1 e^{-2\lambda t} q_2'(t) dt \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) e^{-2\lambda x}. \quad (15)$$

Таким образом из (15) и (13):

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= w_1(x) e^{\lambda x} = \frac{1}{2\lambda} \left[ q_2(x) - q_2(1) e^{2\lambda(x-1)} + \int_x^1 e^{2\lambda(x-t)} q_2'(t) dt \right] e^{-\lambda x} + \\
& + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda x},
\end{aligned} \quad (16)$$

$$y_2(x) = w_2(x) e^{-\lambda x} = \left( 1 - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) e^{-\lambda x}.$$

Из (10) и (16) следует утверждение теоремы.  $\square$

Аналогичный результат может быть получен при  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ .

Постановка задачи и результаты п. 1 принадлежат А. П. Хромову, а результаты п. 2 – М. Ш. Бурлуцкой.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270), гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Раппопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев : Изд-во АН УССР, 1954. 258 с.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. Воронеж, 2010. № 2. С. 26–33.

УДК 512.7

**А. М. ВОДОЛАЗОВ**

### **АЛГЕБРЫ ЦЕЛОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАЗЛОЖИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ**

Пусть  $k$  – поле  $p$ -адических чисел,  $O$  – кольцо целых  $p$ -адических чисел,  $T$  – алгебраический  $k$ -тор. Для построения целых моделей алгебраических торов в работах [1, 2] введена алгебра

$$A = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O\},$$

где  $U_k$  – максимальная компактная подгруппа группы  $T(k)$ . В работе [1] было замечено, что эта алгебра имеет бесконечный набор образующих и поставлен вопрос о нахождении всех образующих для разложимых торов  $T = G_m^n$ . Для разложимых торов образующие были найдены в работе [3]. Кроме алгебры просто целозначных функций, представляет интерес изучение ее различных подалгебр. В частности, для построения анализа на алгебраических торах надо рассматривать функции, целозначные вместе со своими разделенными или конечными разностями. Эти алгебры определяются как

$$A^{\{r\}} = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O, \quad \Phi f(U_k, x) \in A^{\{r-1\}}\}$$

и

$$A^{[r]} = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O, \quad \forall h \in U_k \quad \Delta_h f(x) \in A^{[r-1]}\}$$

соответственно. Где первая разделенная разность  $\Phi f$  для  $f$  равна

$$\Phi f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1},$$

а  $k$ -я разделенная разность  $\Phi^k f(x_0, \dots, x_k)$  определяется для  $k > 1$  индукционно по формуле

$$\Phi^k f(x_0, \dots, x_k) = \frac{\Phi^{k-1} f(x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}) - \Phi^{k-1} f(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k)}{x_k - x_{k-1}}.$$

Операторы конечные разности  $\Delta$  при  $k = 1$  действует на  $f$  по правилу

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

при  $k > 1$   $\Delta$  по индукции определяется следующим образом:

$$\Delta_{h_1, \dots, h_k} f(x) = \frac{\Delta_{h_1, \dots, h_{k-1}} f(x+h_k) - \Delta_{h_1, \dots, h_{k-1}} f(x)}{h_k}.$$

Мы требуем, чтобы  $x$  и все  $x + h_i$  должны принадлежать  $U_k$ .

Алгебра  $A^{\{r\}}$  является подалгеброй  $A^{[r]}$ , причем включение почти всегда строгое. Алгебра  $A^{\{r\}}$  имеет бесконечное число образующих, и они были найдены в [4], используя аналоги  $v$ -порядков, введенных М. Bhargava. В нашей статье мы находим образующие алгебры  $A^{[r]}$ .

Рассмотрим сначала одномерный случай  $T = G_m$ . Для такого тора верна

**Теорема 1.** *Многочлены*

$$H_n(x) = \frac{1}{p^{d_n}} \prod_{i=1, (i,p)=1}^{p^k-1} (x-i) \prod_{\varphi(p^k) < j \leq n} (x-x_j),$$

где  $n$  удовлетворяет неравенству  $\varphi(p^k) < n \leq \varphi(p^{k+1})$  ( $\varphi(n)$  – функция Эйлера) и имеет разложение

$$n = n_k \varphi(p^k) + \dots + n_1 \varphi(p) + n_0,$$

а числа  $d_n = 0$ , если  $s_n < r$ , в противном случае  $d_n = s_n - r$  и  $s_n$  находятся по формуле

$$s_n = n_k \alpha_k + \dots + n_1 \alpha_1,$$

где  $0 \leq n_i < p$ ,  $\alpha_i = \frac{p^i - 1}{p - 1}$ , при  $0 < i \leq k$   $n_k \neq 0$ ,  $n_0 < p - 1$ , являются образующими алгебры  $A^{[r]}$ , т.е.

$$A^{[r]} = O[x, x^{-1}, H_1(x), \dots, H_n(x), \dots].$$

**Доказательство.** Сначала докажем, что многочлены  $H_n \in A^{[r]}$ . Рассмотрим многочлены

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Нам надо определить наибольшую степень простого  $p$ , на которую делится образ  $P_n(x)$ ,  $\Delta_{h_1} P_n(x)$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_{h_1 \dots h_r} P_n(x)$  при  $x \in U_k$ . В [3] показано, как это делается для  $P_n(x)$ . Фактически мы определяем точное количество приведенных систем вычетов по модулям  $p^s$ , на которые разбиваются числа  $x_i$ .

Рассмотрим представление

$$\Delta_h P_n(x) = \frac{P_n(x+h) - P_n(x)}{h} = P'_n(x) + \frac{P''_n(x)}{2!} h + \dots,$$

так как  $P'_n(x) = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1, j \neq i}^n (x - x_i)$ , то у нас может происходить потеря в количестве приведенных систем вычетов на единицу. Если  $h$   $p$ -адическая единица, то показатель у  $\Delta_h P_n(x)$  будет совпадать с показателем  $P_n(x)$  по левой части формулы. Если  $p$ -адический показатель  $ord_p h > 0$ , то наименьший показатель в правой части будет у  $P'_n(x)$ , а здесь происходит потеря на единицу. По индукции показываем, что у  $r$ -разности происходит уменьшение показателя на  $r$ . Поэтому для определения  $d_n$  определяется через  $s_n$ , найденных в [3], из формулировки теоремы. Так доказывается, что  $H_n \in A^{[r]}$ .

Далее, так как  $\deg H_n = n$ , то любой многочлен раскладывается через многочлены  $H_n$  с коэффициентами из  $k$ . Определяя числа  $x_n$ , как в [3], мы получаем, что  $\Delta_{h_1, \dots, h_k} H_i(x_n)$  при  $i > n$  равны 0 или имеют больший  $p$ -адический показатель. Из этого следует, что  $P \in A^{[r]}$  тогда и только тогда, когда коэффициенты в разложении  $P$  через многочлены  $H$  принадлежат  $O$ , что и доказывает теорему 1.

Теорема 1 обобщается на многомерный случай, когда  $T = G_m^n$ .

**Теорема 2.** *Многочлены*

$$H_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) = H_{\alpha_1}(x_1) \dots H_{\alpha_n}(x_n),$$

где  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , являются образующими алгебры  $A^{[r]}$  для алгебраического тора  $T = G_m^n$ .

$$A^{[r]} = O[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}, \dots, H_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) \dots].$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kunyvskii B. E., Moroz B. Z., Voskresenskii V. E.* On integral models of an algebraic torus / Max-Planck-Institut fur Mathematik. Preprint Series. 2001. №12.
2. *Popov S. Yu., Voskresenskii V. E.* Galois lattices and reduction of algebraic tori // Communications of Algebra. 2001. № 9. P. 213–223.
3. *Водолазов А. М.* Целые модели разложимых алгебраических торов бесконечного типа // Современные проблемы алгебры, теории чисел и функционального анализа: межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 14–23.
4. *Bhargava M., Cahen P.-J., Yeramian J.* Finite generation properties for various rings of integer-valued polynomials // J. of Algebra. 2009. Vol. 322, № 4. P. 1129–1150.

УДК 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

## О ЗАДАЧЕ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РИСКА ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ

Пусть  $\theta_i$  – доли активов  $n$  видов, из которых инвестор формирует портфель,  $b_i$ ,  $i = \overline{1, s}$ ,  $s \leq n$  – ограничения на доли активов, заставляющие инвестора отказаться от подневольного желания «получить высокий доход любой ценой» и учесть неценовые оценки качества активов. В качестве рискованных показателей  $\sigma_i$  могут выступать среднеквадратические отклонения доходностей, либо иные показатели негативного для инвестора характера.

Требуется равномерно распределить риски ( $\sigma_i$ ) между всеми активами, взвесив их по долям активов в портфеле, за счёт выбора этих долей:

$$\Psi(\theta) := \max_{i=\overline{1, n}} \sigma_i \theta_i \longrightarrow \min_{\theta \in D} \quad (1)$$

$$D = \left\{ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \theta_i = 1, \theta_i \leq b_i, i = \overline{1, s} \right\}. \quad (2)$$

В [1] решена задача равномерного распределения риска с целевой функцией (1) и такими же ограничениями, как в известной задаче минимизации риска финансового портфеля Г. Марковица.

**Теорема 1.** *Решение задачи (1), (2) существует тогда и только тогда, когда либо  $s < n$ , либо  $s = n$  и  $\sum_{i=1}^n b_i \geq 1$ .*

**Доказательство.** 1. При  $s = n$  множество  $D$  не пусто тогда и только тогда, когда выполняется неравенство  $\sum_{i=1}^n b_i \geq 1$ , например,  $\theta = (b_1, \dots, b_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i) \in D$ , а при  $s < n$  множество  $D$  не пусто

для любых  $b_i$ , например,  $\theta = \left( b_1, \dots, b_s, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-s-1}, 1 - \sum_{i=1}^s b_i \right) \in D$ .

2. Возьмём произвольно  $\tilde{\theta} \in D$ , положим  $D_0 := \left\{ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) : 1 - \Psi(\tilde{\theta}) \sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_j^{-1} \leq \theta_i \leq \min \left\{ \Psi(\tilde{\theta})/\sigma_i, b_i \right\}, i = \overline{1, n} \right\}$ . Левая часть  $i$ -го неравенства,  $i = \overline{1, n}$ , – результат подстановки  $\theta_j \leq \Psi(\tilde{\theta})/\sigma_j$ ,  $j = \overline{1, n} \setminus \{i\}$  в соотношение  $\sum_{j=1}^n \theta_j = 1$ . Ясно, что решение задачи (1–2) совпадает с решением задачи:  $\Psi(\theta) \rightarrow \min_{\theta \in D_0}$ , причём  $\tilde{\theta} \in D_0$ . Поскольку функция  $\Psi(\cdot)$  непрерывна, а множество  $D_0$  не пусто, ограничено и замкнуто, то решение задачи существует.

Теорема доказана.

Далее, если только  $s = n$ , считаем, что  $\sum_{i=1}^n b_i \geq 1$ . Положим  $\nu = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-1}$ . Рассмотрим следующие надмножества множества  $D$ :

$$D(0) = \left\{ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \theta_i = 1 \right\}, \quad (3)$$

$$D(l) = \left\{ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \theta_i = 1, \theta_l \leq b_l \right\}, l \in \overline{1, s}. \quad (4)$$

Рассмотрим задачу

$$\max_{i=\overline{1, n}} \sigma_i \theta_i \longrightarrow \min_{\theta \in D(0)}. \quad (5)$$

Следующее утверждение очевидно.

**Теорема 2.** Решением задачи (5), а также задачи (1),(2), при выполнении неравенства

$$\max_{j=\overline{1, s}} (1/(\sigma_j \nu) - b_j) \leq 0 \quad (6)$$

является вектор  $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*) : \theta_i^* = 1/(\sigma_i \nu)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Для  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$  обозначим  $I(\theta) = \{i = \overline{1, n} : \Psi(\theta) = \sigma_i \theta_i\}$ ,  $IB(\theta) = \{j = \overline{1, s} : \theta_j = b_j\}$ .

**Лемма 1.** Пусть вектор  $\theta \in D$  является решением задачи (1),(2). Тогда  $I(\theta) \cup IB(\theta) = \overline{1, n}$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $\exists i_0 \in \overline{1, n} \setminus \{I(\theta) \cup IB(\theta)\}$ . При малом  $\varepsilon > 0$  вектор  $\theta^\varepsilon = (\theta_1^\varepsilon, \dots, \theta_n^\varepsilon) : \theta_{i_0}^\varepsilon = \theta_{i_0} + \varepsilon, \theta_i^\varepsilon = \theta_i - \varepsilon/(n-1), i = \overline{1, n} \setminus \{i_0\}$ , принадлежит множеству  $D$ , причем  $\Psi(\theta^\varepsilon) < \Psi(\theta)$ , что противоречит оптимальности  $\theta$ .

Лемма доказана.

Рассмотрим задачу

$$\max_{i=\overline{1, n}} \sigma_i \theta_i \longrightarrow \min_{\theta \in D(l)}. \quad (7)$$

**Теорема 3.** 1. При  $1/(\sigma_l \nu) - b_l \leq 0$  решением задачи (7) будет вектор  $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*) : \theta_i^* = 1/(\sigma_i \nu), i = \overline{1, n}$ . 2. При  $1/(\sigma_l \nu) - b_l > 0$  решением задачи (7) будет вектор  $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*) :$

$$\theta_l^* = b_l, \theta_i^* = (1 - b_l) / \left( 1 + \sum_{j=1, j \neq i, j \neq l}^n \sigma_i / \sigma_j \right), i \in \overline{1, n} \setminus \{l\}. \quad (8)$$

**Доказательство.** По теореме 1 решение задачи (7) существует. Случай  $1/(\sigma_l \nu) - b_l \leq 0$  рассмотрен в теореме 2. Пусть  $1/(\sigma_l \nu) - b_l > 0$ . В силу леммы 1 и ввиду  $I(\theta^*) \neq \overline{1, n}$  имеем  $IB(\theta^*) = \{l\}, I(\theta^*) = \overline{1, n} \setminus \{l\}$ , то есть  $\theta_l^* = b_l, \theta_i^* \sigma_i^* / \theta_j^* \sigma_j^* = 1, i, j = \overline{1, n} \setminus \{l\}, \sum_{i=1}^n \theta_i^* = 1$ , откуда получаем (8).

Теорема доказана.

**Теорема 4.** Пусть  $l \in \overline{1, s}$  удовлетворяет двойному неравенству

$$\max_{i=\overline{1, s} \setminus \{l\}} (b_l / b_i) / \left( 1 + \sum_{j=1, j \neq i, j \neq l}^n \sigma_i / \sigma_j + b_l / b_i \right) < b_l < 1/(\sigma_l \nu). \quad (9)$$

Тогда решением задачи (1),(2) будет вектор  $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$ , компоненты которого определены в (8).

**Доказательство.** По теореме 3 вектор с компонентами, определёнными в (8), будет решением задачи (7). Покажем, что он будет и решением задачи (1),(2). Оценим  $\forall i = \overline{1, s} \setminus \{l\}, \theta_i^* - b_i = \left( 1 - b_i \left( 1 + \sum_{j=1, j \neq i, j \neq l}^n \sigma_i / \sigma_j + b_l / b_i \right) \right) / \left( 1 + \sum_{j=1, j \neq i, j \neq l}^n \sigma_i / \sigma_j \right) \stackrel{(9)}{<} 0$ .

Итак,  $\theta^*$ , являясь решением задачи (7), принадлежит множеству  $D \subset D(l)$ , следовательно,  $\min_{\theta \in D} \Psi(\theta) = \min_{\theta \in D(l)} \Psi(\theta) = \Psi(\theta^*)$ .

Что и требовалось доказать.

**Пример.** Пусть  $n = 3, \sigma_1 = 5, \sigma_2 = 4, \sigma_3 = 1, b_1 = 0.25, b_2 = 0.4, b_3 = 0.5$ . Выполняется (9) для  $l=3, \theta^* = (2/9, 5/18, 1/2)$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И. Ю.* О формировании портфеля ценных бумаг с равномерно распределённым риском // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 18–20.

УДК 514.764

С. В. Галаев

### О ПРОДОЛЖЕНИИ ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗНОСТИ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ С ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

В статье вводятся понятия *внутренней связности* и *продолженной связности неголономного многообразия* коразмерности 1. Для случая контактного пространства с финслеровой метрикой доказывается существование и единственность метрической продолженной связности. Тензор кривизны продолженной метрической связности в случае неголономного многообразия с римановой метрикой оказывается равным тензору кривизны Вагнера, построенного им для произвольного неголономного многообразия коразмерности 1 с внутренней аффинной связностью [1]. Подробные доказательства всех сформулированных утверждений содержатся в [2].

**Введение.** В качестве обобщения известного подхода к определению связности с помощью горизонтального распределения, заданного на касательном расслоении к гладкому многообразию  $X$  в работе [3] вводится понятие *связности над распределением*. В [4] аналогичный объект называется *связностью на расслоении вдоль распределения на базе*. Неголономное многообразие есть гладкое многообразие с заданным на нем распределением  $D$ . Это распределение, в ряде случаев называемое неголономным многообразием, вообще говоря, неинтегрируемо. Понятие внутренней геометрии неголономного многообразия было введено Вагнером (см. [4]). Развивая геометрию неголономных многообразий, В. В. Вагнер вводит понятие внутренней геометрии неголономного многообразия как совокупности тех свойств объектов, заданных в неголономном многообразии, которые зависят только от самого неголономного многообразия и от его оснащения [5]. Параллельный перенос внутри неголономного многообразия осуществляется с помощью связности  $\nabla$ , которую, следуя терминологии В. В. Вагнера, мы называем *внутренней связностью неголономного многообразия*. Помимо внутренней связности в ряде работ рас-



смаатриваются связности, осуществляющие параллельный перенос векторов, лежащих в распределении  $D$ , вдоль произвольных кривых многообразия  $X$ . Такие связности называются *усеченными связностями*. По сути, усеченная связность является связностью в векторном расслоении, определяемом неголономным многообразием. Среди усеченных связностей в работе [2] был выделен класс *продолженных связностей неголономного многообразия*. Применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой внутренние связности изучались в работах [6, 7]. В настоящей статье доказывается существование метрической продолженной связности, однозначно определяемой внутренней связностью контактного пространства с финслеровой метрикой.

**1. Внутренние связности неголономного многообразия.** Всюду в работе под многообразием  $X$  понимается связное  $C^\infty$ -многообразие размерности  $(2n + 1)$ ,  $n \geq 2$ . Все встречающиеся на  $X$  функции и геометрические объекты считаются бесконечно дифференцируемыми. Мы предполагаем, что на многообразии  $X$  задана 1-форма  $\lambda$  такая, что ранг формы  $\omega = d\lambda$  равен  $2n$  и имеет место разложение  $TX = D \oplus D^\perp$ , где  $D = \ker \lambda$ ,  $D^\perp = \ker \omega$ . Гладкое распределение  $D$  мы, следуя В. В. Вагнеру, будем называть *неголономным многообразием*, а распределение  $D^\perp$  – его *оснащением*. Под допустимым векторным полем к произвольному распределению  $D$  будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в данном распределении, а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на соответствующем оснащении  $D^\perp$ . Наконец, допустимое тензорное поле к распределению  $D$  – есть линейная комбинация тензорных произведений допустимых векторных полей и допустимых 1-форм. Допустимые тензорные поля типа  $(p, q)$  к распределению  $D$  обозначим  $f_q^p(D)$ .

Карту  $K(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ;  $a, b, c = 1, 2, \dots, 2n$ ) на многообразии  $X$  будем называть *адаптированной к неголономному многообразию  $D$* , если  $\partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \in f_0^1(D^\perp)$ . Нетрудно установить, что любые две адаптированные карты связаны между собой преобразованиями вида:  $x^a = x^a(x^{\tilde{a}})$ ,  $x^n = x^n(x^{\tilde{a}}, x^{\tilde{n}})$ .

Пусть  $P : TX \rightarrow D$  – проектор, определяемый разложением  $TX = D \oplus D^\perp$ , и  $K(x^a)$  – адаптированная карта. Векторные поля  $P(\partial_\alpha) = \vec{e}_\alpha = \partial_\alpha - \Gamma_a^n \partial_n$  линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение  $D$ :  $D = \text{span}(\vec{e}_\alpha)$ . Таким образом, мы имеем на многообразии  $X$  неголономное поле базисов  $(\vec{e}_\alpha, \partial_n)$  и соответствующее ему поле кобазисов  $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$ . Векторные поля  $(\vec{e}_\alpha)$  определяют в неголономном многообразии линейные координаты,

называемые Вагнером градиентными.

Будем говорить, что в неголономном многообразии  $D$  задана внутренняя связность, если распределение  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$  разбивается в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  - вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ .

Таким образом, задание внутренней связности эквивалентно заданию объекта  $G_n^a(x^a, x^n)$  такого, что  $HD = \text{span}(\vec{\epsilon}_\alpha)$ , где  $\vec{\epsilon}_\alpha = \partial_n - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$ . В частном случае, когда внутренняя связность определяется линейной связностью, имеют место равенства  $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+a}$ .

**2. Продолженные связности неголономного многообразия с допустимой финслеровой метрикой.** Будем называть связность в векторном расслоении  $D$ , определяемую горизонтальным распределением  $HT = HD \oplus \text{span} \vec{u}$ , где  $\pi_* \vec{u} = \partial_n$ , *продолженной связностью неголономного многообразия*. Легко установить, что векторное поле  $\vec{u}$  в этом случае должно иметь вид  $\vec{u} = \partial_n - G_n^a \partial_{n+a}$ . Таким образом, задание продолженной связности сводится к определению объекта  $G_n^a$ . Имеет место

**Теорема.** *Существует единственная продолженная связность неголономного многообразия с допустимой финслеровой метрикой, сохраняющей длину параллельно переносимого вектора.*

Подробное доказательство теоремы содержится в [2]. Здесь лишь заметим, что допустимая финслерова метрика определяется гладкой функцией, заданной на распределении  $D$  как на гладком многообразии, и удовлетворяющей обычным свойствам. По существу, доказательство теоремы сводится к вычислению объекта  $G_n^a$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В. В. Геометрия  $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
2. Galaev S. V. Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric // URL : <http://arxiv.org/abs/1103.4337>. 2011.
3. Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1987. № 16. С. 5–85.
4. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М. : Наука, 1984. 173 с.
5. Вагнер В. В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий: VIII Междунар. конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского (1937). Отчёт. Казань : Казан. физ.-мат. общ-во, 1940. 327 с.
6. Галаев С. В., Челышев В. Т. О допустимых тензорных структурах на неголономном многообразии. // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 19–21.

С. В. Галаев, А. В. Гохман

## О ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В статье вводится понятие внутренней геометрии многообразия почти контактной метрической структуры. В терминах внутренней геометрии дается описание некоторых классов пространств с почти контактной метрической структурой. Вводится новый тип почти контактных метрических пространств – эрмитовых почти контактных метрических пространств.

**Введение.** В терминологии В. В. Вагнера [1, 2] многообразии почти контактной метрической структуры является неголономным многообразием коразмерности 1 с дополнительными, называемыми им внутренними, структурами. Мы определяем внутреннюю геометрию почти контактного метрического пространства  $X$  как совокупность тех свойств, которыми обладают: гладкое распределение  $D$ , задаваемое контактной формой  $\eta$ ; допустимое поле аффинора  $\varphi$  (называемое нами допустимой почти комплексной структурой) такое, что  $\varphi^2 = -1$ ; поле допустимых тензоров римановой метрики  $g$ , связанное с допустимой почти комплексной структурой равенством  $g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y})$ , где  $\vec{X}, \vec{Y}$  – допустимые векторные поля. К объектам внутренней геометрии почти контактного метрического пространства следует отнести и те объекты, которые являются производными от уже указанных внутренних структур: косимметрическая 2-форма  $\omega = d\eta$ ; векторное поле  $\vec{\xi}$ , называемое полем Рибба, определяющее оснащение распределения  $D - \vec{\xi} \in D^\perp$ , и однозначно определяемое равенствами  $\eta(\vec{\xi}) = 1$ ,  $\ker\omega = \text{Span}(\vec{\xi})$  в случае, когда форма  $\omega$  имеет максимальный ранг; внутренняя связность  $\nabla$ , осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых и однозначно определяемая полем  $g$ ; связность  $\nabla^1$ , являющаяся естественным продолжением связности  $\nabla$  и осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия  $X$ .

**1. Допустимые тензорные структуры.** Пусть  $X$  – гладкое многообразие нечетной размерности  $n$ ,  $\Xi(X)$  –  $C^\infty(X)$ -модуль гладких векторных полей на  $X$ ,  $d$  – оператор внешнего дифференцирования. Все

многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса  $C^\infty$ . Для упрощения изложения тензорное поле в дальнейшем иногда называется тензором. Почти контактной метрической структурой на  $X$  называется совокупность  $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$  тензорных полей на  $X$ , где  $\varphi$  – тензор типа  $(1, 1)$ , называемый структурным эндоморфизмом,  $\vec{\xi}$  и  $\eta$  – вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой,  $g$  – (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\begin{aligned}\eta(\vec{\xi}) &= 1, \varphi(\vec{\xi}) = 0, \eta \circ \varphi = 0, \varphi^2 \vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi}, \\ g(\varphi \vec{X}, \varphi \vec{Y}) &= g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}),\end{aligned}$$

$\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$ . Легко проверить, что тензор  $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi \vec{Y})$  кососимметричен. Он называется фундаментальной формой структуры. Многообразии, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда  $\Omega = d\eta$ , почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой. Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если  $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ , где  $N_\varphi$  – кручение Нейенхейса, образованное тензором  $\varphi$ . Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие, с заданной на нем сасакиевой структурой, называется сасакиевым многообразием. Пусть  $D$  – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой  $\eta$ ,  $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$  – его оснащение. В дальнейшем будем полагать, что ограничение формы  $\omega = d\eta$  на распределении  $D$  является невырожденной формой. В этом случае вектор  $\vec{\xi}$  однозначно определяется из условий  $\eta(\vec{\xi}) = 1$ ,  $\ker \omega = \text{Span}(\vec{\xi})$  и называется вектором Роба. Гладкое распределение  $D$  мы иногда будем называть неголономным многообразием.

Для исследования внутренней геометрии неголономного многообразия и, вообще, для изучения почти контактных метрических структур, удобно использовать карты, обладающие дополнительными свойствами. Карту  $K(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$ ) ( $a, b, c, e = 1, \dots, n-1$ ) на многообразии  $X$  будем называть адаптированной [3, 4] к неголономному многообразию  $D$ , если  $D^\perp = \text{Span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$ . Нетрудно установить, что любые две адаптированные карты связаны между собой преобразованиями вида:  $x^a = x^a(x^{\tilde{a}})$ ,  $x^n = x^n(x^{\tilde{a}}, x^{\tilde{n}})$ . Такие системы координат называются Вагнером в работе [2] градиентными.

Пусть  $P : TX \rightarrow D$  – проектор, определяемый разложением  $TX = D \oplus D^\perp$ , и  $K(x^\alpha)$  – адаптированная карта. Векторные поля  $P(\partial_a) = \vec{e}_a =$

$\partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему  $D$ :  $D = \text{Span}(\vec{e}_a)$ . Таким образом, мы имеем на многообразии  $X$  неголономное поле базисов  $(\vec{e}_a, \partial_n)$  и соответствующее ему поле кобазисов  $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$ . Непосредственно проверяется, что  $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M_{ab}^n \partial_n$ , где компоненты  $M_{ab}^n$  образуют так называемый тензор неголономности (см. [2]). Если потребовать, чтобы для всех адаптированных координат выполнялось равенство  $\vec{\xi} = \partial_n$ , то окажется справедливым равенство  $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$ , где  $\omega = d\eta$ . В дальнейшем ограничимся рассмотрением исключительно адаптированных координат с условием  $\vec{\xi} = \partial_n$ . Адаптированным будем называть также базис  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  как базис, определяемый адаптированной картой. При преобразовании адаптированной системы координат векторы адаптированного базиса преобразуются следующим образом:  $\vec{e}_a = \frac{\partial x^{\tilde{a}}}{\partial x^a} \vec{e}_{\tilde{a}}$ .

Тензорное поле, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению  $D$ ), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению  $D^\perp$ , а ковекторный аргумент коллинеарен форме  $\eta$ . Координатное представление допустимого тензорного поля типа  $(p, q)$  в адаптированной карте имеет вид:  $t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$ .

Так, в частности, под допустимым векторным полем будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в распределении  $D$ , а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на оснащении  $D^\perp$ . Понятно, что всякая тензорная структура, заданная на многообразии  $X$ , определяет на нем единственную допустимую тензорную структуру того же типа. Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор  $\varphi$  является допустимым тензорным полем типа  $(1, 1)$ . Поле аффинора  $\varphi$  мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форма  $\omega = d\eta$  также является допустимым тензорным полем. В геометрии расслоенных пространств допустимое тензорное поле называется полубазисным.

Назовем допустимое тензорное поле интегрируемым, если найдется такой атлас адаптированных карт, что в каждой из карт этого атласа компоненты поля постоянны. Из теоремы 1 немедленно получаем, что необходимым условием интегрируемости допустимого поля  $t$  является обращение в нуль производных  $\partial_n t$ . Назовем допустимую тензорную структуру  $t$  квазиинтегрируемой, если в адаптированных координатах выполняется равенство  $\partial_n t = 0$ . Форма  $\omega = d\eta$  является важным примером интегрируемой допустимой тензорной структуры. Введем в рассмотрение тензор  $\tilde{N}_\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = (P \circ N_\varphi)(\vec{X}, \vec{Y})$ , где  $\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$ . Следующие

две теоремы указывают на важность только что данных определений.

**Теорема 1.** *Аффинорная структура  $\varphi$  интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство  $\tilde{N}_\varphi = 0$ .*

**Теорема 2.** *Почти контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:  $\tilde{N}_\varphi = 0$ ,  $\omega(\varphi\vec{u}\varphi\vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$ .*

**2. Внутренние характеристики почти контактных метрических многообразий.** В настоящем разделе мы будем придерживаться следующих обозначений: допустимые почти комплексная и риманова метрика по-прежнему будут обозначаться с помощью символов  $\varphi$  и  $g$ ; символ  $\nabla$  будет обозначать внутреннюю метрическую связность, а символ  $\tilde{g}$  – метрический тензор в объемлющем пространстве.

**Теорема 3.** *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда структура  $\varphi$  квазиинтегрируема и выполняется равенство  $\nabla\varphi = 0$ , где  $\nabla$  – внутренняя метрическая связность.*

Заметим, что равенство  $\nabla\varphi = 0$  оказывается не верным, если связность  $\nabla$  и аффинорная структура  $\varphi$  рассматриваются как структуры, заданные на всем многообразии.

Пусть  $\nabla^1$  – продолженная связность, конструируемая из внутренней связности следующим образом:  $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\partial_n)$  (здесь  $\partial_n$  векторное поле на многообразии  $D$ ). Продолженная связность позволяет сформулировать следующий характеристический признак интегрируемости почти комплексной структуры  $\varphi$ .

**Теорема 4.** *Почти комплексная структура  $\varphi$  интегрируема тогда и только тогда, когда выполняется равенство  $\nabla^1\varphi = 0$ .*

В заключение работы сформулируем утверждение, касающееся  $K$ -контактных многообразий.

**Теорема 5.** *Почти контактная метрическая структура является  $K$ -контактной структурой тогда и только тогда, когда форма  $g$  квазиинтегрируема.*

Справедливость теоремы следует из следующей цепочки эквивалентностей:  $L_{\tilde{\xi}}\tilde{g} = 0 \Leftrightarrow L_{\tilde{\xi}}g = 0 \Leftrightarrow \partial_n g = 0$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В. В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий: VIII Междунар. конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского (1937). Отчёт. Казань : Казан. физ.-мат. общ-во, 1940. 327 с.

2. Вагнер В. В. Геометрия  $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

3. Букушева А. В., Галаев С. В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.

4. Galaev S. V. Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric // URL : <http://arxiv.org/abs/1103.4337>.

УДК 517.984

**Р. А. Иванов, В. Е. Фирстов**

**ПРИНЦИП МИНИМУМА ИНФОРМАЦИИ  
ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ГРУППОВОГО СОТРУДНИЧЕСТВА  
В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ**

При организации группового сотрудничества в учебном процессе наиболее важным моментом является формирование разбиения обучаемого контингента на коалиции, при котором обеспечивается оптимальный учебный эффект. Процедура оптимизации в данном случае исходит из следующей информационной модели [1 – 3].

**1. Модель.** Пусть  $A = \{a_1; a_2; \dots; a_m\}$  – конечное множество, представляющее обучаемый контингент, которому предлагается выполнить некоторое задание (тест), и контролируется время его выполнения отдельными учащимися. В результате такого измерения устанавливается цепочка неравенств  $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m < T$ , где  $t_i$  – общее время выполнения задания  $i$ -м учащимся, в котором определенным образом учтено качество проделанной работы;  $i = \overline{1; m}$ ;  $T$  – временной регламент, определяемый параметрами теста. Пусть данная цепочка неравенств есть некоторое устойчивое статистическое среднее, на основе которого определяются вероятности  $\alpha_i = 1 - t_i/T$ , характеризующие уровень обученности  $i$ -го учащегося, и задающие распределение нормированных вероятностей

$$p(\alpha_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha} = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m}, i = \overline{1; m}. \quad (1)$$

Пусть для улучшения показателей обучения контингента  $A$  задействована технология группового сотрудничества, что формально выражается в виде разбиения множества

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, A_j \cap A_k = \emptyset, j \neq k, j; k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где

$$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = |A| = m. \quad (3)$$

Для проведения процедуры оптимизации в рамках излагаемой модели определяются групповые вероятности

$$p_j = \sum_{i=1}^m p(a_i), \forall a_i \in A_j, \quad (4)$$

где  $p_j$  – вероятность того, что некоторый элемент из  $A$  входит в класс  $A_j$ . С вероятностями  $p_j$  связывается групповая информационная энтропия

$$H(p) = - \sum_{j=1}^n p_j \log_2 p_j. \quad (5)$$

Оптимум в рассматриваемой информационной модели достигается, если минимальна энтропия  $H(p)$ . Поэтому при оптимизации группового сотрудничества в учебном процессе разбиение (2) должно формироваться с учетом распределения (1) так, чтобы при определении групповых вероятностей (4) обеспечивался минимум энтропии  $H(p)$  в (5), т.е. критерий оптимизации имеет вид

$$H(p) \rightarrow \min. \quad (6)$$

**2. Анализ модели.** Из формул (1) – (5) видно, что разность между энтропией  $H(A)$  при обучении контингента  $A$  и энтропией  $H(p)$  при обучении того же контингента, разбитого на группы, положительна:

$$\Delta H = H(A) - H(p) = \sum_{j=1}^n p_j \log_2 p_j - \sum_{i=1}^m p(a_i) \log_2 p(a_i) \geq 0. \quad (7)$$

Действительно, разворачивая вероятности  $p_j$  по компонентам разбиения

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1j_1}; p_2 = p_{21} + p_{22} + \dots + p_{2j_2}; \dots; p_n = p_{n1} + p_{n2} + \dots + p_{nj_n}, \quad (8)$$

где  $j_1 + j_2 + \dots + j_n = m$ ;  $1 \leq j_1; \dots; j_n \leq m$ , после подстановки (8) в (7) получаем

$$\begin{aligned} & (p_{11} + \dots + p_{1j_1}) \log_2 (p_{11} + \dots + p_{1j_1}) + \dots + (p_{n1} + p_{nj_n}) - (p(a_1) \log_2 p(a_1) + \dots + \\ & + p(a_m) \log_2 p(a_m)) = \\ & = p(a_1) \log_2 \left( 1 + \frac{p(a_2) + \dots + p(a_{j_1})}{p(a_1)} \right) + \dots + \end{aligned}$$



$$+p(a_m) \log_2\left(1 + \frac{p(a_{m-j_n}) + \dots + p(a_{m-1})}{p(a_m)}\right) \geq 0. \quad (9)$$

Поскольку в связи с (8)  $p_{11}; \dots; p_{nj_n}$  – это перестановки  $p(a_1); \dots; p(a_m)$ , то, здесь мы положим для определенности,  $p_{11} = p(a_1); \dots; p_{nj_n} = p(a_m)$ , Таким образом, установлено, что  $H(A) \geq H(p)$ , т.е. реализация технологии сотрудничества в учебном процессе приводит к снижению информационной энтропии в процессе обучения. Это обусловлено тем, что при разбиении на группы учебная информация прорабатывается не отдельным учащимся, а посредством ее обсуждения в группе, что равносильно появлению дополнительных каналов целевого общения, реализующих режим усиления при восприятии целевой информации, т.е. ее лучшее понимание и усвоение.

**3. Эксперименты** на школьном уровне проводились на базе МОУ «Гимназия № 5» Заводского района Саратова на уроках математики в 4 «А» классе и 10–11-х классах. На первой диаграмме (рис. 1) по оси абсцисс занумерованы фамилии учащихся; по оси ординат – количество правильных ответов на тестовое задание. Тест содержал 20 вопросов. Как видно из диаграммы рис. 1, после проведения ИКТ показатели академической успешности школьников улучшились в среднем на 27,5%. На второй диаграмме (рис. 2) условия те же, только по оси ординат отложено время выполнения тестовых заданий (в мин.).

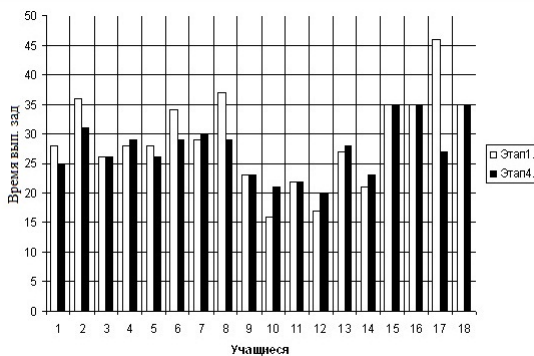


Рис. 1

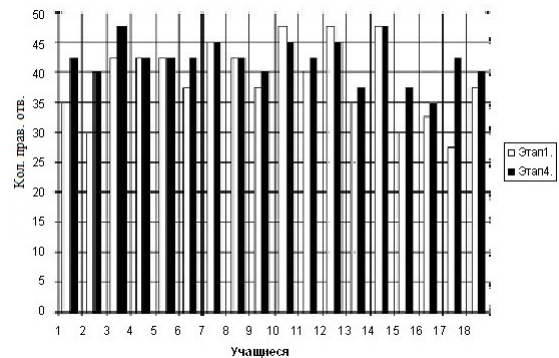


Рис. 2

Здесь ситуация неоднозначная, особенно в группе учащихся с быстрым мышлением, хотя в среднем все-таки прослеживается тенденция к уменьшению затрат времени после проведения ИКТ. Аналогичные измерения, проведенные в 10–11-х классах, дали увеличение показателей успеваемости на 20–25%.

**4. Программное обеспечение измерений.** Для определения минимума энтропии (6) разработана специальная программа перечисления всевозможных конфигураций разбиения  $m$  - элементного множества, ко-

личество которых определяется с помощью полиномов Белла [4]:

$$B(m+1) = \sum_{i=0}^m c_m^i B(i), \quad (10)$$

где  $B(0) = 1$ . Числа Белла с увеличением мощности  $m$  множества  $A$  растут довольно быстро, что иллюстрируется данными следующей таблицы.

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$B(m)$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570

$m$	12	13	14	15	16
$B(m)$	4213597	27644437	190899322	1382958545	10480142147

$m$	17	18	19	20
$B(m)$	82864869804	682076806159	5832742205057	51724158235372

В связи с этим, как показывает опыт отладки программы перечисления конфигураций разбиения, при  $m > 30$  появляются проблемы с ресурсом компьютерной памяти и в этом случае возникает задача оптимизации сложности алгоритма перечисления конфигураций разбиения, хотя для современной школы или вуза такие значения контингентов встречаются редко.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Фирстов В. Е.* Количественные меры информации и оптимизация группового сотрудничества при обучении // Вестник Саратовского технического университета. 2008. № 3 (34), вып. 1. С. 105–109.
2. *Фирстов В. Е.* Информационная технология организации группового сотрудничества при обучении // Вестник Саратовского технического университета. 2009. № 2 (39), вып. 2. С. 101–103
3. *Firstov V. E.* Semantic Model and Optimization of Creative Processes at Mathematical Knowledge Formation // Natural Science. 2010. Vol. 2, №. 8. P. 915–922.
4. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. СПб. : Питер, 2002. 304 с.

Т. В. Иофина

**ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА  
РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМАМ ВИЛЕНКИНА**

Пусть  $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$  – последовательность натуральных чисел,  $2 \leq p_i < N$ ,  $m_0 = 1$ ,  $m_n = p_1 p_2 \dots p_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Каждое  $x \in [0, 1)$  имеет разложение  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n$ ,  $x_n \in \mathbb{Z}$  и  $0 \leq x_n < p_n$ . Для таких  $x, y \in [0, 1)$  определим разность  $z = x \ominus y$ , где  $z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{m_n}$ ,  $z_i = x_i - y_i \pmod{p_i}$ . Каждое целое неотрицательное  $k$  представимо в виде  $k = \sum_{n=1}^{\infty} m_{n-1} k_n$ ,  $k_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$ . Для  $x \in [0, 1)$  и  $k \in \mathbb{Z}_+$  определим  $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right)$ . Известно, что система  $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ , называемая *системой Виленкина*, ортонормирована и полна в  $L[0, 1)$  (эти и другие свойства системы см. в [1]). Если  $f \in L[0, 1)$ , то  $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_k(t)} dt$ ,  $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \chi_k(x)$ . В статье изучаются оценки приближений функций величинами  $\mathcal{E}_{n+1}(f) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{k+1}(f)$ , называемыми *средними Эйлера*. Далее рассматриваются пространства  $L^p[0, 1)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , с нормой  $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ . Пусть  $\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq x < 1} |f(x)|$ . Тогда  $C^*[0, 1)$  есть множество ограниченных функций, таких что  $\lim_{h \rightarrow 0+} \|f(x \ominus \ominus h) - f(x)\|_{\infty} = 0$ . Пусть  $\mathcal{P}_n := \{f \in L^1[0, 1) : \hat{f}(k) = 0, k \geq n\}$ . Тогда наилучшее приближение по системе Виленкина порядка  $n$  вводится следующим образом:  $E_n(f)_p := \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$ . Пусть  $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$  – убывающая к нулю положительная последовательность. По определению  $E_p(\varepsilon)$  состоит из  $f \in L^p[0, 1)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , или  $f \in C^*[0, 1)$ ,  $p = \infty$ , таких что  $\|f\|_{E_p(\varepsilon)} = \|f\|_p + \sup_{k \in \mathbb{N}} E_k(f)_p / \varepsilon_k < \infty$ .

Пусть также  $A_{r,p} = 1$  при  $1 < p < \infty$  и  $A_{r,p} = \ln(r+2)$  при  $p = 1, \infty$ .

**Лемма 1.** Для  $f \in L^p[0, 1)$ ,  $1 < p < \infty$ , верно неравенство  $\|S_n(f, x)\|_p \leq C \|f\|_p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $C$  не зависит от  $f$  и  $n$ .

Для произвольных (в том числе и неограниченных) последовательностей  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  лемма установлена Шиппом [2] и Шимоном [3].

**Лемма 2** [4, глава 4, §4]. Существует  $C > 0$  такое, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  верна оценка  $\|D_n\|_1 \leq C \ln(n+2)$ .

Из лемм 1 и 2 выводится следующая лемма.

**Лемма 3.** Для  $f \in L^p[0, 1)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , и  $f \in C^*[0, 1)$  ( $p = \infty$ ) при  $n \in \mathbb{N}$  справедлива оценка  $\|\mathcal{E}_{n+1}(f)\|_p \leq C(p) \|f\|_p A_{n,p}$ .

**Следствие 1.** Пусть  $f \in L^p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , или  $f \in C^*[0, 1]$  ( $p = \infty$ ), тогда при  $k \geq n$  справедливо неравенство  $E_n(\mathcal{E}_{k+1}(f))_p \leq C_p E_n(f)_p A_{k,p}$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $\mathcal{E}_{k+1}(f) \in \mathcal{P}_{k+1}$ , и следовательно,  $E_n(\mathcal{E}_{k+1}(f))_p = 0$  при  $k+1 \leq n$ . Пусть  $k+1 > n$  и  $t_n \in \mathcal{P}_n$  таков, что  $\|f - t_n\|_p = E_n(f)_p$ . Применяя лемму 3 и учитывая, что  $\mathcal{E}_{k+1}(t_n) \in \mathcal{P}_n$ , выводим требуемое неравенство

$$\begin{aligned} E_n(\mathcal{E}_{k+1}(f))_p &\leq \|\mathcal{E}_{k+1}(f) - \mathcal{E}_{k+1}(t_n)\|_p \leq \\ &\leq C_1 \|f - t_n\|_p A_{k,p} = C_1 E_n(f)_p A_{k,p}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L^p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , или  $f \in C^*[0, 1]$  ( $p = \infty$ ). Тогда  $\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p \leq C(p) 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_{k,p} E_{k+1}(f)_p$ .

**Доказательство.** Пусть  $E_{n+1}(f)_p = \|f - t_{n+1}\|_p$ ,  $t_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$ . Тогда в силу оценки леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p &\leq \|\mathcal{E}_{n+1}(f) - \mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1})\|_p + \|\mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p + \|t_{n+1} - f\|_p \leq \\ &\leq \|\mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p + C_1 A_{n,p} E_{n+1}(f)_p. \end{aligned}$$

Так как при  $k \leq n$  справедливо

$$\begin{aligned} E_{k+1}(t_{n+1})_p &\leq E_{k+1}(t_{n+1} - f)_p + E_{k+1}(f)_p \leq \\ &\leq E_{n+1}(f)_p + E_{k+1}(f)_p \leq 2E_{k+1}(f)_p, \end{aligned}$$

оценка для  $\|\mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p$  примет вид

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_{n+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p &\leq 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_{k,p} \|S_{k+1}(t_{n+1}) - t_{n+1}\|_p \leq \\ &\leq C_2 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_{k,p} E_{k+1}(t_{n+1})_p \leq C_2 2^{-n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_{k,p} E_{k+1}(f)_p. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы осталось показать неравенство

$$A_{n,p} E_{n+1}(f)_p \leq C_3 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_{k,p} E_{k+1}(f)_p. \quad (1)$$

При  $1 < p < \infty$  имеем  $A_{n,p} = 1$ , и неравенство (1) с константой  $C_3 = 1$  следует из убывания  $E_k(f)_p$  по  $k$ .

Рассмотрим случай  $p = 1, \infty$ . Тогда

$$2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{k+2}{n+2} \geq 2^{-n} \left( 3^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \right) = \frac{1}{6}.$$

Используя последнее неравенство и убывание  $\ln x/x$  при  $x \geq e$ , при  $n \in \mathbb{N}$  полностью доказываем оценку (1):

$$\begin{aligned} & \ln(n+2)E_{n+1}(f)_p \leq \\ & \leq C_4 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k+2) \ln(n+2) E_{n+1}(f)_p / (n+2) \leq \\ & \leq C_4 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k+2) \ln(k+2) E_{k+1}(f)_p / (k+2) = \\ & = C_4 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \ln(k+2) E_{k+1}(f)_p. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Лемма 4.** Пусть  $f \in E_p(\varepsilon)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Тогда при фиксированном  $k \in \mathbb{N}$  имеем  $\mathcal{E}_k(f) \in E_p(\varepsilon)$ , причем справедлива оценка  $\|\mathcal{E}_{k+1}(f)\|_{E_p(\varepsilon)} \leq C(p)A_{k,p}\|f\|_{E_p(\varepsilon)}$ .

Доказательство вытекает из определения норм, леммы 3 и следствия 1.

**Теорема 2.** Пусть  $f \in E_p(\varepsilon)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , последовательности  $\varepsilon, \delta, \lambda$  таковы, что  $\varepsilon_n, \delta_n$  и  $\lambda_n = \varepsilon_n/\delta_n$  положительны и убывают к 0, причем

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon_{k+1} = O(2^n \varepsilon_{n+1}). \quad (2)$$

Тогда справедливо неравенство  $\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_{E_p(\delta)} \leq C(p)A_{n,p}\lambda_n$ .

**Доказательство.** По следствию 1 получаем, что справедливо

$$E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f) - f)_p \leq E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f))_p + E_k(f)_p \leq (1 + A_{n,p})E_k(f)_p \leq C_1 A_{n,p} \varepsilon_k,$$

и как следствие  $\sup_{k \geq n} E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f) - f)_p / \delta_k \leq C_1 A_{n,p} \lambda_n$ .

Так как для любой функции  $f \in L_p$  верно  $E_k(f)_p \leq \|f\|_p$ , имеем

$$\sup_{0 \leq k < n} E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f) - f)_p / \delta_k \leq \|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p / \delta_n.$$

Подставляя условие (2) в неравенство теоремы 1, получаем

$$\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p = O(A_{n,p}\varepsilon_n),$$

откуда

$$\sup_{0 \leq k \leq n} E_k(\mathcal{E}_{n+1}(f) - f)/\delta_k = O(A_{n,p}\lambda_n).$$

Оценка

$$\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_p = O(A_{n,p}\lambda_n)$$

в силу убывания  $\delta_n$  к 0 очевидна.

Подставляя полученные выше оценки в определение нормы, получаем нужное неравенство.

Теорема доказана.

Теорема 2 является аналогом теоремы, доказанной для тригонометрических рядов в [5] для пространств типа Гёльдера.

**Следствие 2.** Пусть  $\varepsilon_k = k^{-\beta}$ ,  $\delta_k = k^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < \beta$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда для  $f \in E_p(\varepsilon)$  имеем  $\|\mathcal{E}_{n+1}(f) - f\|_{E_p(\delta)} \leq CA_{n,p}n^{\alpha-\beta}$ .

Автор выражает благодарность С. С. Волосивцу за постановку задачи и ценные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а), гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987.
2. Schipp F. On  $L^p$ -norm convergence of series with respect to product systems // Anal. Math. 1976. № 2. P. 49–64.
3. Simon P. Verallgemeinerte Walsch-Fourierreihen // Acta Math. Hungar. 1976. Т. 3–4, № 27. P. 329–341.
4. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981.
5. Rempulska L., Tomczak K. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spaces // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. № 140. P. 141–153.

Е. В. Коробченко

## ИЗОМОРФНОСТЬ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЧЕРЕЗ ТОЛЕРАНТНЫЕ СФЕРОИДЫ РАЗНОГО РАЗМЕРА

В статье [1] определены высшие гомотопические группы толерантных пространств с помощью кубических сфероидов. Однако в различных применениях толерантных гомотопических групп требуется более гибкое определение, использующее сфероиды произвольного размера.

В статье доказывается, что толерантные гомотопические группы, определенные этими различными способами представляют собой естественно изоморфные функторы.

**Определение 1.**  $n$ -мерным толерантным сфероидом ( $T$ -сфероидом) толерантного пространства  $(X, \tau)$  в точке  $x_0 \in X$  называется толерантное отображение  $\alpha_m : (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}) \rightarrow (X, \tau)$  такое, что  $\alpha_m(\partial I_M^{(n)}) = x_0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , где  $I_m^{(n)} = \times^n I_m$ ,  $I_m = \{ \frac{k}{m} \mid k = \overline{0, m} \}$ ,  $\iota_m^{(n)} = \times^n \iota_m$ ,  $\frac{k}{m} \iota_m \frac{l}{m} \xleftrightarrow{df} |k - l| \leq 1$ .

Если  $\alpha_m : (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}) \rightarrow (X, \tau)$  —  $T$ -сфероид и  $M \in \mathbb{N}$ ,  $M \geq n$ , тогда определим  $T$  сфероид  $\alpha_{M,m} : (I_M^{(n)}, \iota_M^{(n)}) \rightarrow (X, \tau)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\forall k_i = \overline{0, M}, i = \overline{1, n}) \alpha_{M,m} \left( \left( \frac{k_i}{m} \right)_{i=1,n} \right) = \\ & = \begin{cases} \alpha_m \left( \left( \frac{k_i}{m} \right)_{i=1,n} \right), & (\forall i = \overline{1, n}) k_i \leq m; \\ x_0, & (\exists i = \overline{1, n}) k_i \geq m. \end{cases} \end{aligned}$$

Сфероид  $\alpha_{M,m}$  называется *продлением сфероида*  $\alpha_m$ .

**Определение 2.** Два  $n$ -мерных сфероида  $\alpha_{m_1}, \alpha'_{m_2}$  пространства  $(X, \tau)$  в точке  $x_0$  называются толерантно гомотопными и обозначаются  $\alpha_{m_1} \simeq \alpha'_{m_2}$ , если существуют натуральное  $M \geq \max\{m_1, m_2\}$  и толерантная гомотопия  $\alpha_{M,m_1} \sim \alpha'_{M,m_2} (rel \partial I_M^{(n)})$ .

Отношение  $\simeq$  является отношением эквивалентности, символом  $[\alpha_m]$  обозначается класс этого отношения с представителем  $\alpha_m$ .

На множестве  $n$ -мерных  $T$ -сфероидов пространства  $(X, \tau)$  в точке  $x_0$  определяется операция, сопоставляющая двум сфероидам  $\alpha_{m_1} : (I_{m_1}^{(n)}, \iota_{m_1}^{(n)}) \rightarrow (X, \tau)$ ,  $\beta_{m_2} : (I_{m_2}^{(n)}, \iota_{m_2}^{(n)}) \rightarrow (X, \tau)$  новый сфероид

$\alpha_{m_1} * \beta_{m_2} : \left( I_{m_1+m_2}^{(n)}, \iota_{m_1+m_2}^{(n)} \right) \longrightarrow (X, \tau)$  такой, что

$$\begin{aligned} & (\forall i = \overline{1, n}) (\forall k_i = \overline{0, m_1 + m_2}) \alpha_{m_1} * \beta_{m_2} \left( \left( \frac{k_i}{m_1+m_2} \right)_{i=\overline{1, n}} \right) = \\ & = \begin{cases} \alpha_{m_1} \left( \left( \frac{k_i}{m_1} \right)_{i=\overline{1, n}} \right), (\forall i = \overline{1, n}) k_i \leq m_1; \\ \beta_{m_2} \left( \left( \frac{k_i - m_1}{m_2} \right)_{i=\overline{1, n}} \right), (\forall i = \overline{1, n}) k_i \geq m_1; \\ x_0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

На множестве классов толерантно гомотопных  $n$ -мерных Т-сфероидов произвольного размера корректно определена операция

$$[\alpha_{m_1}] * [\beta_{m_2}] = [\alpha_{m_1} * \beta_{m_2}], \quad (1)$$

превращающая множество  $\pi_n(X, x_0)$  в группу, которая называется  $n$ -й гомотопической группой толерантного пространства  $(X, \tau)$  в точке  $x_0$ .

Всякое толерантное отображение  $f : ((X, \tau), x_0) \longrightarrow ((Y, \theta), y_0)$  пунктированных толерантных пространств (т.е.  $f(x_0) = y_0$ ) индуцирует гомоморфизм толерантных гомотопических групп  $f_{\pi_n} : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$ , корректно задаваемый формулой

$$f_{\pi_n}([\alpha_m]) = [f \circ \alpha_m]. \quad (2)$$

В результате для каждого  $n \in \mathbb{N}$  имеем ковариантный функтор  $\pi_n$  из категории пунктированных толерантных пространств в категорию групп. На самом деле этот функтор определен на категории толерантных гомотопических типов, так как всем толерантным отображениям из класса  $[f]$  ставится в соответствии один и тот же гомоморфизм  $f_{\pi_n}$ .

Толерантные гомотопические группы можно определить, используя и более общее определение Т-сфероида. Для этого будем использовать  $n$ -мерные Т-кубы произвольного размера  $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \times_{i=1}^n \mathbb{N}$ , т.е. пространства  $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \stackrel{df}{=} \left( \times_{i=1}^n I_{m_i}, \times_{i=1}^n \iota_{m_i} \right)$ . Обозначим эти группы  $\overline{\pi}_n(X, x_0)$ .

Заметим, что в каждом классе  $[\alpha_{\overline{m}}]$ ,  $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n)$ , имеется представитель  $\alpha_{\overline{M}, \overline{m}} \in [\alpha_{\overline{m}}]$ , где  $\overline{M} = (M, \dots, M)$ ,  $M = \max_{i=\overline{1, n}} m_i$ . Обозначим

$\alpha_M \stackrel{df}{=} \alpha_{\overline{M}, \overline{m}}$  и покажем, что отображение  $\varphi_n : \overline{\pi}_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ , задаваемое формулой

$$\varphi_n([\alpha_{\overline{m}}]) \stackrel{df}{=} [\alpha_M], \quad (3)$$



корректно и является изоморфизмом групп  $\varphi_n : \bar{\pi}_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$ .

Корректность (3) означает, что выполняется свойство

$$\alpha_{\bar{m}^{(1)}} \simeq \alpha'_{\bar{m}^{(2)}} \implies \alpha_{M^{(1)}} \simeq \alpha'_{M^{(2)}}. \quad (4)$$

Используя определение толерантно гомотопных сфероидов, (4) доказывается непосредственным построением гомотопий.

Как уже отмечалось выше  $[\alpha_{\bar{m}}] = [\alpha_{\bar{M}, \bar{m}}]$ , а из (3) следует, что

$$\varphi_n[\alpha_{(m, \dots, m)}] = [\alpha_m]. \quad (5)$$

Отсюда, применяя аналог формулы (1) для сфероидов произвольного размера и (3), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_n([\alpha_{\bar{m}^{(1)}}] * [\beta_{\bar{m}^{(2)}}]) &= \varphi_n([\alpha_{\bar{M}^{(1)}, \bar{m}^{(1)}}] * [\beta_{\bar{M}^{(2)}, \bar{m}^{(2)}}]) = \\ &= \varphi_n([\alpha_{\bar{M}^{(1)}, \bar{m}^{(1)}}] * \beta_{\bar{M}^{(2)}, \bar{m}^{(2)}}]) = \\ &= [\alpha_{\bar{M}^{(1)}}] * [\beta_{\bar{M}^{(2)}}] = [\alpha_{\bar{M}^{(1)}}] * [\beta_{\bar{M}^{(2)}}] = \varphi_n([\alpha_{\bar{m}^{(1)}}]) * \varphi_n([\beta_{\bar{m}^{(2)}}]). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\varphi_n$  – гомоморфизм. Его сюръективность следует из (5). Для доказательства инъективности предположим, что  $\varphi_n[\alpha_{\bar{m}}] = [\alpha_M] = [\varepsilon_{x_0}]$ . Следовательно  $\alpha_M \simeq \varepsilon_{x_0}$  в смысле определения 2. А так как  $\alpha_{\bar{m}} \simeq \alpha_{\bar{M}, \bar{m}}$ , то в силу транзитивности отношения  $\simeq$ , имеем  $\alpha_{\bar{m}} \simeq \varepsilon_{x_0}$ , что показывает инъективность  $\varphi_n$ .

Отметим, что группы  $\bar{\pi}_n(X, x_0)$ , как и группы  $\pi_n(X, x_0)$ , для всякого  $n \in \mathbb{N}$  определяют ковариантные функторы на категории пунктированных толерантных пространств (и на категории толерантных гомотопических типов) со значениями в категории групп. При этом толерантное пунктированное отображение  $f : ((X, \tau), x_0) \longrightarrow ((Y, \theta), y_0)$  индуцирует гомоморфизмы

$$f_{\bar{\pi}_n} : \bar{\pi}_n(X, x_0) \longrightarrow \bar{\pi}_n(Y, y_0), \quad f_{\bar{\pi}_n}([\alpha_{\bar{m}}]) \stackrel{df}{=} [f \circ \alpha_{\bar{m}}]. \quad (6)$$

Используя формулы (2), (3), (6), а также свойство пунктированности  $f(x_0) = y_0$  и определение продления  $\alpha_{\bar{M}, \bar{m}}$ , непосредственной проверкой доказывается естественность по  $(X, \tau)$  изоморфизмов  $\varphi_n : \bar{\pi}_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$  в категории пунктированных толерантных пространств.

Подводя итог, констатируем, что имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  функторы  $\pi_n$  и  $\bar{\pi}_n$  толерантных гомотопических групп естественно изоморфны на категории пунктированных толерантных пространств.*

В заключение отметим, что при определении гомотопических групп  $\bar{\pi}_n$  часто удобно использовать более гибкое определение операции  $*$ . Для сфероидов  $\alpha_{\bar{m}^{(1)}}$  и  $\beta_{\bar{m}^{(2)}}$ , у которых  $m_l^{(1)} = m_l^{(2)}$ , определяем

$$[\alpha_{\bar{m}^{(1)}}] * [\beta_{\bar{m}^{(2)}}] = [\gamma_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)}, \dots, m_l^{(1)}, \dots, m_n^{(1)}+m_n^{(2)})}^{(l)}],$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{(m_1^{(1)}+m_1^{(2)}, \dots, m_l^{(1)}, \dots, m_n^{(1)}+m_n^{(2)})}^{(l)} &= \alpha_{\bar{m}^{(1)}}^{s(l, k_l)} * \beta_{\bar{m}^{(2)}}^{s(l, k_l)}, \\ \alpha_{\bar{m}^{(1)}}^{s(l, k_l)} \left( \frac{k_1}{m_1^{(1)}}, \dots, \frac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(1)}}, \frac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(1)}}, \dots, \frac{k_n}{m_n^{(1)}} \right) &= \alpha_{\bar{m}^{(1)}} \left( \frac{k_1}{m_1^{(1)}}, \dots, \frac{k_l}{m_l^{(1)}}, \dots, \frac{k_n}{m_n^{(1)}} \right), \\ \beta_{\bar{m}^{(2)}}^{s(l, k_l)} \left( \frac{k_1}{m_1^{(2)}}, \dots, \frac{k_{l-1}}{m_{l-1}^{(2)}}, \frac{k_{l+1}}{m_{l+1}^{(2)}}, \dots, \frac{k_n}{m_n^{(2)}} \right) &= \beta_{\bar{m}^{(2)}} \left( \frac{k_1}{m_1^{(2)}}, \dots, \frac{k_l}{m_l^{(2)}}, \dots, \frac{k_n}{m_n^{(2)}} \right). \end{aligned}$$

Доказательство того, что при этом получаются те же группы, проводится с использованием техники, примененной в [1. доказательство предложения 5].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Небалухев С. И.* Высшие гомотопические группы толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 2. С. 15-30.

УДК 517.984

**А. П. Кочергин**

### УТОЧНЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЙОСТА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка на полуоси

$$y'' + [\rho^2 + i\rho q_1(x) + q_0(x)]y = 0, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

где  $y(x)$  – неизвестная функция,  $\rho$  – спектральный параметр,  $q_1(x)$ ,  $q_0(x)$  – комплекснозначные функции, такие что  $q_1(x)$  абсолютно непрерывна на  $[0, T]$  при каждом фиксированном  $T > 0$  и  $q_0(x), q_1(x), q_1'(x) \in L(0, \infty)$ .

Обозначим через  $W_N$  множество функций  $f(x)$ ,  $x \geq 0$  таких, что функции  $f^{(j)}(x)$ ,  $j = \overline{0, N-1}$ , абсолютно непрерывны на  $[0, T]$  при каждом фиксированном  $T > 0$  и  $f^{(j)}(x) \in L(0, \infty)$ ,  $j = \overline{0, N}$ . Положим

$$\Omega^\pm = \{\rho : \pm \text{Im} \rho \geq 0, \rho \neq 0\}.$$

Введем решения  $e_+(x, \rho)$  и  $e_-(x, \rho)$  уравнения (1), определенные при  $\rho \in \Omega^+$  и  $\rho \in \Omega^-$ , соответственно, такие что  $\lim_{x \rightarrow \infty} e_\pm(x, \rho) \exp(\mp i\rho x) = 1$ . Функции  $e_\pm(x, \rho)$  являются обобщениями решения Йоста для уравнения Штурма – Лиувилля ( $q_1(x) \equiv 0$ ), которое подробно изучено и применяется при решении прямых и обратных спектральных задач, например в [1]. В [2] доказано существование решений  $e_\pm(x, \rho)$ , а также, что при  $\rho \rightarrow \infty$  главные части их асимптотик имеют вид

$$h_+(x, \rho) = \exp(i\rho x + Q(x)), \quad h_-(x, \rho) = \exp(-i\rho x - Q(x))$$

соответственно, где  $Q(x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty q_1(t) dt$ . Однако подход, использованный в [2], не позволяет находить последующих членов асимптотики. Данная статья как раз посвящена их отысканию. Для этой цели используется иной подход, нежели в [2], основанный на выделении соответствующих главных частей при сведении (1) к интегродифференциальным уравнениям для функций  $e_\pm(x, \rho)$ . Кроме того, как и для оператора Штурма – Лиувилля, получено уточнение асимптотических формул в случае достаточной гладкости коэффициентов уравнения (1). Сформулируем вспомогательное утверждение, необходимое в дальнейшем.

**Лемма 1.** Пусть  $q(x) \in L(0, \infty)$ , тогда

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} \left| \int_x^\infty q(t) \exp(2i\rho(t-x)) dt \right| = 0, \quad \rho \in \Omega^+.$$

Доказательство данного утверждения можно найти в [1, лемма 2.1.1].

**Теорема 1.** Пусть в уравнении (1)  $q_0(x) \in W_N$ ,  $q_1 \in W_{N+1}$ ,  $N \geq 0$ , тогда существуют функции  $\omega_{s\nu}^\pm(x) \in W_{N+2-s}$ , такие что при  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\nu = 0, 1$ , справедливо следующее асимптотическое представление:

$$e_\pm^{(\nu)}(x, \rho) = (i\rho - \frac{1}{2}q_1(x))^\nu h_\pm(x, \rho) \left( 1 + \sum_{s=1}^{N+1} \frac{\omega_{s\nu}^\pm(x)}{(i\rho)^s} + o\left(\frac{1}{\rho^{N+1}}\right) \right), \quad (2)$$

причем

$$\omega_{10}^+(x) = \omega_{11}^+(x) = -\omega_{10}^-(x) = -\omega_{11}^-(x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty \left[ \frac{1}{4} q_1^2(t) - \frac{1}{2} q_1'(t) + q_0(t) \right] dt.$$

**Доказательство.** Проведем доказательство для функции  $e_+(x, \rho)$ , для  $e_-(x, \rho)$  доказательство аналогично. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} y'' + \left[ \rho^2 + i\rho q_1(x) - \frac{1}{4} q_1^2(x) \right] y + \frac{q_1'(x)}{2i\rho - q_1(x)} y' = \\ = - \left[ \frac{1}{4} q_1^2(x) + q_0(x) \right] y + \frac{q_1'(x)}{2i\rho - q_1(x)} y', \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, приходим к интегродифференциальному уравнению для функции  $e_+(x, \rho)$

$$\begin{aligned} e_+(x, \rho) = h_+(x, \rho) + \\ + \int_x^\infty \frac{1}{2i\rho - q_1(t)} \left( h_+(x, \rho) h_-(t, \rho) - h_+(t, \rho) h_-(x, \rho) \right) \left[ \frac{1}{4} q_1^2(t) + q_0(t) \right] e_+(t, \rho) dt - \\ - \int_x^\infty \frac{q_1'(t)}{(2i\rho - q_1(t))^2} \left( h_+(x, \rho) h_-(t, \rho) - h_+(t, \rho) h_-(x, \rho) \right) e_+'(t, \rho) dt, \quad (3) \\ \rho \in \Omega^+, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Дифференцируя (3) по  $x$ , получим

$$\begin{aligned} e_+'(x, \rho) = (i\rho - \frac{1}{2} q_1(x)) h_+(x, \rho) + \\ + (i\rho - \frac{1}{2} q_1(x)) \int_x^\infty \frac{1}{2i\rho - q_1(t)} \left( h_+(x, \rho) h_-(t, \rho) + h_+(t, \rho) h_-(x, \rho) \right) \times \\ \times \left[ \frac{1}{4} q_1^2(t) + q_0(t) \right] e_+(t, \rho) dt - \\ - (i\rho - \frac{1}{2} q_1(x)) \int_x^\infty \frac{q_1'(t)}{(2i\rho - q_1(t))^2} \left( h_+(x, \rho) h_-(t, \rho) + h_+(t, \rho) h_-(x, \rho) \right) e_+'(t, \rho) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

После преобразований  $e_+(x, \rho) = h_+(x, \rho)u(x, \rho)$ ,  $e'_+(x, \rho) = (i\rho - \frac{1}{2}q_1(x)) \times h_+(x, \rho)v(x, \rho)$  уравнения (3) и (4) примут вид

$$u(x, \rho) = 1 + \int_x^\infty \frac{1 - \exp(2i\rho(t-x) + 2Q(t) - 2Q(x))}{2i\rho - q_1(t)} \left[ \frac{1}{4}q_1^2(t) + q_0(t) \right] u(t, \rho) dt - \int_x^\infty \frac{q_1'(t)}{4i\rho - 2q_1(t)} \left( 1 - \exp(2i\rho(t-x) + 2Q(t) - 2Q(x)) \right) v(t, \rho) dt, \quad (5)$$

$$v(x, \rho) = 1 + \int_x^\infty \frac{1 + \exp(2i\rho(t-x) + 2Q(t) - 2Q(x))}{2i\rho - q_1(t)} \left[ \frac{1}{4}q_1^2(t) + q_0(t) \right] u(t, \rho) dt - \int_x^\infty \frac{q_1'(t)}{4i\rho - 2q_1(t)} \left( 1 + \exp(2i\rho(t-x) + 2Q(t) - 2Q(x)) \right) v(t, \rho) dt. \quad (6)$$

Применяя метод последовательных приближений к системе уравнений (5) и (6), получим

$$u(x, \rho) = 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \Omega^+, \quad (7)$$

$$v(x, \rho) = 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \Omega^+, \quad (8)$$

равномерно при  $x \geq 0$ . Подставляя (7) и (8) в правые части (5) и (6) и используя лемму 1, приходим к (2) для случая  $N = 0$ . Далее, подставляя полученную асимптотику функций  $u(x, \rho)$ ,  $v(x, \rho)$  в правые части (5), (6), интегрируя по частям и применяя лемму 1, находим следующий член асимптотики для функций  $e_\pm(x, \rho)$ . Повторяя эту процедуру  $N$  раз, приходим к (2).

Теорема доказана.

**Замечание.** Указанная процедура позволяет найти явные формулы для всех функций  $\omega_{s\nu}^\pm(x)$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.
2. Jaulent M., Jean C. The inverse  $s$ -wave scattering problem for a class of potentials depending on energy// Communications in Mathematical Physics (1965–1997). 1972. Vol. 28, № 3. P. 177–220.

И. А. Кузнецова

## ОБ ОДНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ИГРЕ ТРЁХ ЛИЦ

Данная статья относится к теории иерархических игр трёх лиц [1 – 4]. Постановка задачи близка к рассмотренной в [4], когда «хозяин» управляет «подчинённым» через «директора». Отличие от [4] состоит в том, что доход «директора» в данном случае явно зависит не только от действий «хозяина», но и от его собственной стратегии. Поэтому для достижения оптимального результата стратегии-функции «хозяина» должны зависеть не только от стратегий-функций «директора», но и от его конкретного выбора.

Рассмотрим игру  $\Gamma = (X, Y, Z, F, G, H)$ , где  $X, Y, Z$  – множества стратегий игроков,  $F, G, H$  – их функции выигрыша, причём  $F$  отображает  $X \times Z$  в  $\mathbb{R}$ ,  $G$  –  $X \times Y$  в  $\mathbb{R}$ ,  $H$  –  $Y \times Z$  в  $\mathbb{R}$ . Обмен информацией между игроками в данной игре организован следующим образом. Первый игрок («хозяин») первым выбирает свою стратегию-функцию и сообщает её второму игроку («директору»), затем второй игрок выбирает свою стратегию-функцию и сообщает её третьему игроку («подчинённому»), после чего делает свой выбор третий игрок. Для упрощения изложения считаем, что множества стратегий игроков конечны.

Информационное расширение игры  $\Gamma$ , соответствующее данному способу обмена информацией, задаётся следующим образом. Положим

$$\bar{\Gamma} = (\Psi_1, \Phi_2, Z, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}),$$

где  $\Psi_1 = \{\psi_1\}$ ,  $\psi_1 : \Phi_2 \times Y \rightarrow X$ ,  $\Phi_2 = \{\varphi_2\}$ ,  $\varphi_2 : Z \rightarrow Y$ . При всех  $\psi_1, \varphi_2, z$  справедливы равенства

$$\bar{F}(\psi_1, \varphi_2, z) = F(\psi_1(\varphi_2, \varphi_2(z)), z),$$

$$\bar{G}(\psi_1, \varphi_2, z) = G(\psi_1(\varphi_2(z), z), \varphi_2(z)),$$

$$\bar{H}(\psi_1, \varphi_2, z) = H(\varphi_2(z), z).$$

Поскольку каждый игрок стремится максимизировать свою функцию выигрыша, то наибольший гарантированный результат первого игрока в игре  $\bar{\Gamma}$  определяется равенством

$$\gamma(\bar{\Gamma}) = \max_{\psi_1 \in \Psi_1} \min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1)} \min_{z \in M_3(\varphi_2)} F(\psi_1(\varphi_2, \varphi_2(z)), z),$$

где

$$M_2(\psi_1) = \left\{ \varphi'_2 : \forall z \ G(\psi_1(\varphi'_2, \varphi'_2(z)), \varphi'_2(z)) = \max_{\varphi_2} G(\psi_1(\varphi_2, \varphi_2(z)), \varphi_2(z)) \right\},$$

$$M_3(\varphi_2) = \left\{ z' : H(\varphi_2(z'), z') = \max_z H(\varphi_2(z), z) \right\}.$$

Основной результат статьи состоит в сведении данной вариационной задачи с ограничениями к экстремальным задачам на исходных множествах  $X, Y, Z$  и нахождению оптимальной стратегии первого игрока.

**Теорема.** *Справедливо равенство*

$$\gamma(\bar{\Gamma}) = \max(K_{13}, M_{13}, L_1),$$

где  $K_{13} = \max_{(x,z) \in D_{13}} F(x, z)$ ,  $D_{13} = \{(x, z) : \exists y \ G(x, y) > L_2, H(y, z) > L_3\}$ ,  $L_2 = \max_y \min_x G(x, y)$ ,  $L_3 = \max_z \min_y H(y, z)$ ,  $M_{13} = \max_{x \in E_1} \min_{z \in E_3} F(x, z)$ ,  $E_1 = \{x : \exists y \ G(x, y) > L_2\}$ ,  $E_3 = \{z' : \min_y H(y, z') = L_3\}$ ,  $L_1 = \max_x \min_z F(x, z)$  (максимум по пустому множеству будем считать равным  $-\infty$ ).

**Доказательство.** Рассмотрим все возможные случаи.

1. Выполняется равенство  $\max(K_{13}, M_{13}, L_1) = K_{13}$ . Покажем, что результат  $K_{13}$  гарантирован первому игроку.

Пусть  $K_{13} = \max_{(x,z) \in D_{13}} F(x, z) = F(x_0, z_0)$ . Из определения  $D_{13}$  существует  $y = y_0$ , для которого справедливы неравенства  $G(x_0, y_0) > L_2$ ,  $H(y_0, z_0) > L_3$ .

Определим отображение  $\varphi_2^0 : Z \rightarrow Y$  из условия

$$\forall z \in Z \quad \varphi_2^0(z) = \begin{cases} y_0, & z = z_0, \\ \varphi_2^-(z), & z \neq z_0, \end{cases}$$

где  $\varphi_2^-$  — «стратегия наказания», удовлетворяющая соотношению

$$\forall z \in Z \quad H(\varphi_2^-(z), z) = \min_y H(y, z).$$

Определим отображение  $\psi_1^0 : \Phi_2 \times Y \rightarrow X$  равенством

$$\forall \varphi_2, y \quad \psi_1^0(\varphi_2, y) = \begin{cases} x_0, & \varphi_2 = \varphi_2^0, \\ \varphi_1^-(y), & \varphi_2 \neq \varphi_2^0, \end{cases}$$

где  $\varphi_1^-$  — «стратегия наказания», определяемая условием

$$\forall y \in Y \quad G(\varphi_1^-(y), y) = \min_x G(x, y).$$

Очевидны равенства  $M_3(\varphi_2^0) = \{z_0\}$ ,  $M_2(\psi_1^0) = \{\varphi_2^0\}$ , и следовательно, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1^0)} \min_{z \in M_3(\varphi_2^0)} F(\psi_1^0(\varphi_2, \varphi_2(z)), z) &= F(\psi_1^0(\varphi_2^0, \varphi_2^0(z_0)), z_0) = \\ &= F(x_0, z_0) = K_{13} \end{aligned}$$

и верно неравенство  $\gamma(\bar{\Gamma}) \geq K_{13}$ .

2. Справедливо равенство  $\max(K_{13}, M_{13}, L_1) = M_{13}$ .

Определим  $x_0 \in E_1$  из условия

$$\min_{z \in E_3} F(x_0, z) = \max_{x \in E_1} \min_{z \in E_3} F(x, z) = M_{13}$$

и выберем  $y_0 \in Y$ , удовлетворяющий неравенству  $G(x_0, y_0) > L_2$ .

Определим отображение  $\varphi_2^0 : Z \rightarrow Y$  равенством

$$\forall z \in Z \quad \varphi_2^0(z) = \begin{cases} y_0, & z \in E_3, \\ \varphi_2^-(z), & z \notin E_3 \end{cases}$$

и отображение  $\psi_1^0 : \Phi_2 \times Y \rightarrow X$  — соотношением

$$\forall \varphi_2, y \quad \psi_1^0(\varphi_2, y) = \begin{cases} x_0, & \varphi_2 = \varphi_2^0, \\ \varphi_1^-(y), & \varphi_2 \neq \varphi_2^0. \end{cases}$$

Выполняются условия  $M_3(\varphi_2^0) \subset E_3$ ,  $M_2(\psi_1^0) = \{\varphi_2^0\}$  и, следовательно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1^0)} \min_{z \in M_3(\varphi_2^0)} F(\psi_1^0(\varphi_2, \varphi_2(z)), z) &\geq \min_{z \in E_3} F(\psi_1^0(\varphi_2^0, \varphi_2^0(z)), z) = \\ &= \min_{z \in E_3} F(x_0, z) = M_{13}, \end{aligned}$$

то есть  $\gamma(\bar{\Gamma}) \geq M_{13}$  и результат  $M_{13}$  гарантирован первому игроку.

3. Верно равенство  $\max(K_{13}, M_{13}, L_1) = L_1$ .

Результат  $L_1$  всегда гарантирован первому игроку. Это наибольший результат, который он может себе обеспечить, применяя максимальную стратегию.



Таким образом, у первого игрока существуют стратегии, обеспечивающие ему получение выигрыша, не меньшего  $\max(K_{13}, M_{13}, L_1)$ . Легко показать, что больший выигрыш он гарантированно получить не может. Следовательно, верно равенство  $\gamma(\bar{\Gamma}) = \max(K_{13}, M_{13}, L_1)$ , что и требовалось доказать.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Меньшиков И. С.* Игра трёх лиц с фиксированной последовательностью ходов // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 5. С. 1148–1156.
2. *Кукушкин Н. С.* Бескоалиционные игры трёх лиц с фиксированной иерархической структурой // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 4. С. 896–911.
3. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры трёх лиц с коалициями // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 41–43.
4. *Кузнецова И. А.* Об одном классе бескоалиционных иерархических игр трёх лиц // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 34–36.

УДК 517.984

**В. П. Курдюмов, А. П. Хромов**

### БАЗИСНОСТЬ РИССА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ

В настоящей статье рассматривается вопрос о базисах Рисса в  $L_2[0, 1]$  из собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) интегрального оператора

$$Af = \alpha \int_0^x A_1(x, t)f(t)dt + \int_{1-x}^1 A_2(1-x, t)f(t)dt, \quad (1)$$

где  $\alpha^2 \neq 1$ ,  $\frac{\delta^{k+l}}{\delta x^k \delta t^l} A_1(x, t) \left( \frac{\delta^{k+l}}{\delta x^k \delta t^l} A_2(x, t) \right)$  при  $0 \leq k+l \leq 2$ , причем, если  $k+l=2$ , то  $k=l=1$ , непрерывны при  $t \leq x$  ( $t \geq x$ ),  $A_1(x, x-0) = A_2(x, x+0) = 1$ .

Оператор (1) и более общего вида интегральные операторы, допускающие разрывы самих ядер или их производных, впервые рассматривались одним из авторов в [1]. В дальнейшем исследованию таких операторов было посвящено много работ (например, [2–4]). В частности, в [4] был рассмотрен вопрос о базисности Рисса в  $L_2[0, 1]$  с.п.ф. оператора

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t)dt. \quad (2)$$

В этой статье разработан метод, основанный на представлении резольвент сопутствующих интегродифференциальных операторов через специальные интегральные операторы простой структуры, называемые элементарными. Оператор (1) — существенно более сложный, чем (2), и базисность Рисса его с.п.ф. доказывается за счет дальнейшего развития метода из [4].

Сведем оператор (1) к оператору в пространстве вектор-функций размерности 2. Введем оператор

$$\tilde{A}\tilde{f} = \int_0^1 \tilde{A}(x, t)\tilde{f}(t)dt, \quad (3)$$

$$\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \quad (T - \text{знак транспорирования}),$$

$$\tilde{A}(x_1 t) = \begin{pmatrix} \alpha\varepsilon(x, t)A_1(x, t) & \varepsilon(x, t)A_2(1-x, 1-t) \\ \varepsilon(t, x)A_2(x, t) & \alpha\varepsilon(t, x)A_1(1-x, 1-t) \end{pmatrix},$$

где  $\varepsilon(x, t) = 1$  при  $x \geq t$ ,  $\varepsilon(x, t) = 0$  при  $x < t$ .

**Теорема 1.** Если  $y = Af$ , то  $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$ , где  $\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ ,  $f_1(x) = f(x)$ ,  $f_2(x) = f(1-x)$ ,  $\tilde{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ ,  $y_1(x) = y(x)$ ,  $y_2(x) = y(1-x)$ . Обратное, если  $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$  и  $f_1(x) = f_2(1-x)$ , то  $y_1(x) = y_2(1-x)$  и  $y_1 = Af_1$ .

Представление (3) важно тем, что  $\tilde{A}(x, t)$  терпит разрыв лишь на линии  $t = x$ .

**Теорема 2.** Имеет место представление

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{y}(x) = B^{-1}\tilde{y}'(x) + a_1(x)\tilde{y}(0) + a_2(x)\tilde{y}(1) + a_3(x)\tilde{y}(x) + \int_0^1 a(x, t)\tilde{y}(t)dt,$$

где  $\tilde{y}(x)$  удовлетворяет краевому условию

$$\tilde{M}_0\tilde{y}(0) + \tilde{M}_1\tilde{y}(1) = 0; \quad (4)$$

$B = \tilde{A}(x, x-0) - \tilde{A}(x, x+0) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$ ;  $a_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $a'_3(x)$  — непрерывные матрицы-функции; матрица  $a(x, t)$  непрерывна по  $x$  и  $t$ , где могут быть разрывы первого рода,  $a(x, x+0)$ ,  $a(x, x-0)$  непрерывны;

$$\tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.** Если  $\lambda$  таково, что при  $\tilde{f}(x) \equiv 0$  интегро-дифференциальная система

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{y}(x) - \lambda\tilde{y}(x) = \tilde{f}(x)$$

с условием (4) имеет только нулевое решение, то  $R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1}A$  ( $E$  – единичный оператор) существует и  $R_\lambda(A)f = y_1(x)$ , где  $y_1(x)$  – первая компонента  $\tilde{y}(x)$ .

Введем обозначения:  $P_i(x) = \mathcal{D}\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $\mathcal{D} = \text{diag}(\omega, -\omega)$ ,  $\omega = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ ,  $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha & \sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha \end{pmatrix}$ ;  $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ , где  $H_0(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$ ,  $h_i(x) = \exp(-\int_0^x p_{ii}(t)dt)$ ,  $p_{ii}(x)$  – диагональные элементы матрицы  $P_3(x)$ ,  $H_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & r_2(x) \\ r_1(x) & 0 \end{pmatrix}$  – кодиагональная матрица, являющаяся решением матричного уравнения

$$H_0'(x) + P_3(x)H_0(x) + (H_1(x)\mathcal{D} - \mathcal{D}H_1(x)) = 0;$$

$$P_i(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_i(x)H(i-1, \lambda) \quad (i=1, 2);$$

$$P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda) \left[ H_1'(x) + P_3(x)H_1(x) \right];$$

$$N_\lambda(x, t) = H^{-1}(x, \lambda)N(x, t)H(t, \lambda),$$

где  $N(x, t) = \mathcal{D}\Gamma^{-1}a(x, t)\Gamma$ ;

$$m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x),$$

где  $m(x) = \mathcal{D}\Gamma^{-1}\tilde{f}(x)$ ;

$$M_{0\lambda} = M_0H(0, \lambda), \quad M_{1,\lambda} = M_1H(1, \lambda),$$

где  $M_0 = \tilde{M}_0\Gamma$ ,  $M_1 = \tilde{M}_1\Gamma$ .

**Теорема 4.** Если  $v(x, \lambda) = (v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda))^T$  – решение системы

$$v'(x) + P_1(x, \lambda)v(0) + P_2(x, \lambda)v(1) + P_3(x, \lambda)v(x) +$$

$$+ \int_0^1 N_\lambda(x, t)v(t)dt - \lambda\mathcal{D}v(x) = m(x, \lambda),$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0,$$

то

$$R_\lambda(A)f = \sum_{j=1}^2 h_j(x)v_j(x, \lambda) + \lambda^{-1} \sum_{j=1}^2 r_j(x)v_j(x, \lambda).$$

Обозначим  $\Theta_0 = (\omega + \alpha)h_2(1)$ ,  $\Theta_1 = (\omega - \alpha)h_1(1)$ . Тогда  $\Theta_0\Theta_1 \neq 0$ . Обозначим через  $S_\delta$  область, получающуюся из комплексной  $\lambda$ -плоскости удалением всех нулей функции  $\Theta_0 + \Theta_1 e^{2\lambda\omega}$  вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса  $\delta$ . Представим  $R_\lambda(A)f$  при  $\lambda$ , принадлежащих границам кружков  $\Gamma_k$  из определения  $S_\delta$ , в виде конечной линейной комбинации с ограниченными по  $\lambda$  коэффициентами простейших интегральных так называемых элементарных операторов.

**Лемма 1.** Пусть  $J$  – любой конечный набор достаточно больших, по модулю целых чисел. Тогда

$$\left\| \sum_{k \in J} \int_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda \right\| \leq C,$$

где  $\| \cdot \|$  – норма в  $L_2[0, 1]$ , постоянная  $C$  не зависит от набора  $J$ .

**Лемма 2.** Все характеристические числа оператора  $A$ , достаточно большие по модулю, простые.

**Лемма 3.** Система с.п.ф. оператора  $A^*$  полна в  $L_2[0, 1]$ .

Стандартными рассуждениями с помощью лемм 1 – 3 получается следующий основной результат.

**Теорема 5.** Система с.п.ф. оператора  $A$  образует базис Рисса в  $L_2[0, 1]$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1988. Т. 64, № 6. С. 932–942.
2. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
3. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.
4. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.

Д. С. Лукомский, С. Ф. Лукомский

## ВСПЛЕСКОВЫЕ БАЗИСЫ И КРИПТОГРАФИЯ

В последние десятилетия криптография оформилась в новую математическую теорию и стала объектом интенсивного математического изучения. Основой современных криптографических систем являются теоретико-числовые методы. Мы хотим рассмотреть непрерывные методы.

Основная идея непрерывных методов в криптографии заключается в использовании дискретных ортогональных систем. Классическим примером такой системы является система Хаара. Если мы имеем вектор  $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1})$ , то мы можем по нему построить вектор-преобразование Фурье – Хаара  $\hat{f} = (\hat{f}(0), \hat{f}(1), \dots, \hat{f}(2^n-1))$ . Преобразование  $\hat{f}(n)$  и есть зашифрованное сообщение  $\mathbf{f}$ . Но этот метод бесполезен, так как, зная информацию, что зашифрованное сообщение есть преобразование Фурье – Хаара, можно сразу восстановить исходное сообщение  $f$ . В последние годы, в связи с развитием теории КМА на нуль-мерных группах, появилась возможность строить бесконечно много дискретных ОНС, каждая из которых определяется конечным набором комплексных чисел  $(\mu_k)_{k=0}^N$  с единственным условием  $\mu_0 = 1, |\mu_k| = 1$  при  $k \geq 1$ . Таким образом, появляется возможность, используя в качестве ключа последовательность чисел  $(\mu_k)_{k=0}^N$ , строить криптографические алгоритмы как разложения конечномерного вектора по ортонормированной системе. Мы ограничимся простейшим примером, который объяснит суть происходящего. В нашем примере рассмотрим ОНС, которые не зависят от групповой операции и являются начальным шагом в построении целого класса ОНС.

Пусть  $(G, \dot{+})$  – нуль-мерная локально компактная Абелева группа с основной цепочкой подгрупп

$$\dots \subset G_n \subset \dots \subset G_1 \subset G_0 \subset G_{-1} \subset \dots \subset G_{-n} \subset \dots, \quad (G_n/G_{n+1})^\# = p,$$

где  $p$  – простое,  $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$  – базисная последовательность. Известно [1], что любой элемент  $x \in G$  единственным образом представим в виде суммы ряда

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n g_n \quad (x_n = \overline{0, p-1}).$$

Отображение  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ , определенное равенством

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n+1}},$$

переводит каждую подгруппу  $G_n$  в модифицированный отрезок  $\left[0, \frac{1}{p^n}\right]^*$ . Это позволяет рассматривать группу  $G$  на модифицированной полупрямой, в которой топология определяется сдвигами отрезков  $\left[0, \frac{1}{p^n}\right]^*$ . Через  $G_n^\perp$  будем обозначать аннуляторы подгруппы  $G_n$ . Характеры  $r_n \in G_n^\perp \setminus G_{n+1}^\perp$  будем называть *функциями Радемахера*. Значение характера  $\chi$  на элементе  $x$  будем обозначать  $(\chi, x)$ .

Пусть  $r_{-1} \in G_0^\perp \setminus G_{-1}^\perp$  – функция Радемахера. Так как  $r_{-1} \in G_0^\perp$ , то  $r_{-1}(G_0) = 1$ . Так как  $p$  – простое, то  $(r_{-1}, g_{-1})$  есть корень из 1 степени  $p$ , т.е.  $(r_{-1}, g_{-1}) = e^{\frac{2\pi i}{p}\nu}$ . Базисный элемент  $g_{-1}$  можно выбрать так, что  $(r_{-1}, g_{-1}) = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ , и поэтому можно считать, что  $r_{-1}(G_0 \dot{+} jg_{-1}) = e^{\frac{2\pi i}{p}j}$  ( $j = 0, p-1$ ). Пусть

$$\varphi(x) = \frac{1}{p} \mathbf{1}_{G_{-1}}(x) \sum_{j=0}^{p-1} \mu_j (r_{-1}, x)^j \quad (1)$$

масштабирующая функция и  $\mu_j$  – комплексные числа такие, что  $\mu_0 = 1$ ,  $|\mu_j| = 1$ . Отметим свойства функции  $\varphi$  [2].

1.  $\varphi(x) = 0$  вне  $G_{-1}$ , это очевидно.

2.  $\varphi(x)$  постоянна на смежных классах  $G_0 \dot{+} jg_{-1}$ . Это было проверено выше.

3. Если  $x \in G_0 \dot{+} \lambda g_{-1}$  ( $\lambda \neq 0$ ), то  $\varphi(x) = \varphi(\lambda g_{-1})$ ,  $\varphi(x \dot{-} \nu g_{-1}) = \varphi(\lambda g_{-1} \dot{-} \nu g_{-1})$ , т.е. сдвиг  $\varphi(x \dot{-} \nu g_{-1})$  есть функция, принимающая на смежных классах  $G_0 \dot{+} \lambda g_{-1}$  значения  $\varphi_{\lambda, \nu} = \varphi(\lambda g_{-1} \dot{-} \nu g_{-1})$ .

4. Смежные классы  $G_0 \dot{+} jg_{-1}$  можно рассматривать как модифицированные отрезки  $[j, j+1]^*$ .

**Предложение 1.** *Любая функция, принимающая постоянные значения на смежных классах  $G_0 \dot{+} \lambda g_{-1} = [\lambda, \lambda+1]^*$ , есть линейная комбинация сдвигов  $\varphi(x \dot{-} \nu g_{-1})$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f = (f_0, f_1, \dots, f_{p-1})$  функция, постоянная на смежных классах  $G_0 \dot{+} \lambda g_{-1}$  и  $f_0, f_1, \dots, f_{p-1}$  ее значения на этих смежных классах. Надо доказать, что найдутся числа  $c_\nu$  ( $\nu = \overline{0, p-1}$ ) такие, что

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} c_\nu \varphi(x \dot{-} \nu g_{-1}) = f. \quad (2)$$

Обозначим через  $\Phi$  матрицу с элементами  $\varphi_{\lambda,\nu}$ , т.е.  $\Phi = (\varphi_{\lambda,\nu})_{\lambda,\nu=\overline{0,p-1}}$ . Тогда равенство (2) равносильно системе

$$\Phi \cdot (c_0, c_1, \dots, c_{p-1})^T = (f_0, f_1, \dots, f_{p-1})^T. \quad (3)$$

Так как матрица  $\Phi$  унитарна, то система (3) имеет единственное решение  $(c_0, c_1, \dots, c_{p-1})^T = \overline{\Phi^T} \cdot (f_0, f_1, \dots, f_{p-1})^T$ , и, значит,  $f = \sum_{\nu=0}^{p-1} c_\nu \varphi(x - \nu g_{-1})$ .

□

Теперь мы можем выписать алгоритм шифровки сообщения.

1. Выбираем последовательность  $(\mu_j)_{j=0}^{p-1}$  такую, что  $\mu_0 = 1$ ,  $|\mu_j| = 1$  при  $j = \overline{1, p-1}$ .

2. По формулам (1) строим функцию  $\varphi(x)$ .

3. Образум матрицу  $\Phi = (\varphi(\lambda g_{-1} - \nu g_{-1}))_{\lambda,\nu}$ .

4. По сообщению  $f = (f_0, f_1, \dots, f_{p-1})^T$  строим коэффициенты  $C = (c_0, c_1, \dots, c_{p-1})^T$  по формулам  $C = \Phi f$ .

5. Вместо сообщения  $f$  передаем зашифрованное сообщение

$$C = (c_0, c_1, \dots, c_{p-1})^T.$$

Этот метод следует отнести к классическим методам. По своим принципам он близок к методу Хилла [3]. Ключом в рассматриваемом методе является последовательность  $(\mu_j)$ . В отличие от метода Хилла ключей может быть бесконечно много. Так как  $|\mu_j| = 1$ , то  $\mu_j = e^{\frac{2\pi i}{p} \kappa_j}$ ,  $\kappa_j = \overline{0, p-1}$ , и, значит, вектор  $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{p-1})$  можно выбирать в качестве ключа.

**Предложение 2.** Если  $\kappa = \alpha \cdot (0, 1, \dots, p-1)$ , т.е.  $\kappa_j = \alpha \cdot j$ , то вектор  $(c_k)_{k=0}^{p-1}$  получается из сообщения  $f$   $\alpha$ -й итерацией циклической перестановки.

**Доказательство.** Вначале отметим, что функции

$$\psi_j = \frac{1}{\sqrt{p}} \left( e^{\frac{2\pi i}{p} 0j}, e^{\frac{2\pi i}{p} 1j}, \dots, e^{\frac{2\pi i}{p} (p-1)j} \right),$$

определенные на дискретном множестве  $X = \{0, 1, \dots, p-1\}$ , образуют ОНС на  $X$ . Поэтому равенство

$$\hat{f}(j) = \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{2\pi i}{p} \nu j} f_\nu$$

определяет на  $X$  дискретное преобразование Фурье.

Согласно предложению 1 и определению функции  $\varphi$  имеем

$$\begin{aligned} c_\nu &= \sum_{\lambda=0}^{p-1} \bar{\varphi}_{\lambda\nu} f_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i}{p}\alpha j} (r_{-1}, g_{-1})^{-\lambda j} (r_{-1}, g_{-1})^{\nu j} f_\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i}{p}(\alpha j - \nu j)} \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{2\pi i}{p}\lambda j} f_\lambda = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{2\pi i}{p}j(\nu - \alpha)} \hat{f}(j) = f_{\nu - \alpha}, \end{aligned}$$

откуда и следует предложение 2, так как разность  $\nu - \alpha$  в  $f_{\nu - \alpha}$  понимается как вычитание по  $\text{mod } 2$ .  $\square$

**Замечание.** Если ключ  $\kappa$  есть произвольный вектор, принадлежащий множеству  $[0, p - 1]^p$ , то зашифрованное сообщение  $C = (c_k)_{k=0}^{p-1}$  не обязано быть перестановкой исходного сообщения. Например, при  $p = 11$ ,  $f = (\text{coefficient})$  зашифрованное сообщение  $C = (ghkgiggjoc l)$ .

При шифровке сообщение следует разбить на слова длиной  $p$ , и шифровать каждое слово отдельно. Слово длины  $p$ , очевидно, шифруется одинаково независимо от его положения в сообщении. Детальное изучение криптоустойчивости данного и близких к нему алгоритмов предполагается в дальнейшем.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и РФФИ (проект 10-01-00097-а).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981.
2. Лукомский С. Ф. Кратномасштабный анализ на нуль-мерных абелевых группах и всплесковые базисы // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–46.
3. Саломая А. Криптография с открытым ключом. М. : Мир, 1995.

УДК 517.984

**Т. В. Мазур**

### АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ

В статье предлагается алгоритм решения обратной задачи Штурма — Лиувилля на звездообразном графе, использующий ряд соотношений метода спектральных отображений и требующий относительно небольшого количества операций.



Пусть  $T$  – граф-звезда с множеством вершин  $\{v_j\}_{j=0}^p$  и множеством рёбер  $\{e_j\}_{j=1}^p$ ,  $e_j = [v_0, v_j]$ . Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Каждое ребро рассматривается как отрезок  $[0, 1]$  и параметризуется параметром  $x \in [0, 1]$ . Для нас удобно выбрать следующую ориентацию на каждом ребре:  $x = 1$  соответствует вершине  $v_0$ .

Функция  $Y$  на  $T$  может быть представлена как вектор  $Y(x) = [y_j(x)]_{j=1}^p$ ,  $x \in [0, 1]$ . Пусть  $q = [q_j(x)]_{j=1}^p$  – вещественнозначная функция на  $T$  такая, что  $q_j(x) = \sigma'_j(x)$ ,  $\sigma_j \in L_2[0, 1]$ . Назовём функцию  $\sigma = [\sigma_j(x)]_{j=1}^p$  *потенциалом*. Дифференциальный оператор Штурма – Лиувилля на ребре  $e_j$  определяется следующим выражением [1]:

$$l_j y_j = -(y_j^{[1]})' - \sigma_j(x) y_j^{[1]} - \sigma_j^2(x) y_j,$$

где  $y_j^{[1]} := y'_j - \sigma_j y_j$  – квазипроизводная, и

$$\text{dom}(l_j) = \{y_j \mid y_j \in W_2^1[0, 1], y_j^{[1]} \in W_1^1[0, 1], l_j y_j \in L_2[0, 1]\}.$$

Рассмотрим уравнение Штурма – Лиувилля на  $T$ :

$$l_j y_j = \lambda y_j, \quad x \in [0, 1], \quad j = \overline{1, p}, \quad (1)$$

где  $y_j \in \text{dom}(l_j)$ , и функции  $y_j$  удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренней вершине  $v_0$ :

$$y_j(1) = y_k(1), \quad j, k = \overline{1, p}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^p y_j^{[1]}(1) = 0. \quad (3)$$

Обозначим  $U_j(Y) := y_j^{[1]}(0)$ ,  $j = \overline{1, p}$ , и рассмотрим краевую задачу  $B_0$  для уравнения (1) с условиями склейки (2), (3) и с краевыми условиями

$$U_j(Y) = 0, \quad j = \overline{1, p}.$$

Мы также будем рассматривать краевые задачи  $B_k$ ,  $k = \overline{1, p}$ , для уравнения (1) с условиями склейки (2), (3) и с краевыми условиями

$$y_k(0) = 0, \quad U_j(Y) = 0, \quad j = \overline{1, p} \setminus k.$$

Пусть  $\Phi_k(x, \lambda) = [\Phi_{kj}(x, \lambda)]_{j=1}^p$ ,  $k = \overline{1, p}$  – решения уравнения (1), удовлетворяющие (2), (3) и краевым условиям

$$U_j(\Phi_k) = \delta_{jk}, \quad (4)$$

где  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера. Обозначим  $M_k(\lambda) := \Phi_{kk}(0, \lambda)$ ,  $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=1}^{p-1}$ . Функция  $M_k(\lambda)$  называется *функцией Вейля* для уравнения (1) относительно вершины  $v_k$ .  $M(\lambda)$  называется *вектором Вейля*. Рассмотрим следующую обратную задачу.

**Задача.** По заданному вектору Вейля  $M$  определить потенциал  $\sigma$ .

Отметим, что понятие вектора Вейля является обобщением понятия функции Вейля ( $m$ -функции) для классического оператора Штурма – Лиувилля на интервале [2]. Как и в классическом случае, можно показать, что функции  $M_k(\lambda)$  являются мероморфными по  $\lambda$ :

$$M_k(\lambda) = \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)},$$

где  $\Delta_k(\lambda)$  являются характеристическими функциями краевых задач  $B_k$ . Нули  $\Lambda_k := \{\lambda_{kn}\}_{n \geq 0}$  целой функции  $\Delta_k(\lambda)$  вещественны и совпадают с собственными значениями  $B_k$ .

Наряду с  $T$  рассмотрим дерево  $\tilde{T}$  того же вида, но с другим потенциалом  $\tilde{\sigma}$ . Всюду далее, если символ  $\alpha$  обозначает объект, относящийся к  $T$ , то  $\tilde{\alpha}$  будет обозначать аналогичный объект, относящийся к  $\tilde{T}$ , и  $\hat{\alpha} := \alpha - \tilde{\alpha}$ .

Согласно [1] задание вектора Вейля  $M$  однозначно определяет потенциал  $\sigma$  на  $T$ . Решение обратной задачи может быть получено по формуле

$$\sigma_k(x) = -m_k(x) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \hat{\varphi}_k(x, \lambda) \tilde{\varphi}_k(x, \lambda) \hat{M}_k(\lambda) d\lambda, \quad (5)$$

где

$$m_k(x) = \frac{1}{\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma_N} \rho \hat{M}_k(\rho^2) \cos 2\rho x d\rho, \quad (6)$$

а  $\varphi_k(x, \lambda)$  – решения уравнения (1) на ребре  $e_k$  при начальных условиях

$$\varphi_k(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_k^{[1]}(0, \lambda) = 0. \quad (7)$$

$\gamma$  – контур в  $\rho$ -плоскости,  $\gamma = \gamma(\tau) := (-\infty + i\tau, +\infty + i\tau)$ , где  $\tau > 0$  такое, что  $\inf\{\Lambda_k \cup \tilde{\Lambda}_k\} > -\tau^2$ .  $\Gamma$  – контур в  $\lambda$ -плоскости, являющийся отображением  $\gamma$  при  $\lambda = \rho^2$ .

Пусть задан вектор Вейля  $M$ , также пусть выбран и зафиксирован модельный оператор с потенциалом  $\tilde{\sigma}$ . Введём отображение  $S$ : по заданному  $\sigma$  построим для каждого  $\lambda$  решения  $\varphi_k(x, \lambda)$  задачи Коши (1), (7). Подставляя найденные таким образом  $\varphi_k(x, \lambda)$  в правые части соотношений (5), (6), получим новый потенциал  $\tilde{\sigma}$ . Определим  $S$  как отображение,

ставящее потенциалу  $\sigma$  в соответствие полученный указанным способом потенциал  $\bar{\sigma}$ . Из предыдущего ясно, что потенциал  $\sigma^0$ , являющийся решением обратной задачи для данного  $M$ , является неподвижной точкой отображения  $S$ . Наряду с отображением  $S$  рассмотрим отображение  $S_N$ , определяемое так же, как и  $S$ , но с заменой в правой части (6) бесконечного контура на  $\gamma_N = \gamma_N(\tau) := (-N + i\tau, N + i\tau)$ . Предлагаемый численный метод решения обратной задачи состоит в том, что в качестве приближённого решения принимается неподвижная точка отображения  $S_N$ , которая ищется с помощью метода последовательных приближений [3]. При этом число  $N$  должно быть выбрано до начала итераций, исходя из предварительного анализа данных, а также из имеющейся априори информации о решении.

**Алгоритм.** Дан вектор Вейля  $M(\lambda)$ .

1. Выбираем модельную задачу  $\tilde{B}$ . Например,  $\tilde{\sigma}_k(x) = 0$ . Выбираем  $N$ .

2. Выбираем начальное приближение:  $\sigma_k^{(0)} := \tilde{\sigma}_k(x)$ .

3. Для каждого  $r = 0, 1, 2, \dots$  выполняем следующие шаги:

- (i) для  $\sigma_k = \sigma_k^{(r-1)}$  находим  $\varphi(x, \lambda)$  как решение задачи Коши (1), (7).
- (ii) находим следующее приближение из соотношений

$$\sigma_k^{(r)}(x) = -m_k(x) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (\varphi_k(x, \lambda) - \tilde{\varphi}_k(x, \lambda)) \tilde{\varphi}_k(x, \lambda) \hat{M}_k(\lambda) d\lambda,$$

$$m_k(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_N} \rho \hat{M}_k(\rho^2) \cos 2\rho x d\rho.$$

Для прекращения итераций можно использовать любой из общепринятых критериев.

Проведённые численные эксперименты показали, что метод сходится достаточно быстро (для широкого класса задач при выборе  $20 \leq N \leq 50$  для достижения хорошего качества восстановления оказалось достаточно 10 – 20 итераций).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Freiling G., Ignatiev M., Yurko V.* An inverse spectral problem for Sturm – Liouville operators with singular potentials on star-type graphs // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 2008. Vol. 77. P. 397 – 408.
2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.
3. *Ignatiev M., Yurko V.* Numerical Methods for Solving Inverse Sturm – Liouville Problems // Result. Math. 2008. Vol. 52. P. 63 – 74.

А. И. Малинский

## РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ ДЕРЕВА СЦЕНАРИЕВ С ЗАДАННЫМИ СТАТИСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

В данной статье рассматривается алгоритм построения дерева сценариев, обладающего заданными статистическими свойствами. В основе лежит метод, предложенный в статье [1].

Пусть  $S$  есть множество всех заданных статистических характеристик распределения и пусть  $S_i$  есть значение заданной статистической характеристики  $i$  из множества  $S$ . Далее, пусть  $I$  означает число случайных переменных,  $T$  – число стадий, и  $N_t$  есть число разветвлений на стадии  $t$ . Мы будем полагать для простоты, что дерево является симметричным, т.е. число ветвей является одинаковым для всех условных распределений из одного периода. Дерево на рисунке является симметричным с  $T = 3$ ,  $N_1 = 3$ ,  $N_2 = 2$ ,  $N_3 = 1$ . Пусть  $x$  есть вектор размерности  $|x| = IN_1 + IN_1N_2 + \dots + IN_1N_2 \dots N_T$ ,  $p$  есть вектор вероятностей размерности  $|p| = N_1 + N_1N_2 + \dots + N_1N_2 \dots N_T$  и пусть  $f_i(x, p)$  есть функция для вычисления статистической характеристики  $i$  из  $S$  (например, это может быть математическое ожидание или момент некоторого порядка). Пусть  $M$  есть матрица с элементами 0 или 1, число строк и столбцов которой равно  $|p|$  (числу дуг дерева сценариев) и  $|x|$  (числу узлов дерева сценариев) соответственно, каждый столбец которой есть индикатор условного распределения в заданном узле. Каждый столбец задает условное распределение в дереве сценариев. Обозначим  $w_i$  вес статистической характеристики  $i$  из множества  $S$ .

Задача состоит в нахождении таких  $x \in \mathbb{R}^{|x|}$  и  $p \in \mathbb{R}^{|p|}$ , чтобы статистические характеристики дискретного распределения, генерируемого деревом сценариев, совпадали с заданными вначале статистическими характеристиками. Добиться такого результата можно с помощью минимизации меры расстояния между статистическими характеристиками распределения, соответствующими дереву сценариев, и заданными. Необходимо учитывать, что сумма вероятностей всех сценариев на отдельном этапе должна быть равна единице. Таким образом, задача построения дерева сценариев, аппроксимирующего распределение с заданными статистическими характеристиками, может быть записана как

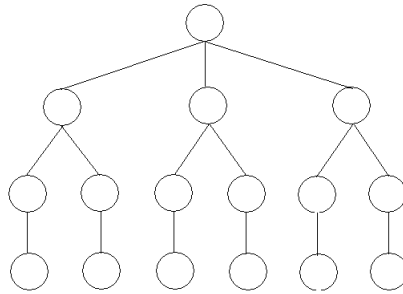
следующая задача условной нелинейной оптимизации:

$$\sum_{i \in S} w_i (f_i(x, p) - S_i)^2 \rightarrow \min_{x, p}, \quad (1)$$

при условии

$$\sum pM = 1, p \geq 0.$$

Для выполнения поставленной задачи была написана программа в среде Matlab с использованием Excel.



Пример дерева сценариев

Процедура построения дерева рекурсивна. Базовой функцией алгоритма является функция построения дерева сценариев с одним периодом. Опишем ее подробнее. Для заданного распределения мы вычисляем его моменты (здесь ограничиваемся четырьмя первыми моментами). Лицо, принимающее решение (ЛПР), задает «худший» случай следующим образом:

$$WC_i = E(x_i) - F \cdot SD(x_i),$$

где  $E(x_i)$  – математическое ожидание актива  $i$ ,  $F$  – некоторая константа,  $SD(x_i)$  – стандартное отклонение актива  $i$ . Вероятность наихудшего сценария задается ЛПР. Решая задачу (1), находим вероятности и значения случайной величины  $x$ . Дерево с одним периодом построено.

Продолжая рекурсивно процедуру построения дерева с одним периодом для получившихся узлов и учитывая ограничения на корреляции случайных величин между стадиями, получаем дерево сценариев. При реализации алгоритма полагаем число ветвей в каждом узле дерева постоянным для всех узлов.

Построенное дерево сценариев может быть использовано в задачах прогнозирования котировок акций.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Hoyland K., Wallace S. W. Generating Scenario Trees for Multistage Problems // Management science. 2001. Vol. 47, № 2. P. 295–307.

Ю. В. Матвеева

## О КУБИЧЕСКОМ МНОГОЧЛЕНЕ НА ЧЕТЫРЕХГРАННИКЕ

На трехмерном симплексе строится Эрмитов сплайн третьей степени, для которого получены оценки отклонения производных до третьего порядка включительно по направлениям в терминах, не содержащих углов.

Пусть  $\bar{T} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  – трехмерный замкнутый симплекс и  $d(T)$  – его диаметр. Функция  $f(\mathbf{x})$  определена на  $\bar{T}$  и имеет непрерывные производные четвертого порядка по любым направлениям в  $\bar{T}$ . Пусть далее  $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\overrightarrow{A_i A_j}}{|A_i A_j|}$ ,  $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$ , – единичные векторы.

Будем строить полином  $Q(\mathbf{x})$  с действительными коэффициентами степени три, который в вершинах  $A_i (i = \overline{1, 4})$  симплекса  $\bar{T}$  интерполирует функцию  $f(\mathbf{x})$  вместе с ее производными по направлениям ребер, то есть

$$f(A_i) = Q(A_i), i = \overline{1, 4}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}, i = \overline{1, 4}, i \neq j. \quad (2)$$

Такой полином имеет 20 коэффициентов. Условия (1) и (2) определяют 16 из них. Остается вопрос о выборе оставшихся четырех коэффициентов. В зависимости от их выбора можно будет говорить о степени приближения функции  $f(\mathbf{x})$  полиномом  $Q(\mathbf{x})$ .

Вопросы о возможности построения интерполяционного многочлена произвольной степени на  $m$ -симплексе, обеспечивающего высокую гладкость кусочно-полиномиальной функции на триангулированной области, и в то же время позволяющего минимизировать ограничения на триангуляцию, а также о выборе универсальной геометрической характеристики симплекса, через которую могли бы выписываться оценки погрешности для таких способов интерполяции, остаются на данный момент открытыми. В работах [1 – 3] рассматривается интерполяция многочленами 3-й степени на трехмерном и  $m$ -мерном симплексах.

В [1] предлагаются условия интерполяции функции трех переменных и устанавливаются соответствующие им оценки аппроксимации первых

производных через довольно сложные, но, по мнению автора данной статьи, дающие хорошую точность оценок характеристики. Найденные интерполяционные условия позволяют ослабить требования на симплексы, но не всегда обеспечивают непрерывность результирующей кусочно-полиномиальной функции, а их корректировка с целью добиться непрерывности иногда приводит к необходимости усиления ограничений на триангуляцию. В данной статье предлагается несколько иной способ построения сплайна и получены оценки в терминах длин ребер симплекса.

Обозначим середины ребер  $A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3$  четырехгранника  $\bar{T}$  соответственно  $P_{12}, P_{13}, P_{23}$ ;  $\mathbf{n}_{ij}^{(k)}$  – вектор нормали, восстановленный к середине ребра  $A_iA_j$  в грани  $A_iA_jA_k$ . Выберем дополнительные условия следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Q-f)}{\partial \mathbf{n}_{12}^{(3)}}(P_{12}) = 0, \quad \frac{\partial(Q-f)}{\partial \mathbf{n}_{12}^{(4)}}(P_{12}) = 0, \\ \frac{\partial(Q-f)}{\partial \mathbf{n}_{13}^{(4)}}(P_{13}) = 0, \quad \frac{\partial(Q-f)}{\partial \mathbf{n}_{23}^{(4)}}(P_{23}) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

**Теорема.** Пусть функция  $f(\mathbf{x})$  имеет на  $\bar{T}$  непрерывные частные производные четвертого порядка  $\frac{\partial^4 f}{\partial \mathbf{e}_1 \partial \mathbf{e}_2 \partial \mathbf{e}_3 \partial \mathbf{e}_4}$  по любому направлению  $\mathbf{e}_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ),  $d$  – диаметр  $\bar{T}$ ,  $M_4 = \max_{0 \leq i_j \leq 4, \sum i_j = 4} \max_{x \in \bar{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1} \partial \mathbf{e}_2^{i_2} \partial \mathbf{e}_3^{i_3} \partial \mathbf{e}_4^{i_4}} \right|$ , и пусть многочлен  $Q(\mathbf{x})$  удовлетворяет условиям (1), (2), (3). Тогда справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13} \partial \mathbf{e}_{14}} \right| \leq \frac{CM_4 d^4}{|A_1A_2| \cdot |A_1A_3| \cdot |A_1A_4|};$$

$$\left| \frac{\partial^n(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^2 \partial \mathbf{e}_{1j}^k} \right| \leq CM_4 d^{4-n}, n = 2, 3, k \geq 0 (k+2=n), j = 2, 3, 4;$$

$$\left| \frac{\partial^n(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{1i}^k \partial \mathbf{e}_{1j}^l} \right| \leq \frac{CM_4 d^4}{|A_1A_i|^k \cdot |A_1A_j|^l}, n = 1, 2, 0 \leq k, l \leq n (k+l=n), \\ i, j = 2, 3, 4;$$

$$\left| \frac{\partial^n(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^i \partial \mathbf{e}_{13}^j \partial \mathbf{e}_{14}^k} \right| \leq CM_4 d^{4-n} \text{ в остальных случаях.}$$

**Доказательство.** Интерполяционный многочлен для функции  $f(\mathbf{x})$  с условиями (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^4 f(A_i)x_i^3 + 3 \sum_{i \neq j, i, j \geq 0} f(A_i)x_i^2x_j + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i A_j| \cdot \left( \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} x_i + \frac{\partial f(A_j)}{\partial \mathbf{e}_{ji}} x_j \right) x_i x_j + \\ &+ 6a_{1110}x_1x_2x_3 + 6a_{1101}x_1x_2x_4 + 6a_{1011}x_1x_3x_4 + 6a_{0111}x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Будем считать, что точка  $\mathbf{x} \in \bar{T}$  задана своими барицентрическими координатами  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , тогда производные по направлениям можно вычислить по следующему правилу [2]:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{1}{|A_i A_j|} \cdot \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq j. \quad (4)$$

Для краткости будем обозначать  $f_i = f(A_i), i = \overline{1, 3}; \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{e}_{kj}} = \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{kj}}, k \neq j; k, j = \overline{1, 4}$ . Оценки отклонения производных третьего порядка по каждому из направлений  $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}$  были получены в [2]. Рассмотрим смешанные производные третьего порядка по направлениям  $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}$ . Оценим  $\left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{14}^2 \partial \mathbf{e}_{13}} \right|$ . Остальные производные получаются аналогично.

Так как

$$|A_i A_j| \cdot \mathbf{e}_{ij} = |A_i A_k| \cdot \mathbf{e}_{ik} + |A_k A_j| \cdot \mathbf{e}_{kj}, \quad i, j, k = \overline{1, 4},$$

то

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{|A_i A_k|}{|A_i A_j|} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ik}} + \frac{|A_k A_j|}{|A_i A_j|} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{kj}}. \quad (5)$$

Применяя (4) и (5) в выражении  $\frac{\partial^3 Q}{\partial \mathbf{e}_{14}^2 \partial \mathbf{e}_{13}}$ , находя из третьего равенства условия (3) коэффициент  $6a_{1011}$ :

$$\begin{aligned} 6a_{1011} &= 6f_1 + 2|A_1 A_3| \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} - |A_1 A_4| \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{14}} - |A_1 A_4| \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{14}} + 4|A_1 A_4| \frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{14}} + \\ &+ \frac{|A_1 A_4|}{|A_1 A_3|} (\mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{13}) \left[ 6(f_3 - f_1) + |A_1 A_3| \left( \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} \right) - 4|A_1 A_3| \frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{13}} \right], \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{14}^2 \partial \mathbf{e}_{13}} = \frac{2}{|A_1 A_3| \cdot |A_1 A_4|^2} \cdot \left( 6(f_1 - a_{1011}) + |A_1 A_3| \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} \right)$$



$$\begin{aligned}
& + |A_1 A_3| \cdot \frac{\partial f_4}{\partial \mathbf{e}_{13}} + 2 \cdot |A_1 A_4| \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{14}} \Big) = \\
= & \frac{2}{|A_1 A_4|^2 |A_1 A_3|} \cdot \left( \frac{|A_1 A_4|}{|A_1 A_3|} (\mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}) \left[ 6(f_3 - f_1) + |A_1 A_3| \left( \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 4|A_1 A_3| \frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{13}} \right] - 4|A_1 A_4| \frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{14}} + |A_1 A_4| \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{14}} + 3|A_1 A_4| \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{14}} - \right. \\
& \left. - |A_1 A_3| \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} + |A_1 A_3| \frac{\partial f_4}{\partial \mathbf{e}_{13}} + |A_1 A_4| \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{14}} \right).
\end{aligned}$$

Обозначим через  $R$  выражение, стоящее в квадратных скобках.

Представим  $\frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{14}}, \frac{\partial f_4}{\partial \mathbf{e}_{13}}, \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{14}}, \frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{13}}, f_3, \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{13}}$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $A_1$ , тогда

$$\begin{aligned}
|R| & \leq \frac{1}{2} M_4 |A_1 A_3|^4, \\
\left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{14}^2 \partial \mathbf{e}_{13}} \right| & = \left| \frac{\partial^3 Q}{\partial \mathbf{e}_{14}^2 \partial \mathbf{e}_{13}} - \frac{\partial^3 f}{\partial \mathbf{e}_{14}^2 \partial \mathbf{e}_{13}} + \right. \\
& + \frac{1}{3} |A_1 A_4| \frac{\partial^4 f(\alpha)}{\partial \mathbf{e}_{14}^3 \partial \mathbf{e}_{13}} - \frac{1}{12} \frac{|A_1 A_3|^2}{|A_1 A_4|} \frac{\partial^4 f(\beta)}{\partial \mathbf{e}_{13}^3 \partial \mathbf{e}_{14}} + \\
& \left. + \frac{1}{6} \frac{|A_1 A_3|^2}{|A_1 A_4|} \frac{\partial^4 f(\gamma)}{\partial \mathbf{e}_{13}^3 \partial \mathbf{e}_{14}} - \frac{1}{|A_1 A_3|^2 |A_1 A_4|} (\mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}) R \right| \leq C M_4 \frac{d^2}{|A_1 A_4|},
\end{aligned}$$

где  $\alpha$  и  $\beta, \gamma$  – точки, лежащие на ребрах  $\mathbf{e}_{14}$  и  $\mathbf{e}_{13}$  соответственно. Для получения оценок отклонения производных второго, первого и нулевого порядков по направлениям  $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}$  будем рассуждать так. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_B^{\mathbf{x}} \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13} \partial \mathbf{e}_{14}} d\mathbf{e}_{14} = \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}(\mathbf{x}) - \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}(\mathbf{B}),$$

где  $\mathbf{B}$  – точка, являющаяся проекцией точки  $\mathbf{x}$  на боковую грань  $A_1 A_2 A_3$ . Оценка выражения, стоящего под знаком интеграла, известна. Таким образом, нам осталось получить оценку для второго слагаемого в правой

части равенства. Но она уже была найдена ранее [4]:  $\left| \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}(\mathbf{B}) \right| \leq$   
 $\leq C M_4 d^2$ . Следовательно,

$$\left| \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}} \right| \leq C M_4 \frac{d^4}{|A_1 A_3| |A_1 A_2|}.$$

Рассуждая аналогично получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, если ребра  $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4$  являются длинными, т.е. длина каждого из них больше половины диаметра, то справедливы оценки:  
$$\left| \frac{\partial^n(Q-f)}{\partial e_{12}^i \partial e_{13}^k \partial e_{14}^{n-i-k}} \right| \leq CM_4 d^{4-n}, 1 \leq n \leq 3, 0 \leq i, k \leq n (i+k \leq n).$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zenisek A., Hoderova-Zlamalova J.* Semiregular Hermite tetrahedral finite elements // *Appl. of Math.* 2001. Vol. 46., № 4. P. 295–315.
2. *Куприянова Ю. В.* Об одной теореме из теории сплайнов // *ЖВМ и МФ.* 2008. Т. 48, № 2. С. 206–211.
3. *Байдакова Н. В.* О некоторых интерполяционных многочленах третьей степени на трехмерном симплексе // *Труды Института математики и механики. Екатеринбург : УрО РАН.* 2008. Т. 14, № 3. С. 43–57.
4. *Мелешкина А. В.* Об аппроксимации производными интерполяционного многочлена Эрмита на треугольнике // *ЖВМ и МФ.* 2010. Т. 50, № 2. С. 211–220.

УДК 519.713.2, 512.534

**В. А. Молчанов**

### КОНКРЕТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ

В статье изучаются универсальные планарные автоматы, подавтоматы которых охватывают гомоморфные образы всех планарных автоматов.

Под плоскостью [1] будем понимать систему вида  $\Pi = (X, L)$ , где  $X$  – непустое множество точек и  $L$  – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам:  $(A_1)$  через любые две точки проходит одна и только одна прямая;  $(A_2)$  каждая прямая содержит по крайней мере три точки;  $(A_3)$  в множестве  $X$  есть три точки, не лежащие на одной прямой. В частности, плоскость  $\Pi$  является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой  $l \in L$  и любой точки  $x \in X \setminus l$  существует такая единственная прямая  $l'$ , что  $x \in l'$  и  $l \cap l' = \emptyset$ .

По определению планарные автоматы являются структурированными автоматами [2]  $\mathbf{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$  с множеством состояний  $Q$  и множеством выходных сигналов  $B$ , наделенными структурами плоскостей  $\Pi_Q = (Q, L_Q)$  и  $\Pi_B =$

$= (B, L_B)$ , множеством входных сигналов  $A$ , функцией переходов  $\delta : A \times Q \rightarrow Q$  и выходной функцией  $\lambda : A \times Q \rightarrow B$ , для которых при каждом фиксированном  $a \in A$  преобразование  $\delta_a(q) = \delta(a, q)$  ( $q \in Q$ ) является эндоморфизмом плоскости  $\Pi_Q$  и отображение  $\lambda_a(q) = \lambda(a, q)$  ( $q \in Q$ ) – гомоморфизмом  $\Pi_Q$  в  $\Pi_B$ . Для автомата  $\mathbf{A}$  без равнодействующих входных сигналов каждый входной сигнал  $a$  можно отождествить с парой отображений  $(\delta_a, \lambda_a)$ .

Для любых плоскостей  $\Pi_Q$  и  $\Pi_B$  автомат  $\mathbf{A} = (\Pi_Q, A, \Pi_B, \delta, \lambda)$  с множеством входных сигналов  $A$ , состоящим из всех пар  $a = (\varphi, \psi)$  эндоморфизмов  $\varphi$  плоскости  $\Pi_Q$  и гомоморфизмов  $\psi$  плоскости  $\Pi_Q$  в плоскость  $\Pi_B$ , функцией переходов  $\delta(q, a) = \varphi(q)$  и выходной функцией  $\lambda(q, a) = \psi(q)$  (здесь  $q \in Q$ ) является планарным автоматом. Такие автоматы называются *универсальными планарными автоматами*, так как их подавтоматы охватывают гомоморфные образы всех планарных автоматов. Основным результатом работы [3] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов.

Для универсальных планарных автоматов исследована проблема конкретной характеристики, которая формулируется следующим образом: при каких условиях автомат  $\mathcal{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$  является универсальным планарным автоматом, т.е. на множестве состояний  $Q$  можно так определить структуру плоскости  $\Pi_Q = (Q, L_Q)$  и на множестве выходных сигналов  $B$  – структуру плоскости  $\Pi_B = (B, L_B)$ , что множество входных сигналов  $A$  совпадет с множеством  $\text{End}\Pi_Q \times \text{Hom}(\Pi_Q, \Pi_B)$ .

Такая задача имеет прямое отношение к известной проблеме С. Улама [4] об определении математической структуры по данному множеству эндоморфизмов, которая не решена до сих пор ни для графов, ни для гиперграфов общего вида.

Для произвольного автомата  $\mathcal{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$  определим канонические тернарные отношения  $R_Q \subset Q^3$  и  $R_B \subset B^3$  по формулам:

$$R_Q = \{(q_1, q_2, q_3) \in Q^3 : (\forall (x_1, x_2, x_3) \in Q^3 \setminus \Delta)(\exists a \in A)\delta_a(x_i) = q_i\},$$

$$R_B = \{(b_1, b_2, b_3) \in B^3 : (\forall (x_1, x_2, x_3) \in Q^3 \setminus \Delta)(\exists a \in A)\lambda_a(x_i) = b_i\},$$

где  $\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in Q^3 : x_i = x_j \text{ для некоторых } 1 \leq i \neq j \leq 3\}$ .

Тернарное отношение  $R \subset X^3$  называется *3-эквивалентностью на множестве  $X$* , если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i)  $R \neq X^3$ ,

- (ii)  $(x, x, x) \in R$  для любого  $x \in X$ ;
- (iii)  $(x_1, x_2, x_3) \in R \implies (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in R$  для любых  $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 3$ ;
- (iv)  $(x, y, z), (z, y, v) \in R \implies (x, y, v) \in R$  для любых элементов  $x, y, z, v \in X$ , удовлетворяющих условию  $y \neq z$ .

При этом 3-эквивалентность  $R$  называется *квазиуниверсальной*, если для любых элементов  $x, y \in X$  найдется такой отличный от них элемент  $z \in X$ , что  $(x, y, z) \in R$ .

**Основная теорема.** Пусть  $\mathcal{A} = (Q, A, B, \delta, \lambda)$  – произвольный автомат без равнодействующих входных сигналов. Тогда  $\mathcal{A}$  в том и только том случае является универсальным планарным автоматом  $\text{Atm}(\Pi_Q, \Pi_B)$  для некоторых плоскостей  $\Pi_Q = (Q, L_Q)$ ,  $\Pi_B = (B, L_B)$ , если канонические отношения  $R_Q, R_B$  этого автомата являются квазиуниверсальными 3-эквивалентностями на множествах  $Q$  и  $B$  соответственно, а также выполняются следующие свойства:

1) если  $(q_1, q_2, q_3) \in Q^3 \setminus R_Q$ , то для любых  $x_1, x_2, x_3 \in Q$ ,  $y_1, y_2, y_3 \in B$  найдется такой элемент  $a \in A$ , что  $\delta_a(q_i) = x_i$  и  $\lambda_a(q_i) = y_i$  для всех  $1 \leq i \leq 3$ ;

2) если для отображений  $\varphi : Q \rightarrow Q$ ,  $\psi : Q \rightarrow B$  при любых значениях  $q_1, q_2, q_3 \in Q$  существует  $x \in A$ , для которого  $\delta_x(q_i) = \varphi(q_i)$  и  $\lambda_x(q_i) = \psi(q_i)$  для всех  $1 \leq i \leq 3$ , то найдется такой элемент  $a \in A$ , что  $\delta_a(q) = \varphi(q)$  и  $\lambda_a(q) = \psi(q)$  для всех  $q \in Q$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Картези Ф. Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980.
2. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высшая школа, 1994.
3. Molchanov V. A. On definability of universal planar automaton by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.
4. Улам С. Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964.

УДК 513.6

С. И. Небалуев

### СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ КАРТАНА — ЛЕРЕ ДЛЯ ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Основным результатом статьи является теорема о спектральной последовательности Картана — Лере для толерантных пространств.

Пусть  $\pi$  – произвольная группа. Рассмотрим [1, 2] толерантное пространство (Г пространство)  $(K, \xi)$ , где  $K = \pi \times \mathbb{N}$ ,

$$(g_1, a_1)\xi(g_2, a_2) \iff \begin{cases} g_1 = g_2, a_1 = a_2; \\ a_1 \neq a_2. \end{cases}$$

**Предложение 1.**  $(K, \xi)$  – линейно связное  $T$  пространство с тривиальными (в положительных размерностях) гомотопическими и гомологическими группами:  $(\forall n \geq 1) \pi_n(K) = 0, H_n(K) = 0. \square$

На пространстве  $(K, \xi)$  определено действие группы  $\pi$ :

$$h \cdot (g, a) = (gh^{-1}, a), \quad (g, a) \in K, \quad h \in \pi.$$

Это действие является точным, но не вполне разрывным [3].

Построим новое пространство  $(K', \xi')$ , в котором

$$K' = \{g_0, \dots, g_s; a_0, \dots, a_s \mid s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, g_i \in \pi, a_i \in \mathbb{N}, a_i < a_{i+1}, i = \overline{0, s}, \}$$

$$(g_0, \dots, g_s; a_0, \dots, a_s) \xi' (h_0, \dots, h_t; b_0, \dots, b_t) \xleftrightarrow[s \leq t]$$

$$g_0 = h_{i_0}, \dots, g_s = h_{i_s}; a_0 = b_{i_0}, \dots, a_s = b_{i_s}, 0 \leq i_0 < \dots < i_s \leq t.$$

Так как симплициальный комплекс  $\overset{\circ}{S}(K')$  (см. [2]) является барицентрическим подразбиением комплекса  $\overset{\circ}{S}(K)$ , то  $H_n(K') = H_n(K) = 0, n \geq 1$ . Из результатов работы [2, гл. 3, п. 3] следует, что  $\pi_1(K') = \pi_1(K) = 0$ . Применив далее теорему Гуревича [4], получим

**Предложение 2.**  $T$  пространство  $(K', \xi')$  линейно связное и

$$(\forall n \geq 1) \pi_n(K') = 0, \quad H_n(K') = 0. \quad \square$$

На  $(K', \xi')$  можно определить вполне разрывное действие (см. [3]) группы  $\pi$ :

$$h \cdot (g_0, \dots, g_s; a_0, \dots, a_s) = (g_0 h^{-1}, \dots, g_s h^{-1}; a_0, \dots, a_s).$$

Обозначим  $T$  пространство орбит через  $(\pi \backslash K', \xi'_\pi)$  (см. [3]). С помощью результатов работ [3, 5] доказывается

**Теорема 1.** *Группа  $\pi$  действует вполне разрывно на линейно связном  $T$  пространстве  $(K', \xi')$ , у которого  $(\forall n \geq 1) \pi_n(K') = 0, H_n(K') = 0$ . Фактор-отображение  $p' : (K', \xi') \rightarrow (\pi \backslash K', \xi'_\pi)$  является универсальным  $T$  накрытием, имеющим  $\pi$  в качестве накрывающих преобразований. При этом  $\pi_1(\pi \backslash K') \cong \pi, (\forall n \geq 2) \pi_n(\pi \backslash K') = 0. \square$*

Для произвольной группы  $\pi$  ее группы гомологий с коэффициентами в (левом)  $\pi$ -модуле  $M$  определяются формулой

$$(\forall n \geq 0) \quad H_n(\pi; M) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[\pi]}(\mathbb{Z}, M),$$

где  $\mathbb{Z}[\pi]$  – групповое кольцо. Это означает, что для получения групп  $H_n(\pi; M)$ ,  $n \geq 0$ , надо взять точную (ацикличную) последовательность свободных  $\pi$ -модулей (правых) вида

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (1)$$

Тогда  $H_n(\pi; M) = H_n(C_n \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M)$ ,  $n \geq 0$ .

Пусть теперь  $(X, \tau)$  – линейно связное  $\Gamma$  пространство, у которого  $\pi_1(X) = \pi$ ,  $(\forall n \geq 2) \pi_n(X) = 0$ . Тогда из [3] и [5] следует, что для универсального  $\Gamma$  накрытия  $p : (\bar{X}, \bar{\tau}) \longrightarrow (X, \tau)$  получим  $(\forall n \geq 1) \pi_n(\bar{X}) = 0$ ,  $H_n(\bar{X}) = 0$ . Отсюда следует, что в качестве последовательности (1) можно взять пополненный цепной комплекс  $\{C'_n(\bar{X}), \partial_n\}_{n \geq 0}$  упорядоченных цепей (см. [2]). Следовательно,  $(\forall n \geq 0) H_n(\pi; M) = H_n(C'(\bar{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M)$ . С помощью явного построения цепного изоморфизма доказывается, что

$$(\forall n \geq 0) H_n(C'(\bar{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} M) \cong H_n(X; M),$$

где  $H_n(X; M)$  – гомологии  $\Gamma$  пространства  $(X, \tau)$  с локальными коэффициентами, определяемыми  $\pi$ -модулем  $M$ . Итак, в предыдущих обозначениях имеет место

**Теорема 2.**  $(\forall n \geq 0) H_n(\pi; M) \cong H_n(X; M)$ .  $\square$

Пусть  $(X, \tau)$  – линейно связное  $\Gamma$  пространство, на котором вполне разрывно действует (справа) группа  $\pi$ . Тогда (см. [3]) имеется регулярное  $\Gamma$  накрытие  $p : (X, \tau) \longrightarrow (Y = X/\pi, \theta = \tau_\pi)$ ,  $p(x) = x \cdot \pi$ , у которого  $\pi \cong \pi_1(Y)/p_\pi(\pi_1(X))$  – группа накрывающих преобразований.

По теореме 1 имеется ацикличное  $\Gamma$  пространство  $(K', \xi')$ , на котором вполне разрывно действует (слева) группа  $\pi$ , что определяет универсальное  $\Gamma$  накрытие  $p' : (K', \xi') \longrightarrow (P = \pi \backslash K, \xi = \xi'_\pi)$ .

На пространстве  $(K' \times X, \xi' \times \tau)$  определим действие  $\pi$ :

$$g \cdot (u, x) = (g \cdot u, x \cdot g^{-1}), \quad g \in \pi, \quad u \in K', \quad x \in X,$$

с пространством орбит  $(E = \pi \backslash (K' \times X), \bar{\tau} = (\xi' \times \tau)_\pi)$ . Тогда  $\Gamma$  отображения

$$P \xleftarrow{r_1} K' \times X \xrightarrow{r_2} Y, \quad r_1(u, x) = p'(u), \quad r_2(u, x) = p(x),$$

индуцируют  $\Gamma$  отображения  $P \xleftarrow{\varphi_1} E \xrightarrow{\varphi_2} Y$ , которые являются  $\Gamma$  расслоениями [6] со слоями  $(X, \tau)$  и  $(K', \xi')$  соответственно.

Из ацикличности  $(K', \xi')$  и спектральной последовательности Лере – Серра для расслоения  $\varphi_2$  [6] спектральная последовательность Лере –

Серра  $\{\mathcal{E}^m = \bigoplus_{s,t} \mathcal{E}_{s,t}^m\}$ , сходящаяся к  $H(E)$ , такая, что (см. также теорему 2)  $\mathcal{E}_{s,t}^2 \cong H_s(P; H_t(X)) \cong H_s(\pi; H_t(X))$ . Отсюда, с учетом (2), получается

**Теорема 3 (спектральная последовательность Картана — Лере).** Пусть  $(X, \tau)$  — линейно связное  $T$  пространство, на котором вполне разрывно действует группа  $\pi$ , и пусть  $(Y = X/\pi, \theta = \tau_\pi)$  — пространство орбит. Тогда существует спектральная последовательность  $\{\mathcal{E}^m = \bigoplus_{s,t} \mathcal{E}_{s,t}^m\}$ , сходящаяся к  $H(Y)$ , такая, что  $\mathcal{E}_{s,t}^2 \cong \cong H_s(\pi; H_t(X))$ .  $\square$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zeeman E. C. The topology of brain and visual perception // The Topology of 3-Manifolds /ed. M. K. Ford, London, 1962.
2. Небалюев С. И. Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2006.
3. Небалюев С. И. Накрывающие преобразования толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. вып. 2. С. 30–35.
4. Небалюев С. И., Сусин М. Н. Толерантное расслоение путей и теорема Гуревича для толерантных пространств // Изв. Саратов. ун-та. Нов. Сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4, ч. 1. С. 41–44.
5. Небалюев С. И. Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: труды VI Международной конференции. Чебышевский сборник : Тула, 2004. Т.V, вып. 3(11). С. 64–97.
6. Небалюев С. И., Кляева И. А., Сусин М. Н. Построение спектральной последовательности толерантного расслоения // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. вып. 5. С. 94–118.

УДК 519.7

**В. Е. Новиков**

### НЕКОТОРЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФОРМАЛЬНЫМИ КОНТЕКСТАМИ

В статье представлено исследование формальных контекстов с точки зрения их алгебраических преобразований. Если в предыдущих исследованиях [1, 2] формальный контекст рассматривался как некоторая фиксированная данность, то эта статья открывает исследование поведения структуры концептов при изменении содержания контекста, т. е. динамического процесса в контексте.

Восстановим некоторые определения концептуального анализа [3], обобщая их на контекст с  $(n + 1)$ -арным отношением с помощью аппарата алгебры отношений В. В. Вагнера [4]. Будем говорить, что задан *формальный полиатрибутный контекст*  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ , если заданы  $G$  – непустое конечное множество объектов,  $(M_i)$  – семейство непустых конечных множеств атрибутов с множеством индексов  $1 \leq i \leq n$ ,  $\rho \subseteq G \times M_1 \times \dots \times M_n$  – некоторое  $(n + 1)$ -арное отношение. Под словом «контекст» далее будем понимать «полиатрибутный контекст».

Будем говорить, что контекст  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$  *однозначен относительно множества объектов*, или просто *однозначен*, если отношение  $\rho$  имеет  $F$ -зависимость  $G \rightarrow M_{\bar{n}}$ . Ранее было показано, что множество всех концептов однозначного контекста относительно упорядоченности по включению образует решётку. Для однозначного контекста  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$  обозначим через  $L(\mathbb{K})$  решётку его концептов.

В [5] был рассмотрен способ минимизации семейства атрибутов контекста при сохранении с точностью до изоморфизма упорядоченного множества его концептов. В минимизированном однозначном контексте  $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , может существовать один *общий атрибут*  $a \in M_j$ , т.е. атрибут, для которого выполняется равенство  $\widehat{\rho}_j(G) = \{a\}$ . Поскольку в этом случае атрибут  $a$  присущ всем объектам контекста, то он является несущественным, т.е. не выделяет никаких собственных концептов. А значит, множество атрибутов  $M_j$  в этом случае также можно удалить из контекста, не нарушая структуру концептов. Так преобразованные контексты будем называть контекстами без общего атрибута.

*Соединение*  $\mathbb{K}_1 \triangleright \triangleleft \mathbb{K}_2$  контекстов  $\mathbb{K}_1 = (G, (A_i), \rho)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и  $\mathbb{K}_2 = (G, (B_i), \varsigma)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , определяется равенством

$$\mathbb{K}_1 \triangleright \triangleleft \mathbb{K}_2 = (G, (M_i), \rho \triangleright \triangleleft \varsigma), 1 \leq i \leq n + m,$$

где  $M_i = A_i$  при  $1 \leq i \leq n$ ,  $M_i = B_{i-n}$  при  $n + 1 \leq i \leq n + m$ ,  $\rho \triangleright \triangleleft \varsigma = \bigcup_{g \in G} (\rho) \times \varsigma_{\bar{m}} \langle g \rangle$ . Таким образом, соединение контекстов определено для контекстов с один и тем же множеством объектов и равносильно тому, что к одному контексту добавляются множества атрибутов другого контекста, сохраняя атрибуты каждого объекта из второго контекста.

*Объединение*  $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$  контекстов  $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$  и  $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$  определяется равенством

$$\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2 = (G_1 \cup G_2, (M_i), \rho \cup \varsigma),$$



где  $G_1 \cup G_2$  и  $\rho \cup \varsigma$  являются теоретико-множественными объединениями. Таким образом, объединение контекстов определено для контекстов с одним и тем же семейством атрибутов.

Следующие утверждения определяют условия устойчивости однозначных контекстов относительно операций соединения и объединения.

**Теорема 1.** *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если  $\mathbb{K}_1 = (G, (A_i), \rho)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и  $\mathbb{K}_2 = (G, (B_i), \varsigma)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , однозначные контексты, то  $\mathbb{K}_1 \triangleright \triangleleft \mathbb{K}_2$  также однозначный контекст;
- 2) если  $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$  и  $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$  однозначные контексты и  $\bigcup_{g \in G_1 \cap G_2} (\sigma_{\{g\}}(\rho)) = \bigcup_{g \in G_1 \cap G_2} (\sigma_{\{g\}}(\varsigma))$ , то  $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$  также однозначный контекст, в частности, если  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

Следующие утверждения характеризуют решётки концептов соединения и объединения однозначных контекстов. Объединение решёток всюду рассматривается как объединение упорядоченных множеств.

**Теорема 2.** *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если  $\mathbb{K}_1 = (G, (A_i), \rho)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и  $\mathbb{K}_2 = (G, (B_i), \varsigma)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , однозначные контексты, то  $L(\mathbb{K}_1 \triangleright \triangleleft \mathbb{K}_2) = L(\mathbb{K}_1) \cup L(\mathbb{K}_2)$ ;
- 2) если  $\mathbb{K}_1 = (G_1, (M_i), \rho)$  и  $\mathbb{K}_2 = (G_2, (M_i), \varsigma)$  однозначные контексты без общего атрибута с условием  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ , то  $L(\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2) = (L(\mathbb{K}_1) \setminus \{G_1\}) \cup (L(\mathbb{K}_2) \setminus \{G_2\}) \cup \{G_1 \cup G_2\}$ .

**Замечание.** Второе утверждение означает, что решётка концептов объединения контекстов совпадает с решёточным объединением решёток концептов каждого из контекста, когда склеиваются только наибольший и наименьший элементы. Условие «без общего атрибута» во втором утверждении является существенным. Поскольку в объединении общий атрибут может исчезнуть как общий и выделить собственный концепт  $G_1$  или  $G_2$  в зависимости от того, в каком из контекстов он являлся общим. Добавление концептов  $G_1$  или  $G_2$  не разрушит решётки  $L(\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_1)$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков В. Е. О концептуальном анализе на контексте с многомерными атрибутами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 82–85.
2. Новиков В. Е. Теоретико-множественный подход к структуре генераторов концепта // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 50–56.
3. Ganter B., Wille R. Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations. Berlin : Springer Verlag, 1999.

4. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.

5. Новиков В. Е. Концепты и функциональные зависимости // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 68–70.

УДК 519.682.1

А. А. Орел

## О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ФАНТОМНЫХ ТИПОВ ДАННЫХ

В работе [1] предложено при конструировании фантомных типов данных использовать в качестве определяющего отношения отношение предпорядка, которому соответствует тип функциональной зависимости, представленный на языке Haskell конструктором типа  $(->)$ . На основании рассмотренного отношения была решена задача статической проверки типов. Однако данное отношение не обладает свойством симметричности, что накладывает ограничения на область его применения. Фантомные типы данных, построенные на основе этого отношения, не позволяют, например, решить задачу динамической проверки типов [2]. Для решения такой задачи требуется реализация свойства рефлексивности с помощью функции с сигнатурой  $\text{refl} :: \text{TE } a \ b$ , где  $\text{TE } a \ b$  - тип данных, соответствующий отношению эквивалентности, и реализация двух функций  $\text{from}$  и  $\text{to}$  с сигнатурами

```
from :: TE a b -> a -> b и to :: TE a b -> b -> a
```

Заметим, что при наличии свойства симметричности, реализуемого функцией  $\text{symm}$  с сигнатурой  $\text{symm} :: \text{TE } a \ b \rightarrow \text{TE } b \ a$ , достаточно иметь лишь одну из функций  $\text{from}$  или  $\text{to}$ , например  $\text{from}$ , так как  $\text{to}$  может быть получена как композиция  $\text{from} \ . \ \text{symm}$ .

Для определения базового типа  $\text{TE } a \ b$  можно воспользоваться отношением эквивалентности в виде  $(A \Rightarrow B) \ \& \ (B \Rightarrow A)$ , реализуемым в силу изоморфизма Карри — Ховарда типом пары функциональных зависимостей  $(a \rightarrow b, b \rightarrow a)$  [3], или использовать на основе принципа Лейбница отношение эквивалентности в виде  $\forall f. f \ a \rightarrow f \ b$  (см. [2]).

Рассмотрим другие возможности. В начале определим отношение эквивалентности с использованием альтернативы  $( \mid )$  в форме  $(A \mid B) \Rightarrow (A \ \& \ B)$ . Соответствующий тип данных  $\text{TE } a \ b$  можно представить средствами языка Haskell в виде

```
type TE a b = Either a b -> (a, b)
```

Функции `refl`, `from` и `to` могут быть реализованы следующим образом:

```
refl :: TE a a
refl (Left x) = (x, x)
refl (Right x) = (x, x)

from :: TE a b -> a -> b
from f x = snd (f (Left x))

to :: TE a b -> b -> a
to f x = fst (f (Right x))
```

Поскольку отношение эквивалентности должно обладать свойствами симметричности и транзитивности, определим функции `symm` и `trans`, обеспечивающие эти свойства.

```
symm :: TE a b -> TE b a
symm f (Left x) = case f (Right x) of
    (y, z) -> (z, y)
symm f (Right x) = case f (Left x) of
    (y, z) -> (z, y)

trans :: TE a b -> TE b c -> TE a c
trans f g (Left x) =
    (x, snd (g (Left (snd (f (Left x))))))
trans f g (Right x) =
    (fst (f (Right (fst (g (Right x))))), x)
```

Следует заметить, что в определении функции `from` используется только второй (`snd`) элемент результирующей пары, а в определении функции `to` - только правый (`fst`). Принимая в расчет это замечание, попытаемся использовать для определения нового варианта типа данных `TE a b` отношение  $(A \mid B) \Rightarrow (A \mid B)$ , являющееся тавтологией. Соответствующий тип данных на языке Haskell будет иметь вид

```
type TE a b = Either a b -> Either a b
```

Функции `refl`, `symm`, `trans`, `from` и `to` в соответствии со сделанным замечанием могут быть реализованы следующим образом:

```
refl :: TE a a
refl (Left x) = Right x
refl (Right x) = Left x

symm :: TE a b -> TE b a
symm f (Left x) = case f (Right x) of
```

```

      Left y -> Right y
symm f (Right x) = case f (Left x) of
      Right y -> Left y

trans :: TE a b -> TE b c -> TE a c
trans f g (Left x) = case f (Left x) of
      Right y -> case g (Left y) of
      Right z -> Right z

trans f g (Right x) = case g (Right x) of
      Left y -> case f (Right y) of
      Left z -> Left z

from :: TE a b -> a -> b
from f x = case f (Left x) of
      Right y -> y
      Left y -> undefined

to :: TE a b -> b -> a
to f x = case f (Right x) of
      Left y -> y
      Right y -> undefined

```

Поскольку определяющее отношение для  $TE\ a\ b$  является тавтологией, то в силу изоморфизма Карри — Ховарда существует функция  $f$  типа  $TE\ a\ b$ . Она определяется следующим образом:

```

f :: TE a b
f = id

```

Существование функции фантомного типа отличает полученный тип данных от типов, рассмотренных ранее. Отметим, что отношения, определяющие сигнатуры функций `from` и `to`, не являются тавтологиями. Вследствие этого обстоятельства функции `from` и `to` могут принимать значения `undefined`, однако это не ограничивает область их применения при решении задач, рассмотренных в работе [2].

Отметим, что в соответствии с [1, 2] определение функции  $f$  вида  $f\ (C\ p_1\ \dots\ p_n) = e$  при добавлении к конструктору данных  $C$  параметра  $p$  типа  $TE\ a\ b$ , контролирующего эквивалентность типов  $a$  и  $b$ , заменяется на  $f\ (C\ p\ p_1\ \dots\ p_n) = from\ p\ e$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Орел А. А. Фантомные типы данных на основе отношения предпорядка // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 56–59.

2. *Hinze R.* Fun with phantom types. Cornerstones in Computing/ eds. J. Gibbons, O. de Moor. Palgrave Macmillan. The Fun of Programming. 2003. P. 245–262.

3. *Baars A.I., Swierstra S.* Typing dynamic typing// Proc of the Seventh ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP '02), October 4–6, 2002. ACM Press /Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 2002. SIGPLAN Notices 37(9).

УДК 519.25+519.853

**П. Ю. Пасеков**

## **ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАРКОВИЦА К ПОРТФЕЛЮ МЕХАНИЧЕСКИХ ТОРГОВЫХ СИСТЕМ**

Эффективные методы формирования портфеля, состоящего из ценных бумаг, чрезвычайно важны как для институциональных, так и для частных инвесторов. В настоящей статье рассматривается модель, построенная на объединении понятий портфельного инвестирования, теории Г. Марковица и механических торговых систем.

В 1952 г. Гарри Марковиц опубликовал фундаментальную работу [1], которая считается основой современной теории портфельного инвестирования. По теории Марковица для формирования набора эффективных портфелей необходимо определить ожидаемую доходность, дисперсию для каждого финансового актива и ковариацию между активами. Эффективный портфель – портфель, обеспечивающий самый низкий риск при заданной ожидаемой доходности. Рассмотрим постановку задачи Г. Марковица:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \theta_i \theta_j Cov_{i,j} \rightarrow min \\ \sum_{i=1}^{\infty} E(r_i) \theta_i = E(r) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i = 1, \end{array} \right.$$

где  $\theta_i$  – доля  $i$ -го актива в портфеле,  $Cov_{i,j}$  – ковариация  $i$ -го и  $j$ -го активов,  $E(r)$  – ожидаемая доходность портфеля,  $E(r_i)$  – ожидаемая доходность  $i$ -го актива.

Г. Марковиц ввел понятие «эффективная граница», на которой располагаются все эффективные портфели. Чтобы определить данную границу, необходимо рассчитать соответствующие удельные веса входящих

в портфель активов, при которых минимизируется значение дисперсии для каждого данного уровня доходности [2].

В настоящей статье в качестве финансового актива при формировании портфеля используется механическая торговая система (МТС). Значит, можно говорить о построении «портфеля механических торговых систем».

МТС – это комплексная система, включающая в себя набор строго определенных правил, в соответствии с которыми принимаются решения об открытии или закрытии позиции. Существует два основных класса МТС: трендовые и контртрендовые. Основная цель трендовой системы – это вход в позицию при определении начала тенденции и выход при первых признаках разворота текущей тенденции. Контртрендовая система выявляет локальные области перекупленности/перепроданности и совершает операции в ожидании разворота текущей тенденции.

Для исследования разработаны три механические торговые системы:

- МТС №1: пересечение двух экспоненциальных скользящих средних с периодами 9 и 22. Покупка ценной бумаги осуществляется, когда скользящая средняя с периодом 9 пересекает скользящую среднюю с периодом 22 снизу вверх. Продажа происходит при обратном пересечении;
- МТС №2: выход из области перекупленности/перепроданности индикатора Stochastic Oscillator с параметрами 4, 3. Покупка бумаги при выходе индикатора Stochastic Oscillator из области перепроданности, т.е. при пересечении уровня 20 снизу вверх, продажа при выходе из области перекупленности, т.е. пересечении уровня 80 сверху вниз;
- МТС №3: пробой 10-дневного максимума/минимума. Покупка при пробое ценой 10-дневного максимума, продажа при пробое 10-дневного минимума;

Тестирование производилось на обыкновенных акциях ОАО «Сбербанк России», торгующихся на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ) [3], в период с 2008 года по 2010 год включительно, дневной таймфрейм.

Результаты расчета ожидаемой доходности (E) и дисперсии (V) (месячные данные) каждой из систем, а также отдельно акций Сбербанка России и индекса ММВБ как показателя общей рыночной динамики приведены в табл. 1.

Таблица 1

Рез. расчета	МТС №1	МТС №2	МТС №3	Сбербанк	ММВБ
Е	0.05652	0.01099	0.02575	0.01803	0.00360
V	0.02506	0.01959	0.02525	0.03839	0.01303

Исходя из полученных данных, можно построить матрицу, элементами которой будут коэффициенты корреляции различных активов (табл. 2).

Таблица 2

Активы	МТС №1	МТС №2	МТС №3	Сбербанк	ММВБ
МТС №1	1				
МТС №2	0.251	1			
МТС №3	0.884	0.039	1		
Сбербанк	0.798	0.537	0.647	1	
ММВБ	0.620	0.443	0.478	0.826	1

Как и следовало ожидать, трендовые системы (МТС №1 и МТС №3) имеют довольно высокий коэффициент корреляции, а контртрендовая МТС №2 имеет низкий коэффициент с обеими системами, МТС №1 и МТС №3.

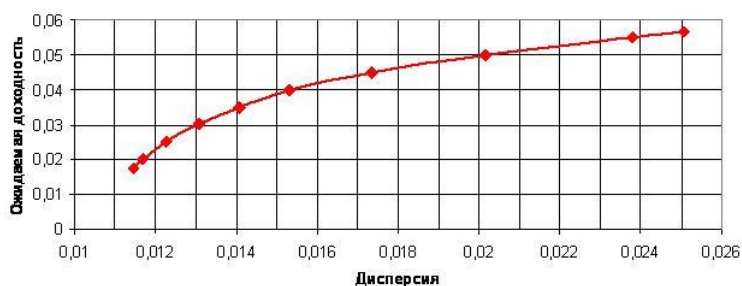
Следующая табл. 3 содержит показатели портфелей, состоящих из механических торговых систем с разными долями.

Таблица 3

	Доля МТС №1	Доля МТС №2	Доля МТС №3	Е	V
1	0.857	0.143	0	0.05001	0.02017
2	0.395	0.463	0.142	0.03107	0.01326
3	0	0.566	0.344	0.01740	0.01146

Табл. 3 демонстрирует, что построение эффективного портфеля механических торговых систем значительно снижает риски инвестирования, оставляя потенциальную доходность на максимальных уровнях.

Любой портфель, находящийся на эффективной границе Марковица (рисунок), будет хорошим выбором для инвестора. Портфели выше и левее данной границы нельзя построить, все портфели, находящиеся ниже и правее границы, являются неэффективными. Но выбор оптимального портфеля остается за самим инвестором и зависит от его степени неприятия риска.



Работа показала, что существует возможность повышения результатов инвестирования путем объединения различных методик из разных областей знаний в одну комплексную систему. Использование описанной модели позволяет существенно повысить диверсификацию инвестиционного портфеля, включающего инструменты российского рынка ценных бумаг, значительно расширяя набор возможных портфелей.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Markowitz H. M.* Portfolio selection // *Journal of Finance*. 1952. Vol. 7, №1. P. 77–91.
2. *Буренин А. Н.* Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов : учеб пособие. М. : 1 Федеральная книготорговая компания, 1998. С. 239–259.
3. URL : <http://www.micex.ru> (официальный сайт ММВБ) (дата обращения: 15.03.2011).

УДК 511

**В. Н. Поляков**

### О НЕКОТОРЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЯХ

В данной статье дополняются и обобщаются результаты Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, касающиеся уравнений

$$ax^2 - my^2 = z^n \quad (1)$$

при  $n \geq 3$ .

Немного истории. Уравнение  $ax^2 - my^2 = z^3$  (2) впервые рассмотрел Л. Эйлер, предложив следующий комплект формул для компонент  $x$ ,  $y$  и  $z$  решений этого уравнения:

$$x = au^3 + 3tuv^2, \quad y = 3au^2v + tv^3, \quad z = au^2 - tv^2 \quad (3)$$

( $u$  и  $v$  – произвольные числа).



Однако уже сам Л. Эйлер заметил, что его формулы не могут дать полного решения уравнения (2).

Далее на рассматриваемые здесь уравнения обратил внимание Ж. Лагранж. Он видоизменил вывод формул Л. Эйлера для уравнения (2) и предложил метод своеобразного перехода от уравнения (1) с одним значением  $n$  к другому, при котором решение уравнения с  $n = k$  используется для решения уравнения с  $n = k + 1$  и т. д. При этом оказывается, что метод Ж. Лагранжа дает только один комплект формул для  $x$ ,  $y$  и  $z$  и кроме этого у него всегда действует предположение, что  $a = 1$ . Мы этим предположением пользуемся только для четных значений  $n$ , а уравнения рассматриваем независимо друг от друга.

**Теорема 1.** *Для уравнения (2), кроме формул Л. Эйлера, справедливы и следующие формулы для компонент его решений:*

$$\begin{cases} x = au^3 - tuv^2 \\ y = 3au^2v - tv^3 \\ z = au^2 - tv^2 \end{cases} . \quad (4)$$

**Теорема 2.** *Для отыскания решений уравнения  $x^2 - ty^2 = z^4$  пригодны следующие три комплекта формул:*

$$\begin{cases} x = u^4 + 6tu^2v^2 + t^2v^4 \\ y = 4u^3v + 4tuv^3 \\ z = u^2 - tv^2 \end{cases} ; \quad (5)$$

$$\begin{cases} x = u^4 - t^2v^4 \\ y = 2u^3v - 2tuv^3 \\ z = u^2 - tv^2 \end{cases} ; \quad (6)$$

$$\begin{cases} x = u^4 - 2tu^2v^2 + t^2v^4 \\ y = 0 \\ z = u^2 - tv^2 \end{cases} . \quad (7)$$

**Теорема 3.** *Решения уравнения  $ax^2 - ty^2 = z^5$  можно вычислять по любому из трех комплектов формул для компонент:*

$$\begin{cases} x = a^2u^5 + 10atu^3v^2 + 5t^2uv^4 \\ y = 5a^2u^4v + 10atu^2v^3 + t^2v^5 \\ z = au^2 - tv^2 \end{cases} ; \quad (8)$$

$$\begin{cases} x = a^2u^5 + 2amu^3v^2 - 3m^2uv^4 \\ y = 3a^2u^4v - 2amu^2v^3 - m^2v^5 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} ; \quad (9)$$

$$\begin{cases} x = a^2u^5 - 2amu^3v^2 + m^2uv^4 \\ y = a^2u^4v - 2amu^2v^3 + m^2v^5 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} . \quad (10)$$

**Теорема 4.** Решения уравнения  $x^2 - ty^2 = z^6$  определяются по любому из четырех комплектов формул для его компонент:

$$\begin{cases} x = u^6 + 15tu^4v^2 + 15m^2u^2v^4 + m^3v^6 \\ y = 6u^5v + 20tu^3v^3 + 6m^2uv^5 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} ; \quad (11)$$

$$\begin{cases} x = u^6 + 5tu^4v^2 - 5m^2u^2v^4 - m^3v^6 \\ y = 4u^5v - 4m^2uv^5 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} ; \quad (12)$$

$$\begin{cases} x = u^6 - tu^4v^2 - m^2u^2v^4 + m^3v^6 \\ y = 2u^5v - 4tu^3v^3 + 2m^2uv^5 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} ; \quad (13)$$

$$\begin{cases} x = u^6 - 3tu^4v^2 + 3m^2u^2v^4 - m^3v^6 \\ y = 0 \\ z = u^2 - mv^2 \end{cases} . \quad (14)$$

**Теорема 5.** Решения уравнения  $ax^2 - ty^2 = z^7$  можно вычислять по формулам любого из четырех комплектов:

$$\begin{cases} x = a^3u^7 + 21a^2tu^5v^2 + 35am^2u^3v^4 + 7m^3uv^6 \\ y = 7a^3u^6v + 35a^2tu^4v^3 + 21am^2u^2v^5 + m^3v^7 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} ; \quad (15)$$

$$\begin{cases} x = a^3u^7 + 9a^2tu^5v^2 - 5am^2u^3v^4 - 5m^3uv^6 \\ y = 5a^3u^6v + 5a^2tu^4v^3 - 9am^2u^2v^5 - m^3v^7 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} ; \quad (16)$$

$$\begin{cases} x = a^3u^7 + a^2mu^5v^2 - 5am^2u^3v^4 + 3m^3uv^6 \\ y = 3a^3u^6v - 5a^2mu^4v^3 + am^2u^2v^5 + m^3v^7 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} ; \quad (17)$$

$$\begin{cases} x = a^3u^7 - 3a^2mu^5v^2 + 3am^2u^3v^4 - m^3uv^6 \\ y = 7a^3u^6v - 3a^2mu^4v^3 + 3am^2u^2v^5 - m^3v^7 \\ z = au^2 - mv^2 \end{cases} . \quad (18)$$

**Доказательство.** Заметим, что и ранее вывод формул 1-го комплекта проводится в духе рассуждений Л. Эйлера, относящихся к уравнению (2).

Пусть  $A = \sqrt{a}$ ,  $M = \sqrt{m}$  и пусть  $n = 7$ . Положим

$$Ax + My = (Au + Mv)^7, \quad Ax - My = (Au - Mv)^7.$$

Решив эту систему уравнений относительно  $x$  и  $y$ , получим для них формулы (15), формулу для  $z$  найдем, подставив найденные значения  $x$  и  $y$  в уравнение. Для вывода формул (16) полагаем

$$Ax + My = (Au + Mv)^6 \cdot (Au - Mv), \quad Ax - My = (Au - Mv)^6 \cdot (Au + Mv)$$

и действуем аналогично предыдущему случаю и т. д.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Эйлер Л. Алгебра. СПб., 1768.
2. Диксон Л. Введение в теорию чисел. Тбилиси, 1941.

УДК 519. 83

**В. В. Розен**

### НАХОЖДЕНИЕ КРАЙНИХ СБАЛАНСИРОВАННЫХ ПОДМАТРИЦ ЗАДАННОЙ МАТРИЦЫ

В работе [1] показано, что для игры двух игроков с упорядоченными исходами задача нахождения ситуаций равновесия в ее смешанном расширении сводится к нахождению сбалансированных подматриц матрицы ее функции реализации. Здесь мы рассматриваем задачу нахождения сбалансированных подматриц для произвольной матрицы (все предварительные понятия содержатся в работах [1, 2]). Описание множества всех

сбалансированных подматриц заданной матрицы, а также соответствующих им балансовых векторов может быть сведено в силу теоремы Крейна — Мильмана к нахождению крайних сбалансированных подматриц. Введем необходимые определения.

Пусть задана матрица  $\|F(i, j)\|_{(i \in I, j \in J)}$  формата  $m \times n$  над множеством  $A$ . Будем обозначать через  $S_k$  стандартный симплекс  $k$ -компонентных вероятностных векторов. С каждой парой  $(x, y) \in S_m \times S_n$  ассоциируется вероятностная мера  $\tilde{F}_{(x,y)}$  на множестве  $A$ , определенная равенством

$$\tilde{F}_{(x,y)}(a) = \sum_{F(i,j)=a} x_i \cdot y_j, \quad \text{где } x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Как обычно, мы отождествляем индекс  $i \in I$  с вероятностным вектором вида  $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Зафиксируем пару подмножеств  $I_0 \subseteq I$ ,  $J_0 \subseteq J$ . Определим подмножества  $B_{J_0}^1 \subseteq S_m$ ,  $B_{I_0}^2 \subseteq S_n$  равенствами

$$B_{J_0}^1 = \left\{ x \in S_m : (\forall j_1, j_2 \in J_0) \tilde{F}_{(x, j_1)} = \tilde{F}_{(x, j_2)} \right\},$$

$$B_{I_0}^2 = \left\{ y \in S_n : (\forall i_1, i_2 \in I_0) \tilde{F}_{(i_1, y)} = \tilde{F}_{(i_2, y)} \right\}.$$

Нетрудно проверить, что  $B_{J_0}^1$  и  $B_{I_0}^2$  являются выпуклыми многогранниками, следовательно,  $B_{J_0}^1 \times B_{I_0}^2$  также является выпуклым многогранником в  $S_m \times S_n$ .

**Определение.** Подматрица  $F(I_0 \times J_0) = \|F(i, j)\|_{(i \in I_0, j \in J_0)}$  называется *крайней сбалансированной подматрицей*, если она сбалансирована и для нее существует такая пара балансовых векторов, которая является крайней точкой в выпуклом многограннике  $B_{J_0}^1 \times B_{I_0}^2$ .

Для произвольного выпуклого многогранника  $P$  мы обозначаем через  $Ext P$  множество его крайних точек.

**Лемма.** Вектор  $x^0 \in B_{J_0}^1$  является крайней точкой в  $B_{J_0}^1$  тогда и только тогда, когда он минимален по спектру, т.е. для любого  $x \in B_{J_0}^1$  выполнено условие

$$Spr x \subseteq Spr x^0 \implies x = x^0 \tag{1}$$

(мы обозначаем через  $Spr x$  спектр вектора  $x : Spr x = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ ).

**Доказательство.** Пусть  $x^0$  — крайняя точка в  $B_{J_0}^1$ . Рассмотрим вектор  $x \in B_{J_0}^1$ , удовлетворяющий условию  $Spr x \subseteq Spr x^0$ . Предположим, что  $x \neq x^0$ . Так как

$$\sum_{i \in Spr x} x_i = \sum_{i \in Spr x^0} x_i^0 = 1,$$

то среди ненулевых компонент вектора  $x$  существует такая  $x_{i'}$ , что  $0 < x_{i'}^0 < x_{i'}$ , следовательно,

$$0 < \varepsilon = \min_{i \in Sp x} \frac{x_i^0}{x_i} < 1. \quad (2)$$

Из (2) следует, что  $|\varepsilon x_i| \leq x_i^0$  для всех  $i \in Sp x$ , поэтому  $x_i^0 \pm \varepsilon x_i \geq 0$  ( $i \in I$ ), т.е. все компоненты обоих векторов  $x^0 \pm \varepsilon x$  неотрицательны. Положим

$$x^1 = \frac{x^0 + \varepsilon x}{1 + \varepsilon}, \quad x^2 = \frac{x^0 - \varepsilon x}{1 - \varepsilon}.$$

Проверим, что  $x^1, x^2 \in B_{J_0}^1$ . Имеем

$$\sum_{i \in I} x_i^1 = \sum_{i \in I} \frac{x_i^0 + \varepsilon x_i}{1 + \varepsilon} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \sum_{i \in I} x_i^0 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \sum_{i \in I} x_i = \frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1;$$

$$\sum_{i \in I} x_i^2 = \sum_{i \in I} \frac{x_i^0 - \varepsilon x_i}{1 - \varepsilon} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \sum_{i \in I} x_i^0 - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sum_{i \in I} x_i = \frac{1}{1 - \varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1.$$

Ввиду  $x^0, x \in B_{J_0}^1$  и используя линейность функции  $\tilde{F}_{(x,y)}$ , получаем при любых  $j_1, j_2 \in J_0$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{(x^1, j_1)} &= \tilde{F}_{\left(\frac{x^0 + \varepsilon x}{1 + \varepsilon}, j_1\right)} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \tilde{F}_{(x^0, j_1)} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \tilde{F}_{(x, j_1)} = \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon} \tilde{F}_{(x^0, j_2)} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \tilde{F}_{(x, j_2)} = \tilde{F}_{\left(\frac{1}{1 + \varepsilon} x^0 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} x, j_2\right)} = \tilde{F}_{(x^1, j_2)}. \end{aligned}$$

Мы показали равенство  $\tilde{F}_{(x^1, j_1)} = \tilde{F}_{(x^1, j_2)}$ ; равенство  $\tilde{F}_{(x^2, j_1)} = \tilde{F}_{(x^2, j_2)}$  устанавливается аналогично. Итак,  $x^1, x^2 \in B_{J_0}^1$ . Так как  $\frac{1 + \varepsilon}{2} x^1 + \frac{1 - \varepsilon}{2} x^2 = x^0$  и  $\frac{1 + \varepsilon}{2} + \frac{1 - \varepsilon}{2} = 1$ , то из определения крайней точки следует, что  $x^1 = x^2$ . Тогда мы получаем

$$x^0 = \frac{1 + \varepsilon}{2} x^1 + \frac{1 - \varepsilon}{2} x^2 = \frac{1 + \varepsilon}{2} x^1 + \frac{1 - \varepsilon}{2} x^1 = x^1,$$

откуда  $\frac{x^0 + \varepsilon x}{1 + \varepsilon} = x^0$  и  $x = x^0$ . Последнее равенство находится в противоречии с нашим предположением, что и завершает доказательство необходимости.

Проверим достаточность. Предположим, что для вектора  $x^0$  выполнено условие (1). Пусть  $x^1 \in B_{J_0}^1$  и  $x^2 \in B_{J_0}^1$  — два вектора такие что  $x^0 = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$ , где  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Тогда  $Sp x^1 \subseteq Sp x^0$ ,

$Spr x^2 \subseteq Spr x^0$ , и в соответствии с (1) мы получаем  $x^1 = x^0$  и  $x^2 = x^0$ , поэтому  $x^1 = x^2$ . Итак,  $x^0$  является крайней точкой в  $B_{J_0}^1$ , что заканчивает доказательство леммы.

Используя лемму и теорему 2 из [2], имеем

**Следствие.** Пусть  $M$  – крайняя сбалансированная подматрица матрицы  $\|F(i, j)\|_{(i \in I, j \in J)}$ . Тогда

1. Подматрица  $M$  имеет единственный строчный балансовый вектор;

2. Подматрица  $M$  имеет единственный столбцовый балансовый вектор;

3. Подматрица  $M$  является квадратной;

4.  $\text{Det } \chi(M^a) \neq 0$  для любого  $a \in pr_2 M$ , где  $\chi(M^a)$  есть матрица с элементами  $m_{ij}$ , построенная по правилу:

$$\begin{cases} m_{ij} = 1, & \text{если } F(i, j) = a, \\ m_{ij} = 0, & \text{если } F(i, j) \neq a. \end{cases}$$

**Доказательство.** Пусть  $(x^0, y^0)$  – балансовая пара векторов для подматрицы  $M = F(I_0 \times J_0)$  при условии  $x^0 \in Ext B_{J_0}^1$  и  $y^0 \in Ext B_{I_0}^2$ . Рассмотрим строчный балансовый вектор  $x$  для  $F(I_0 \times J_0)$ :  $x \in B_{J_0}^1$ ,  $Spr x = I_0$ . Так как  $Spr x = Spr x^0$ , то из леммы следует, что  $x = x^0$ . Таким образом, утверждение 1) проверено. Двойственно устанавливается утверждение 2). Утверждения 3) и 4) следуют из теоремы 2 работы [2].

Основной результат данной статьи составляет следующая

**Теорема.** Пусть  $\|F(i, j)\|_{(i \in I, j \in J)}$  – произвольная матрица над множеством  $A$ ,  $I_0 \subseteq I, J_0 \subseteq J$  и  $M = F(I_0 \times J_0)$  ее подматрица. Подматрица  $M$  является крайней сбалансированной подматрицей тогда и только тогда, когда для любых  $a, a_1, a_2 \in pr_2 M$  выполнены следующие условия:

1) подматрица  $M$  является квадратной;

2)  $\text{Det } \chi(M^a) \neq 0$ ;

3) все компоненты вектора  $\lambda^a = (1, \dots, 1) [\chi(M^a)]^{-1}$  положительны;

4) векторы  $\lambda^{a_1}$  и  $\lambda^{a_2}$  коллинеарны;

5) все компоненты вектора  $\delta^a = [\chi(M^a)]^{-1} (1, \dots, 1)^T$  положительны;

6) векторы  $\delta^{a_1}$  и  $\delta^{a_2}$  коллинеарны.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В. В., Панкратова Ю. Н. Ситуации равновесия и сбалансированные по-

крытия в играх с упорядоченными исходами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 105–108.

2. Розен В. В. Условия единственности балансовой пары векторов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 105–108.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

## РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим в пространстве  $L_2[0, 1]$  квадратичный пучок обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y, \lambda) := y'' + p_1 \lambda y' + p_2 \lambda^2 y \quad (1)$$

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y, \lambda) = U_{\nu 0}(y, \lambda) + U_{\nu 1}(y, \lambda) := \\ := (\alpha_{\nu 1} y'(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y'(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2, \quad (2)$$

где  $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$ .

Пусть  $\omega_1, \omega_2$  — корни характеристического уравнения  $\omega^2 + p_1 \omega + p_2 = 0$  и пусть выполняется основное предположение: *корни  $\omega_1, \omega_2$  отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат*. Не нарушая общности, можно считать, что  $0 < \omega_1 < \omega_2$ .

Обозначим далее  $y_1(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_1 x)$ ,  $y_2(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_2 x)$ . Очевидно, функции  $y_1, y_2$  образуют фундаментальную систему решений уравнения  $\ell(x, \lambda) = 0$ . Для определенности далее считаем  $\alpha_{\nu 1} \neq 0$ ,  $\beta_{\nu 1} \neq 0$ . В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Обозначим  $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j, \lambda)/\lambda = \alpha_{\nu 1} \omega_j + \alpha_{\nu 2}$ ,  $w_{\nu j} = \exp(-\lambda \omega_j) U_{\nu 1}(y_j, \lambda)/\lambda = \beta_{\nu 1} \omega_j + \beta_{\nu 2}$ ,  $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$ ,  $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ ,  $\nu, j = 1, 2$ . Пусть  $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$ ,  $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$ ,  $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$ ,  $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$ .

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det(U_\nu(y_j, \lambda))_{\nu, j=1}^2 = \lambda^2 (a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda \omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda \omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)} a_{12}).$$

Если  $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$  и  $a_{12} \neq 0$ , то пучок (1), (2) является регулярным по Биркгофу [1, с. 66–67] и его функция Грина имеет оценку  $O(\frac{1}{\lambda})$  вне кружков

фиксированного радиуса около собственных значений. Если же  $a_{1\bar{2}} = 0$  или  $a_{12} = 0$ , то пучок (1),(2) будет сильно нерегулярным. Его функция Грина имеет экспоненциальный рост в углах раствора больше или равного  $\pi$ .

Рассмотрим задачу нахождения условий на параметры пучка (1)–(2) и на вектор-функцию  $f = (f_0, f_1)^T \in L_1[0, 1]$ , при которых имеет место двукратная разложимость вектор-функции  $f$  в биортогональный ряд Фурье по производным цепочкам пучка (1),(2) (см. [1, с. 102]).

Эта задача интересна только для для сильно нерегулярного пучка (1),(2), так как в регулярном случае ввиду хорошей оценки функции Грина задача о разложении достаточно просто решается (см. [1, с. 124–129]).

В сильно нерегулярном случае обыкновенного дифференциального оператора 3-го порядка, когда корни  $\{\omega_j\}$  лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в работе [2]. При этом на разлагаемую функцию накладывались очень сильные условия (и это по существу): аналитичность и удовлетворение некоторым функциональным соотношениям.

Рассмотрим далее конкретный пучок вида (1),(2), порожденный дифференциальным выражением

$$y'' - 3\lambda y' + 2\lambda^2 y \quad (3)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} 3\lambda y(0) + y'(1) + \lambda y(1) = 0, \\ y'(0) - 2\lambda y(0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Будем обозначать этот пучок  $L(\lambda)$ . Здесь  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$  и характеристический определитель имеет вид

$$\Delta(\lambda) = 3\lambda^2(1 + e^{2\lambda}).$$

То есть пучок  $L(\lambda)$  является сильно нерегулярным.

Ненулевые собственные значения пучка являются нулями  $\Delta(\lambda)$  и равны  $\lambda_n = \frac{\pi}{2}i + \pi ni$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . То есть собственные значения простые. Пусть  $y_n$  есть собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda_n$ . Тогда производная цепочка, соответствующая функции  $y_n$  имеет вид  $(y_n, \lambda_n y_n)^T$ .

Рассмотрим задачу на собственные значения  $L(\lambda) = 0$  или подробно

$$y'' - 3\lambda y' + 2\lambda^2 y = 0, \quad (5)$$



$$\begin{cases} 3\lambda y(0) + y'(1) + \lambda y(1) = 0, \\ y'(0) - 2\lambda y(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Линеаризуем задачу (5),(6) следующим образом. Положим  $v_0 = y$ ,  $v_1 = \lambda v_0$ . Тогда получим следующую задачу на собственные значения уже для линейного оператора  $\hat{L}$ , но в пространстве вектор-функций:

$$\begin{cases} v_1 = \lambda v_0, \\ -\frac{1}{2}v_0'' + \frac{3}{2}v_1' = \lambda v_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3v_1(0) + v_0'(1) + v_1(1) = 0, \\ v_0'(0) - 2v_1(0) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что собственные значения пучка  $L(\lambda)$  и оператора  $\hat{L}$  совпадают, а система производных цепочек пучка  $L(\lambda)$  совпадает с системой собственных вектор-функций оператора  $\hat{L}$ .

Для формулировки основной теоремы потребуются компоненты резольвенты оператора  $\hat{L}$ . Введем соответствующие обозначения. Пусть

$$(\hat{L} - \lambda E)^{-1} f = (v_0(x, \lambda; f), v_1(x, \lambda; f))^T,$$

где  $f = (f_0, f_1)^T$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Если  $f_0'', f_1' \in L_1[0, 1]$  и*

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0,$$

то

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\nu} v_0(x, \lambda; f) d\lambda = f_0(x) + \\ & + (f_0(x) - \frac{2}{3}f_0(2x-1) - 2F_1(x) + \frac{4}{3}F_1(2x-1)) + o(1) \text{ при } \nu \rightarrow \infty, \\ & -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\nu} v_1(x, \lambda; f) d\lambda = f_1(x) + \\ & + (-2f_1(x) + \frac{4}{3}f_1(2x-1) + f_0'(x) - \frac{2}{3}f_0'(2x-1)) + o(1) \text{ при } \nu \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где  $F_1(x) = \int_0^x f_1(t) dt$ , а  $\Gamma_\nu$  - круговой контур с центром в начале координат и радиуса  $\pi\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .

**Следствие 1.** *Если функции  $f_0$  и  $f_1$  таковы, что выполняются условия теоремы и*

$$2f_1(x) \equiv f_0'(x),$$

то имеют место соотношения

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\nu} v_0(x, \lambda; f) d\lambda = f_0(x) + o(1) \text{ при } \nu \rightarrow \infty,$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\nu} v_1(x, \lambda; f) d\lambda = f_1(x) + o(1) \text{ при } \nu \rightarrow \infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.
2. Хромов А. П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. : сб. науч. тр. Уфа, 1988. С. 182–193.

УДК 519.83

Т. Ф. Савина

### О ПОЛНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ГОМОМОРФИЗМОВ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Для игр с отношениями предпочтения вида  $G = \langle (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle$  как для алгебраических систем [1] естественным образом введено понятие гомоморфизма [2]. Вопрос о сохранении оптимальных решений при переходе от одной игры с отношениями предпочтения к другой с помощью гомоморфизма был рассмотрен в работе [3] на базе условий ковариантности и контравариантности гомоморфизмов. В настоящей статье дано точное описание множества оптимальных решений [4] игры на основе полноты семейства гомоморфизмов.

Оптимальными решениями в игре являются ситуации равновесия и допустимые (вполне допустимые) исходы. Введем соответствующие определения.

**Определение 1.** Ситуация  $x^0 = (x_i^0)_{i \in N} \in X$  в игре  $G$  называется

- ситуацией общего равновесия, если для каждого  $i \in N$  и любых  $x_i \in X_i$  выполнено условие  $F(x^0 \parallel x_i) \stackrel{\rho_i}{\not\geq} F(x^0)$ ;

- ситуацией равновесия по Нэшу, если выполняется  $F(x^0 \parallel x_i) \stackrel{\rho_i}{\lesssim} F(x^0)$ .

**Определение 2.** Исход  $a$  называется

- *допустимым* в игре  $G$ , если для каждого игрока  $i \in N$  выполнено  $\neg(\exists x_i \in X_i) (\forall x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}) F(x_i, x_{N \setminus i}) \stackrel{\rho_i}{>} a$ ,
- *вполне допустимым* в игре  $G$ , если для каждого игрока  $i \in N$  выполнено  $(\exists x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}) (\forall x_i \in X_i) F(x_i, x_{N \setminus i}) \stackrel{\rho_i}{\not>} a$ .

Пусть  $\mathbf{K}$  и  $\mathcal{K}$  – два класса игр с отношениями предпочтения множества игроков  $N = \{1, \dots, n\}$ . Зафиксируем в этих классах некоторые принципы оптимальности; будем обозначать через  $Opt G$  множество оптимальных решений игры  $G = \langle (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle \in \mathbf{K}$ , через  $Opt \Gamma$  – множество оптимальных решений игры  $\Gamma = \langle (Y_i)_{i \in N}, B, (\sigma_i)_{i \in N}, \Phi \rangle \in \mathcal{K}$ .

**Определение 3.** Набор отображений  $\mathbf{f} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi)$ , где  $\varphi_i: X_i \rightarrow Y_i$  ( $i \in N$ ) и  $\psi: A \rightarrow B$  называется *гомоморфизмом* игры  $G$  в игру  $\Gamma$ , если для любого индекса  $i \in N$ , любых элементов  $a_1, a_2 \in A$  и любой ситуации  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  выполняются следующие два условия:

$$Hom1: \quad \psi(F(x_1, \dots, x_n)) = \Phi(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)),$$

$$Hom2: \quad a_1 \stackrel{\rho_i}{\lesssim} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \stackrel{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2).$$

Гомоморфизм  $\mathbf{f}$  игры  $G$  в игру  $\Gamma$  называется *строгим*, если для каждого  $i \in N$  дополнительно выполняется условие

$$Str: \quad a_1 \stackrel{\rho_i}{<} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \stackrel{\sigma_i}{<} \psi(a_2).$$

**Определение 4.** Зафиксируем некоторый класс  $H$  гомоморфизмов из игр класса  $\mathbf{K}$  в игры класса  $\mathcal{K}$ . Гомоморфизмы класса  $H$  называются *ковариантными относительно классов*  $(\mathbf{K}, \mathcal{K})$ , если для любых двух игр  $G \in \mathbf{K}$  и  $\Gamma \in \mathcal{K}$  и любого гомоморфизма  $\mathbf{f} \in H$   $\mathbf{f}$  – образ оптимального решения игры  $G$  есть оптимальное решение в игре  $\Gamma$ , и *контравариантными относительно классов*  $(\mathbf{K}, \mathcal{K})$ , если для любых двух игр  $G \in \mathbf{K}$  и  $\Gamma \in \mathcal{K}$  и любого гомоморфизма  $\mathbf{f} \in H$   $\mathbf{f}$  – прообраз оптимального решения игры  $\Gamma$  есть оптимальное решение в игре  $G$ .

**Определение 5.** Семейство гомоморфизмов  $(\mathbf{f}_j)_{j \in J}$  называется *ковариантно полным*, если для каждого оптимального решения  $p \in Opt G$  существует такой индекс  $j \in J$ , что  $\mathbf{f}_j(p) \in Opt \Gamma_j$ .

Семейство гомоморфизмов  $(\mathbf{f}_j)_{j \in J}$  называется *контравариантно полным*, если условие « $\mathbf{f}_j(p) \in Opt \Gamma_j$  для всех  $j \in J$ » влечет  $p \in Opt G$ .

## Лемма

1. Семейство гомоморфизмов  $(\mathbf{f}_j)_{j \in J}$  является ковариантно полным семейством контравариантных гомоморфизмов тогда и только тогда, когда выполнено равенство:  $Opt G = \bigcup_{j \in J} \mathbf{f}_j^{-1}(Opt \Gamma_j)$ .

2. Семейство гомоморфизмов  $(\mathbf{f}_j)_{j \in J}$  является контравариантно полным семейством ковариантных гомоморфизмов тогда и только тогда, когда выполнено равенство:  $Opt G = \bigcap_{j \in J} \mathbf{f}_j^{-1}(Opt \Gamma_j)$ .

Пусть  $K$  – класс игр с упорядоченными исходами,  $\mathcal{K}$  – класс игр с линейно упорядоченными исходами. В качестве оптимальных решений игры  $G \in K$  возьмем множество ее ситуаций равновесия, в качестве оптимальных решений игры  $\Gamma \in \mathcal{K}$  – множество ее ситуаций равновесия по Нэшу. Тогда справедлива следующая теорема.

### Теорема 1

1. Относительно указанных классов игр и их оптимальных решений все строгие гомоморфизмы являются контравариантными.

2. Для каждой игры  $G \in K$  семейство всех ее строгих гомоморфизмов в игры класса  $\mathcal{K}$  является ковариантно полным.

**Схема доказательства.** Зафиксируем две игры  $G \in K$ ,  $\Gamma \in \mathcal{K}$  и некоторый гомоморфизм  $\mathbf{f}$  из игры  $G$  в игру  $\Gamma$ .

Доказательство утверждения 1 проводится методом от противного. Предполагая, что ситуация  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  не будет ситуацией общего равновесия в игре  $G$ , получаем противоречие с тем, что ситуация  $\varphi(x^0) = (\varphi_1(x_1^0), \dots, \varphi_n(x_n^0))$  является ситуацией равновесия по Нэшу в игре  $\Gamma$ .

Доказательство утверждения 2 сводится к нахождению строгого гомоморфизма  $\mathbf{f}$  из игры  $G$  в некоторую игру  $\Gamma$  с линейно упорядоченными исходами такого, что для каждой ситуации общего равновесия  $x^0$  игры  $G$  ситуация  $\varphi(x^0)$  будет ситуацией равновесия по Нэшу в игре  $\Gamma$ . Существование искомого строгого гомоморфизма основано на лемме 2 [5]. Ситуация  $x^0$  будет ситуацией равновесия по Нэшу в игре  $\Gamma = \langle (X_i)_{i \in N}, A, (\bar{p}_i)_{i \in N}, F \rangle$  с линейно упорядоченными исходами. При этом набор тождественных отображений  $(\Delta_{X_1}, \dots, \Delta_{X_n}, \Delta_A)$  будет строгим гомоморфизмом из игры  $G$  в игру  $\Gamma$ .

Теорема 1 доказана.

Далее, для тех же классов игр рассмотрим следующие типы оптимальных решений. В качестве оптимальных решений игры  $G \in K$  возьмем множество ее ситуаций равновесия по Нэшу, в качестве оптимальных решений игры  $\Gamma \in \mathcal{K}$  – множество ее ситуаций равновесия по Нэшу. Тогда справедлива

## Теорема 2

1. Относительно указанных классов игр и их оптимальных решений все строгие гомоморфизмы являются ковариантными.

2. Для каждой игры  $G \in \mathbf{K}$  семейство всех ее строгих гомоморфизмов в игры класса  $\mathcal{K}$  является контравариантно полным.

**Схема доказательства.** Зафиксируем две игры  $G \in \mathbf{K}$ ,  $\Gamma \in \mathcal{K}$  и некоторый гомоморфизм  $f$  из игры  $G$  в игру  $\Gamma$ .

1. Применяя последовательно свойства гомоморфизма  $\text{Hom}2$ ,  $\text{Hom}1$  к ситуации равновесия по Нэшу  $x^0$  в игре  $G$ , получаем, что ситуация  $\varphi(x^0)$  является ситуацией равновесия по Нэшу в игре  $\Gamma$ .

2. Доказательство проводится методом от противного с применением леммы 2 [5]. Рассмотрим игру  $\langle (X_i)_{i \in N}, A, (\bar{\rho}_i)_{i \in N}, F \rangle = \bar{\Gamma}$ , в которой для игрока  $i_0$  отношение порядка есть  $\bar{\rho}_{i_0}$ , а для всех остальных игроков  $j \neq i_0$  отношение  $\bar{\rho}_j$  есть любое линейное доупорядочение порядка  $\rho_j$ . В игре  $\bar{\Gamma}$  с линейно упорядоченными исходами ситуация  $x^0$  не будет ситуацией равновесия по Нэшу, а система тождественных отображений  $\varphi_i = \Delta_{X_i}$  ( $i \in N$ );  $\psi = \Delta_A$  является строгим гомоморфизмом из игры  $G$  в игру  $\bar{\Gamma}$  с линейно упорядоченными исходами, что противоречит предположению о том, что ситуация  $\varphi(x^0)$  является ситуацией равновесия по Нэшу в игре с линейно упорядоченными исходами.

Теорема 2 доказана.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука. Физматлит, 1997. 368 с.
2. Савина Т. Ф. Гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Дискретная математика и ее приложения: материалы X Международного семинара: Москва, 1–6 февраля 2010 г.. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2010. С. 426–428.
3. Савина Т. Ф. Ковариантные и контравариантные гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 66–70.
4. Савина Т. Ф. Оптимальные решения в играх с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика. вып. 2. С. 32–36.
5. Розен В. В. Редуцируемость оптимальных решений игр с упорядоченными исходами // Теория полугрупп и ее приложения. Вопросы аксиоматизации. 1988. С. 50–60.

А. Ю. Трынин

**О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ  
РАВНОМЕРНОЙ И ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ  
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ  
ПО «ВЗВЕШЕННЫМ» МНОГОЧЛЕНАМ ЯКОБИ**

Пусть  $\alpha_n > -1, \beta_n > -1$ , тогда  $\{P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}\}_{n=0}^{\infty}$  – последовательность многочленов такая, что при каждом  $n \in \mathbf{N}$   $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$  есть классический ортогональный на отрезке  $[-1, 1]$  многочлен Якоби степени  $n$  [1, 2] для случая  $\alpha = \alpha_n, \beta = \beta_n$ . Сделаем стандартную замену переменной  $x = \cos \theta$ . Тогда дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют многочлены Якоби  $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ , с помощью преобразования Лиувилля [2, §1.8] приводятся к виду (смотрите, например [1, гл. VII., §3] или [2, §4.24, (4.24.2)])

$$u_n''(\theta) + \left\{ \frac{\frac{1}{4} - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{\frac{1}{4} - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} + \left( n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2} \right)^2 \right\} u_n(\theta) = 0. \quad (1)$$

Функции  $u_n(\theta)$  представляют собой решения задачи Коши с этим уравнением и начальными условиями

$$\begin{aligned} u_n\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}\left(\cos \frac{\pi}{2}\right), \\ u_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{d}{d\theta} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha_n + \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_n + \frac{1}{2}} P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(\cos \theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$  классический многочлен Якоби степени  $n$  с параметрами  $\alpha_n, \beta_n$  и стандартной нормировкой [2, гл. IV, §4.1, (4.1.1)]

$$P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(1) = \binom{n + \alpha_n}{n}. \quad (3)$$

Заметим, что требование  $\alpha_n > -1, \beta_n > -1$  обеспечивает суммируемость весовой функции классических ортогональных многочленов Якоби. В силу [2, теорема 4.23.2] при  $\alpha_n \leq -1$  или  $\beta_n \leq -1$  функции  $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$  являются многочленами только когда  $\alpha_n \in \mathbf{Z}, \beta_n \in \mathbf{Z}$ . Тем не менее аналитическое продолжение по  $\alpha$  и  $\beta$  на всю действительную ось решений уравнения (1) возможно. Вид функции  $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$  в этом случае описывается формулой [2, (4.21.2)]. Договоримся считать, что функция  $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$  при

$\alpha_n > -1, \beta_n > -1$  есть классический многочлен Якоби, а в случае, когда выполняется хотя бы одно из условий  $\alpha_n \leq -1$  или  $\beta_n \leq -1$   $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$ , есть гипергеометрический ряд [2, (4.21.2)]. В обоих случаях используем стандартную нормировку (3) и называем функции  $u_n(\theta)$  «взвешенными» многочленами Якоби.

Если не оговорено иное, считаем, что последовательности  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty, \{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_n \in \mathbf{R}, \quad \beta_n \in \mathbf{R}, \quad \alpha_n = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad \beta_n = o\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Пусть  $f \in C[a, b]$ , где  $[a, b] \subset (0, \pi)$ . Доопределим функцию  $f$  на отрезок  $[0, \pi]$  до непрерывной функции  $F$  следующим образом:

$$F(\theta) = \begin{cases} f(\theta) & \text{при } \theta \in [a, b], \\ 0 & \text{при } \theta \in [0, \pi] \setminus \left(\frac{3a}{4}, \frac{\pi+3b}{4}\right), \\ \text{линейная} & \text{при } \theta \in \left(\frac{3a}{4}, a\right) \text{ и } \left(b, \frac{\pi+3b}{4}\right). \end{cases} \quad (5)$$

В отличие от порядка многочлена  $P_n^{(\alpha_n, \beta_n)}$  номер наибольшего из нулей решений задачи Коши (1) и (2) согласно нормировке [3, (1.6)] будем обозначать  $\tilde{n} = \tilde{n}(\lambda)$ . Поэтому определение оператора [3, (1.8)], построенного по решениям задачи Коши, выглядит так

$$S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(f, \theta) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \frac{u_n(\theta)}{u_n'(\theta_{k, \lambda_n})(\theta - \theta_{k, \lambda_n})} F(\theta_{k, \lambda_n}) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} s_{k, \lambda_n}(\theta) F(\theta_{k, \lambda_n}). \quad (6)$$

Исключив из рассмотрения тривиальный случай  $f \equiv 0$ , возьмём фиксированную положительнозначную последовательность  $\{\vartheta_n\}_{n=1}^\infty$ , удовлетворяющую условиям

$$\vartheta_n = o(1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta_n}{\omega(F, \frac{1}{n})} = \infty; \text{ положим } \varepsilon_n = \exp\left\{-\frac{\vartheta_n}{\omega(F, \frac{1}{n})}\right\}. \quad (7)$$

Учитывая то, что в силу [3, предложение 5] и (1) на отрезке  $[\frac{a}{2}, \frac{\pi+b}{2}]$  функция  $u_n$  имеет конечное число нулей  $\theta_{k, n}$ . Перенумеруем их в порядке возрастания, а их количество обозначим  $\check{n} + 1 = \check{n}(n, \alpha_n, \beta_n, a, b) + 1$ . Для любого натурального  $n$  и  $\theta \in [a, b]$  обозначим через  $p, p_1, p_2, m_1$  и  $m_2$  такие целые числа, что имеют место соотношения

$$m_1 = \left[ \frac{k_1}{2} \right] + 1, \quad m_2 = \left[ \frac{k_2}{2} \right],$$

$$\theta_{p,n} \leq \theta < \theta_{p+1,n}, \quad (8)$$

$$\theta_{p_1,n} \leq a < \theta_{p_1+1,n}, \quad \theta_{p_2,n} \leq b < \theta_{p_2+1,n},$$

где номера  $k_1$  и  $k_2$  определяются из неравенств

$$\theta_{k_1-1,n} < \theta - \varepsilon_n \leq \theta_{k_1,n}, \quad \theta_{k_2,n} \leq \theta + \varepsilon_n < \theta_{k_2+1,n}.$$

Обозначим последовательности

$$\eta_n = \eta_n(a, \alpha_n, \beta_n)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{1-\alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{1-\beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2}\right)^2}}{2\pi u'_n\left(\frac{a}{2}\right)}, & \text{если } u_n\left(\frac{a}{2}\right) = 0, \\ \frac{\sqrt{\frac{1-\alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{1-\beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2}\right)^2}}{2\pi \sqrt{\frac{1-\alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{1-\beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left(n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u'_n\left(\frac{a}{2}\right)}{u_n\left(\frac{a}{2}\right)}\right)^2}}, & \text{если } u_n\left(\frac{a}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

и

$$\lambda_n = \lambda_n(a, b, \alpha_n, \beta_n)$$

$$= \left( \frac{\pi + (b - a)}{2\pi} \right)^2 \left\{ \frac{1 - \alpha_n^2}{4 \sin^2 \frac{a}{4}} + \frac{1 - \beta_n^2}{4 \cos^2 \frac{a}{4}} + \left( n + \frac{\alpha_n + \beta_n + 1}{2} \right)^2 \right\}. \quad (10)$$

После введённых обозначений сформулируем критерий сходимости в точке по «взвешенным» многочленам Якоби.

**Теорема 1.** Пусть последовательности  $\alpha_n, \beta_n$  удовлетворяют соотношениям (4),  $f \in C[a, b]$ ,  $[a, b] \subset (0, \pi)$ . Доопределим функцию  $f$  до  $F$  на отрезке  $[0, \pi]$ , как в (5). Возьмём фиксированные положительные последовательности  $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ , удовлетворяющие условиям (7). Числа  $m_1, m_2$  и  $p$  выберем, чтобы выполнялись соотношения (8). Тогда для операторов вида (6), где в качестве решений задачи Коши берутся «взвешенные» многочлены Якоби  $u_n(\theta)$ , равномерно по  $\theta$  на  $[a, b]$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) - F(\theta) - \right.$$



$$-\eta_n u_n(\theta) \cdot \sum_{m=m_1}^{m_2} \left| \frac{F(\theta_{2m+1, \lambda_n}) - 2F(\theta_{2m, \lambda_n}) + F(\theta_{2m-1, \lambda_n})}{p - 2m} \right| = 0, \quad (11)$$

где последовательность  $\eta_n = \eta_n(a, \alpha_n, \beta_n)$  определена (9), а штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если  $m_2 < m_1$  (смотрите (8)), то сумма в (11) равна нулю.

Справедлив также «глобальный» аналог теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть последовательности  $\alpha_n, \beta_n$  удовлетворяют соотношениям (4),  $f \in C[a, b]$ ,  $[a, b] \subset (0, \pi)$ . Доопределим функцию  $f$  до  $F$  на отрезке  $[0, \pi]$ , как в (5). Число  $p$  выберем, как в (8). Тогда для операторов вида (6), где в качестве решений задачи Коши берутся «взвешенные» многочлены Якоби  $u_n(\theta)$ , равномерно по  $\theta$  на  $[a, b]$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_{\lambda_n}^{(\alpha_n, \beta_n)}(F, \theta) - F(\theta) - \right. \\ \left. -\eta_n u_n(\theta) \cdot \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{F(\theta_{2m+1, \lambda_n}) - 2F(\theta_{2m, \lambda_n}) + F(\theta_{2m-1, \lambda_n})}{p - 2m} \right| = 0,$$

где последовательность  $\eta_n = \eta_n(a, \alpha_n, \beta_n)$  определена (9), а штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

Доказательство теоремы 1 следует из [3, теорема 1] при условии (10), а утверждение теоремы 2 вытекает из [3, теорема 1] и [3, (4.36)] при условии (10).

Из теорем 1 и 2 следуют необходимые и достаточные условия приближения значениями оператора (6) функции  $f \in C[a, b]$  в точке. Следующая теорема представляет собой критерий равномерной внутри  $(0, \pi)$  сходимости значений операторов (6) по «взвешенным» многочленам Якоби. Заметим, что в случае, когда  $\alpha_n \equiv \beta_n \equiv -\frac{1}{2}$ , критерий равномерной сходимости классических интерполяционных многочленов Лагранжа по матрице Чебышёва на всём отрезке  $[-1, 1]$  получен А. А. Приваловым в [4].

**Теорема 3.** Пусть последовательности  $\alpha_n, \beta_n$  удовлетворяют соотношениям (4),  $f \in C[a, b]$ ,  $[a, b] \subset (0, \pi)$ . Доопределим функцию  $f$  до  $F$  на отрезке  $[0, \pi]$ , как в (5). Возьмём фиксированные положительнзначные последовательности  $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ , удовлетворяющие условиям (7). Для любого натурального  $n$  и  $\theta \in [a, b]$  обозначим числа  $p, p_1, p_2, m_1$  и  $m_2$ , как в (8). Тогда, для того чтобы операторы вида (6), где в качестве решений задачи Коши берутся «взвешенные»

многочлены Якоби  $u_n(\theta)$ , равномерно по  $\theta$  на  $[a, b]$  аппроксимировали функцию  $f \in C[a, b]$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p_1 \leq p \leq p_2} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{F(\theta_{2m+1, \lambda_n}) - 2F(\theta_{2m, \lambda_n}) + F(\theta_{2m-1, \lambda_n})}{p - 2m} \right| = 0, \quad (12)$$

или эквивалентное ему условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p_1 \leq p \leq p_2} \left| \sum_{m=1}^{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \frac{F(\theta_{2m+1, \lambda_n}) - 2F(\theta_{2m, \lambda_n}) + F(\theta_{2m-1, \lambda_n})}{p - 2m} \right| = 0,$$

где штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если  $m_2 < m_1$ , то сумма в (12) равна нулю.

Доказательство теоремы 3 следует из [3, теорема 2] при условии (10).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1976.
2. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962.
3. Трынин А. Ю. Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 1, С. 61–108.
4. Привалов А. А. Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Известия вузов. Сер. Математика. 1986. Вып. 5. С. 49–59.

УДК 517.518

Р. Н. Фадеев

### ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть  $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$  — последовательность натуральных чисел, такая что  $2 \leq p_j \leq P$  для всех  $j \in \mathbb{N}$  и  $Z_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$ . Если  $m_0 = 1$ ,  $m_j = m_{j-1}p_j$  при  $j \in \mathbb{N}$ , то каждое  $x \in [0, 1)$  имеет разложение  $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$ ,  $x_j \in Z_j$ . Это разложение определено однозначно, если при  $x = k/m_n$ ,  $0 < k < m_n$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}_+$ , брать разложение с конечным числом  $x_j \neq 0$ . Каждое  $k \in \mathbb{Z}_+$  однозначно представимо в виде  $k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$ ,  $k_j \in Z_j$ . Для чисел  $x \in [0, 1)$  и  $k \in \mathbb{Z}_+$  положим по

определению  $\chi_k(x) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j)$ . Система  $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  ортонормированна и полна в  $L[0, 1)$ . Поэтому можно определить коэффициенты Фурье формулой  $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) \overline{\chi_n(x)} dx$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , и частичную сумму  $S_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i) \chi_i$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$  – норма в пространстве  $L^p[0, 1)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Зададим максимальную функцию  $M(f)$  равенством  $M(f)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} S_{m_n}(f)(x)$ . Если  $\|f\|_H = \|M(f)\|_1 < \infty$ , то  $f$  принад-

лежит  $P$ -ичному пространству Харди  $H(P, [0, 1))$  с нормой  $\|\cdot\|_H$ . Пусть  $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0, 1) : \hat{f}(k) = 0, k \geq n\}$  и  $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$ . Если  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1)} |f(x)|$ , то пространство  $C^*[0, 1)$  состоит из ограничен-

ных функций со свойством  $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_{\infty} = 0$ . Для  $f \in C^*[0, 1)$ ,  $f \in H(P, [0, 1))$ , величины  $E_n(f)_{\infty}$ ,  $E_n(f)_H$  определяются как  $E_n(f)_p$ .

По определению  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$ , если для всех  $n \in \mathbb{N}$  верно неравенство  $\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n$ . Ясно, что класс  $GM$  содержит в себе класс

$RBVS$  последовательностей, удовлетворяющих условию  $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n$ . Возрастающая последовательность  $\{n_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$  называется *лакунарной по Адамару*, если  $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$  при всех  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$  и  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p i^{p-2} < \infty$ . Тогда ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(x)$  является рядом Фурье функции  $f \in L^p[0, 1)$  и имеют место оценки

$$E_n(f)_p \leq C \left( n^{1-1/p} a_n + \left( \sum_{i=n}^{\infty} a_i^p i^{p-2} \right)^{1/p} \right), \quad (1)$$

$$n^{1-1/p} a_n + E_n(f)_p \geq C \left( \sum_{i=n}^{\infty} a_i^p i^{p-2} \right)^{1/p}. \quad (2)$$

При  $p \geq 2$  можно убрать  $n^{1-1/p} a_n$  в правой части (1), а при  $1 < p \leq 2$  это выражение можно убрать из левой части (2).

**Теорема 2.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$  и  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_{n_k}(x)$ ,

где  $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$  – лакунарная последовательность. Тогда

$$C_1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_p \leq C_2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2},$$

$$C_1 \left( \sum_{n_k \geq n} |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq E_n(f)_p \leq C_2 \left( \sum_{n_k \geq n} |a_k|^2 \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 3.** 1) Пусть  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$  и  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_{n_k}(x)$ , где  $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$  – лакунарная последовательность. Тогда

$$C_1 \left( \sum_{n_k \geq n} |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq E_n(f)_H \leq C_2 \left( \sum_{n_k \geq n} |a_k|^2 \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) Пусть  $f \in C^*[0, 1)$  и имеет ряд Фурье  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_{n_k}$ , где  $a_k \geq 0$ ,  $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$  – лакунарная последовательность. Тогда

$$C_3 \sum_{n_k \geq n} a_k \leq E_n(f)_{\infty} \leq C_4 \sum_{n_k \geq n} a_k.$$

**Замечание.** Теорема 1 является уточнением некоторых результатов из [2]. Неравенства теоремы 2 хорошо известны в тригонометрическом случае, но для мультипликативных систем левые неравенства теоремы 2 в явном виде не формулировались. Пункт 2) теоремы 3 является аналогом теорем 4 и 5 из работы С. Б. Стечкина [3].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987.
2. Агафонова Н. Ю. О наилучших приближениях функций по мультипликативным системам и свойствах их коэффициентов Фурье // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 4. С. 247–262.
3. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (третье сообщение) // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1956. Т. 20, № 3. С. 385–412.

А. Р. Файзлиев

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ЛОКАЛЬНЫХ ЦЕНТРОВ НА ТЕРРИТОРИИ ГОРОДА

В статье предлагается метод кластеризации, учитывающий пространственное местоположение и интенсивность. Также предлагается новый критерий для выбора числа кластеров.

Цель работы: разработка метода выделения «сгущений» населения, магазинов и других объектов городской среды на основе комбинированного критерия пространственной близости и близости по плотности распределения объектов.

Задачи:

1. Подразделить территорию города Саратова на неперекрывающиеся пространственные ячейки.

2. Разбить множество таких ячеек  $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  на непересекающиеся множества  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  (называемые кластерами), чтобы в пределах каждого кластера ячейки были как можно ближе в смысле:

- а) евклидова расстояния между их центрами;
- б) близости значений плотностей распределения объектов.

Такая постановка задачи предполагает собой задачу кластерного анализа [1].

Исходные данные:

Пространственная ячейка, заранее построенная с помощью алгоритма мозаики Вороного [2], характеризующаяся:

1. местоположением  $x_i, y_i$ ;
- 2) площадью  $S_i$ ;
- 3) средней интенсивностью  $P_i$  (плотностью населения, плотностью коммерческой недвижимости).

Основные параметры алгоритма кластеризации:

1. Форма меры «удаленности» для двух отдельно взятых ячеек.
  2. Метод вычисления удаленности между двумя заданными кластерами.
  3. Общая схема алгоритма (агломерация, подразделение и другие).
- Мера удаленности между ячейками

$$d(K_i, K_j) = \max(d_{ij}, c|\ln p_i - \ln p_j|),$$

где  $K_i, K_j$  – кластеры, состоящие из одной ячейки,  $d_{ij}$  – евклидово расстояние между центрами ячеек,  $c > 0$  – постоянный коэффициент, позволяющий привести логарифмическую величину плотности к шкале евклидовых расстояний (рассчитывается с помощью вспомогательной линейной регрессии методом МНК-оценок.)

Методы вычисления удаленности между кластерами:

- 1) минимальное (single link);
- 2) максимальное (complete link);
- 3) среднее пар расстояний (pair-group average).

### Общая схема алгоритма

Агломеративная, т.е., начиная от одноэлементных кластеров, определяются два самых близких, которые объединяются и т.д. Выбор числа кластеров:

1. По скачкам расстояния (классический метод);
2. По энтропии Шеннона (предложенный нами) [3]:

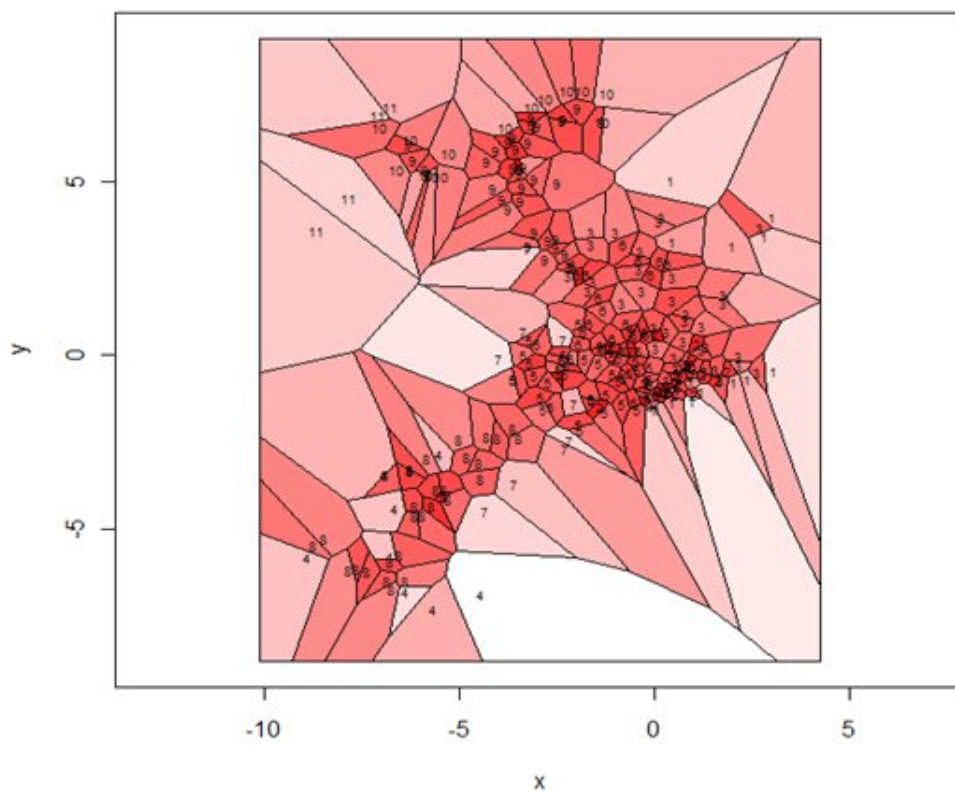
$$H(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i, \text{ где } p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Для удобства мы рассматривали величину  $\frac{e^{H(p)}}{n}$ , так как она будет изменяться в пределах от 0 до 1.

В таблице представлены результаты кластеризации по населению (максимальное расстояние).

Скачок расстояния	Число кластеров	Энтропия	Число кластеров
1.8524755	4	0.9597912	3
1.7774426	2	0.8604969	2
1.2235018	6	0.7996000	4
1.0698915	3	0.7631253	11
1.0538180	11	0.7152539	19
0.8566795	7	0.7074681	12
0.4954933	12	0.7050943	5

Как видно из таблицы, по скачкам расстояния хорошо выделяются 4 и 2 кластера, которым соответствуют высокие показатели энтропии. Для большего числа кластеров хороший вариант с 11 кластерами, который подтверждается и скачком расстояния и энтропией. Рисунок иллюстрирует кластеризацию по населению (максимальное расстояние, 11 кластеров).



Выводы:

1. Предложен метод кластеризации, учитывающий пространственное местоположение и интенсивность.

2. Для выбора числа кластеров предлагается использовать не только скачки расстояния, но и новый критерий, основанный на энтропии Шеннона.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ким Дж.-О., Мюллер Ч. У., Клекка У. Р.* Факторный, дискриминантный и кластерный анализ / пер. с англ. И. С. Унюкова. М. : Финансы и статистика, 1989. 215 с.
2. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия : Введение / пер. с англ. М. : Мир, 1989. С. 478.
3. *Волькенштейн М. В.* Энтропия и информация. М.: Наука, 1986. С. 192.

А. Е. Федосеев

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ

В данной статье исследуется обратная задача спектрального анализа для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольных порядков на полуоси, имеющих неинтегрируемую особенность во внутренней точке. Получена теорема единственности решения обратной задачи.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell y(x) := y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} \left( \frac{\nu_j}{(x-a)^{n-j}} + q_j(x) \right) y^{(j)}(x) = \lambda y(x), \quad x > 0, \quad (1)$$

с неинтегрируемой особенностью в точке  $0 < a < \infty$ , где  $q_j(x)$  – комплекснозначные функции и  $\nu_j$  – комплексные числа. Ранее уравнение вида (1) при  $a = 0$  рассматривалось в работе [1]. При  $a > 0$  уравнение (1) на *конечном отрезке* рассматривалось в работах [2,3].

Пусть  $\mu_1, \dots, \mu_n$  – корни характеристического многочлена

$$\Delta(\mu) = \sum_{j=0}^n \nu_j \prod_{k=0}^{j-1} (\mu - k), \quad \nu_n = 1, \quad \nu_{n-1} = 0.$$

Для определенности будем считать, что  $n = 2m$ ,  $\mu_k - \mu_j \neq sn$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ ;  $\operatorname{Re} \mu_1 < \dots < \operatorname{Re} \mu_n$ ,  $\mu_k \neq 0, 1, 2, \dots, n-3$ . Обозначим  $\theta = \operatorname{Re}(\mu_n - \mu_1)$ ,  $\theta_j = n - 1 - \theta - j$ . Мы будем предполагать, что  $q_j(x)|x-a|^{\theta_j} \in L(0, T)$  и  $q_j(x) \in L(T, \infty)$  при  $j = \overline{0, n-2}$  для некоторого  $T > a$ .

Пусть  $\lambda = \rho^n$ ,  $s_j(x, \lambda)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , решение следующей системы интегральных уравнений при  $x > a$  и  $x < a$ :

$$s_j^{(\nu)}(x, \lambda) = C_j^{(\nu)}(x, \lambda) - \int_a^x \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} g(x, t, \lambda) \left( \sum_{p=0}^{n-2} q_p(t) s_j^{(p)}(t, \lambda) \right) dt, \quad \nu = \overline{0, n-1},$$

где  $g(x, t, \lambda)$  – функция Грина следующей задачи Коши:  $\ell_0 y - \lambda y = f(x)$ ,  $y^{(\nu)}(a) = 0$ ,  $\nu = \overline{0, n-1}$ ,  $\ell y_0 = \ell y|_{q_j(x) \equiv 0, j = \overline{0, n-2}}$ ,

$$C_j(x, \lambda) = (x-a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} \left( \rho(x-a) \right)^{nk}, \quad c_{jk} = c_{j0} \left( \prod_{s=1}^k \Delta(\mu_j + sn) \right)^{-1}.$$



Здесь и далее считаем, что  $z^\mu = e^{\mu(\ln|z| + i \arg z)}$ ,  $\arg z \in (-\pi, \pi]$ .

Пусть задана матрица  $A = [a_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}}$ ,  $\det A \neq 0$ , где  $a_{kj}$  – комплексные числа. Обозначим

$$\sigma_j(x, \lambda) = \begin{cases} s_j(x, \lambda), & x < a, \\ \sum_{k=1}^n a_{kj} s_k(x, \lambda), & x > a. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений  $\{\sigma_j(x, \lambda)\}$  используется для склейки решений уравнения (1) в окрестности особой точки  $x = a$ . Будем говорить, что решение  $y(x, \lambda)$  уравнения (1) удовлетворяет *условию склейки*, образованному матрицей  $A$ , если  $y(x, \lambda)$  может быть представлено в виде

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n \chi_j(\lambda) \sigma_j(x, \lambda) \quad \text{для всех } x \neq a,$$

где коэффициенты  $\chi_j(\lambda)$  не зависят  $x$ .

Пусть  $S_{k_0} = \left\{ \rho : \arg \rho \in \left( \frac{k_0\pi}{n}, \frac{(k_0+1)\pi}{n} \right) \right\}$ . В каждом секторе  $S_{k_0}$  корни  $R_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , уравнения  $R^n - 1 = 0$  могут быть занумерованы так, что

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S_{k_0}.$$

Рассмотрим случай, когда  $a_{kj} = 0$  при  $k < j$ . Обозначим

$$[d_{jk}]_{j,k=\overline{1,n}} = \left( [R_k^{\mu_j}]_{k,j=\overline{1,n}} \right)^{-1}, \quad \xi_{kj}^0 = \sum_{s=1}^n a_{ss} R_k^{\mu_s} d_{sj} e^{-i\pi\mu_s}.$$

Предположим, что

$$\xi_s^0 = \det[\xi_{kj}^0]_{k=\overline{1,s}; j=\overline{n-s+1,n}} \neq 0, \quad s = \overline{1, n-1}. \quad (2)$$

Условие (2) называется *условием регулярности* склейки.

В работе [4] было показано, что в каждом секторе  $S_{k_0}$ , при  $x > 0$ ,  $x \neq a$  существует фундаментальная система решений  $\{y_k(x, \rho)\}_{k=\overline{1,n}}$  дифференциального уравнения (1) такая, что для каждого  $x < a$  и достаточно большого  $\rho_* > 0$  функции  $y_k^{(\nu)}(x, \rho)$ ,  $\nu = \overline{0, n-1}$ , аналитические по  $\rho$  при  $\rho \in S_{k_0}$ ,  $|\rho| \geq \rho_*$ , непрерывные при  $\rho \in \overline{S_{k_0}}$ ,  $|\rho| \geq \rho_*$  и

$$|y_k^{(\nu)}(x, \rho)(-\rho R_k)^{-\nu} e^{-\rho R_k(a-x)} - 1| \leq C(|\rho(x-a)|^{-1} + |\rho|^{-\delta_0}),$$

при  $x < a$ ,  $\rho \in \overline{S_{k_0}}$ ,  $|\rho(x-a)| \geq 1$ , где  $\delta_0 := \min(1, \theta)$ .

Положим

$$\Delta_j(\rho) = \det[y_k(0, \rho), \dots, y_k^{(j-1)}(0, \rho), \xi_{kj+1}^+(\rho), \dots, \xi_{kn}^+(\rho)]_{k=\overline{1, n}}^T, j = \overline{1, n-1},$$

$$\Delta_n(\rho) = \det[y_k^{(\nu-1)}(0, \rho)]_{k, \nu=\overline{1, n}},$$

где  $\xi_{ks}^+(\rho)$  определены в [4] и обладают асимптотическим представлением

$$\xi_{ks}^+ = \xi_{ks}^0 + O(\rho^{-\delta_1}), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \delta_1 = \min(1, \min_l \operatorname{Re}(\mu_{l+1} - \mu_l)).$$

Обозначим  $G_{\delta, j} := \{\rho : |\rho - \rho_{lj}| \geq \delta\}$ , где  $\rho_{lj}$  — нули функции  $\Delta_j(\rho)$ .

Пусть  $\Phi_j(x, \lambda)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , — решения уравнения (1) при условиях

$$\Phi_j^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{\nu j}, \quad \nu = \overline{1, j}, \quad \Phi_j(x, \lambda) = O(e^{\rho R_j x}), \quad x \rightarrow \infty, \quad j = \overline{1, n}, \quad \rho \in S_{k_0},$$

и удовлетворяющие условиям склейки, образованными матрицей  $A$ .

**Теорема 1.** При  $|\rho(x - a)| \geq 1$ ,  $\rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_{\delta, j}$ ,  $|\rho| \rightarrow \infty$ ,  $j, \nu = \overline{1, n}$ , имеют место оценки

$$|\Phi_j^{(\nu-1)}(x, \lambda)| \leq C |\rho^{\nu-j} e^{\rho R_j x}|.$$

Пусть  $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j, k=\overline{1, n}}$ ,  $M_{jk}(\lambda) = \Phi_j^{(k-1)}(0, \lambda)$ ,  $1 \leq j < k \leq n$ ,  $M_{jk}(\lambda) := \delta_{jk}$  при  $j \geq k$ . Будем называть  $M(\lambda)$  матрицей Вейля.

Обратная задача ставится следующим образом. По заданной матрице Вейля  $M(\lambda)$  нужно восстановить числа  $\nu_j$  и функции  $q_j(x)$  в уравнении (1).

**Теорема 2.** Задание матрицы Вейля  $M(\lambda)$  однозначно определяет дифференциальное уравнение (1).

Для доказательства используется метод спектральных отображений [5] и теорема 1.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1355–1362.
2. Yurko V. A. Integral transforms connected with higher-order differential operators with a singularity // Integral Transforms and Special Functions. 2002. Vol. 13, №6. P. 497–511.
3. Yurko V. A. Higher-order differential equations having a singularity in an interior point // Results in Mathematics. 2002. Vol.42. С. 177–191.
4. Fedoseev A. Higher-order differential equations on the half-line having a singularity in an interior point / Preprint. Schriftenreihe der Fakultät für Mathematik. Universität Duisburg-Essen, SM-DU-734. 2011. 12p.
5. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

## ВНУТРЕННЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В ВИДЕ ZDD-ДИАГРАММ

В статье предлагается альтернативная точка зрения на использование ZDD-диаграмм, заключающаяся в реализации операций сложения и умножения на переменную, а не в операциях, связанных объединением и пересечением множеств булевых мономов.

Бинарные диаграммы решений (Binary Decision Diagram, BDD) являются удобным инструментом представления и оперирования булевыми функциями и широко используются в различных областях, например для формальной верификации программных и аппаратных систем.

**Определение 1.** *Бинарные диаграммы решений (BDD) – направленный ациклический граф с двумя терминальными узлами  $\{0, 1\}$ , которые соответствуют значениям представляемой булевой функции. Выходная степень терминальных вершин равна 0. Все остальные вершины имеют выходную степень 2 и называются узлами решений. Одна вершина имеет входную степень, равную 0, эта вершина является корнем. Ребра, выходящие из узлов решений (high/low или then/else), соответствуют значению 0 (ребро else) или 1 (ребро then) для соответствующей переменной.*

Последовательность узлов, начинающихся с вершины и заканчивающаяся терминальным узлом, называется путём. В случае, когда порядок переменных для всех путей остаётся постоянным, такую диаграмму будем называть упорядоченной (OBDD). Упорядоченная BDD называется сокращенной или редуцированной (ROBDD), если она не содержит повторяющихся фрагментов.

**Определение 2.** *Пусть  $z$  будет упорядоченной бинарной диаграммой решений и не содержит одинаковых поддиаграмм. Тогда  $z$  будет называться zero-suppressed binary decision diagram (ZDD), если из неё исключены те узлы, then-ребра которых заканчиваются в терминальной вершине, соответствующей 0.*

ZDD были введены Shin-ichi Minato в 1993 [1]. В книге Кнута [2] достаточно подробно рассмотрены многие свойства таких диаграмм.

Рассмотрим в качестве примера рекурсивное представление для многочлена  $p = abc + ab + bc + b + c + 1$  с порядком переменных  $a \succ b \succ c$

$$p = a(b(c + 1)) + b(c + 1) + c + 1. \quad (1)$$

Графически его можно представить в виде диаграммы (рис. 1, *a*), где непрерывная линия соответствует умножению, пунктирная — сложению, а в узлах хранятся переменные или 1 и 0.

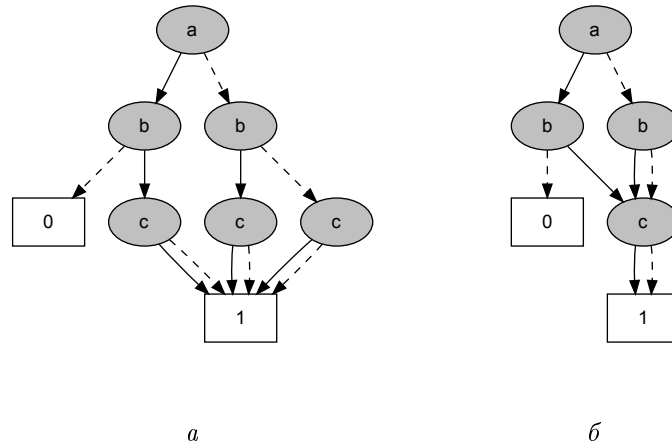


Рис. 1

В формуле (1) можно заметить повторы, используя которые, многочлен можно переписать следующим образом:

$$p = ay + y + x, \quad \text{где } y = bx, x = c + 1. \quad (2)$$

На рис. 1, *б* диаграмма соответствует ZDD.

На рис. 2, *a* диаграмма соответствует обычному представлению, а на рис. 2, *б* ZDD, для многочлена  $(a+1)(b+1)(c+1)$ , который содержит все возможные булевские мономы для трех переменных. Из диаграммы на рис. 2, *б* видно, что для представления многочлена от всех возможных булевских мономов от  $n$  переменных всего  $n$  узлов.

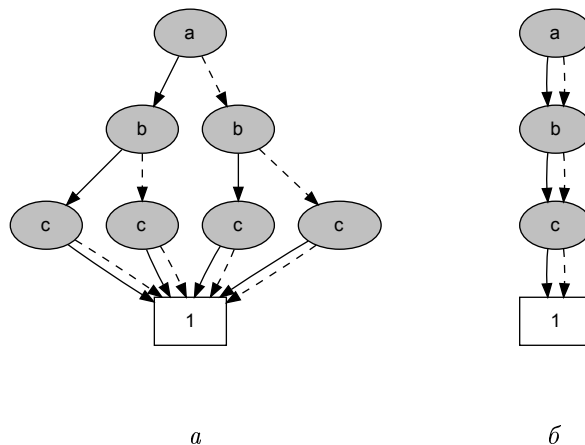


Рис. 2

Пакет **PolyBoRi** [3, 4] применяет это представление для многочленов при построении базисов Грёбнера, используя внешнюю библиотеку **CUDD** [5], которая характеризуется следующими свойствами:

- библиотека **CUDD** создана для работы с разными типами представлений BDD, ADD и ZDD[5];
- в **CUDD**, а значит, и в **PolyBori** используется общий кэш для всех поддеревьев всех используемых многочленов.

Использование сторонней библиотеки **CUDD** не очень эффективно. Нами построена реализация операций сложения и умножения многочленов, а также умножение на переменную на языке Python. Ее главные отличия от библиотеки **CUDD**:

- кэш является локальным для каждого многочлена, что позволяет сократить время поиска возможного поддерева используя номер переменной, а также эффективно реализовать сборку мусора;
- встроена специализированная операция умножение на переменную;
- для оптимизации поиска старшего монома для упорядочений по полной степени в узлах предусмотрено хранение наибольшей полной степени монома, содержащегося в этом поддереве.

Выполнена экспериментальная оценка использования памяти для некоторых многочленов, встречающихся при работе с HFE (Hidden Fields Equations) [6]. Для проверенных многочленов с числом переменных, не превышающих 80, структуры данных ZDD показали более устойчивое использование памяти, чем с использованием списков или рекурсивного представления, особенно при умножении на переменную.

В настоящее время разработана реализация ZDD представления многочленов на C++ для встраивания в пакет построения булевских базисов Грёбнера [7].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00200-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-3810.2010.2).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Shin-ichi Minato.J.* Zero-suppressed bdds for set manipulation in combinatorial problems // Proc. of the 30th international Design Automation Conference, DAC '93. New York, USA, 1993. ACM. P. 272–277.
2. *Knuth D.E.* Addison-Wesley Professional, // The Art of Computer Programming. Vol. 4, Fascicle 1: Bitwise Tricks & Techniques; Binary Decision Diagrams/ 12th ed., March. 2009.
3. *Brickenstein M., Dreyer A.* PolyBori: A framework for gröbner-basis computations with boolean polynomials // Journal of Symbolic Computation, Effective Methods in Algebraic Geometry. 2009. Vol. 44, № 9. P. 1326–1345.

4. *Brickenstein M., Dreyer A., Greuel G.-M., Wedler M., Wienand O.* New developments in the theory of gröbner bases and applications to formal verification // Journal of Pure and Applied Algebra. 2009. Vol. 213, № 8. P. 1612–1635. Theoretical Effectivity and Practical Effectivity of Gröbner Bases.

5. *Somenzi F.* URL: <http://vlsi.colorado.edu/fabio/> (дата обращения : 25.05.2011) Cudd: Cu decision diagram package release.

6. *Fokin P. V., Blinkov Yu. A.* ZDD diagrams as appropriate data structures in construction of Boolean Gröbner bases by involutive algorithms // Polynomial Computer Algebra. 2011. P. 22–24 .

7. *Gerdt V. P., Zinin M. V., Blinkov Yu. A.* On computation of boolean involutive bases // Program. Comput. Softw. March. 2010.

УДК 519.53, 519.713

**Е. В. Хворостухина**

## **ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СВОЙСТВАХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ**

В настоящей статье рассматриваются гиперграфические автоматы без выходных сигналов, т.е. автоматы, у которых множества состояний наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа.

Исследуются взаимосвязи элементарных свойств универсальных гиперграфических автоматов с элементарными свойствами полугрупп их входных сигналов.

Следуя [1], *гиперграфом* называется система вида  $H = (X, L)$ , где  $X$  – непустое множество вершин гиперграфа и  $L$  – семейство некоторых подмножеств множества  $X$ , называемых *ребрами гиперграфа*. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются *смежными*.

Гиперграф  $H = (X, L)$  называется *эффективным*, если любая его вершина принадлежит некоторому его ребру.

Пусть  $p$  – некоторое натуральное число. Гиперграф  $H$  будем называть *гиперграфом с  $p$ -определимыми ребрами*, если в каждом его ребре гиперграфа найдется по крайней мере  $p+1$  вершина и, с другой стороны, любые  $p$  вершин этого гиперграфа содержатся не более чем в одном ребре. То есть в таком гиперграфе каждое ребро однозначно определяется любыми своими  $p$  вершинами.

Например, эффективный гиперграф с 1-определимыми ребрами – это гиперграф, ребра которого образуют нетривиальное разбиение множества вершин без одноэлементных классов. Кроме того, если рассмотреть плоскость как гиперграф, вершинами которого являются точки этих

плоскостей, а ребрами – соответствующие прямые, то проективная плоскость и аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами.

Эндоморфизмом гиперграфа  $H = (X, L)$  называется преобразование  $\varphi$  множества вершин  $X$ , которое удовлетворяет следующему условию:

$$(\forall l \in L)(\exists l' \in L)(\varphi(l) \subset l').$$

Множество всех эндоморфизмов гиперграфа  $H$  с операцией композиции образует полугруппу  $\text{End}H$ .

В настоящей статье под гиперграфическим автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов [2]  $A = (X, S, \delta)$ , множество состояний которого  $X$  наделено такой структурой гиперграфа  $H = (X, L)$ , что при любом входном сигнале  $s \in S$  функция переходов  $\delta_s$  является эндоморфизмом гиперграфа  $H$ . Например, для любого гиперграфа  $H$  алгебраическая система  $A = (H, \text{End}H, \delta)$  с функцией  $\delta(\varphi, x) = \varphi(x)$ , где  $(\varphi, x) \in \text{End}H \times X$ , является гиперграфическим автоматом, который обозначается  $\text{Atm}(H)$  и называется *универсальным гиперграфическим автоматом*.

Полугруппу входных сигналов автомата  $A$  будем обозначать также  $\text{Inp}(A)$ .

Напомним [3], что алгебраические системы  $A, B$  фиксированной сигнатуры  $\Omega$  называются *элементарно эквивалентными*, если каждая формула  $\Phi$  сигнатуры  $\Omega$ , истинная на одной из заданных алгебраических  $\Omega$ -систем, истинна и на другой. Символически это записывается следующим образом:  $A \models \Phi \iff B \models \Phi$ . В частности, изоморфные алгебраические системы сигнатуры  $\Omega$  элементарно эквивалентны. Множество предложений языка узкого исчисления предикатов сигнатуры  $\Omega$ , истинных на алгебраической системе  $A$ , называется *элементарной теорией системы  $A$*  или просто *теорией  $A$*  и обозначается как  $\text{Th}(A)$ . Ясно, что элементарная эквивалентность систем  $A$  и  $B$  сигнатуры  $\Omega$  равносильна выполнимости равенства  $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$ .

Полученная в [4] относительно элементарная определимость класса универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с  $p$ -определимыми ребрами в классе полугрупп позволяет исследовать элементарные свойства универсальных гиперграфических автоматов над такими гиперграфами.

**Теорема.** Пусть  $H, H_1$  – эффективные гиперграфы с  $p$ -определимыми ребрами и  $\text{Atm}(H) = A, \text{Atm}(H_1) = A_1$  – универсальные

гиперграфические автоматы над гиперграфами  $H, H_1$  соответственно. Тогда полугруппы  $\text{Inp}(A), \text{Inp}(A_1)$  входных сигналов этих автоматов элементарно эквивалентны в том и только том случае, если элементарно эквивалентны автоматы  $A$  и  $A_1$ .

Таким образом, универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с  $p$ -определимыми ребрами с точностью до элементарной эквивалентности определяются своими полугруппами входных сигналов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зыков А. А. Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29, №6. С. 89–154.
2. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высшая школа, 1994.
3. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М. : Наука 1987.
4. Хворостухина Е. В. Об относительно элементарной определимости класса гиперграфических автоматов в классе всех полугрупп // Компьютерные науки и информационные технологии : тезисы докладов Международной научной конференции. Саратов, 1–4 июля 2009 г. Саратов : Издательство Саратовского университета, 2009. С. 210–212.

УДК 517.51

**А. А. Хромов**

### О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В данной статье построенное ранее семейство операторов для приближения непрерывной функции с интегральным условием применяется в случае, когда функция задана с погрешностью в среднеквадратичной метрике и выясняется вопрос о согласовании параметра, от которого зависит данное семейство, с погрешностью исходных данных.

Пусть  $f(x) \in C[0, 1]$ ,  $p(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $p(1) \neq 0$  и

$$U(f) \equiv \int_0^1 p(t)f(t)dt = 0$$

и пусть вместо  $f(x)$  нам известна  $f_\delta(x)$  такая, что  $\|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]} \leq \delta$ .

Рассмотрим семейство операторов из [1]:



$$-rR_r f = \int_0^1 K_r(x, t) f(t) dt,$$

где

$$K_r(x, t) = \begin{cases} e^{r(x-t)} \frac{\varphi(r, t)}{\Delta(r)}, & t \leq x, \\ e^{r(x-t)} \left[ r + \frac{\varphi(r, t)}{\Delta(r)} \right], & t > x, \end{cases}$$

$$\varphi(r, t) = p(0) + \int_0^t p'(\tau) e^{r\tau} d\tau,$$

$$\Delta(r) = \int_0^1 p(t) e^{rt} dt,$$

и множество

$$M = \{f \in C[0, 1] : U(f) = U_1(f) = 0\},$$

$$U_1(f) = p(1)f(1) - p(0)f(0) - \int_0^1 p'(t)f(t) dt.$$

**Лемма 1.** *Справедливы оценки, асимптотические по  $r$  при  $r \rightarrow \infty$ :*

$$\varphi(r, t) = O\left(\frac{e^{rt}}{r}\right), \quad \Delta(r) = O\left(\frac{e^r}{r}\right), \quad \int_0^t p'(\tau) e^{r\tau} d\tau = O\left(\frac{e^{rt}}{r}\right).$$

**Лемма 2.** *Справедлива двусторонняя оценка, асимптотическая по  $r$  при  $r \rightarrow \infty$ :*

$$\sqrt{\frac{r}{2}} - \psi(r) \leq \| -rR_r \|_{L_2 \rightarrow C} \leq \sqrt{\frac{r}{2}} + \psi(r),$$

где  $\psi(r) = O(1)$ .

**Доказательство.** Пользуемся формулой

$$\| -rR_r \|_{L_2 \rightarrow C} = \max_{0 \leq x \leq 1} \left( \int_0^1 K_r^2(x, t) dt \right)^{1/2}.$$

Используя оценки, приведенные в лемме 1, получаем утверждение леммы 2.

Согласно [1] для функций  $f(x) \in M$  и только для них выполняется сходимость

$$\| -rR_r f - f \|_C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Теперь применим операторы  $-rR_r$  к функции  $f_\delta(x)$  и рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, -rR_r, f) \equiv \sup\{\| -rR_r f_\delta - f \|_{C[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta\}.$$

Из общей теории некорректно поставленных задач, леммы 2 и сходимости (1) следует

**Теорема.** *Для любой  $f(x) \in M$  сходимость*

$$\Delta(\delta, -rR_r, f) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$

*выполняется тогда и только тогда, когда  $r = r(\delta)$  так, что  $r(\delta) \rightarrow \infty$  и  $(r(\delta))^{1/2}\delta \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .*

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. А., Хромова Г. В. Приближение непрерывных функций с интегральными граничными условиями // Современные методы теории функций и смежные вопросы : материалы Воронежской зимней школы. Воронеж, 25 янв. – 4 февр. 2011 г. Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского университета, 2011. С. 345.

УДК 517.51

**Г. В. Хромова**

### О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИИ С «РАЗМАЗАННЫМ» ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В [1] доказана сходимость одного метода приближения непрерывной функции с интегральным условием:

$$U(f) = \int_0^1 p(t)f(t)dt = 0, \quad (1)$$

где  $p(t) \in C^1[0, 1]$ ,  $p(1) \neq 0$  и при этом

$$\int_0^1 p(t)dt \neq 0. \quad (2)$$

В данной статье снято ограничение (2). Указанный выше метод конструируется с помощью семейства операторов вида  $-rR_r(L)$ , где  $R_r(L)$  – резольвента оператора дифференцирования с граничным условием (1),  $r > 0$  – спектральный параметр. Условие (2) является ключевым в доказательстве сходимости.

$$\| -rR_r f - f \|_c \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (3)$$

для функций  $f(x)$  из класса  $M$ , где

$$M = \{f(x) \in C[0, 1] : U(f) = 0, U'(f) = 0\},$$

$$U'(f) = p(1)f(1) - p(0)f(0) - \int_0^1 p'(t)f(t)dt.$$

Мы здесь ограничимся доказательством леммы, позволяющей получить сходимость (3), если  $\int_0^1 p(t)dt = 0$ .

**Лемма.** *Если  $p(t) \in C[0, 1]$  и не равна тождественно нулю, то существует  $\mu > 0$  такое, что*

$$\int_0^1 p(t)e^{\mu t}dt \neq 0. \quad (4)$$

**Доказательство.** От противного: пусть интеграл в левой части (4) равен нулю при любом  $\mu > 0$ . Обозначи его через  $F(\mu)$ . По теореме единственности аналитической функции  $F(\mu) = 0$  при любом комплексном  $\mu$ . А по теореме единственности разложения в степенной ряд функции  $F(\mu)$  коэффициенты этого ряда равны нулю, т.е.  $\int_0^1 p(t)t^k dt = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Значит,  $\int_0^1 p(t)P(t)dt = 0$ , где  $P(t)$  – любой многочлен.

По теореме Вейерштрасса, существует последовательность многочленов  $P_n(t)$ , сходящаяся к  $p(t)$  в равномерной метрике. Из  $\int_0^1 p(t)P_n(t)dt = 0$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 p(t)P_n(t)dt = 0$ . Отсюда получаем  $\int_0^1 p^2(t)dt = 0$ , а значит,  $p(t) = 0$ , что противоречит условию леммы.

Отправляясь от этой леммы, мы повторяем схему доказательства теоремы о сходимости (3) в [1], заменяя всюду условие (2) условием (4), и приходим к теореме:

**Теорема.** При  $p(t) \in C^1[0, 1]$ ,  $p(t) \neq 0$  для сходимости (3) необходимо и достаточно, чтобы  $u \in M$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. А., Хромова Г. В. Приближение непрерывных функций с интегральными граничными условиями // Современные методы теории функций и смежные вопросы : материалы Воронежской зимней школы. Воронеж, 25 янв. – 4 февр. 2011 г. Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского университета, 2011. С. 345.

УДК 517.518

Т. С. Чикина

### ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНИМИ ЗИГМУНДА — РИССА В $p$ -ВАРИАЦИОННОЙ МЕТРИКЕ

Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $f(x)$  — измеримая, ограниченная,  $2\pi$ -периодическая функция и  $\xi = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = x_0 + 2\pi\}$  — разбиение периода. Введем  $p$ -вариационную сумму  $\mathcal{X}_\xi^p(f) = (\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p)^{1/p}$ , и  $p$ -вариационные модули непрерывности [1]:

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}(f, \delta) = \sup_{|\xi| \leq \delta} \mathcal{X}_\xi^p(f), \quad |\xi| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}),$$

$$\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \omega_{1-\frac{1}{p}}(\Delta_h^{k-1} f(x), h), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2.$$

Здесь  $\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih)$ . Пространство  $C_p$  функций  $f$ , удовлетворяющих равенству  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_{1-\frac{1}{p}}(f, \delta) = 0$ , является банаховым с нормой  $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-\frac{1}{p}}(f, 2\pi))$ , где  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in R} |f(x)|$ . Если  $f(x)$  имеет ряд Фурье  $a_0/2 + \sum_{i=1}^\infty (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$ , то

$$Z_n^k(f)(x) = a_0/2 + \sum_{i=1}^n (1 - i^k/(n+1)^k)(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

назовем *нормальными средними Зигмунда — Рисса порядка  $k$* . Легко видеть, что для  $t_n \in T_n$  и четного  $k \in \mathbb{N}$  мы имеем  $|t_n - Z_n^k(t_n)| = (n+1)^{-k} |t_n^{(k)}|$ , а при нечетном  $k \in \mathbb{N}$  верно  $|t_n - Z_n^k(t_n)| = (n+1)^{-k} |t_n^{(k)}|$ , где для  $t_n = c_0/2 + \sum_{i=1}^n (c_i \cos ix + d_i \sin ix)$  сопряженный полином  $t_n$  будет равен  $\sum_{i=1}^n (c_i \sin ix - d_i \cos ix)$ . Пусть  $T_n$  — пространство тригонометрических полиномов порядка не выше  $n$ ,  $E_n(f)_{C_p} = \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{C_p}$ .

**Лемма 1** [2]. Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $t_n \in T_n$ . Тогда справедливо неравенство  $\|t_n\|_{C_p} \leq C n^{1/p} \|t_n\|_{L^p}$ .

**Лемма 2.** (см. [1]). 1) Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $f \in C_p$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\omega_k(f, \delta)_{L^p} \leq C \delta^{\frac{1}{p}} \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta)$ .

2) Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $r \in \mathbb{N}$  и  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция такая, что  $f^{(r-1)}$  абсолютно непрерывна, а  $f^{(r)} \in L^p[0, 2\pi]$ . Тогда  $f \in C_p$  и  $\omega_{r-\frac{1}{p}}(f, \delta) \leq \|f^{(r)}\|_p \delta^{r-\frac{1}{p}}$ .

3) Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $f \in C_p$ . Тогда  $\omega_k(f, \delta) \in N^{k-1/p}$  (т.е.  $\omega_{k-1/p}(f, \lambda\delta) \leq (\lambda+1)^{k-1/p} \omega_{k-1/p}(f, \delta)$ ,  $\lambda > 0$ ).

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда для  $f \in C_p$  справедлива оценка

$$\|f - Z_n^k(f)\|_{C_p} \leq C \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, 1/n).$$

**Доказательство.** Разберем случай нечетного  $k$ . Пусть  $t_n \in T_n$  таков, что  $\|f - t_n\|_{C_p} = E_n(f)_{C_p}$ . Известно, что  $Z_n^k$  ограничен в пространстве  $C_p$  в силу своей сверточной природы. Имеем

$$\begin{aligned} \|f - Z_n^k(f)\|_{C_p} &\leq \|f - t_n\|_{C_p} + \|t_n - Z_n^k(t_n)\|_{C_p} + \|Z_n^k(t_n) - Z_n^k(f)\|_{C_p} \leq \\ &\leq (1 + \|Z_n^k\|_{C_p \rightarrow C_p}) E_n(f)_{C_p} + C_1 (n+1)^{-k} \|\widetilde{t_n^{(k)}}\|_{C_p} \leq \\ &\leq C_2 E_n(f)_{C_p} + C_1 (n+1)^{-k} \|\widetilde{t_n^{(k)}}\|_{C_p}. \end{aligned}$$

Используя лемму 1, теорему М. Рисса о сопряженной функции в  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$  [3, гл. 3, п. 3.11.1]), и неравенство С. М. Никольского — С. Б. Стечкина для тригонометрических полиномов [3, гл. 4, п. 4.8], находим, что

$$\|\widetilde{t_n^{(k)}}\|_{C_p} \leq C_3 n^{1/p} \|t_n^{(k)}\|_p \leq C_4 n^{1/p} \|t_n^{(k)}\|_p \leq C_4 n^{1/p} \left( \frac{n}{2 \sin \frac{1}{2}} \right)^k \omega_k(f, 1/n)_{L^p}.$$

По прямой теореме приближения в  $C_p$  (см. [1]) верно неравенство  $E_n(f)_{C_p} \leq C_5 \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, 1/n)$ . Согласно лемме 2 и неравенству  $\omega_{k-\frac{1}{p}}(t_n, \delta) \leq$

$\leq C_6 \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta)$  [4] имеем

$$\|t_n - Z_n^k(t_n)\|_{C_p} \leq C_7(n+1)^{-k+\frac{1}{p}} n^k n^{-\frac{1}{p}} \omega_{k-\frac{1}{p}}(t_n, \frac{1}{n}) + C_8 \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \frac{1}{n}) \leq C_9 \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \frac{1}{n}).$$

Для четного  $k$  доказательство аналогично без применения теоремы М. Рисса.

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $f \in C_p$ , тогда

$$\omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f), \delta) \leq C \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta),$$

где  $C$  не зависит от  $n, f, \delta$ .

**Доказательство.** При  $\delta \geq 1/n$  имеем в силу теоремы 1

$$\begin{aligned} \omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f), \delta) &\leq \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta) + \omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f) - f, \delta) \leq \\ &\leq \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta) + 2^{k-1} \|f - Z_n^k(f)\|_{C_p} \leq \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta) + 2^{k-1} C_1 \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, 1/n) \leq \\ &\leq (1 + 2^{k-1} C_1) \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta). \end{aligned} \quad (1)$$

При  $\delta < 1/n$  в силу леммы 2, неравенства С. М. Никольского — С. Б. Стечкина и неравенства (1) при  $\delta = 1/n$  получаем

$$\begin{aligned} \omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f), \delta) &\leq \delta^{k-\frac{1}{p}} \|(Z_n^k)^{(k)}(f)\|_p \leq C_2 \delta^{k-\frac{1}{p}} n^k \omega_k(Z_n^k(f), 1/n)_p \leq \\ &\leq C_3 (n\delta)^{k-\frac{1}{p}} \omega_{k-\frac{1}{p}}(Z_n^k(f), 1/n) \leq C_4 (n\delta)^{k-\frac{1}{p}} \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, 1/n) \leq C_5 \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \delta). \end{aligned} \quad (2)$$

Объединяя (1) и (2), доказываем теорему.

**Замечание.** Теорема 2 является аналогом теоремы 1 из [4].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Терехин А. П. Приближение функций ограниченной  $p$ -вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
2. Терехин А. П. Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной  $p$ -вариации // Математические заметки. 1967. Т. 2, № 3. С. 289–300.
3. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960.
4. Волосивец С. С. Полиномы наилучшего приближения и соотношения между модулями непрерывности в пространствах функций ограниченной  $p$ -вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1996. № 9. С. 21–26.

О. И. Шаталина

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА  
КОЛМОГорова — НИКОЛЬСКОГО  
ДЛЯ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ ТИХОНОВА**

Пусть  $T_\alpha$  — семейство операторов А. Н. Тихонова, построенных для приближения непрерывных функций при  $r = 1$  [1].

Каждый из операторов  $T_\alpha$  является интегральным с ядром

$$T_\alpha(x, t) = \frac{1}{\alpha} G(x, t, -\frac{1}{\alpha}), 0 \leq x, t \leq 1, \quad (1)$$

где

$$G(x, t, -\frac{1}{\alpha}) = \begin{cases} \frac{ch\alpha_1 t ch\alpha_1(1-x)}{\alpha_1 sh\alpha_1}, & t \leq x, \\ \frac{ch\alpha_1 x ch\alpha_1(1-t)}{\alpha_1 sh\alpha_1}, & t > x. \end{cases}$$

и  $\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 1}$  [2].

Ранее доказано [3], что для любой непрерывной функции  $u(x)$  имеет место сходимость  $\|T_\alpha u - u\|_{C[0,1]} \rightarrow 0$ , при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Рассматривается класс функций

$$M_{B_n} = \{u \in C[0, 1] : u(x) = \int_0^1 B_n(x, t)v(t)dt, \quad \|v\|_{L_2} \leq 1\},$$

где

$$B_n(x, t) = \begin{cases} \frac{(x-t)^n}{n!}, & t \leq x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Для класса  $M_{B_n}$  и операторов  $T_\alpha$ , определенных в (1), решается задача типа Колмогорова — Никольского. При  $n = 1$  решение этой задачи получено в [4].

Рассматривается величина  $\Delta_1(T_\alpha, M_{B_n})$ , для которой берется представление [5]:

$$\Delta_1(T_\alpha, M_{B_n}) = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left( \int_0^1 \left[ \int_0^1 T_\alpha(x, \xi) B_n(\xi, t) d\xi - B_n(x, t) \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Теорема.** Если  $B_n(x, t) = \begin{cases} \frac{(x-t)^n}{n!}, & t \leq x, \\ 0, & t > x, n \in N, \end{cases}$  то при достаточно малых  $\alpha$  выполняется оценка

$$\frac{1}{2n-1}\alpha^{\frac{1}{2}} - \psi_2(\alpha) \leq \Delta_1(T_\alpha, M_{B_n}) \leq \frac{1}{2n-1}\alpha^{\frac{1}{2}} + \psi_1(\alpha),$$

где  $\psi_1(\alpha) = O(\alpha)$ ,  $\psi_2(\alpha) = O(\alpha)$ .

**Доказательство.** Доказательство теоремы разбито на несколько этапов. На первом вычисляется интеграл

$$J_n(t, x) = \int_0^1 T_\alpha(x, \xi) B_n(\xi, t) d\xi - B_n(x, t). \quad (2)$$

**Лемма.** Справедливо рекуррентное соотношение

$$J_{n+1} = J_n + A_n,$$

где

$$A_n = \begin{cases} \frac{(x-t)^{2n}}{\alpha_1^2(2n)!} - \frac{ch\alpha_1 x}{\alpha_1 sh\alpha_1} \frac{(1-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}, & t \leq x, \\ -\frac{ch\alpha_1 x}{\alpha_1 sh\alpha_1} \frac{(1-t)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}, & t > x. \end{cases}$$

**Доказательство.** Для  $J_1$  лемма доказывается непосредственными вычислениями, а затем, используя метод математической индукции, получаем утверждение леммы.

Возвращаемся к доказательству теоремы.

Так как  $B_n(x, t)$  зависит от  $n$ , то при последовательном применении метода интегрирования по частям результат отличается при четных и нечетных значениях. Кроме того, отдельно необходимо рассмотреть случаи при  $t \leq x$  и  $t > x$ .

В каждом из рассматриваемых случаев группируются слагаемые при различных степенях  $\alpha_1$  и выделяются главные члены асимптотики по  $\alpha_1$ .

Далее вычисляется интеграл

$$\tilde{J}(x) = \int_0^1 J_n^2(t, x) dt = \int_0^x J_n^2(t, x) dt + \int_x^1 J_n^2(t, x) dt.$$

Используя найденное в лемме рекуррентное соотношение, находим оценку сверху  $\Delta(T_\alpha, M_{B_n}) = \sup_{0 \leq x \leq 1} (\tilde{J}(x))^{\frac{1}{2}}$ . Оценка снизу получается из



очевидных вычислений  $\sup_{0 \leq x \leq 1} \tilde{J}(x) \geq \tilde{J}(x)|_{x=1}$ . Получаем одинаковый по  $\alpha_1$  порядок.

Отсюда и следует утверждение теоремы.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
2. Хромова Г. В. О тихоновской регуляризации // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 75–78.
3. Хромова Г. В. Об одном способе нахождения приближенных решений операторных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 58–79.
4. Хромова Г. В., Шаталина О. И. Решение задачи типа Колмогорова — Никольского для операторов тихоновской регуляризации // Математика. Механика : сб. науч. тр. 2011. Вып. 12. С. 11–112.
5. Хромова Г. В. О модулях непрерывности неограниченных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2006. № 9(532). С. 71–78.

УДК 516.9

**В. Р. Шебалдин**

### НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ФОНДОВООРУЖЕННОСТЬ

Рассмотрим модель Рамсея экономического роста предприятия замкнутого типа. Под таким предприятием понимается производство, на котором создается один универсальный продукт, который может потребляться и инвестироваться. При этом рынки работают бесперебойно, производственные факторы существенно не меняются, при изменении цен технология не подвергается никаким изменениям.

Пусть  $K(t)$  – капитал предприятия,  $L(t)$  – количество занятых (трудовые резервы). В качестве управления  $u(t)$  указывается часть стоимости произведенного продукта, которая идет на увеличение капитала предприятия. Таким образом, имеем следующую модель [1]:

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \quad K(0) = K_0, \quad (1)$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \quad L(0) = 0, \quad (2)$$

$$u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$J(K, L, u) = \int_0^T \{e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln F(K, L)]\} dt \rightarrow \max, \quad (4)$$

где  $\mu = \text{const}, \mu > 0$  – заданный коэффициент потери трудовых ресурсов;  $\rho = \text{const}, \rho > 0$  – коэффициент дисконтирования;  $\varepsilon = \text{const}, \varepsilon > 0$  – заданный параметр, определяющий часть стоимости произведенного продукта, которую предприятие обязано потратить на развитие производства; функция производства  $F(K, L)$  – дважды непрерывно дифференцируемая, положительная однородная функция своих аргументов;  $u(t)$  – кусочно-непрерывная функция.

В настоящей статье данная модель рассматривается на конечном интервале времени. Доказано [2], что при выполнении так называемых «неоклассических» условий данная задача имеет решение.

Отметим, что для предприятия также существенны такие показатели, как достижение определенного уровня капитала в заданные моменты времени, относительные показатели уровня риска для сбыта продукции и другие [3].

Здесь рассматриваются ограничения на фондовооруженность предприятия в фиксированные моменты времени (см. [3]), то есть

$$\frac{K(t_j)}{L(t_j)} \geq c_j, \quad t_j \in [0, T], \quad j = \overline{1, q}. \quad (5)$$

Доказано (см. [1]), что при замене  $x(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$  задача (1–3), (5) сводится к следующей:

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6)$$

$$u \in U_\varepsilon, \quad (7)$$

$$x(t_j) \geq c_j, \quad j = \overline{1, q}, \quad (8)$$

$$J(x, u) = \int_0^T \{e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]\} dt \rightarrow \max, \quad (9)$$

где  $f(x) = F(x, 1)$ .

В следующей теореме для данной задачи доказываются необходимые условия экстремума.

**Теорема.** Пусть  $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$  – оптимальная пара задачи (6–9). Тогда существуют дифференцируемые функции  $\psi_j(t), j = \overline{0, q}$ , удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\max_{u(t) \in V_\varepsilon} \min_{j \in M_0} \int_0^T \Delta_u H_j(t) dt = 0,$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{u}(t)f(\hat{x}(t)) - \mu\hat{x}(t), \quad \hat{x}(0) = x_0, \quad t \in [0, T],$$

$$\dot{\psi}_0(t) + \psi_0(\hat{u}(t)f(\hat{x}(t)) - \mu) + \frac{e^{-\rho t}}{f(\hat{x}(t))} f'(\hat{x}(t)) = 0, \quad \psi_0(T) = 0,$$

$$M_0 = M \cup \{0\}, \quad M = \{j \mid \hat{x}(t_j) = c_j \}, \quad j = \overline{1, q},$$

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_j(t), & t \in [0, t_j], \\ 0, & t \in (t_j, T], \end{cases} \quad j = \overline{1, q},$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_j(t) = -\tilde{\psi}_j(t)(\hat{u}(t)f'(\hat{x}(t)) - \mu), \quad \tilde{\psi}_j(t_j) = 1, \quad t \in [0, t_j],$$

$$\Delta_u H_j(t) = \psi_j(t)f(\hat{x}(t))(u(t) - \hat{u}(t)), \quad j = \overline{1, q},$$

$$\Delta_u H_0(t) = \psi_0[f_0(\hat{x}(t), u(t)) - f_0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))],$$

где  $f_0(x, u) = e^{-\rho t}(\ln(1 - u) + \ln f(x))$ , а  $V_\varepsilon$  – множество кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих ограничению (7).

Для доказательства данной теоремы производится редукция задачи (6–9) к вспомогательной линейной задаче оптимального управления с помощью замены  $t(\tau) = \int_0^\tau v(s)ds$ ,  $v(s) \geq 0$ , где  $v(s)$  – управление во вспомогательной задаче оптимального управления [4]. Для полученной задачи доказываются необходимые условия экстремума аналогично доказательству, приведенному в [5]. С помощью обратной замены  $\tau = \tau(t)$  было получено доказательство данной теоремы.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Aseev S. M., Kryazhimskii A. V.* The Pontryagin Maximum Principle and Optimal Growth Problems /Steklov Institute of Math. Russian Academy of Science. Moscow. 2007. Vol. 2007. P. 253.
2. *Imada K.* On a Two-sector Model of Economic Growth. Comments and a Generalization. // Rev. econ. stud. 1963. Vol. 30, №2. P. 119–127.
3. *Ногин В. Д.* Введение в оптимальное управление. СПб. : ЮТАС, 2008. 92 с.
4. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1967. №5(3). С. 395–493.
5. *Шебалдин В. Р.* Об одной задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями. Саратов, 1995. 14 с. Деп. в ВИНТИ, №3074–В95.

Е. В. Шишкова

**ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ  
ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМ  
СЕМЕЙСТВОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
НА КЛАССАХ ЛИПШИЦА**

Модифицируя операторы из [1], в [2] автором было получено семейство интегральных операторов, позволяющее восстанавливать функцию вместе с производными до  $l$ -го порядка включительно на отрезке  $[a, b]$ . Рассмотрим эти операторы при  $l = 0$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ :

$$\hat{T}_{\alpha k}^0 f = a_k \int_{x(1-2\alpha)}^{x(1-2\alpha)+2\alpha} ((t - x(1 - 2\alpha) - \alpha)^2 - \alpha^2)^k f(t) dt,$$

где  $\alpha > 0$  – параметр,  $a_k = (-1)^k \frac{(2k + 1)!}{(k!)^2 2^{2k+1}} \alpha^{-(2k+1)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

В данной статье находится точная по порядку оценка для величины

$$\Delta_1(\hat{T}_{\alpha k}^0, Lip_M \beta[0, 1]) = \sup \left\{ \left\| \hat{T}_{\alpha k}^0 f - f \right\|_{C[0,1]} : f \in Lip_M \beta[0, 1] \right\},$$

характеризующей скорость сходимости функции  $f(x)$  функциями  $\hat{T}_{\alpha k}^0 f$  на классе  $Lip_M \beta[0, 1]$ .

**Теорема 1.** *Справедлива двусторонняя оценка:*

$$M \frac{(2k + 1)! \Gamma(k + \beta + 1)}{k! \Gamma(2k + \beta + 2)} 2^\beta \alpha^\beta \leq \Delta_1(\hat{T}_{\alpha k}^0, Lip_M \beta[0, 1]) \leq M 2^\beta \alpha^\beta,$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция Эйлера,  $0 < \beta \leq 1$ .

**Доказательство.** Учитывая, что  $\hat{T}_{\alpha k}^0 1 \equiv 1$ , имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{T}_{\alpha k}^0 f - f \right\|_{C[0,1]} = \\ & = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| a_k \int_{x(1-2\alpha)}^{x(1-2\alpha)+2\alpha} ((t - x(1 - 2\alpha) - \alpha)^2 - \alpha^2)^k (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \\ & \leq \max_{0 \leq x \leq 1, |x-t| \leq 2\alpha} |f(t) - f(x)| \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} \left| a_k \int_{x(1-2\alpha)}^{x(1-2\alpha)+2\alpha} ((t - x(1 - 2\alpha) - \alpha)^2 - \alpha^2)^k dt \right| = \end{aligned}$$

$$= \omega(2\alpha) \leq M(2\alpha)^\beta,$$

где  $\omega(2\alpha)$  – модуль непрерывности функции  $f(x)$ . Заметим, что оценка сверху для величины  $\left\| \hat{T}_{\alpha k}^0 f - f \right\|_{C[0,1]}$  не зависит от выбора функции  $f(x)$ , поэтому  $\Delta_1(\hat{T}_{\alpha k}^0, Lip_M \beta[0, 1]) \leq M(2\alpha)^\beta$ .

С другой стороны,

$$\Delta_1(\hat{T}_{\alpha k}^0, Lip_M \beta[0, 1]) \geq \left\| \hat{T}_{\alpha k}^0 f - f \right\|_{C[0,1]} \geq \left| \hat{T}_{\alpha k}^0 f_0 - f_0 \right|_{x=0},$$

где в качестве функции  $f_0(x)$  возьмем  $f_0(x) = Mx^\beta \in Lip_M \beta[0, 1]$ . Таким образом

$$\begin{aligned} \left| \hat{T}_{\alpha k}^0 f_0 - f_0 \right|_{x=0} &= \left| M a_k \int_0^{2\alpha} ((t - \alpha)^2 - \alpha^2)^k t^\beta dt \right| = \\ &= \left| M a_k (-1)^k (2\alpha)^{2k+1} \int_0^1 \xi^{k+\beta} (1 - \xi)^k d\xi \right| = \\ &= \left| M a_k (-1)^k (2\alpha)^{2k+1+\beta} \frac{\Gamma(k + \beta + 1) \Gamma(k + 1)}{\Gamma(2k + \beta + 2)} \right|, \end{aligned}$$

где  $\xi = t/2\alpha$ .

Учитывая выражение для  $a_k$ , получаем оценку снизу в условии теоремы.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шишкова Е. В. Регуляризация задачи численного дифференцирования // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 99–101.
2. Хромова Г. В. О дифференцировании функций, заданных с погрешностью // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. 1984. Вып. 6. С. 53–58.

В. А. Юрко

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА НЕКОМПАКТНЫХ ГРАФАХ

**1.** Исследуется обратная задача восстановления сингулярных дифференциальных операторов с неинтегрируемыми особенностями и с обобщенными граничными условиями Дирихле на некомпактных звездообразных графах по заданным спектральным данным. Приведена теорема единственности и получена конструктивная процедура решения обратной задачи.

Рассмотрим некомпактный звездообразный граф  $T$  в  $\mathbf{R}^\ell$  с множеством вершин  $\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_p\}$  и множеством ребер  $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_p\}$ , где  $e_j = [v_j, v_0]$ ,  $j = \overline{1, p}$  – конечные отрезки, а  $e_0 = [v_0, v_{p+1})$  – луч,  $v_{p+1} := \infty$ . Пусть  $l_j$  – длина ребра  $e_j$ ,  $j = \overline{1, p}$ . Каждое ребро  $e_j$ ,  $j = \overline{1, p}$ , параметризуется параметром  $x_j \in [0, l_j]$  так, что начальная точка  $v_j$  соответствует  $x_j = 0$ , а конечная точка  $v_0$  соответствует  $x_j = l_j$ . Луч  $e_0 = [v_0, \infty)$  параметризуется параметром  $x_0 \in [0, \infty)$  так, что  $x_0 = 0$  соответствует вершине  $v_0$ . Функция  $Y$  на  $T$  имеет вид  $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0, p}}$ , где функция  $y_j(x_j)$  определена на ребре  $e_j$ . Пусть  $q = \{q_j\}_{j=\overline{0, p}}$  – интегрируемая функция на  $T$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение на  $T$ :

$$-y_j''(x_j) + Q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad Q_j(x_j) = \frac{\omega_j}{x_j^2} + q_j(x_j), \quad j = \overline{0, p}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – спектральный параметр,  $\omega_j$  – вещественные числа,  $Q = \{Q_j\}_{j=\overline{0, p}}$  – вещественнозначная функция на графе  $T$ . Пусть для определенности  $\omega_j = \nu_j^2 - 1/4$ ,  $Re \nu_j > 0$ ,  $\nu_j \notin \mathbf{N}$ ,  $\nu_0 = 1/2$  (остальные случаи исследуются аналогично). Предположим, что  $q_j(x_j)x_j^{1-2\nu_j}$ ,  $j = \overline{1, p}$ , и  $(1 + x_0)q_0(x_0)$  интегрируемы. Функция  $Q$  на графе  $T$  называется *потенциалом*. В статье исследуется краевая задача  $L = L(Q)$  для дифференциального уравнения (1) на графе  $T$  со стандартными условиями склейки [1] во внутренней вершине  $v_0$  и с краевыми условиями

$$y_j(x_j) = O(x_j^{\nu_j+1/2}), \quad x_j \rightarrow 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad (2)$$

в граничных вершинах  $v_j$ . Пусть  $\{S_{jm}(x_j, \lambda)\}_{m=1,2}$  – фундаментальная система решений Бесселя уравнения (1) на ребре  $e_j$  такая, что

$S_{jm}(x_j, \lambda) \sim c_{jm} x_j^{\mu_{jm}}$ ,  $x_j \rightarrow 0$ ,  $\mu_{jm} = (-1)^m \nu_j + 1/2$ ,  $c_{j1} c_{j2} = (2\nu_j)^{-1}$ ,  $\langle S_{j1}, S_{j2} \rangle \equiv 1$ , где  $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$  [2].

Рассмотрим функции

$$G_0(\lambda) = \prod_{j=1}^p S_{j2}(l_j, \lambda), \quad g_0(\lambda) = G_0(\lambda) \sum_{j=1}^p \frac{S'_{j2}(l_j, \lambda)}{S_{j2}(l_j, \lambda)}. \quad (3)$$

Пусть функции  $G_k(\lambda)$  и  $g_k(\lambda)$  получаются из  $G_0(\lambda)$  и  $g_0(\lambda)$  соответственно заменой  $S_{k2}^{(\xi)}(l_k, \lambda)$  на  $S_{k1}^{(\xi)}(l_k, \lambda)$ ,  $\xi = 0, 1$ . Пусть  $\lambda = \rho^2$ ,  $Im \rho \geq 0$ . Положим  $\Omega_0 = \{\rho : Im \rho > 0\}$ ,  $\Omega = \{\rho : Im \rho \geq 0, \rho \neq 0\}$ ,  $\Omega_+ = \{\rho : Im \rho = 0\}$ . Через  $\Pi_0$  обозначим  $\lambda$  – плоскость с двухсторонним разрезом  $\Pi_+$  вдоль луча  $\gamma := \{\lambda : \lambda \geq 0\}$ , а  $\Pi = \overline{\Pi_0} \setminus \{0\}$ . Тогда при отображении  $\rho \rightarrow \rho^2 = \lambda$  множества  $\Pi, \Pi_+$  и  $\Pi_0$  соответствуют множествам  $\Omega, \Omega_+$  и  $\Omega_0$ . Пусть  $e(x_0, \rho)$ ,  $x_0 \geq 0$ ,  $Im \rho \geq 0$  – решение Йоста для уравнения (1) на ребре  $e_0$  (см. [1]). Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) &= G_0(\lambda) e'(0, \rho) - g_0(\lambda) e(0, \rho), \\ \Delta_k(\rho) &= G_k(\lambda) e'(0, \rho) - g_k(\lambda) e(0, \rho). \end{aligned} \quad (4)$$

**Теорема 1.** *Функции  $\Delta(\rho)$  и  $\Delta_k(\rho)$ ,  $k = \overline{1, p}$ , являются аналитическими в  $\Omega_0$  и непрерывными в  $\overline{\Omega_0}$ . При вещественном  $\rho \neq 0$ ,  $\overline{\Delta(\rho)} = \Delta(-\rho)$ ,  $\overline{\Delta_k(\rho)} = \Delta_k(-\rho)$ .*

Зафиксируем  $k = 1, \dots, p$ . Пусть  $\Psi_k = \{\psi_{kj}\}_{j=\overline{0, p}}$  – решение уравнения (1) на  $T$ , удовлетворяющее условиям склейки

$$\psi_{kj}(l_j, \lambda) = \psi_{k0}(0, \lambda), \quad j = \overline{1, p}, \quad \sum_{j=1}^p \psi'_{kj}(l_j, \lambda) = \psi'_{k0}(0, \lambda) \quad (5)$$

и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \psi_{kk}(x_k, \lambda) &= c_{k1} x_k^{-\nu_k+1/2} (1 + o(1)), \quad x_k \rightarrow 0, \\ \psi_{kj}(x_j, \lambda) &= O(x_j^{\nu_j+1/2}), \quad x_j \rightarrow 0, \quad j = \overline{1, p} \setminus k, \\ \psi_{k0}(x_0, \lambda) &= O(\exp(i\rho x_0)), \quad x_0 \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Учитывая (6), получаем

$$\left. \begin{aligned} \psi_{kk}(x_k, \lambda) &= S_{k1}(x_k, \lambda) + M_{kk}(\lambda) S_{k2}(x_k, \lambda), \\ \psi_{kj}(x_j, \lambda) &= M_{kj}(\lambda) S_{j2}(x_j, \lambda), \quad j = \overline{1, p} \setminus k, \\ \psi_{k0}(x_0, \lambda) &= M_{k0}(\lambda) e(x_0, \rho), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где коэффициенты  $M_{kj}(\lambda)$  не зависят от  $x_j$ . Функцию  $M_k(\lambda) := M_{kk}(\lambda)$  будем называть *функцией Вейля* относительно вершины  $v_k$ , а вектор  $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$  – *вектором Вейля*. Подставляя (7) в условия склейки (5), получаем систему линейных алгебраических уравнений  $s_k$  относительно  $M_{kj}(\lambda)$ ,  $j = \overline{0,p}$ . Определитель системы  $s_k$  равен  $\Delta(\rho)$ . Решая  $s_k$  по формулам Крамера, вычисляем

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\rho)}{\Delta(\rho)},$$

$$M_{kj}(\lambda) = \prod_{s=1}^p S_{s2}(l_s, \lambda) \frac{e(0, \rho)}{\Delta(\rho) S_{j2}(l_j, \lambda) S_{k2}(l_k, \lambda)}, \quad j = \overline{1,p} \setminus k. \quad (8)$$

**2.** Рассмотрим компактный граф  $T_0 := T \setminus \{e_0\}$  с множеством ребер  $e_1, \dots, e_p$  и множеством вершин  $v_0, \dots, v_p$ . Пусть  $L_0$  – краевая задача для уравнения (1) на графе  $T_0$  со стандартными условиями склейки и с граничными условиями (2).

**Теорема 2.** *Нули целой функции  $g_0(\lambda)$  совпадают с собственными значениями краевой задачи  $L_0$ . Собственные значения краевой задачи  $L_0$  вещественны. Алгебраическая кратность каждого собственного значения равна его геометрической кратности.*

Пусть  $\Lambda^* := \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega, \Delta(\rho) = 0\}$  – множество нулей функции  $\Delta(\rho)$  в  $\Omega$ . Тогда  $\Lambda^* = \Lambda' \cup \Lambda''$ , где

$$\Lambda' := \{\lambda = \rho^2 : \rho \in \Omega_0, \Delta(\rho) = 0\},$$

$$\Lambda'' := \{\lambda = \rho^2 : \text{Im } \rho = 0, \rho \neq 0, \Delta(\rho) = 0\}.$$

Функции Вейля  $M_k(\lambda)$ ,  $k = \overline{1,p}$ , являются аналитическими в  $\Pi_0 \setminus \Lambda'$  и непрерывными в  $\Pi \setminus \Lambda^*$ . Множество особенностей  $M(\lambda)$  (как аналитической функции) совпадает с множеством  $S^* := \gamma \cup \Lambda^*$  и называется *спектром  $L$* . Обозначим

$$V_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \left( M_k^-(\lambda) - M_k^+(\lambda) \right), \quad \lambda > 0, \quad k = \overline{1,p},$$

$$M_k^\pm(\lambda) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_k(\lambda \pm i\varepsilon), \quad \text{Re } \varepsilon > 0.$$

**Теорема 3.** *Пусть  $\lambda_0 = \rho_0^2$ ,  $\rho_0 \in \Omega_0$ , т.е.  $\lambda_0 \notin [0, \infty)$ . Для того чтобы  $\lambda_0$  было собственным значением  $L$  на  $T$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda_0 \in \Lambda'$ . Каждое собственное значение из  $\Lambda'$  вещественно, его алгебраическая кратность равна геометрической кратности, и каждый полюс  $M_k(\lambda)$  является простым.*



**Теорема 4.** Пусть  $\lambda_0 = \rho_0^2 > 0$ . Для того чтобы  $\lambda_0$  было собственным значением  $L$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda_0 \in \Lambda''$ .

Отметим, что множество  $\Lambda''$  положительных собственных значений может быть пустым, конечным или бесконечным неограниченным.

Пусть  $\Lambda^+$  – множество неотрицательных собственных значений  $L$ . Тогда  $\Lambda^+ = \Lambda''$ , если  $\lambda_0 = 0$  не является собственным значением  $L$ , и  $\Lambda^+ = \Lambda'' \cup \{0\}$ , если  $\lambda_0 = 0$  является собственным значением  $L$ . Обозначим  $\Lambda^- := \Lambda'$ . Тогда  $\Lambda := \Lambda^- \cup \Lambda^+$  – множество всех собственных значений  $L$ , причем  $\Lambda$  ограничено снизу и не имеет конечных предельных точек. В частности,  $\Lambda^-$  – конечное множество. Таким образом, спектр  $L$  состоит из положительной полуоси  $\gamma = \{\lambda : \lambda \geq 0\}$  и дискретного вещественного ограниченного снизу множества  $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \theta}$  собственных значений. Множество индексов  $\theta \in \mathbf{N}$  может быть пустым, конечным или бесконечным. Тогда  $\Lambda^\pm = \{\lambda_n\}_{n \in \theta_\pm}$ , где  $\theta = \theta_- \cup \theta_+$ .

**Теорема 5.** Зафиксируем  $\lambda_n \in \Lambda$ . Существуют конечные пределы

$$m_{kn} := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n, \lambda \in \Pi} (\lambda - \lambda_n) M_k(\lambda), \quad k = \overline{1, p}.$$

Обозначим  $m = \{m_{kn}\}_{k=\overline{1, p}, n \in \theta}$ ,  $V(\lambda) = \{V_k(\lambda)\}_{k=\overline{1, p}}$ ,  $\lambda > 0$ . Данные  $S = \{V(\lambda), \Lambda, m\}$  называются спектральными данными для  $L$ .

**Обратная задача 1.** Даны  $S$ , построить потенциал  $Q$  на графе  $T$ .

**Теорема 6.** Задание спектральных данных  $S$  однозначно определяет потенциал  $q$  на  $T$ . Решение обратной задачи 1 строится по следующему алгоритму.

**Алгоритм 1.** Даны спектральные данные  $S$ .

1) Для каждого  $k = \overline{1, p}$  решаем вспомогательную обратную задачу: по  $S$  построить  $M_k(\lambda)$  и потенциал  $Q_k$  на  $e_k$ . При этом используем метод спектральных отображений [1, 2].

5) Вычисляем  $S_{km}(x_k, \lambda)$ ,  $m = \overline{1, 2}$ , и  $\psi_{kk}(x_k, \lambda)$  из (7).

6) Находим  $\psi_{kj}(l_j, \lambda)$  при  $j, k = \overline{1, p}$ , используя (5).

7) Строим  $M_{kj}(\lambda)$ ,  $j = \overline{1, p} \setminus k$  по (7).

8) Вычисляем  $\Delta(\rho)/e(0, \rho)$  из (8).

9) Строим  $G_0(\lambda)$  и  $g_0(\lambda)$  по (3).

10) Находим  $M_0(\lambda) := e'(0, \rho)/e(0, \rho)$ , используя (4).

11) Строим потенциал  $Q$  на  $e_0$ , решая классическую обратную задачу Штурма – Лиувилля на полуоси по функции Вейля  $M_0(\lambda)$  (см. [1]).

Таким образом, выполняя алгоритм 1, мы получаем решение обратной задачи 1 и доказываем его единственность.

Аналогичным образом исследуется обратная задача восстановления потенциала по вектору Вейля  $M(\lambda)$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.
2. Yurko V. A. Singular differential operators on noncompact spatial networks // Preprint. Schriftenreihe des Fachbereichs Fur Mathematik Universitaet Duisburg-Essen, SM-DU-728. Duisb-Essen, 2011. P. 1–17.

А. С. Антипова, В. Г. Бирюков

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ  
ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Рассмотрена задача кинематического оптимального пространственного разворота твердого тела. Проведено аналитическое исследование задачи. Приведены результаты численного решения такой задачи.

**1. Постановка задачи.** Угловое движение твердого тела описывается кватернионным дифференциальным кинематическим уравнением [1, 2]

$$2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \quad (1)$$

где  $\bar{\lambda}$  – кватернион, характеризующий ориентацию твердого тела относительно инерциальной системы координат,  $\bar{\omega}$  – вектор абсолютной угловой скорости твердого тела, заданный своими проекциями на оси связанной системы координат, знак « $\circ$ » означает кватернионное произведение, а точка — дифференцирование по времени.

Требуется построить управление (в качестве управления выступает вектор абсолютной угловой скорости  $\bar{\omega}$ ), переводящее твердое тело из заданного начального углового положения

$$\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}^0 \quad (2)$$

в требуемое конечное угловое положение

$$\bar{\lambda}(T) = \bar{\lambda}^T \quad (3)$$

и доставляющее минимум функционалу качества

$$I = \int_0^T (\alpha_1 \omega_1^2 + \alpha_2 \omega_2^2 + \alpha_3 \omega_3^2) dt, \quad (4)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const} > 0$  – весовые множители функционала. Функционал (4) характеризует общие энергетические затраты на управление. Управление полагаем неограниченным, а время переориентации  $T$  – фиксированным.

**2. Метод решения задачи.** Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина [3]. Составим функцию Гамильтона – Понтрягина

$$\begin{aligned}
H = & -(\alpha_1\omega_1^2 + \alpha_2\omega_2^2 + \alpha_3\omega_3^2) - \frac{1}{2}\psi_0(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3) + \\
& + \frac{1}{2}\psi_1(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2) + \frac{1}{2}\psi_2(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3) + \\
& + \frac{1}{2}\psi_3(\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1),
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $\psi_j (j = \overline{0, 3})$  – сопряженные переменные, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
2\dot{\psi}_0 &= -\psi_1\omega_1 - \psi_2\omega_2 - \psi_3\omega_3, \\
2\dot{\psi}_1 &= \psi_0\omega_1 + \psi_2\omega_3 - \psi_3\omega_2, \\
2\dot{\psi}_2 &= \psi_0\omega_2 + \psi_3\omega_1 - \psi_1\omega_3, \\
2\dot{\psi}_3 &= \psi_0\omega_3 + \psi_1\omega_2 - \psi_2\omega_1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для неограниченного управления из условия максимума функции Гамильтона – Понтрягина (5) находим

$$\omega_1^{opt} = \frac{p_1}{4\alpha_1}, \quad \omega_2^{opt} = \frac{p_2}{4\alpha_2}, \quad \omega_3^{opt} = \frac{p_3}{4\alpha_3}, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\psi_0\lambda_1 + \psi_1\lambda_0 + \psi_2\lambda_3 - \psi_3\lambda_2, \\
p_2 &= -\psi_0\lambda_2 - \psi_1\lambda_3 + \psi_2\lambda_0 + \psi_3\lambda_1, \\
p_3 &= -\psi_0\lambda_3 + \psi_1\lambda_2 - \psi_2\lambda_1 + \psi_3\lambda_0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Дифференцируя соотношения (8) по времени и учитывая уравнения (1), (6) и выражения для оптимального управления (7), приходим к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned}
2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, \\
2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\
2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\
2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \\
\alpha_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(\alpha_3 - \alpha_2) &= 0, \\
\alpha_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(\alpha_1 - \alpha_3) &= 0, \\
\alpha_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(\alpha_2 - \alpha_1) &= 0,
\end{aligned} \right. \tag{9}$$

с начальным условием (2) и конечным условием (3).

В частном случае, когда весовые коэффициенты функционала (4) равны между собой, т.е.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ , задача была решена аналитически. В случае, когда равны между собой только два из трех весовых множителя функционала (4), задача сводится к решению системы четырех трансцендентных уравнений, которая решалась численно. В общем случае, когда  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  имеют произвольные значения, задача также решалась численно.

**3. Численное решение задачи.** Для численного решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) с краевыми условиями (2) и (3) была разработана программа на языке программирования C#, реализующая метод Ньютона для решения краевых задач оптимального управления [4]. В качестве начального приближения для метода Ньютона использовалось частное аналитическое решение, построенное для случая, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ .

Приведем пример численного решения задачи. Кватернионы начальной и конечной ориентации

$$\lambda_0^0 = -0.58213, \lambda_1^0 = 0.10822, \lambda_2^0 = 0.641196, \lambda_3^0 = -0.48815;$$

$$\lambda_0^T = 1, \lambda_1^T = 0, \lambda_2^T = 0, \lambda_3^T = 0.$$

Весовые коэффициенты функционала  $\alpha_1 = 1000, \alpha_2 = 2000, \alpha_3 = 5000$ . Время переориентации  $T = 300$  с.

Результаты численного решения приведены на рис. 1, рис. 2 в виде графиков изменения компонент вектора абсолютной угловой скорости твердого тела (управления) и графиков изменения компонент кватерниона ориентации (фазовых координат) в процессе управления угловым движением.

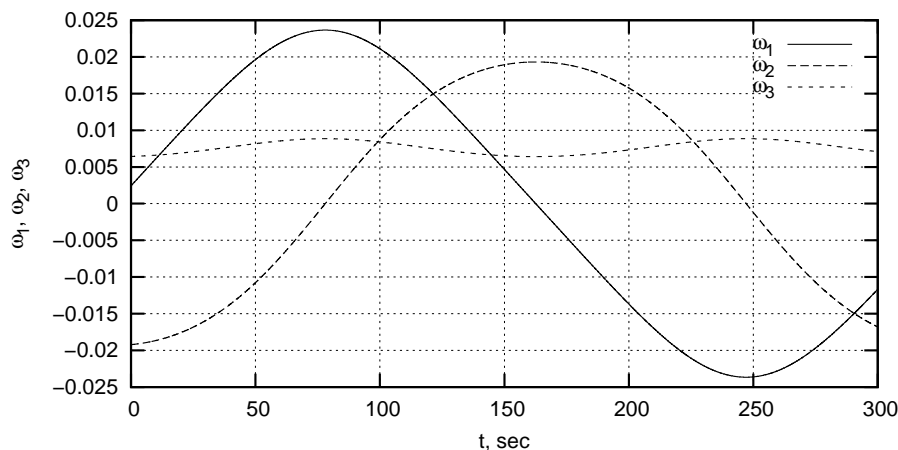


Рис. 1

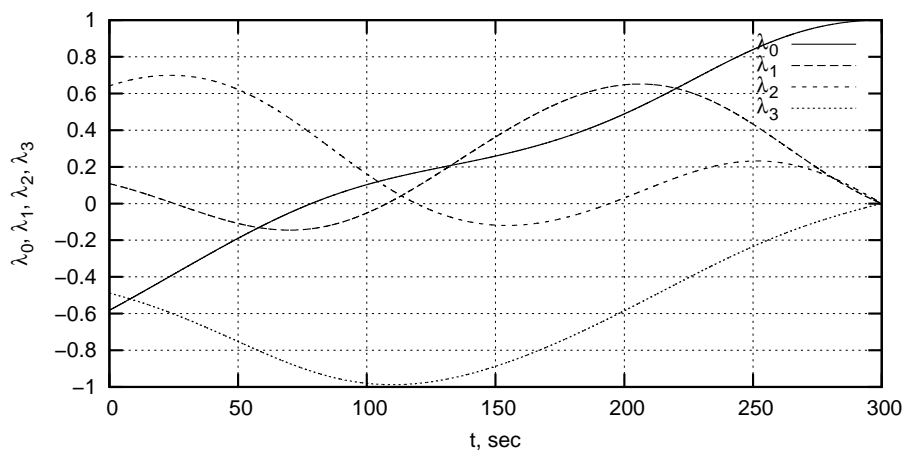


Рис. 2

Из рис. 1, 2 очевидно, что построенный закон оптимального управления обеспечивает перевод твердого тела из заданного начального в требуемое конечное угловое положение.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
3. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
4. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.

А. А. Барышев, М. А. Федюкина

### О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВИБРАЦИОННОГО ИЗГИБА ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ – ПОЛОСЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В статье рассматривается пластинка толщины  $h$  и шириной  $a$ , изготовленная из вязкоупругого материала. Срединная плоскость пластинки отнесена к декартовой системе координат, как показано на рис. 1.

Считается, что рассматриваемая пластинка испытывает малые деформации под действием распределенной по внешней плоскости  $z = -h/2$  поперечной нагрузки:

$$q(x, t) = q_1(x) \cos \omega t + q_2(x) \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота внешних воздействий. Аналогично представляются все характеристики НДС.

Для составляющих проекций вектора смещения  $u_k(x, z)$  и  $w_k(x, z)$  ( $k = 1, 2$ ) в [1] получена система уравнений, которая после перехода к безразмерным величинам преобразуется к виду (тангенциальные силы инерции не учитываются)

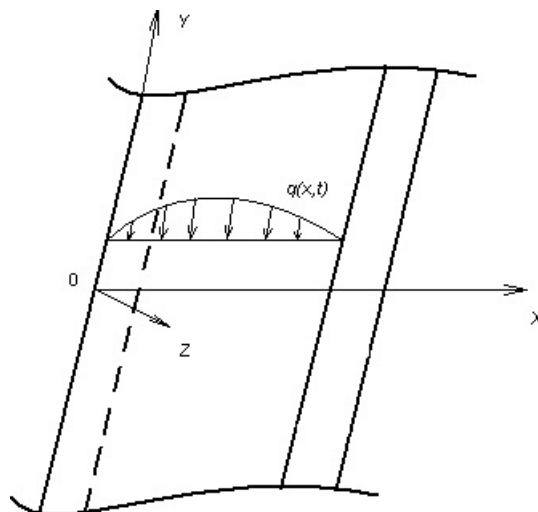


Рис. 1

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial \zeta^2} = -\frac{h_0^2}{v'} \frac{\partial^2 U_k}{\partial \xi^2} - \frac{h_0}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 W_k}{\partial \xi \partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2 W_k}{\partial \zeta^2} = -2(1+\nu)v'(-1)^{k-1}\rho h^2\omega^2 \sum_{j=1}^2 e_{k+j-1}W_j - v'h_0^2 \frac{\partial^2 W_k}{\partial \xi^2} - \frac{h_0}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 U_k}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad (2)$$

где  $U_k = u_k/h$ ,  $W_k = w_k/h$  – безразмерные составляющие компонент вектора перемещения,  $\zeta = z/h$ ,  $\xi = x/h$ ,  $h_0 = h/a$ ,  $v' = 0.5(1-2\nu)/(1-\nu)$ ,  $\nu = \text{const}$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность.

Для понижения размерности этой системы применим метод сплайн-коллокаций [2]. Будем искать неизвестные функции в виде

$$U_k(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\xi) \tilde{U}_{j+(k-1)(N-1)}(\zeta),$$

$$W_k(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^N \psi_j(\xi) \tilde{W}_{j+(k-1)(N-1)}(\zeta). \quad (3)$$

Здесь  $N$  – число точек коллокации,  $\varphi_j$  и  $\psi_j$  – линейные комбинации кубических В-сплайнов, подобранные таким образом, чтобы на краях  $\xi = 0$ ,  $\xi = 1$  выполнялись условия, например, жесткого закрепления  $U_k = W_k = 0$ .

Это позволяет свести краевую задачу для системы (2) к одномерной относительно вектора  $\bar{Z} = \{z_r(\zeta)\}$ . Данная система может быть записана

в нормальной форме Коши:

$$\frac{d\bar{Z}}{d\zeta} = A(\omega)\bar{Z},$$

где  $A(\omega)$  – квадратная матрица с известными компонентами,

$$Z_j(\zeta) = \tilde{U}_j(\zeta), Z_{j+2(N+1)}(\zeta) = \tilde{U}'_j(\zeta),$$

$$Z_{j+4(N+1)}(\zeta) = \tilde{W}_j(\zeta), Z_{j+6(N+1)}(\zeta) = \tilde{W}'_j(\zeta), j = 0 \dots 2\bar{N} + 1.$$

Для решения данной задачи использовался метод Виноградова [3], алгоритм которого представлен в виде блок-схемы на рис. 2.



Рис. 2

Ясно, что при увеличении числа точек коллокаций растет число уравнений в краевой задаче и, следовательно, увеличивается время вычислений. Пробные расчеты показали, что устойчивость вычислений достигается при  $N \geq 80$  (время вычислений – 582,554 с). Поэтому являются актуальными вопросы, связанные с сокращением времени расчетов.

Для этого метод был реализован с использованием технологий параллельного программирования OpenMP [4] и MPI [5]. При использовании технологии OpenMP за основу берётся последовательная программа, а для создания её параллельной версии программисту предоставляется набор директив, функций и переменных окружения, которые предназначены для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью.

Численные расчеты проводились на персональном компьютере ASUS N52D с двухъядерным процессором AMD Turion II Dual-Core Mobile P520, с тактовой частотой 2.3 ГГц, оперативная память 3 Гб.



Из табл. 1 видно, что скорость вычисления матричной экспоненты увеличилась почти в два раза, скорость решения СЛАУ на 27%, а скорость заполнения данных на 34%. При использовании технологии параллельного программирования OpenMP ресурсы компьютера используются практически полностью, например, загрузка ЦП составляет 95–98%.

Таблица 1

	без OpenMP		с OpenMP	
	k = 100	k = 200	k = 100	k = 200
Заполнение данных, с	0,453	0,548	0,352	0,361
Вычисление матричной экспоненты, с	133,43	267,596	72,712	150,564
Решение СЛАУ, с	17,864	17,095	12,999	13,833

Код программы был собран на сервере 8x Xeon E5335 2GHz с доступной оперативной памятью 32 Гб. На сервере установлена реализация стандарта MPI – MPICH2, а также собрана библиотека PETSc (версия 3.1) (см. [5]). Кластер предоставлен Институтом наноструктур и биомеханики СГУ.

Анализируя значения табл. 2, можно сказать, что в рамках одного сервера программа, реализованная с помощью технологии OpenMP, работает быстрее, чем при использовании MPI. Например, время вычисления матричной экспоненты сократилось примерно в 4 раза (при значении  $k = 100$ ).

Таблица 2

	8x Xeon E5335 (MPI)		8x Xeon E5335 (OpenMP)		Кластер из двух серверов 8x Xeon E5335 (MPI)	
	k = 100	k = 200	k = 100	k = 200	k = 100	k = 200
Заполнение и рассылка данных, с	0,199	0,213	0,167	0,112	1,851	1,931
Вычисление матричной экспоненты, с	13,83	31,82	4,61	31,58	9,57	21,36
Решение СЛАУ, с	1,749	1,743	1,6106	2,73	1,39	1,401

Когда расчет идет на кластере, состоящем из двух серверов, скорость вычислений матричной экспоненты увеличивается примерно на 30%, а решение СЛАУ на 20%. Таким образом, при увеличении вычислитель-

ных действий алгоритма, не связанных с пересылкой данных, время значительно сокращается.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Недорезов П. Ф. Установившиеся поперечные колебания вязкоупругой пластинки – полосы // Теоретическая и прикладная механика : науч.-техн. сб. Харьков, 2002. Вып. 35. С. 139–146.
2. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) // Прикладная механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3–26.
3. URL : <http://alexeivinogradov.narod.ru/>
4. Антонов А. С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. М., 2009.
5. Антонов А. С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. М., 2004.

УДК 629

В. Г. Бирюков, В. Ю. Вахлюев

### ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрена задача оптимальной остановки вращательного движения твердого тела. Построен закон оптимального управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость неподвижного положения твердого тела и доставляющий минимум интегральному квадратичному функционалу качества переходного процесса.

**1. Постановка задачи.** Вращательное движение твердого тела описывается системой динамических уравнений Эйлера [1]

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= M_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= M_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $I_1, I_2, I_3$  – осевые моменты инерции твердого тела,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – проекции вектора абсолютной угловой скорости твердого тела на оси связанной с телом системы координат, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции твердого тела,  $M_1, M_2, M_3$  – проекции момента внешних сил, действующих на твердое тело, на оси связанной системы координат, верхняя точка означает дифференцирование по времени.

Задача заключается в построении управляющих воздействий  $M_1, M_2, M_3$ , переводящих твердое тело, движение которого описывается системой

обыкновенных дифференциальных уравнений (1), из начального состояния

$$\omega_1(0) = \omega_1^0, \quad \omega_2(0) = \omega_2^0, \quad \omega_3(0) = \omega_3^0 \quad (2)$$

в конечное состояние

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0 \quad (3)$$

асимптотически устойчивым образом. При этом должен принимать наименьшее значение функционал качества переходного процесса, характеризующий отклонение по угловым скоростям «в среднем» и общие энергетические затраты на управление:

$$I = \int_0^{\infty} (\alpha_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + \alpha_2 (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2)) dt, \quad (4)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const} > 0$ .

Будем полагать, что на управляющие воздействия  $M_1, M_2, M_3$  не наложены никакие ограничения.

**2. Метод решения задачи.** Сформулированную задачу будем решать с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина [2]. Составим функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H = - (\alpha_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + \alpha_2 (I_1^2 u_1^2 + I_2^2 u_2^2 + I_3^2 u_3^2)) + \psi_1 (u_1 - a_1 \omega_2 \omega_3) + \psi_2 (u_2 - a_2 \omega_1 \omega_3) + \psi_3 (u_3 - a_3 \omega_1 \omega_2), \quad (5)$$

где  $a_1 = \frac{I_3 - I_2}{I_1}$ ,  $a_2 = \frac{I_1 - I_3}{I_2}$ ,  $a_3 = \frac{I_2 - I_1}{I_3}$ ,  $u_1 = \frac{M_1}{I_1}$ ,  $u_2 = \frac{M_2}{I_2}$ ,  $u_3 = \frac{M_3}{I_3}$ ,  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  — сопряженные переменные, которые должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 2\alpha_1 \omega_1 + a_2 \psi_2 \omega_3 + a_3 \psi_3 \omega_2, \\ \dot{\psi}_2 &= 2\alpha_1 \omega_2 + a_1 \psi_1 \omega_3 + a_3 \psi_3 \omega_1, \\ \dot{\psi}_3 &= 2\alpha_1 \omega_3 + a_1 \psi_1 \omega_2 + a_2 \psi_2 \omega_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Структуру оптимального управления найдем из условия максимума функции Гамильтона — Понтрягина (5). Для неограниченного управления имеем

$$u_1^{opt} = \frac{\psi_1}{2\alpha_2 I_1^2}, \quad u_2^{opt} = \frac{\psi_2}{2\alpha_2 I_2^2}, \quad u_3^{opt} = \frac{\psi_3}{2\alpha_2 I_3^2}. \quad (7)$$

Подставляя полученную структуру оптимального управления (6) в уравнения (1), приходим к следующей системе обыкновенных

дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{\psi_1}{2\alpha_2 I_1^2} - a_1 \omega_2 \omega_3, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{\psi_2}{2\alpha_2 I_2^2} - a_2 \omega_1 \omega_3, \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{\psi_3}{2\alpha_2 I_3^2} - a_3 \omega_1 \omega_2.\end{aligned}\tag{8}$$

Будем искать решение для сопряженных переменных в виде

$$\psi_1 = A_1 \omega_1, \quad \psi_2 = A_2 \omega_2, \quad \psi_3 = A_3 \omega_3,\tag{9}$$

где  $A_1, A_2, A_3$  – подлежащие определению константы. Подставим соотношения (9) в уравнения (6) и (8). Получим

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{A_1 \omega_1}{2\alpha_2 I_1^2} - a_1 \omega_2 \omega_3, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{A_2 \omega_2}{2\alpha_2 I_2^2} - a_2 \omega_1 \omega_3, \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{A_3 \omega_3}{2\alpha_2 I_3^2} - a_3 \omega_1 \omega_2,\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}A_1 \dot{\omega}_1 &= 2\alpha_1 \omega_1 + (a_2 A_2 + a_3 A_3) \omega_2 \omega_3, \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= 2\alpha_1 \omega_2 + (a_1 A_1 + a_3 A_3) \omega_1 \omega_3, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= 2\alpha_1 \omega_3 + (a_1 A_1 + a_2 A_2) \omega_1 \omega_2.\end{aligned}$$

Из уравнений (10) следует, что для того чтобы выражения (9) являлись частным решением задачи, постоянные  $A_1, A_2, A_3$  должны иметь следующие значения:

$$A_1 = \pm 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} I_1, \quad A_2 = \pm 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} I_2, \quad A_3 = \pm 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} I_3.\tag{11}$$

Таким образом, закон оптимального управления, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности, имеет вид

$$u_1^{opt} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2 I_1} \omega_1, \quad u_2^{opt} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2 I_2} \omega_2, \quad u_3^{opt} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2 I_3} \omega_3,$$

или для управляющих моментов

$$M_1^{opt} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2} \omega_1, \quad M_2^{opt} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2} \omega_2, \quad M_3^{opt} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2} \omega_3.\tag{12}$$

Знак в соотношениях (12) должен быть выбран таким образом, чтобы построенный закон управления обеспечивал асимптотически устойчивый

перевод твердого тела из начального состояния (2) в конечное состояние (3).

Для доказательства устойчивости воспользуемся вторым методом Ляпунова [3]. Функцию Ляпунова примем равной кинетической энергии твердого тела, которая является положительно определенной функцией

$$V = \frac{1}{2} (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2). \quad (13)$$

Производная от функции Ляпунова (13), вычисленная в силу дифференциальных уравнений движения (1), замкнутых законом оптимального управления (12), равна

$$\dot{V} = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2} \omega_1^2 \pm \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2} \omega_2^2 \pm \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2} \omega_3^2. \quad (14)$$

Следовательно, если будет выбран знак «-», то производная от функции Ляпунова (14), вычисленная в силу дифференциальных уравнений (1), будет знакоопределенной отрицательной. Таким образом, для обеспечения асимптотически устойчивого перевода твердого тела из начального состояния (2) в конечное состояние (3) в законе оптимального управления (12) нужно выбрать знак «-».

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бухгольц Н. Н. Основы курса теоретической механики : в 2 ч. М. : Наука, 1966. Ч. 2. 332 с.
2. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 392 с.
3. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М. : Наука, 1971. 312 с.

УДК 517.51

А. В. Доль, Ю. П. Гуляев

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ КРОВОТОКА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Исследования динамики кровотока на сегодняшний день являются одним из важнейших направлений в медицине и механике. Это связано с необходимостью прогнозирования последствий оперативного вмешательства и профилактики сердечно-сосудистых заболеваний. Поэтому

построение точной и подробной математической модели движения крови по сосудам – одна из главных задач биомеханики.

Основная система уравнений динамики кровотока имеет вид

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + r \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial S'}{\partial z} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial z} + \tau, \quad (4)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p' + \frac{p_0}{R} w - \frac{T'}{R}, \quad (5)$$

$$S' = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{R} \right), \quad (6)$$

$$T' = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (7)$$

где  $\tau = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=R} \right)$ .

Обозначим  $\frac{\partial p}{\partial z} = K'(z)e^{i\omega t}$ ,  $p = K(z)e^{i\omega t}$ .

Контактные условия будут иметь вид  $v_z|_S = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $v_r|_S = \frac{\partial w}{\partial t}$ .

Будем решать систему методом разделения переменных. Для этого представим неизвестные функции в виде:

$$v_z = v_{z0}(r, z)e^{i\omega t}, v_r = v_{r0}(r, z)e^{i\omega t}, u = u_{z0}(z)e^{i\omega t}, w = w_0(z)e^{i\omega t}.$$

Из уравнения (1) получим

$$\rho i \omega v_{z0} = -K(z) + \mu \left( v_{z0}'' + \frac{1}{r} v_{z0}' \right), \quad (8)$$

$$v_{z0}'' + \frac{1}{r} v_{z0}' - \frac{i\rho\omega}{\mu} v_{z0} = -\frac{1}{\mu} K(z). \quad (9)$$

Найдем общее решение однородного уравнения:  $v_{z0}'' + \frac{1}{r} v_{z0}' - \frac{i\rho\omega}{\mu} v_{z0} = 0$ .

Обозначим  $\lambda^2 = \frac{i^3 \rho \omega}{\mu}$ . Тогда  $v_{z0}'' + \frac{1}{r} v_{z0}' + \lambda^2 v_{z0} = 0$ . Введем замену переменной:  $r' = \lambda r$ . Получим

$$v_{z0}'' + \frac{1}{r} v_{z0}' + v_{z0} = 0, \quad (10)$$

Далее штрих у  $r$  для удобства опустим. (10) – уравнение Бесселя порядка 0. Решением его будет функция Бесселя вида  $J_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}$ .

Тогда  $v_{z0} = J_0(\lambda r)C(z)$ , где  $C(z)$  – произвольная функция переменной  $z$ . Таким образом, учитывая, что частным решением неоднородного уравнения (9) будет  $-\frac{1}{\mu\lambda^2}K(z)$ , получим

$$v_z(z, r, t) = \left( C(z)J_0(\lambda r) - \frac{1}{\mu\lambda^2}K(z) \right) e^{i\omega t}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение неразрывности (3) и интегрируя его, найдем  $v_z(z, r, t)$ :

$$v_z(z, r, t) = \frac{1}{r} \left( -\frac{C'(z)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k!} \frac{(r^2)^{k+1}}{4^k(k+1)} + \frac{r^2}{2\mu\lambda^2} K'(z) \right) e^{i\omega t}. \quad (12)$$

Получим решения для  $w$  и  $u$ . Из уравнений (4) и (6) получим:

$$-\omega^2 \rho h u_{z0} = \frac{Eh}{1-\nu^2} u''_{z0} + \frac{Eh\nu}{R(1-\nu^2)} w'_0 + \frac{S_0 - T_0}{R} w_0. \quad (13)$$

Из уравнений (5) и (7) аналогично получаем

$$-\omega^2 \rho h u_{z0} = K(z) + \frac{p_0}{R} w_0 - \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)} w'_0 - \frac{Eh\nu}{R(1-\nu^2)} u'_{z0}. \quad (14)$$

Для удобства дальнейшего решения системы (13)–(14) введем обозначения:

$$a = -\omega^2 \rho h, b = a - \frac{p_0}{R} + \frac{Eh}{R^2(1-\nu^2)}, c = \frac{Eh\nu}{R(1-\nu^2)},$$

$$d = \frac{Eh}{1-\nu^2}, g = \frac{S_0 - T_0}{R}.$$

Тогда получим систему четырех дифференциальных уравнений (13), (14), а также уравнения для  $C(z)$  и  $K(z)$ , полученные из контактных условий. В этих уравнениях  $u_{z0}$  и  $w_0$  зависят только от  $z$ , поэтому уравнения будут обыкновенными дифференциальными. В новых обозначениях:

$$bw_0 = K(z) - cu'_{z0},$$

$$au'_{z0} = du''_{z0} + cw'_0 + gw_0,$$

$$C(z)J_0(R\lambda) - \frac{1}{\mu\lambda^2}K(z) = i\omega u_{z0}, \quad (15)$$

$$-\frac{C'(z)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda^2 R)^{k+1}}{k!k! 4^k(k+1)} + \frac{R}{2\mu\lambda^2} K'(z) = i\omega w_0.$$

Введем обозначения для простоты дальнейших вычислений:

$$A = J_0(\lambda R), B = \frac{1}{\mu\lambda^2}, G = i\omega, D = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda^2 R)^{k+1}}{k!k! 4^k(k+1)}, E = \frac{R}{2\mu\lambda^2}.$$

Ищем решение системы (15) в виде

$$K(z) = C_1 e^{\lambda z}, u_{z0}(z) = C_2 e^{\lambda z}, w_0(z) = C_3 e^{\lambda z}, C(z) = C_4 e^{\lambda z}.$$

Тогда получим систему уравнений относительно  $C_i, i = 1, \dots, 4$ :

$$\begin{aligned} bC_3 &= C_1 - c\lambda C_2, \\ aC_2 &= d\lambda^2 C_2 + c\lambda C_3 + gC_3, \\ AC_4 - BC_1 &= GC_2, \\ D\lambda C_4 + E\lambda C_1 &= GC_3. \end{aligned} \tag{16}$$

Характеристическое уравнение системы будет  $A_0\lambda^3 + B_0\lambda^2 + C_0\lambda + D_0 = 0$ , где  $A_0 = bBDD - Ac^2E + AbdE$ ,  $B_0 = -AGd - DcgG + cEg - DgcB$ ,  $C_0 = bBDA - AabE - Dc^2gB - DGg$ ,  $D_0 = AGa$ .

Корни кубического уравнения могут быть получены численно. Далее, поочередно подставляя полученные корни в систему (16), решаем ее относительно  $C_i, i = 1, \dots, 4$ . Тогда общее решение системы (15) будет иметь вид

$$\begin{aligned} K(z) &= \alpha_{11}A_1 e^{\lambda_1 z} + \alpha_{21}A_2 e^{\lambda_2 z} + \alpha_{31}A_3 e^{\lambda_3 z}, \\ u_{z0}(z) &= \alpha_{12}A_1 e^{\lambda_1 z} + \alpha_{22}A_2 e^{\lambda_2 z} + \alpha_{32}A_3 e^{\lambda_3 z}, \\ w_0(z) &= \alpha_{13}A_1 e^{\lambda_1 z} + \alpha_{23}A_2 e^{\lambda_2 z} + \alpha_{33}A_3 e^{\lambda_3 z}, \\ C(z) &= \alpha_{14}A_1 e^{\lambda_1 z} + \alpha_{24}A_2 e^{\lambda_2 z} + \alpha_{34}A_3 e^{\lambda_3 z}, \\ u(z, r, t) &= (\alpha_{12}A_1 e^{\lambda_1 z} + \alpha_{22}A_2 e^{\lambda_2 z} + \alpha_{32}A_3 e^{\lambda_3 z}) e^{i\omega t}, \\ w(z, r, t) &= (\alpha_{13}A_1 e^{\lambda_1 z} + \alpha_{23}A_2 e^{\lambda_2 z} + \alpha_{33}A_3 e^{\lambda_3 z}) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Таким образом, все неизвестные функции зависят от трех произвольных констант интегрирования  $A_1, A_2, A_3$ . Предложенная математическая модель с достаточной степенью точности описывает гемодинамику крупных кровеносных сосудов, поэтому она может быть использована для решения конкретных задач биомеханики.



М. К. Иванов, Ю. Н. Челноков

## АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В данной статье рассматривается задача определения ориентации объекта в инерциальной системе координат по его известной (измеренной) абсолютной угловой скорости. Эта задача занимает важное место в теории управления движением космических, авиационных, наземных и других движущихся аппаратов (роботов, подводных лодок и т.п.).

**1. Дифференциальные уравнения ориентации.** Все рассматриваемые в статье алгоритмы определения ориентации основаны на одном из двух кватернионных дифференциальных уравнений ориентации.

Первое уравнение, классическое, имеет вид [1, 2]

$$2 \frac{d\lambda}{dt} = \lambda \circ \omega(t), \quad (1)$$

где  $\lambda$  – искомый кватернион поворота, компонентами которого являются четыре параметра Эйлера (Родрига – Гамильтона),  $\omega(t)$  – кватернион, образованный из вектора абсолютной угловой скорости объекта в проекциях на связанные оси.

Второе уравнение – уравнение типа Риккати имеет вид [2]

$$4 \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \omega + \mathbf{x} \circ \omega - \omega \circ \mathbf{x} - \mathbf{x} \circ \omega \circ \mathbf{x}, \quad (2)$$

где искомый кватернион ориентации  $\lambda$  связан с кватернионной переменной  $\mathbf{x}$ , имеющей нулевую скалярную часть, соотношением

$$\lambda = \frac{1 - \|\mathbf{x}\| + 2\mathbf{x}}{1 + \|\mathbf{x}\|}. \quad (3)$$

Оба этих уравнения являются дифференциальными нестационарными уравнениями без особых точек; при этом уравнение (1) является линейным, а уравнение (2) – нелинейным.

**2. Постановка задачи.** Входными данными являются начальная ориентация объекта, т.е. кватернион  $\lambda_0 = \lambda(t_0)$ , а также данные об угловой скорости объекта, которые могут быть мгновенными либо интегральными. Мгновенные данные – это значения функций  $\omega_k(t)$  ( $k = 1, 2, 3$ )

(проекций угловой скорости на связанные координатные оси) в заданные моменты времени  $t_n$ . Интегральные данные – это приращения интегралов от этих функций:

$$\gamma_k = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_k(t) dt, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Задача заключается в том, чтобы определить ориентацию объекта в заданные моменты времени  $t_n$ , т.е. найти кватернионы  $\lambda_n = \lambda(t_n)$ .

Решение заключается в непрерывном интегрировании уравнения (1) или (2) в соответствии с каким-либо алгоритмом на бортовом компьютере движущегося аппарата. При этом входные данные (мгновенные, либо интегральные) измеряются специальными гироскопическими датчиками.

**3. Алгоритмы.** Всего в работе были рассмотрены 12 алгоритмов. В первую очередь, это непосредственное решение уравнения (1) методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Остальные 11 алгоритмов являются специальными алгоритмами решения уравнения (1) или (2), которые строятся по общей рекуррентной схеме, имеющей вид

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} \circ \lambda^*, \quad (5)$$

где кватернион  $\lambda^*$  вычисляется на каждом шаге интегрирования по соотношениям, определяемым выбранным алгоритмом.

В статье приводятся пять специальных алгоритмов решения уравнения (1), условно называемые нами «старыми»: метод средней скорости 2-го порядка точности, одношаговый и двухшаговый алгоритмы 3-го порядка, двухшаговый алгоритм 4-го порядка и четырёхшаговый алгоритм 4-го порядка (алгоритм Панова).

На основе уравнения (2) было рассмотрено четыре специальных алгоритма, называемые «новыми»: два одношаговых алгоритма 3-го порядка точности, а также двухшаговые алгоритмы 3-го и 4-го порядка.

Наконец, ещё два алгоритма были получены нами путём приведения алгоритмов для уравнения (1) к новой переменной ( $\mathbf{x}$ ), т.е. приведением к форме, соответствующей уравнению (2). При этом получающиеся алгоритмы упрощались путём разложения в ряды Тейлора. Приведём здесь эти алгоритмы, именуемые «смешанными»:

– одношаговый алгоритм третьего порядка точности:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{4} \varphi + \frac{1}{48} \varphi' \times \varphi + \frac{1}{192} \varphi \|\varphi\|,$$

– двухшаговый алгоритм четвёртого порядка точности:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{4} \varphi + \frac{1}{6} \varphi' \times \varphi'' + \frac{1}{192} \varphi \|\varphi\|,$$

где  $\varphi = \varphi' + \varphi''$ ,  $\varphi'$  и  $\varphi''$  – интегральная информация с двух последних шагов.

**4. Результаты тестирования.** Все рассмотренные алгоритмы были реализованы на компьютере и протестированы с помощью методики математического моделирования: моделировались простые и затухающие гармонические колебания, а также простые гармонические колебания с наложенными «помехами» – высокочастотными колебаниями малой амплитуды. Приведём результаты тестирования для гармонических колебаний с «помехами» (таблица). Амплитуда основного колебания равна  $20^\circ$ , частота – 1 Гц, амплитуда «помехи» –  $3'$ , частота – 100 Гц.

Алгоритм	Порядок	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
Метод Рунге – Кутты	4	8,43E+01	1,07E+01	2,25E-04
Метод средней скорости	2	3,45E+01	3,24E-01	3,16E-03
Старый 1-шаговый алгоритм	3	5,89E+00	6,32E-03	9,43E-06
Старый 2-шаговый алгоритм	3	7,14E-01	4,05E-03	1,72E-06
Старый 2-шаговый алгоритм	4	7,18E-01	4,05E-03	1,72E-06
Старый 4-шаговый алгоритм (алг. Панова)	4	7,86E-02	3,32E-03	8,34E-07
Новый 1-шаговый алгоритм (алгоритм 1)	3	1,73E+00	1,67E-02	3,25E-06
Новый 1-шаговый алгоритм (алгоритм 2)	3	5,21E+00	5,74E-03	8,65E-06
Новый 2-шаговый алгоритм	3	1,79E+00	2,34E-03	2,50E-06
Новый 2-шаговый алгоритм	4	8,38E-02	5,28E-03	1,11E-06
Смешанный 1-шаговый алгоритм	3	5,14E+00	1,64E-02	8,65E-06
Смешанный 2-шаговый алгоритм	4	1,11E-01	3,57E-03	7,48E-07

Проанализировав эти и другие полученные результаты, можно прийти к выводу, что для достижения максимальной точности при наименьших затратах рекомендуется использовать один из алгоритмов четвёртого порядка. А именно наиболее стабильные результаты продемонстрировали алгоритмы, полученные на основе уравнений типа Риккати: *новый двухшаговый и смешанный двухшаговый алгоритмы четвёртого порядка точности.*

Хорошо известный *алгоритм Панова*, хотя и продемонстрировал хорошую точность (впрочем, не превосходящую точность остальных алгоритмов 4-го порядка), значительно сложнее остальных алгоритмов.

*Метод Рунге – Кутты четвёртого порядка*, хотя и продемонстрировал в целом высокую точность, имеет свои недостатки. Этот алгоритм единственный в работе использует мгновенную информацию, что сильно сказывается на его практическом применении: возникающие при реальных измерениях помехи начинают влиять гораздо существеннее, чем на

алгоритмы, базирующиеся на интегральной информации (усредняющей входные данные).

Также интересно отметить, что *смешанный 2-шаговый алгоритм 4-го порядка* практически всегда оказывался точнее *старого 2-шагового алгоритма 4-го порядка*, хотя он был получен из этого алгоритма переходом к новым переменным и отбрасыванием членов большого порядка малости.

Это наглядно показывает, что *различные приближения одних и тех же формул могут давать разные методические погрешности* в зависимости от того, какие члены были удержаны, и в какой форме записаны итоговые формулы. Как было продемонстрировано в данной статье, уравнение типа Риккати приводит к алгоритмам, которые лучше ведут себя на практике.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.
2. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006.

УДК 533.6.011

**Т. В. Лягаева, И. А. Чернов**

### **К УЧЕТУ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ**

Задача о сильном взрыве в автомобильной постановке была независимо решена Л. И. Седовым и Тейлором (С – Т). При этом давление в покоящемся газе предполагалось нулевым. Учет противодействия был выполнен независимо Н. С. Бурновой (Мельниковой) и Сакураи. В рамках координатного разложения с решением С – Т в качестве основного члена они нашли первую поправку к нему. Построение следующих членов разложения связано с преодолением технических трудностей, связанных с быстрым увеличением числа слагаемых, входящих в системы ОДУ для поправок. Тем не менее их нахождение (ниже рассчитана следующая из них) позволяет точнее проследить эволюцию течения за ударной волной (УВ) для не очень малого интервала времени. Библиография по этой задаче есть в [1]. Постановка задачи и основные обозначения, использованные ниже, совпадают с принятыми в главе 3 из [2].

Заметим, что недавно был предложен [3] альтернативный подход к данной проблеме.

## Основные уравнения

Решение задачи о точечном взрыве в покоящейся среде с постоянными начальными плотностью  $\rho_1$  и давлением  $p_1$  зависит от двух безразмерных переменных

$$\lambda = r/r_2, \quad q = a_1^2/c^2, \quad (1)$$

где  $r_2(t)$  – закон движения УВ,  $c = dr_2(t)/dt$  – ее скорость,  $a_1$  – скорость звука в области покоя. Соотношения, связывающие параметры до и после УВ, можно записать через  $q$ .

Искомые параметры задачи (скорость частицы, плотность и давление) представляются в виде

$$v = v_2 f(\lambda, q), \quad \rho = \rho_2 g(\lambda, q), \quad p = p_2 h(\lambda, q). \quad (2)$$

При этом  $q = 0$  соответствует нулевому противодавлению (это решение С – Т);  $\lambda = 0$  – центр взрыва,  $\lambda = 1$  – задняя сторона УВ.

В [2] показано, что система уравнений для сферически симметричных ( $\nu = 3$ ) течений идеального газа в случае адиабатических течений в переменных (1) и (2) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda \right] (1-q) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \\ & + \frac{[\gamma+1 + (\gamma-1)(1-q)][\gamma+1 - 2(1-q)]}{2\gamma(\gamma+1)g} \frac{\partial h}{\partial \lambda} + \\ & + \left[ (1-q) \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{2-(1-q)}{2q} f \right] r_2 \frac{dq}{dr_2} = 0, \\ & \left[ \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda \right] \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \lambda} + \frac{2(1-q)}{\gamma+1} \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\nu-1}{\lambda} f \right] + \\ & + \left[ \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{2}{\gamma+1-2(1-q)} \right] r_2 \frac{dq}{dr_2} = 0, \\ & \left[ \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda \right] \frac{\partial h}{\partial \lambda} + \frac{2\gamma(1-q)}{\gamma+1} \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\nu-1}{\lambda} f \right) h + \\ & + \left[ \frac{\partial h}{\partial q} - \frac{2\gamma h}{[2\gamma - (\gamma-1)q]q} \right] r_2 \frac{dq}{dr_2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\lambda = r \left( \frac{\rho_1}{Et^2} \right)^{\frac{1}{\nu+2}}, \quad r_2(t) = \left( \frac{E}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} t^{\frac{2}{\nu+2}} (1 + A_1 q + A_2 q^2 + \dots); \quad (4)$$

$$c = \frac{dr_2(t)}{dt}.$$

При этом величину  $r_2 dq/dr_2$  в (3) следует брать в форме  $3q/(1 + A_1q + A_2q^2 + \dots)$  (см. (4)).

Решения для  $(f, g, h)$  представляются в виде степенных рядов по переменной  $q$ :

$$f(\lambda, q) = f_0 + qf_1 + \dots, \quad g(\lambda, q) = g_0 + qg_1 + \dots, \quad h(\lambda, q) = h_0 + qh_1 + \dots, \quad (5)$$

где  $f_0, f_1, \dots, g_0, g_1, \dots, h_0, h_1, \dots$  – коэффициенты, зависящие от  $\lambda$ . При  $q = 0$  в (5) остаются нулевые члены, которые описывают решение С-Т.

Подстановка (5) в (3), (4) дает системы ОДУ, нулевая – для  $f_0, g_0, h_0$  является нелинейной с краевыми условиями

$$f_0(0) = 0, \quad f_0(1) = 1, \quad g_0(1) = 1, \quad h_0(1) = 1.$$

Четыре условия для трех уравнений выполняются в решении С – Т за счет выбора показателя автомодельности, что учтено в задании вида представления (4).

Для  $k$ -го приближения получаются линейные системы 3-х неоднородных уравнений с коэффициентами, зависящими от нулевого приближения. Краевые условия таковы:

$$f_k(0) = 0, \quad f_k(1) = 0, \quad g_k(1) = 0, \quad h_k(1) = 0. \quad (6)$$

Поскольку в систему трех ОДУ для  $k$ -го приближения входит свободный параметр  $A_k$ , то его следует подбирать так, чтобы выполнялись 4 условия (6). Это делается методом пристрелки.

### Результаты расчетов

Были найдены следующие значения коэффициентов:  $A_1 = 1.918154307, A_2 = 1.779529995$ .

На рис. 1 представлены функции  $f_0(\lambda), g_0(\lambda), h_0(\lambda)$ . На рис. 2 –  $\{f_1(\lambda), g_1(\lambda), h_1(\lambda)\}$ .

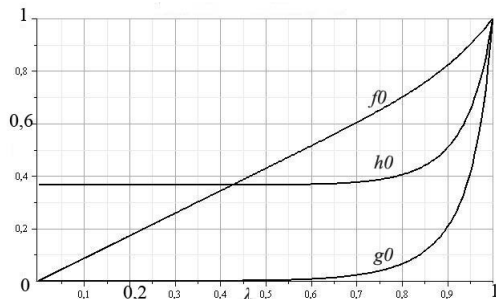


Рис. 1

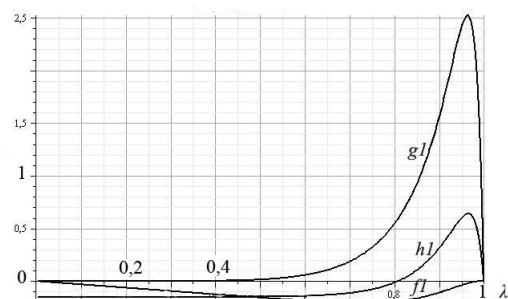


Рис. 2

На рис. 3 –  $\{f_2(\lambda), g_2(\lambda), h_2(\lambda)\}$ . Рис. 4, 5, 6 представляют функции  $f, g, h$  из (5) для  $q = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ , соответствующие кривые обозначены цифрами  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

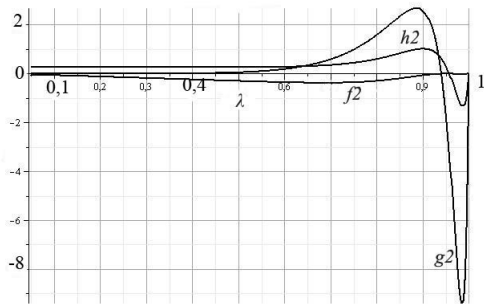


Рис. 3

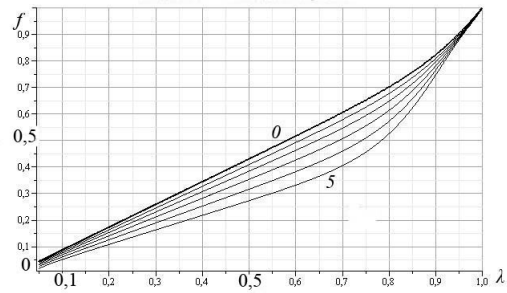


Рис. 4

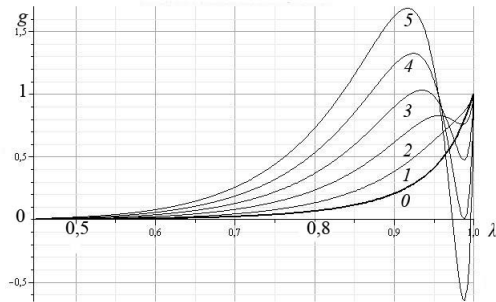


Рис. 5

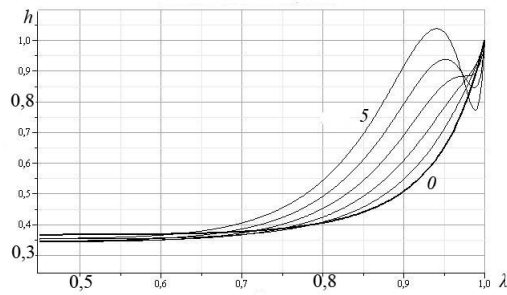


Рис. 6

На рис. 7 изображена траектория УВ:  $r_2(t) = 0.51t^{2/5}(1 + A_1q + A_2q^2 + \dots)$  (пунктир – для решения С-Т ( $A_1 = A_2 = 0$ ), штриховая – с учетом противодействия). По оси абсцисс отложено безразмерное время  $\tau$  (см. [2, с. 116]).

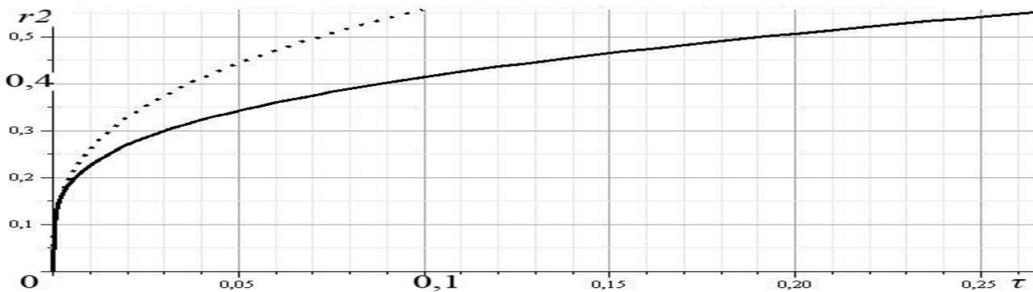


Рис. 7

## Вывод

Как показывают рис. 4, 5, 6, в автомодельном решении С-Т сразу позади УВ (кривые с обозначением «0») реализуются максимальные значения параметров  $v$ ,  $\rho$ ,  $p$ . При удалении УВ от центра (что соответствует увеличению времени) максимум давления и плотности «отстает» от фронта УВ.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коробейников В. П. Задачи точечного взрыва. М.: Наука, 1985. 400 с.
2. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М.: Физматгиз, 1961. 332 с.

3. Чернов И. А. Трактовка решения Седова как серии промежуточных асимптотик в течении от сильного взрыва // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 4. С. 33–43.

УДК 629

А. К. Китарова, Ю. Н. Челноков

## ОПТИМАЛЬНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ЗА ФИКСИРОВАННОЕ ВРЕМЯ

Рассматривается задача переориентации орбиты космического аппарата (КА) посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты космического аппарата. Под действием такого управления орбита КА поворачивается в пространстве как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Для решения задачи использованы кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА в отклонениях и дифференциальное уравнение в отклонениях для эйлерова угла поворота орбиты.

Задача переориентации формулируется следующим образом: требуется построить управление  $u$ , переводящее орбиту КА за фиксированное время  $t_1$ , изменение ориентации которой в отклонениях описывается уравнениями [1]

$$2 \frac{d\Delta\bar{\lambda}}{dt} = \Delta\bar{\lambda} \circ \bar{\Omega} = \frac{r(\varphi_{tr}(t))}{c} u \Delta\bar{\lambda} \circ (\cos \varphi_{tr}(t) \bar{i}_1 + \sin \varphi_{tr}(t) \bar{i}_2), \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi_{tr}}{dt} = \frac{c}{r^2}, r = \frac{p_{or}}{1 + e_{or} \cos \varphi_{tr}}, c = \text{const}, \Omega_1 = \frac{r}{c} u \cos \varphi_{tr}, \Omega_2 = \frac{r}{c} u \sin \varphi_{tr},$$

из любого заданного начального положения, характеризуемого кватернионом начального отклонения  $\Delta\bar{\lambda}(t_0) = \tilde{\lambda}^* \circ \bar{\lambda}^0$ , в требуемое конечное положение, характеризуемое кватернионом конечного отклонения  $\Delta\bar{\lambda}(t_1)$ . Здесь  $\bar{\lambda}$  – кватернион ориентации орбиты КА;  $\varphi_{tr}$  – истинная аномалия (угловая переменная, характеризующая положение КА на орбите);  $r = |\bar{r}|$  – модуль радиуса-вектора центра масс КА;  $p_{or}, e_{or}$  – параметр и эксцентриситет орбиты,  $c = |\bar{r} \times \bar{V}|$  – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости центра масс КА);  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 = 0$  – проекции вектора  $\bar{\Omega}$  мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты на связанные с ней координатные оси;  $u$  – проекция вектора ускорения  $\bar{u}$  от тяги



реактивного двигателя на направление вектора момента скорости центра масс КА.

Кватернионная переменная  $\Delta\bar{\lambda}$  характеризует отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения, задаваемого кватернионом  $\bar{\lambda}^*$ , в соответствии с кватернионной формулой сложения конечных поворотов  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^* \circ \Delta\bar{\lambda}$ ,  $\Delta\bar{\lambda} = \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \bar{e}_\Delta$ , где  $\Delta\varphi$ ,  $\bar{e}_\Delta = e_{\Delta_1} \bar{i}_1 + e_{\Delta_2} \bar{i}_2 + e_{\Delta_3} \bar{i}_3$  являются для текущего момента времени  $t$  соответственно эйлеровым углом и единичным вектором эйлеровой оси возмущенного конечного поворота орбиты КА относительно ее невозмущенного углового положения, задаваемого кватернионом поворота  $\bar{\lambda}^*$ .

При непосредственном использовании переменных  $\Delta\varphi$ ,  $e_{\Delta_i}$  для решения задачи переориентации орбиты КА необходимо рассматривать дифференциальные уравнения возмущенного движения центра масс КА в этих переменных. Эти уравнения получаются из кватернионного уравнения в (1) при выделении в нем скалярной и векторной частей. В таком случае задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата формулируется следующим образом:

требуется построить управление

$$U = \bar{\Omega} \cdot \bar{e}_\Delta = \frac{r(\varphi_{tr}(t))}{c} u (\cos \varphi_{tr}(t) e_{\Delta_1} + \sin \varphi_{tr}(t) e_{\Delta_2}), \quad (2)$$

переводящее орбиту космического аппарата, изменение ориентации которой описывается уравнением

$$\Delta\dot{\varphi} = U = \bar{\Omega} \cdot \bar{e}_\Delta = \frac{r(\varphi_{tr}(t))}{c} u (\cos \varphi_{tr}(t) e_{\Delta_1} + \sin \varphi_{tr}(t) e_{\Delta_2}), \quad (3)$$

из начального положения, описываемого кватернионом ориентации  $\bar{\lambda}_0$ , в конечное положение, описываемое кватернионом ориентации  $\bar{\lambda}^*$ , за фиксированное время  $t_1$ . При этом должен минимизироваться функционал качества

$$I = \int_0^{t_1} \left( \pm \frac{\alpha_1}{2} (\Delta\varphi)^2 + \frac{\alpha_2}{2} U^2 \right) dt = \int_0^{t_1} \left( \pm \frac{\alpha_1}{2} (\Delta\varphi)^2 + \frac{\alpha_2}{2} (\Delta\dot{\varphi})^2 \right) dt, \quad (4)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – положительные весовые коэффициенты.

Управление  $U$  здесь имеет смысл проекции вектора  $\bar{\Omega}$  абсолютной угловой скорости орбиты на направление  $\bar{e}_\Delta$  эйлеровой оси конечного поворота орбиты. Как видно из (2), управление  $U$  содержит искомое управление  $u$ .

Краевые условия по переменной  $\Delta\varphi$  (эйлерову углу поворота орбиты) определяются соотношениями

$$\Delta\varphi(t_0) = \Delta\varphi(0) = 2 \arccos \text{scal}(\tilde{\lambda}^* \circ \bar{\lambda}^0), \Delta\varphi(t_1) = \Delta\varphi_1 \neq 0. \quad (5)$$

Решение строится с использованием принципа максимума. Введем переменные  $\psi_0, \psi_1$ , сопряженные к фазовым переменным  $x_1 = \Delta\varphi$  и  $\dot{x}_0 = \pm \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2}U^2$ . Функция Гамильтона – Понтрягина имеет вид

$$H(\psi_0, \psi_1, x_0, x_1, U) = \psi_0 \left( \pm \frac{\alpha_1}{2} x_1^2 + \frac{\alpha_2}{2} U^2 \right) + \psi_1 U. \quad (6)$$

Закон оптимального управления находится из условия максимума функции  $H$  по переменной  $U$ .

При переходе к физическому управлению  $u$  для знака «-» в подынтегральном выражении в (4) оптимальное управление имеет вид

$$u = \frac{c}{p_{or} \cos \varphi_{tr} e_{\Delta_1} + \sin \varphi_{tr} e_{\Delta_2}} \left[ -k \Delta\varphi(0) \sin(kt) + k \frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi(0) \cos(kt_1)}{\sin(kt_1)} \cos(kt) \right], k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad (7)$$

и вид

$$u = \frac{c}{p_{or} \cos \varphi_{tr} e_{\Delta_1} + \sin \varphi_{tr} e_{\Delta_2}} \left[ k \Delta\varphi(0) \text{sh}(kt) + k \frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi(0) \text{ch}(kt_1)}{\text{sh}(kt_1)} \text{ch}(kt) \right], k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad (8)$$

для знака «+» в подынтегральном выражении в (4).

В случае  $\Delta\varphi_1 = 0$  имеем решение, совпадающее с решением, приведенным в [1].

В случае, когда минимизируется интегральный квадратичный функционал в отношении только управления  $U$  и когда эйлеров угол поворота в конечный момент переориентации орбиты принимает нулевое значение, физическое управление  $u$ , имеющее смысл проекции вектора ускорения от тяги реактивного двигателя на направление, ортогональное плоскости орбиты космического аппарата, имеет вид

$$u = -\frac{c}{p_{or} \cos \varphi_{tr} e_{\Delta_1} + \sin \varphi_{tr} e_{\Delta_2}} \frac{\Delta\varphi(0)}{t_1}. \quad (9)$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.

УДК 532.5:533.6.011.5

**В. С. Кожанов, И. А. Чернов**

### **РОЛЬ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В НАХОЖДЕНИИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ**

Важное место при исследовании сложных математических моделей занимают точные частные аналитические решения. Они помогают выделить закономерности, свойства и структуру общего решения системы уравнений, описывающей модель. В статье предложен новый метод построения точных решений в гомэнтропической модели одномерной нестационарной газовой динамики, основанный на решении гипергеометрического уравнения. Приведены примеры новых решений.

Основные уравнения в гомэнтропической модели таковы [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial c^2}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial c^2}{\partial t} + u \frac{\partial c^2}{\partial r} + (\gamma - 1)c^2 \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{u}{r} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $r$  – координата,  $u = u(r, t)$  – скорость частицы жидкости,  $c^2 = c^2(r, t)$  – квадрат скорости звука,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\nu = 1, 2, 3$  для плоской, цилиндрической и сферической симметрии течения соответственно.

Условие постоянства энтропии запишем в виде

$$s_0 = p\rho^{-\gamma} = \gamma^{-1}c^2\rho^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (2)$$

Вдоль траектории частицы  $s_0$  имеет постоянное значение. Для гомэнтропических течений эта постоянная одна для всех траекторий. Однако в рассматриваемой гомэнтропической модели, в отличие от моделей Хантера [1], на ударной волне (УВ)  $s_0$  меняется скачком, как и все остальные параметры. Условия ударного перехода определяются тремя законами сохранения:

$$\begin{aligned} \rho_2(u_2 - D) &= \rho_1(u_1 - D), \quad \rho_2[c_2^2 + \gamma(u_2 - D)^2] = \rho_1[c_1^2 + \gamma(u_1 - D)^2], \\ 2c_2^2 + (\gamma - 1)(u_2 - D)^2 &= 2c_1^2 + (\gamma - 1)(u_1 - D)^2, \end{aligned}$$

где индексом 1 обозначены параметры течения перед фронтом УВ, а индексом 2 – за фронтом,  $D$  – скорость распространения УВ.

Автомодельные решения имеют вид ( $\alpha$  – показатель автомодельности)

$$u = \alpha \frac{r}{t} V(\xi) = \alpha C t^{\alpha-1} \xi V(\xi), \quad c^2 = \alpha^2 \frac{r^2}{t^2} Z(\xi) = \alpha^2 C^2 t^{2\alpha-2} \xi^2 Z(\xi), \quad (3)$$

$$\xi = r / (C t^\alpha), \quad C = \text{const.}$$

Здесь  $\xi$  – независимая автомодельная переменная, а  $\xi V(\xi)$  и  $\xi^2 Z(\xi)$  – автомодельные представители скорости частицы жидкости  $u$  и квадрата скорости звука  $c^2$  соответственно.

После подстановки (3) в (1) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ), которые приводят к уравнению на фазовой плоскости ( $V, Z$ ) и квадратуре для определения  $\xi(V)$  [2]:

$$\frac{dZ(V)}{dV} = \frac{(\gamma - 1)Z(V)(2\alpha\Delta_0 + \Delta_5)}{[(\gamma - 1)\nu\alpha V - 2(1 - \alpha)]\Delta_0 + (1 - V)\Delta_5}, \quad (4)$$

$$\Delta_0 = (1 - V)^2 - Z(V),$$

$$\Delta_5 = (\gamma - 1)(\nu - 1)\alpha V^2 - [(\gamma - 1)(\nu\alpha - 1) + 2(1 - \alpha)]V + 2(1 - \alpha).$$

Уравнение (4) является нелинейным и в общем случае – при произвольных значениях  $\nu, \gamma, \alpha$  – не имеет аналитического решения.

Приведем метод построения точного аналитического решения уравнения (4) для случая плоского движения газа. При  $\nu = 1$  система (1) упрощается:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial c^2}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial c^2}{\partial t} + u \frac{\partial c^2}{\partial r} + (\gamma - 1)c^2 \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Перейдем на плоскость годографа, меняя ролями зависимые и независимые переменные:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \sim \frac{\partial t}{\partial c^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \sim -\frac{\partial r}{\partial c^2}, \quad \frac{\partial c^2}{\partial r} \sim -\frac{\partial t}{\partial u}, \quad \frac{\partial c^2}{\partial t} \sim \frac{\partial r}{\partial u}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим систему для функций  $t$  и  $r$ :

$$\frac{\partial r}{\partial u} - u \frac{\partial t}{\partial u} + (\gamma - 1)c^2 \frac{\partial t}{\partial c^2} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial c^2} - u \frac{\partial t}{\partial c^2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial t}{\partial u} = 0. \quad (7)$$

Введем автомодельные представители для  $t$  и  $r$ :

$$t = u^\beta \Psi(z), \quad r = u^{\alpha\beta} \Phi(z), \quad c^2 = Au^2 z, \quad \beta = 1/(\alpha - 1), \quad A = (\gamma - 1)^2/4, \quad (8)$$

где  $z$  – независимая автомодельная переменная.

Подставляя (8) в (7), получим систему двух ОДУ относительно функций  $\Psi(z)$  и  $\Phi(z)$ , которая может быть сведена к одному ОДУ второго порядка для автомодельного представителя времени

$$z(1-z)\frac{d^2\Psi}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{d\Psi}{dz} - ab\Psi = 0, \quad (9)$$

$$a = \frac{\alpha - 2}{2(\alpha - 1)}, \quad b = -\frac{1}{2(\alpha - 1)}, \quad c = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Решение уравнения (9) определяет функцию  $\Psi = \Psi(z)$ . Функция  $\Phi = \Phi(z)$  выражается через функцию  $\Psi(z)$  и ее производную по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{\alpha} \left[ \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}z\right) \Psi(z) - (\gamma - 1)(\alpha - 1)(1 - z)z \frac{d\Psi(z)}{dz} \right].$$

Из соотношений (4) и (8) вытекают зависимости, представляющие в параметрическом виде решение на фазовой плоскости:

$$V = V(z) = \frac{\Psi(z)}{\alpha\Phi(z)}, \quad Z = Z(z) = Az \frac{\Psi^2(z)}{\alpha^2\Phi^2(z)} = AzV^2. \quad (10)$$

Для получения явной формулы  $Z = Z(V)$  необходимо первое соотношение (10) разрешить относительно  $z$  и полученное представление  $z = z(V)$  подставить во второе соотношение (10).

Вернемся к уравнению (9). Это невырожденное гипергеометрическое уравнение с параметрами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Для него существуют [3] 24 решения Куммера, которые, будучи записанными в виде рядов, имеют вид

$$\Psi_i(z) = z^{\tau_i}(1-z)^{\sigma_i} F(a_i, b_i; c_i; z_i) = z^{\tau_i}(1-z)^{\sigma_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_i)_n (b_i)_n}{(c_i)_n n!} z_i^n, \quad (11)$$

где  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $\tau_i$ ,  $\sigma_i$  – линейные функции от  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;  $F(a_i, b_i; c_i; z_i)$  – гипергеометрическая функция Гаусса;  $z_i = f_i(z)$ ,  $f_i(z) \in \{z, 1 - 1/z, 1 - z, z/(1 - z), 1/z, 1/(1 - z)\}$ .

Известно, что когда  $a_i = -m$  или  $b_i = -m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то соответствующий гипергеометрический ряд (11) обрывается. В этом случае решение на плоскости  $(V, Z)$  может быть получено в конечной форме. В таблице перечислены значения  $\alpha$ , при которых (11) вырождается (номера решений Куммера соответствуют [3]).

№	Решение Куммера	Показатель $\alpha$	№	Решение Куммера	Показатель $\alpha$
1	$\Psi_1, \Psi_3, \Psi_5,$ $\Psi_7, \Psi_9, \Psi_{11}$	$\frac{2(1+m)}{1+2m}$	5	$\Psi_{10}$	$\frac{1+2m}{2(1+m)}$
2	$\Psi_2, \Psi_4, \Psi_{21},$ $\Psi_{23}$	$\frac{2[(\gamma-1)m+1]}{2(\gamma-1)m+\gamma+1}$	6	$\Psi_{14}, \Psi_{18}, \Psi_{22}$	$\frac{2m}{1+2m}$
3	$\Psi_6, \Psi_{12}, \Psi_{17},$ $\Psi_{19}$	$\frac{2[(\gamma-1)m+\gamma-2]}{2(\gamma-1)m+\gamma-3}$	7	$\Psi_{15}$	$\frac{1+2m}{2m}$
4	$\Psi_8, \Psi_{13}, \Psi_{16},$ $\Psi_{20}$	$\frac{2(\gamma-1)m+\gamma-3}{2[(\gamma-1)m-1]}$	8	$\Psi_{24}$	$\frac{2(\gamma-1)m+\gamma+1}{2[(\gamma-1)m+\gamma]}$

Приведем некоторые новые автомодельные решения плоской гомэнтропической модели (первая цифра нижнего индекса отвечает значению  $m$ , вторая — № из табл.).

$\alpha = 4/3$  :

$$V_{11}(z) = \frac{2[3(\gamma-1)z + 2\gamma]}{(\gamma-1)^2 z^2 + 4(\gamma-1)(\gamma-2)z - 4\gamma},$$

$$Z_{11}(V) = \frac{\gamma-1}{4} V \left[ -2(\gamma-2)V - 3 \pm \sqrt{4(\gamma^2 - 3\gamma + 4)V^2 + 8(\gamma-3)V + 9} \right];$$

$\alpha = \frac{3\gamma-1}{2(2\gamma-1)}$  :

$$V_{18}(z) = \frac{4(2\gamma-1)[3(\gamma-1)z + 2\gamma]}{3(\gamma-1)^3 z^2 + 6(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma-1)z + 8\gamma(2\gamma-1)},$$

$$Z_{18}(V) = \frac{V}{12} \left[ -3(2\gamma-1)[(\gamma+1)V - 2] \pm \sqrt{3} \sqrt{(2\gamma-1)[(2\gamma^2 + \gamma + 3)V^2 - 4(4\gamma^2 + 5\gamma - 3)V + 24\gamma - 12]} \right];$$

$\alpha = 4/5$  :

$$V_{26}(z) = \frac{15(\gamma-1)^2 z^2 + 60(\gamma-1)(2\gamma-3)z + 20(\gamma-2)(2\gamma-3)}{30(\gamma-1)^3 z^2 + 20(\gamma-1)(\gamma+1)(2\gamma-1)z + 16(\gamma-2)(2\gamma-3)},$$

$$Z_{26}(V) = \frac{(\gamma-1)V^2}{6[2(\gamma-1)V - 1]} \left[ -(2\gamma-3)[(\gamma+1)V - 3] \pm \sqrt{(\gamma-7/5)(2\gamma-3)[(2\gamma^2 - \gamma + 9)V^2 + 24(\gamma-5)V + 48]} \right].$$

Точные автомодельные решения, выходящие за рамки плоской гомэнтропической модели (плоская негомэнтропическая модель, а также случаи цилиндрической и сферической симметрии течения), предлагается

искать методом неопределенных коэффициентов, используя найденные функциональные формы решений и привлекая средства компьютерной алгебры.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хантер К. О захлопывании пустой полости в воде // Механика: период. сб. пер. иностр. ст. 1961. № 3 (67). С. 77–100.
2. Кожанов В. С. Расчет отраженных ударных волн в задаче о схлопывании пустой полости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 44–54.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

УДК 533.6.011

Д. И. Ливеровский, С. П. Шевырев

### МЕТОД ДАВЫДОВА ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ

В случае моделирования движения несжимаемой тяжелой жидкости со свободной поверхностью необходимо определять положение этой поверхности в процессе решения, а также учитывать влияние земного тяготения. В данной статье такая задача решалась численным методом Давыдова [1] на регулярной сетке в случае двух пространственных переменных. Для определения положения свободной поверхности использовался метод маркеров [2, 3].

В ходе выполнения работы была написана программа на языке Python, реализующая метод Давыдова для случая тяжелой несжимаемой жидкости.

Течение тяжелой несжимаемой невязкой жидкости для случая двух пространственных переменных моделируется путем решения краевых задач для системы уравнений Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y} = -g, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u, v$  – компоненты вектора скорости;  $\rho$  – давление;  $\rho_0$  – постоянная плотность;  $g$  – ускорение свободного падения.

Область интегрирования разбивается регулярной сеткой на ячейки размером  $h_x \times h_y$  каждая. Все искомые параметры (компоненты вектора скорости, давление, плотность) отнесены к центру ячейки  $(i, j)$ , где  $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца,  $i = 1 \dots n$ ;  $j = 1 \dots m$ . Вещество, попавшее в ячейку, называется крупной частицей. Суть метода Давыдова (метода крупных частиц) состоит в том, что он использует расщепление по физическим факторам и по координатам. Численное решение получается продвижением дискретными шагами по времени. В классическом методе Давыдова реализация каждого шага осуществляется в три этапа.

1. Эйлеров этап. На этом этапе жидкость предполагается моментально заторможенной, т. е. пренебрегают всеми эффектами, связанными с перемещениями, потока массы через границы ячеек нет, и движение ячейки как твёрдого тела происходит только за счёт сил давления. На эйлеровом этапе опускают конвективные производные, отвечающие за перетекание жидкости.

2. Лагранжев этап. На этом этапе происходит перетекание газа из одной ячейки в другую за счёт вычисления направленного потока массы.

3. Заключительный этап. На этом этапе получают значения параметров на следующем шаге по времени.

Для течения несжимаемой жидкости добавим еще один этап, назовем его «Пуассонов этап». На нем решается разностное уравнение Пуассона для давления. Это матричное уравнение получается из разностных формул эйлерова этапа ( $(k + 1)$ -й шаг по времени):

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i,j}^k = u_{i,j}^k - \frac{\tau}{2\rho_0 h_x} (\rho_{i+1,j}^k - \rho_{i-1,j}^k), \\ \tilde{v}_{i,j}^k = v_{i,j}^k - \frac{\tau}{2\rho_0 h_y} (\rho_{i,j+1}^k - \rho_{i,j-1}^k) - \tau g, \end{cases}$$

из равенства нулю разностного представления уравнения неразрывности на эйлеровом этапе  $(k + 1)$ -го шага по времени:

$$\tilde{D}_{i,j}^k = \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^k - \tilde{u}_{i,j-1}^k}{2h_x} + \frac{\tilde{v}_{i+1,j}^k - \tilde{v}_{i-1,j}^k}{2h_y}, \quad (2)$$

и имеет вид

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{4} (\rho_{i-1,j} + \rho_{i,j-1} + \rho_{i+1,j} + \rho_{i,j+1}) - \frac{h^2}{2\tau} D_{i,j}^k, \quad (3)$$

где  $D_{i,j}^k$  – разностное представление уравнения неразрывности на  $k$ -м шаге по времени, аналогичное (2);  $\tau$  – шаг по времени;  $h = h_x = h_y$ .

Граничные условия: непротекание на жестком теле.



Приведем результаты расчетов. На рис. 1 иллюстрируется метод Лакса [3], на рис. 2–8 – метод Давыдова. На рис. 2, 3 представлена тестовая задача, решенная для сравнения с методом Лакса.

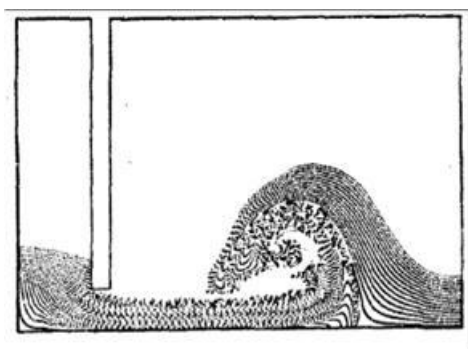


Рис. 1

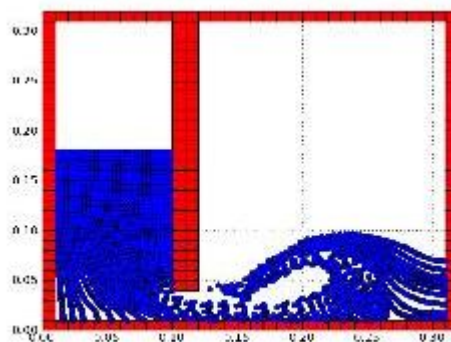


Рис. 2

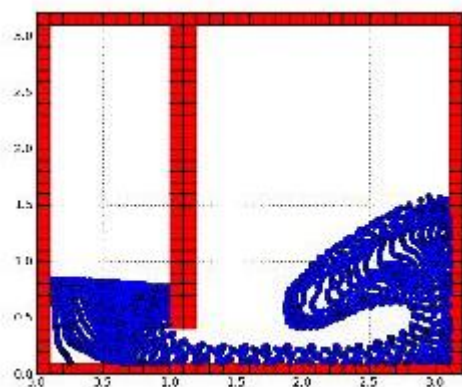


Рис. 3

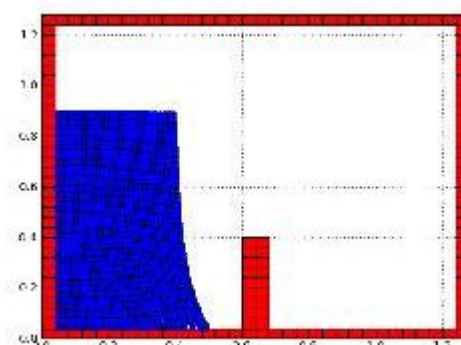


Рис. 4

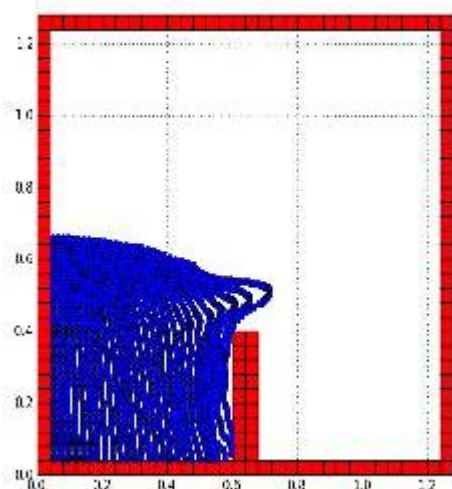


Рис. 5

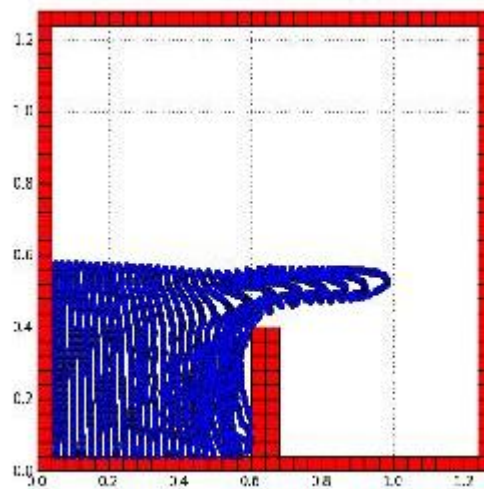


Рис. 6

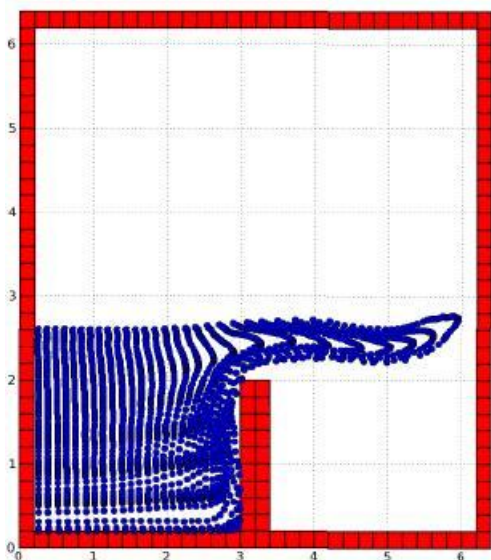


Рис. 7

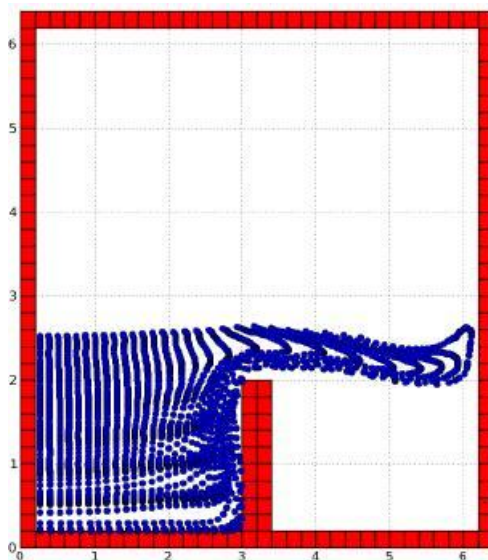


Рис. 8

На рис. 4–8 представлено решение задачи о распаде водяного столба и его взаимодействия с препятствием.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982.
2. Шевырев С. П. Расчет течения тяжелой несжимаемой невязкой жидкости методом Давыдова (нестационарный плоский случай) // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 148–153.
3. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.

УДК 533.6.011

**Р. И. Ливеровский, С. П. Шевырев**

#### **МЕТОД ДАВЫДОВА НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА**

В данной статье рассматривается моделирование движения идеального сжимаемого газа около абсолютно твердого тела при помощи метода Давыдова [1], обобщенного на случай нерегулярной треугольной сетки [2]. Использование такой сетки дает возможность производить расчеты течения около тела произвольной формы.

В ходе выполнения работы была написана программа на языке Python, реализующая указанный метод в двумерном нестационарном случае. Имеется возможность определения давления и числа Маха в потоке и на теле. С помощью данной программы по единому алгоритму можно исследовать сложные картины обтекания тел различной формы

в широком диапазоне изменения начальных условий — от чисто дозвуковых до сверхзвуковых режимов, включая переход через скорость звука (методом установления), либо решать нестационарные задачи о взаимодействии ударных волн с препятствиями.

Основная идея метода Давыдова (метода крупных частиц) состоит в расщеплении по физическим процессам исходной нестационарной системы уравнений Эйлера, записанной в форме законов сохранения. Среда здесь моделируется системой из крупных частиц, совпадающих в каждый момент времени с веществом ячеек эйлеровой нерегулярной сетки. Стационарное решение задачи, если оно существует, получается в результате установления, поэтому весь процесс вычислений состоит из многократного повторения шагов по времени. Нестационарные задачи также решаются продвижением по времени. В качестве математической модели выбраны краевые задачи для системы уравнений Эйлера в дивергентной форме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E}{\partial x} + \frac{\partial \rho v E}{\partial y} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \rho &= (\kappa - 1)\rho \left( E - \frac{u^2 + v^2}{2} \right).\end{aligned}$$

Здесь  $t, x, y$  — независимые переменные,  $\rho$  — плотность,  $u, v$  — компоненты вектора скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $\kappa$  — отношение удельных теплоемкостей,  $E$  — полная энергия единицы массы газа.

Единственным краевым условием является условие непротекания на жестком теле (нормальная компонента скорости равна нулю). В численных расчетах добавляются условия (равенство нулю производных от искомых функций) на неотражающих границах, моделирующие исходные бесконечные области с помощью областей, имеющих конечные размеры. Эти искусственные границы не должны служить источником возмущений, которых на самом деле не существует. В качестве начальных условий задается либо однородный поток (числом Маха однородного потока на бесконечности), либо ударная волна (числом Маха ударной волны).

Три этапа метода Давыдова в случае треугольной сетки приведены в [2].

Задачи на рис. 1 (отсоединенная волна – изобары), рис. 2 (присоединенная волна – изобары), рис. 3 (присоединенная волна – изомахи) решены методом установления. На рис. 4 для сравнения приведено решение, аналогичное рис. 3 из [1].

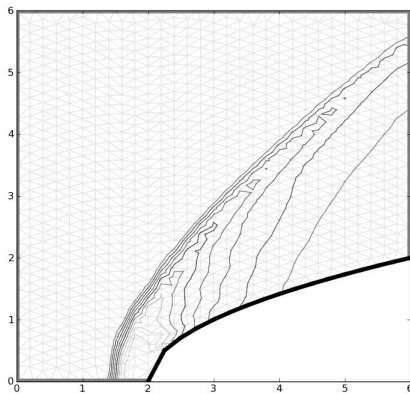


Рис. 1

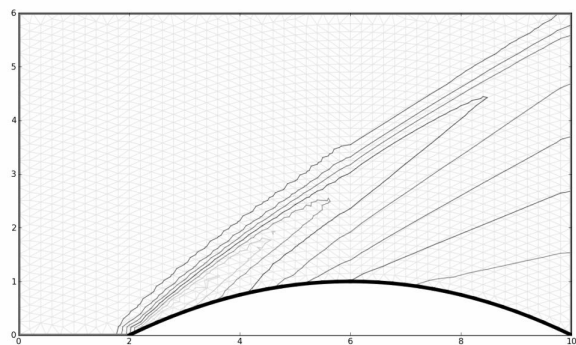


Рис. 2

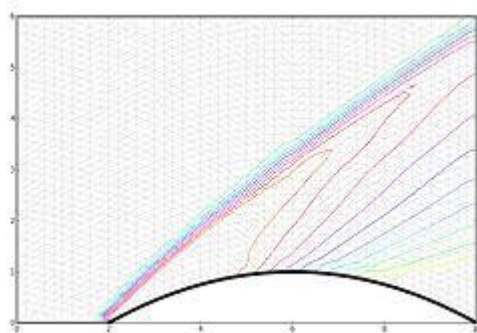


Рис. 3

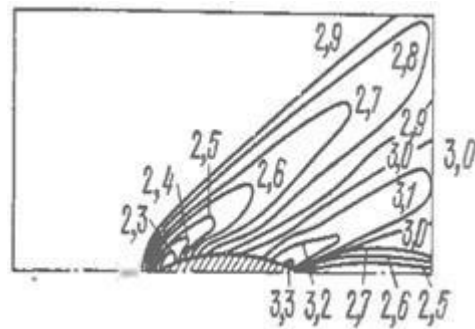


Рис. 4

Далее идут нестационарные задачи.

На рис. 5, 6, 7 ударная волна проходит по телу с образующей  $y = \sqrt{x-2}$ , отражаясь и дифрагируя. На рис. 8, 9, 10 – аналогичная задача для тела с образующей  $y = 1 - \frac{(x-6)^2}{16}$ .

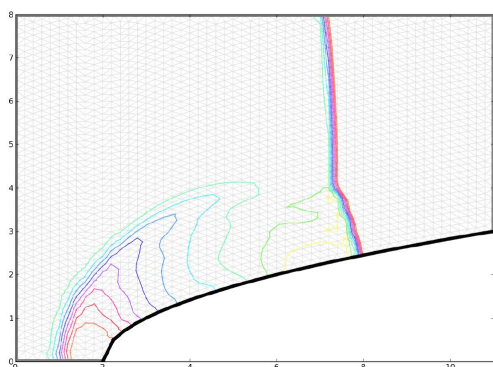


Рис. 5

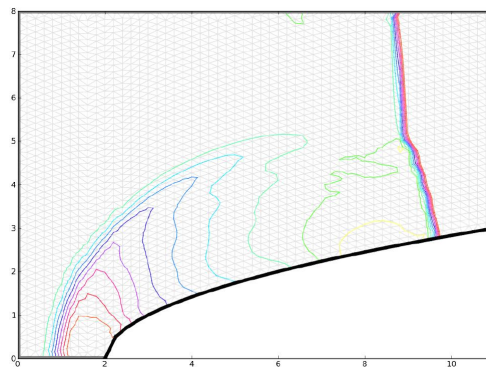


Рис. 6

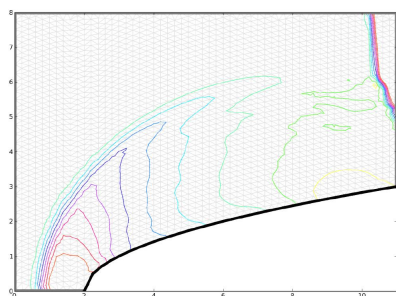


Рис. 7

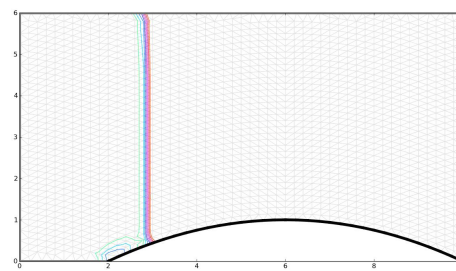


Рис. 8

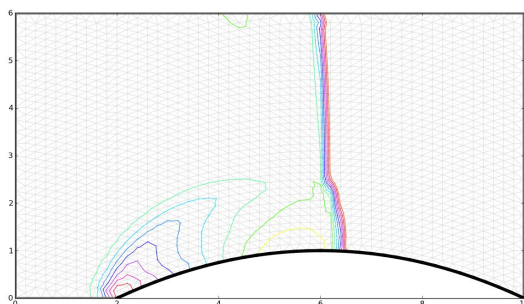


Рис. 9

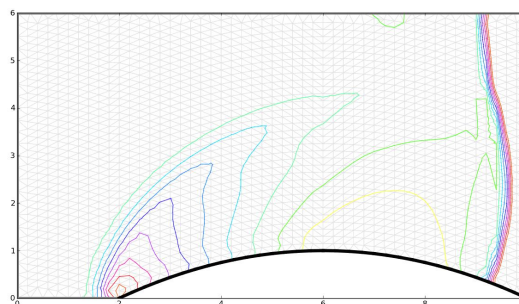


Рис. 10

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982.
2. Шевырев С. П. Разностные схемы метода Давыдова на произвольной сетке // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2005. Вып. 7. С. 205–209.

УДК 539.3

В. Ю. Ольшанский, А. В. Серебряков, И. Ф. Абитова

### АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЬЕЗОГИРОСКОПА

Рассматривается механическая система, состоящая из двух пластин  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  с толщинами  $h_1 = h_2 = h$ . Пластины выполнены из пьезокерамики и предварительно поляризованы по толщине. Они расположены в

двух взаимно перпендикулярных плоскостях. У каждой пластины одно из оснований закреплено, а другое – контактирует без проскальзывания с недеформируемым грузом массы  $M$ . На основания пластины  $\Pi_1$  подается внешнее напряжение  $U(t)$ .

Описанная выше система рассматривалась в работе [1] в качестве модели датчика инерциальной информации. Требуется провести расчет характеристик электрического тока, генерирующегося в пластине  $\Pi_2$  за счет пьезоэффекта. При этом учитывается кориолисова сила инерции, возникающая за счет вращения объекта, на котором установлен датчик.

Для описания установившихся вынужденных колебаний рассмотрим связанную динамическую задачу электроупругости. Перемещения  $u_k$  в пластинах должны удовлетворять уравнениям одномерных колебаний с учетом внутреннего трения

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u_k}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}, \quad k = 1, 2. \quad (1)$$

Связанность данной задачи проявляется в уравнениях вынужденной электростатики

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_k^2} = \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

которые содержат и перемещения  $u_k(x_k, t)$ , и электрические потенциалы  $\psi_k(x_k, t)$ . Граничные условия для  $\psi_k(x_k, t)$  имеют вид

$$\psi_1(0, t) = -U(t)/2, \quad \psi_1(h_1, t) = U(t)/2, \quad \psi_2(0, t) = 0, \quad \psi_2(h_2, t) = 0. \quad (3)$$

Контакт пластин с присоединенным грузом описывается граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(h_1, t)}{\partial x_1} + d_{33} \frac{\partial \psi_1(h_1, t)}{\partial x_1} &= \frac{M s_{33}}{A} \left( -\frac{\partial^2 u_1(h_1, t)}{\partial t^2} + 2\Omega_3 \frac{\partial u_2(h_2, t)}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial u_2(h_2, t)}{\partial x_2} + d_{33} \frac{\partial \psi_2(h_2, t)}{\partial x_2} &= \frac{M s_{33}}{A} \left( -\frac{\partial^2 u_2(h_2, t)}{\partial t^2} - 2\Omega_3 \frac{\partial u_1(h_1, t)}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $A$  – площадь основания пластины,  $s_{33}$ ,  $d_{33}$  – соответственно упругая податливость и пьезоэлектрическая постоянная материала. В условия (4) входит также компонент угловой скорости  $\Omega_3$ .

Граничные условия на основаниях  $x_k = 0$  определяются способом закрепления пластин. Рассматривается непрерывный контакт с упругой

(винклеровской) подложкой, при котором перемещение и нормальное напряжение связаны равенством

$$\sigma(0, t) = -H \cdot u_k(0, t), \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

а также непрерывный контакт пластины с упругим полупространством. В последнем случае предполагалось распространение упругих волн в полупространстве.

Проведены расчеты для гармонического внешнего воздействия  $U(t) = U_0 \sin \beta t$ . Получена зависимость амплитуды тока от частоты колебаний  $\beta$ , определены перемещения  $u_k(x_k, t)$ .

При использовании в задаче граничных условий вида (5) изучено влияние коэффициента жесткости  $H$  на характеристики выходного тока. При возрастании жесткости наблюдалось увеличение амплитуды тока при одновременном уменьшении резонансного значения  $\beta$ . Моделируя в численных экспериментах неограниченный рост жесткости  $H$ , получаем результаты, совпадающие с расчетами при жестком закреплении (см. [1]).

Расчет для пластин, контактирующих с упругим полупространством, показал, что отношение  $s_{33}/s_w$  упругой податливости пьезокерамики к податливости  $s_w$  материала полупространства оказывает существенное влияние на амплитудно-частотную характеристику. Явно выраженный пик на характеристике наблюдается в случае, когда величины  $s_{33}$  и  $s_w$  различаются значительно.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панкратов В. М., Ольшанский В. Ю., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В. Влияние диссипации на характеристики измерителя угловой скорости на основе взаимного пьезоэффекта // Авиакосмическое приборостроение. 2010. № 8. С. 3–8.

УДК 629

**И. А. Панкратов, Ю. Н. Челноков**

### **АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОТКЛОНЕНИЯХ**

Рассматривается задача переориентации орбиты космического аппарата (КА) в случае минимизации интегрального квадратичного (относительно фазовых переменных и управления) функционала качества. Для

постоянного управления найдено аналитическое решение фазовых и сопряженных уравнений задачи переориентации круговой орбиты КА в отклонениях.

В работе [1] показано, что фазовые и сопряженные дифференциальные уравнения нелинейной краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА в отклонениях имеют вид

$$\begin{aligned} 2\frac{d\Delta\mathbf{\Lambda}}{dt} &= \Delta\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \quad \mathbf{\Omega}_\xi = \frac{ur}{c}(\cos\varphi \mathbf{i}_1 + \sin\varphi \mathbf{i}_2), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, \quad c = \text{const}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos\varphi}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2\frac{d\Delta\mathbf{M}}{dt} &= 4\alpha_1 \text{vect}\Delta\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{M} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \\ \frac{d\chi}{dt} &= 2\frac{\chi}{r}\frac{dr}{dt} + \frac{ur}{c}(\Delta N_1 \sin\varphi - \Delta N_2 \cos\varphi) - \\ &\quad - \frac{ur^2}{2c^2}(\Delta N_1 \cos\varphi + \Delta N_2 \sin\varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

При этом минимизируемый функционал имеет вид

$$\int_0^{t_1} (\alpha_1[\Delta\Lambda_1^2 + \Delta\Lambda_2^2 + \Delta\Lambda_3^2] + \alpha_2 u^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0.$$

Здесь  $\mathbf{\Lambda}$  – кватернион ориентации орбиты КА,  $r$  – модуль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА,  $c$  – постоянная площадей,  $p$  и  $e$  – параметр и эксцентриситет орбиты,  $\varphi$  – истинная аномалия;  $u$  – алгебраическая величина ограниченного по модулю реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты КА. Переменная  $\Delta\mathbf{\Lambda}$  характеризует отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения, задаваемого кватернионом  $\mathbf{\Lambda}^*$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^* \circ \Delta\mathbf{\Lambda}$  [2]. Переменные  $\Delta\mathbf{M} = \Delta M_0 + \Delta M_1 \mathbf{i}_1 + \Delta M_2 \mathbf{i}_2 + \Delta M_3 \mathbf{i}_3$  и  $\chi$  являются сопряженными по отношению к фазовым переменным  $\Delta\mathbf{\Lambda}$  и  $\varphi$ .  $\Delta N_1, \Delta N_2$  – компоненты кватерниона

$$\Delta\mathbf{N} = \widetilde{\Delta\mathbf{\Lambda}} \circ \Delta\mathbf{M}.$$

Верхняя волна – символ сопряжения.

Аналитическое решение уравнений (1), (2) для произвольного управления неизвестно. В работе [3] было найдено аналитическое решение фазовых уравнений ориентации круговой орбиты КА для постоянного



управления. Аналогичное решение в этом случае имеет кватернионное дифференциальное уравнение (1), в котором осуществлен переход к новой независимой переменной – истинной аномалии:

$$\Delta\Lambda_0 = C_1^\Delta \cos[s^+(\varphi - \varphi_0)] + C_2^\Delta \sin[s^+(\varphi - \varphi_0)] + \\ + C_3^\Delta \cos[s^-(\varphi - \varphi_0)] + C_4^\Delta \sin[s^-(\varphi - \varphi_0)].$$

Здесь  $s^+ = 0.5\sqrt{2 + N^2 + \sqrt{4 + 4N^2}}$ ,  $s^- = 0.5\sqrt{2 + N^2 - \sqrt{4 + 4N^2}}$ ,  $C_j^\Delta, j = \overline{1, 4}$ , – произвольные постоянные интегрирования, находимые из начальных условий;  $N = ur^3/c^2$ ,  $\varphi_0 = \varphi(0)$ .

Кватернионное дифференциальное уравнение (2) способом, описанным в [3], сводится к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами относительно скалярной части кватерниона  $\Delta\mathbf{M}$ :

$$2\frac{d^4\Delta M_0}{d\varphi^4} + (2 + N^2)\frac{d^2\Delta M_0}{d\varphi^2} + \frac{N^4}{8}\Delta M_0 = A \cos[s^+(\varphi - \varphi_0)] + \\ + B \sin[s^+(\varphi - \varphi_0)] + C \cos[s^-(\varphi - \varphi_0)] + D \sin[s^-(\varphi - \varphi_0)]. \quad (3)$$

Здесь  $A = F(C_2^\Delta, C_1^\Delta, s^+)$ ,  $B = F(-C_1^\Delta, C_2^\Delta, s^+)$ ,  $C = F(C_4^\Delta, C_3^\Delta, s^-)$ ,  $D = F(-C_3^\Delta, C_4^\Delta, s^-)$ ,  $F(x, y, s) = \alpha_1 r^2 s [2ys - x(2 + N^2 - s^2)] / c$ .

Общее решение (3), найденное с помощью метода вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$\Delta M_0 = (C_1(\varphi) + D_1^\Delta) \cos[s^+(\varphi - \varphi_0)] + (C_2(\varphi) + D_2^\Delta) \sin[s^+(\varphi - \varphi_0)] + \\ + (C_3(\varphi) + D_3^\Delta) \cos[s^-(\varphi - \varphi_0)] + (C_4(\varphi) + D_4^\Delta) \sin[s^-(\varphi - \varphi_0)].$$

Здесь

$$2s^+ \left[ (s^-)^2 - (s^+)^2 \right] (C_1(\varphi) + D_1^\Delta) = h_1(\varphi) = -\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{2s^+} \sin[2s^+(\varphi - \varphi_0) + \\ + \alpha] + B(\varphi - \varphi_0) + \sqrt{C^2 + D^2} \left\{ \frac{\sin[(s^+ - s^-)(\varphi - \varphi_0) - \beta]}{s^+ - s^-} - \right. \\ \left. - \frac{\sin[(s^+ + s^-)(\varphi - \varphi_0) + \beta]}{s^+ + s^-} \right\}, \\ 2s^+ \left[ (s^-)^2 - (s^+)^2 \right] (C_2(\varphi) + D_2^\Delta) = h_2(\varphi), \\ 2s^- \left[ (s^+)^2 - (s^-)^2 \right] (C_3(\varphi) + D_3^\Delta) = h_3(\varphi), \\ 2s^- \left[ (s^+)^2 - (s^-)^2 \right] (C_4(\varphi) + D_4^\Delta) = h_4(\varphi),$$

$h_j(\varphi)$ ,  $j = \overline{2, 4}$ , – сложные функции, имеющие такую же структуру, как и  $h_1(\varphi)$ ;  $\text{tg } \alpha = A/B$ ,  $\text{tg } \beta = C/D$ ;  $D_j^\Delta, j = \overline{1, 4}$ , – произвольные постоянные интегрирования, находимые из начальных условий.

Компоненты векторной части сопряженного кватерниона имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta M_1 &= A(s^+) \begin{pmatrix} B(s^+, \cos \varphi, \sin \varphi, C_1(\varphi), C_2(\varphi), D_2^\Delta, D_1^\Delta, C_2^\Delta) \\ B(s^+, \cos \varphi, \sin \varphi, C_2(\varphi), -C_1(\varphi), -D_1^\Delta, D_2^\Delta, -C_1^\Delta) \end{pmatrix} + \\ &+ A(s^-) \begin{pmatrix} B(s^-, \cos \varphi, \sin \varphi, C_3(\varphi), C_4(\varphi), D_4^\Delta, D_3^\Delta, C_4^\Delta) \\ B(s^-, \cos \varphi, \sin \varphi, C_4(\varphi), -C_3(\varphi), -D_3^\Delta, D_4^\Delta, -C_3^\Delta) \end{pmatrix}, \\ \Delta M_2 &= A(s^+) \begin{pmatrix} B(s^+, \sin \varphi, -\cos \varphi, C_1(\varphi), C_2(\varphi), D_2^\Delta, D_1^\Delta, C_2^\Delta) \\ B(s^+, \sin \varphi, -\cos \varphi, C_2(\varphi), -C_1(\varphi), -D_1^\Delta, D_2^\Delta, -C_1^\Delta) \end{pmatrix} + \\ &+ A(s^-) \begin{pmatrix} B(s^-, \sin \varphi, -\cos \varphi, C_3(\varphi), C_4(\varphi), D_4^\Delta, D_3^\Delta, C_4^\Delta) \\ B(s^-, \sin \varphi, -\cos \varphi, C_4(\varphi), -C_3(\varphi), -D_3^\Delta, D_4^\Delta, -C_3^\Delta) \end{pmatrix}, \\ \Delta M_3 &= A(s^+) \begin{pmatrix} E(s^+, C_1(\varphi), C_2(\varphi), D_2^\Delta, C_1^\Delta) \\ E(s^+, C_2(\varphi), -C_1(\varphi), -D_1^\Delta, C_2^\Delta) \end{pmatrix} + \\ &+ A(s^-) \begin{pmatrix} E(s^-, C_3(\varphi), C_4(\varphi), D_4^\Delta, C_3^\Delta) \\ E(s^-, C_4(\varphi), -C_3(\varphi), -D_3^\Delta, C_4^\Delta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A(s) &= (\cos[s(\varphi - \varphi_0)] \quad \sin[s(\varphi - \varphi_0)]), \\ B(s, f(\varphi), g(\varphi), v(\varphi), w(\varphi), a, b, c) &= -2f(\varphi) [v'(\varphi) + s(w(\varphi) + a)] / N + \\ &+ g(\varphi) \left\{ \frac{2}{N} \left[ v''(\varphi) + 2sw'(\varphi) + \left( \frac{N^2}{4} - s^2 \right) (v(\varphi) + b) \right] - \frac{4\alpha_1}{N} c \right\}, \\ E(s, v(\varphi), w(\varphi), a, b) &= -4 \left[ v'''(\varphi) + 3sw''(\varphi) + \left( 1 + \frac{N^2}{4} - 3s^2 \right) v'(\varphi) + \right. \\ &\left. + \left( s^2 - 1 - \frac{N^2}{4} \right) s(w(\varphi) + a) \right] + 2\alpha_1 b \left[ -\frac{4(1 + N^2)}{N^2} s^2 + N \right]. \end{aligned}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00 310).*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата в отклонениях // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 174–176.
2. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
3. Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2011. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 11, вып. 1. С. 84–89.

Ю. О. Растегаев

## ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА ВЕЛИЧИНУ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА ПЬЕЗОГИРОСКОПА

Рассматривается модель устройства для измерения угловых скоростей подвижного объекта [1], состоящая из двух ортогональных пьезопластин и присоединенной к ним массы. Упругие волны, возбуждаемые в одной из пьезопластин переменным током, вызывают колебания присоединенной массы. Кориолисовы силы, обусловленные переносным вращением устройства, создают переменное давление на вторую пластину. Возбуждаемый в ней ток зависит от величины угловой скорости переносного вращения. Математическая модель [1] расширена для случая различных площадей и толщин первой и второй пьезопластин. Приведены зависимости выходного тока от частоты возбуждаемых колебаний, зависимости от отношения толщин первой и второй пьезопластин, отношения площадей пьезопластин, присоединенной массы и от линейных размеров устройства.

В модели [1] площади  $A_1, A_2$  и толщины  $\delta_1, \delta_2$  пьезопластин считались равными.

Представлена расширенная модель пьезогироскопа, учитывающая различные площади и толщины первой и второй пьезопластин. В частности была получена формула выходного тока

$$I(t) = \left( A_2 \frac{c}{\delta_2} e_{33} \right) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u_2(\delta_2, t)}{\partial x_2} \right) - \left( A_2 \frac{c}{\delta_2} \frac{\epsilon_{33}}{d_{33}} \right) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \psi_2(\delta_2, t)}{\partial x_2} \right). \quad (1)$$

Параметры

$$\delta = \frac{\delta_1}{\delta_2}, A = \frac{A_1}{A_2} \quad (2)$$

входят в зависимость (1) в виде соотношений, выражающих перемещение слоев пьезопластины  $u_i$  для случая гармонического внешнего воздействия

$$u_i(x_i, t) = \xi_i(x_i) \cos \beta t + \eta_i(x_i) \sin \beta t, i = 1, 2, \quad (3)$$

$$\xi_i(x_i) = 2 \cdot \text{Im}(jC_i \text{sh} \gamma x_i), \eta_i(x_i) = 2 \cdot \text{Re}(jC_i \text{sh} \gamma x_i), i = 1, 2, \quad (4)$$

где коэффициенты  $C_i$ ,  $P_i$  и  $Q_i$  выражаются следующим образом:

$$C_1 = \frac{jP_2}{P_1P_2 - Q_1Q_2} \cdot \frac{(1 - k_{33}^2)U_0}{2}, C_2 = \frac{Q_1}{P_1P_2 - Q_1Q_2} \cdot \frac{(1 - k_{33}^2)U_0}{2}, \quad (5)$$

$$P_1 = \gamma \operatorname{ch} \gamma \delta - k_{33}^2 \operatorname{sh} \gamma \delta - m(1 - k_{33}^2) \beta^2 \operatorname{sh} \gamma \delta,$$

$$P_2 = \gamma \operatorname{ch} \gamma - k_{33}^2 \operatorname{sh} \gamma - Am(1 - k_{33}^2) \beta^2 \operatorname{sh} \gamma, \quad (6)$$

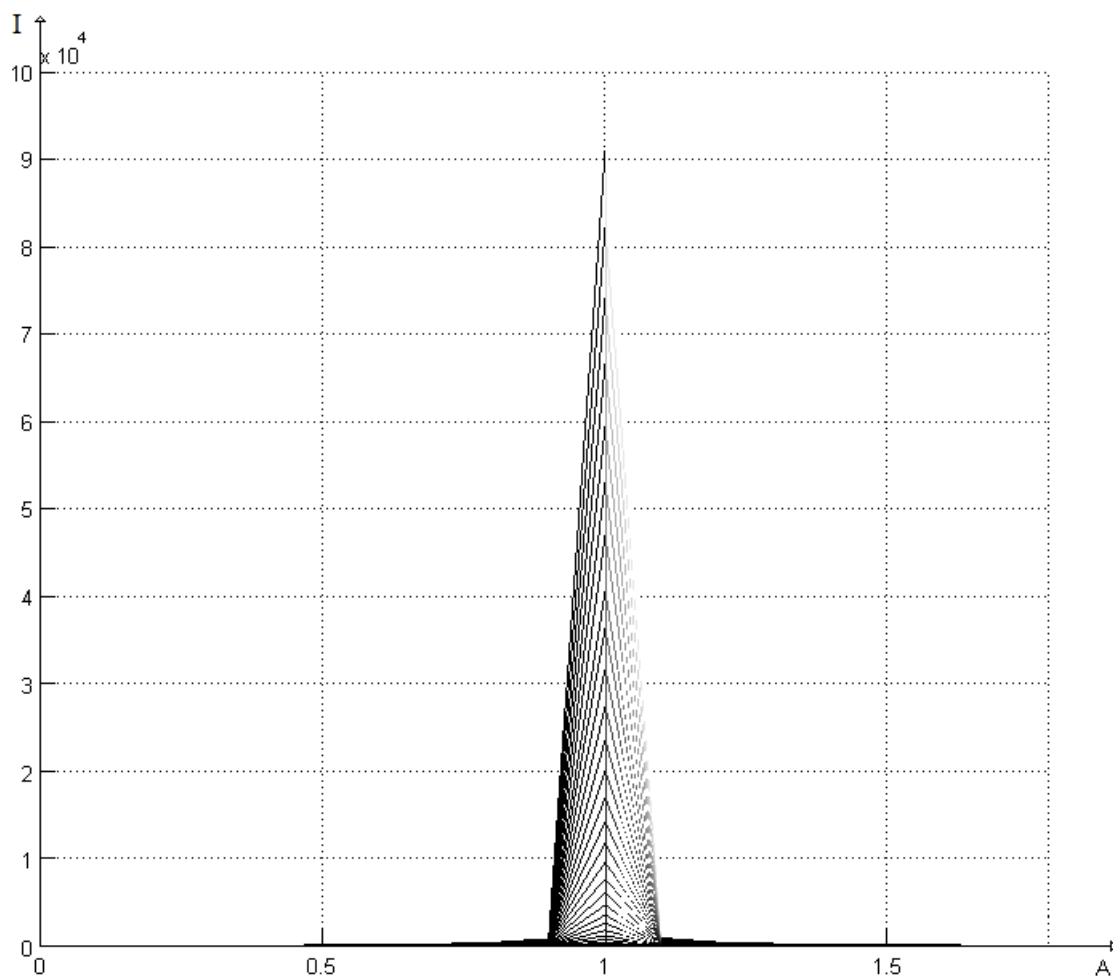
$$Q_1 = A\omega m(1 - k_{33}^2) \beta \operatorname{sh} \gamma \delta,$$

$$Q_2 = m(1 - k_{33}^2) 2\omega \beta \operatorname{sh} \gamma.$$

В системе MatLab была написана программа, реализующая функцию (1) с учетом выражений (2),(3),(4) и коэффициентов (5),(6). Была реализована возможность нахождения максимума функции по различным параметрам.

Соответствие расширенной модели по отношению к базовой [1] подтверждается найденной зависимостью выходного тока от частоты возбуждаемых колебаний при задании равных площадей и толщин для первой и второй пьезопластин. График зависимости имеет характерные острые пики, соответствующие значениям, близким к собственным частотам свободных колебаний пластины без внутреннего трения.

Далее были найдены зависимости величины выходного тока от параметров  $A$  и  $\delta$  (соотношение (2)). Построение производилось следующим образом: значение  $A_1$  фиксировалось ( $A_1 = 1.2 \cdot 10^{-4}$ ), а значение  $A_2$  варьировалось в промежутке  $[0, 3]$ . Аналогично поступали с  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Были выявлены характерные особенности найденной зависимости. Величина выходного тока достигает своего пика при совпадении значений площадей пластин (рисунок).



Зависимость выходного тока от площади и толщины второй пьезопластины при фиксированных значениях параметров первой пластины

Для толщин наблюдается монотонное возрастание величины выходного тока с увеличением толщины второй пьезопластины.

В ходе данной работы были найдены зависимости значения выходного тока от величины присоединенной массы. Заметим, что варьирование массы производилось за счет изменения плотности материала при сохранении ее объема и формы. Полученная зависимость представляет собой монотонное возрастание величины тока с увеличением массы.

Последней из полученных зависимостей была зависимость величины выходного тока, считываемого со второй пьезоэлектрической пластины, от линейных размеров устройства. Для этого был введен размерный множитель  $\lambda$ , модифицирующий формулу (1) следующим образом: толщины пластин домножались на  $\lambda$ , площади – на  $\lambda^2$ , объемные величины – на  $\lambda^3$ . Величина выходного тока монотонно возрастает с увеличением параметра  $\lambda$ . После значения  $\lambda = 10$  зависимость близка к линейной.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нагар Ю. Н., Ольшанский В. Ю., Панкратов В. М., Серебряков А. В.* Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2.
2. *Афонин С. М.* Параметрическая структурная схема пьезопреобразователя // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002.
3. *Нагар Ю. Н., Ольшанский В. Ю., Панкратов В. М.* Динамика пьезогироскопа при работе в импульсном режиме // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 3. С. 63–66.
4. *Распопов В. Я.* Микромеханические приборы : учебное пособие // М.: Машиностроение. 2007. 400 с.

УДК 629.78

**Я. Г. Сапунков**

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

С помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимального управления встречей за минимальный промежуток времени двух космических аппаратов (КА), один из которых неуправляемый и движется только под действием силы притяжения к Солнцу, второй аппарат управляется с помощью солнечного паруса. Приведены результаты численного решения задачи.

**Постановка задачи.** KS-переменные  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$  [1] связаны с векторами положения центра масс КА и его скорости  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  соотношениями (1.2) из [2]. Переменная  $h$  – полная энергия единицы массы КА,  $M$  – масса притягивающего центра,  $\gamma$  – гравитационная постоянная,  $\tau$  – независимая переменная, связанная с временем  $t$  уравнением  $dt/d\tau = u^2$ .

Тяга солнечного паруса, отнесенная к единице массы КА, определяется по формуле, в которой  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости паруса, обращенной от Солнца,  $\vartheta$  – угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$ ,  $d$  – коэффициент, характеризующий площадь паруса:

$$\mathbf{p} = d \frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} \mathbf{n} = d (\mathbf{u}^2)^{-4} (P^T(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \mathbf{n})^2 \mathbf{n}.$$

Если через  $R$  обозначить характерный масштаб длины, например радиус орбиты Земли, на которой находится управляемый аппарат в начальный момент времени, то связь между размерными и

безразмерными переменными будет определяться соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= R^{1/2} \mathbf{u}^*; & \mathbf{s} &= (\gamma M)^{1/2} \mathbf{s}^*; & h &= \frac{\gamma M}{R} h^*; & \tau &= \left( \frac{R}{\gamma M} \right)^{1/2} \tau^*; \\ t &= R \left( \frac{R}{\gamma M} \right)^{1/2} t^*; & d &= \gamma M d^*; & \mathbf{r} &= R \mathbf{r}^* & \mathbf{v} &= \left( \frac{\gamma M}{R} \right)^{1/2} \mathbf{v}^*. \end{aligned}$$

Далее будут использоваться только безразмерные величины, верхний индекс «\*» над которыми опускается. Движение неуправляемого аппарата  $A$  в безразмерных KS-переменных определяется через переменную  $\tau_a$  соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= \mathbf{C} \cos(k\tau_a) + \mathbf{D} \sin(k\tau_a) & \mathbf{s}_a &= k (\mathbf{D} \cos(k\tau_a) - \mathbf{C} \sin(k\tau_a)); \\ k &= \left( -\frac{1}{2} h_a \right)^{1/2}; & h_a &= -(C^2 + D^2)^{-1} < 0; & t &= \int_{\tau}^{\tau_a} (\mathbf{u}_a)^2 d\tau_a; \\ \tau_a &\geq \tau; & \mathbf{C} &= \text{const}; & \mathbf{D} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения движения управляемого КА, в которых единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  является управляющим параметром, с учетом  $\tau_a$  в безразмерных KS-переменных имеют вид (см. [1, 2])

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \mathbf{s}, & \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= \frac{1}{2} h \mathbf{u} + \frac{1}{2} d (\mathbf{u}^2)^{-3} (P^T(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \mathbf{n})^2 P(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \\ \frac{dh}{d\tau} &= 2d (\mathbf{s}, P(\mathbf{u}) \mathbf{n}) (\mathbf{u}^2)^{-4} (P^T(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \mathbf{n})^2, & \frac{d\tau_a}{d\tau} &= \frac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{u}_a^2(\tau_a)}. \end{aligned} \quad (2)$$

В KS-переменных время перелета, которое характеризует качество процесса управления, определяется функционалом, принимающим минимальное значение для оптимального процесса управления:

$$I = \int_0^{\tau_k} \mathbf{u}^2 d\tau. \quad (3)$$

Начальное состояние управляемого аппарата и начальное значение  $\tau_a$  определяются соотношениями при  $\tau = 0$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_H, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_H, \quad h = h_H, \quad \tau_a = \tau_{aH}. \quad (4)$$

В конечный «момент времени»  $\tau = \tau_k$ , который заранее не задается, управляемая система (2) в пространстве  $(\mathbf{u}, \mathbf{s}, h, \tau_a)$  в случае мягкой встречи должна находиться на многообразии

$$\begin{aligned} P^T(\mathbf{u}(\tau_k)) \mathbf{u}(\tau_k) &= P^T(\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k))) \mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k)); \\ P^T(\mathbf{u}(\tau_k)) \mathbf{s}(\tau_k) &= P^T(\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k))) \mathbf{s}_a(\tau_a(\tau_k)). \end{aligned} \quad (5)$$

**Решение задачи с помощью принципа максимума Понтрягина.** Функция Гамильтона — Понтрягина для управляемой системы (2) имеет вид

$$H = -u^2 + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + \frac{1}{2}h(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}) + du^{-8} (P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{n})^2 (\mathbf{q}, P(\mathbf{u})\mathbf{n}) + \\ + \vartheta \frac{\mathbf{u}^2}{(\mathbf{u}_a(\tau_a))^2}, \quad \mathbf{q} = \frac{u^2}{2}\mathbf{v} + 2\eta\mathbf{s}. \quad (6)$$

Сопряженные переменные  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ,  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}}, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial h}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \tau_a}. \quad (7)$$

Из условия максимума для функции (6) оптимальное управление, единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  к солнечному парусу, определяется по формуле

$$\mathbf{n} = z\frac{\mathbf{r}}{r} + b^{-1} \left( z - \frac{2}{3z} \right) \frac{\mathbf{R}_1}{r}, \quad z = \left[ \frac{1}{6} (4 - a^2 + a\sqrt{8 + a^2}) \right]^{1/2}, \quad (8) \\ a = b \frac{r}{|P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}|}, \quad b = \frac{(P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}, \mathbf{r})}{r^2}, \quad \mathbf{R}_1 = P^T(\mathbf{u})\mathbf{q} - br.$$

На правом подвижном конце траектории при  $\tau = \tau_k$  должны выполняться условия трансверсальности. В случае мягкой встречи они имеют вид

$$l(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) + l(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{s}) = 0; \quad l(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}) = 0; \quad \eta = 0; \quad \vartheta + (\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2}h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) = 0. \quad (9)$$

Кроме того, так как  $\tau_k$  заранее не задается, то при  $\tau = \tau_k$

$$H_{opt}|_{\tau_k} = 0. \quad (10)$$

Принцип максимума сводит решение задачи оптимального управления к решению краевой задачи для фазовых и сопряженных переменных. В случае мягкой встречи необходимо решать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (2), (7), в которых управляющий параметр  $\mathbf{n}$  определяется согласно (8) с начальными условиями (4) при  $\tau = 0$  и граничными условиями (5), (9), (10) при  $\tau = \tau_k$ .

**Примеры численного решения задачи.** Краевая задача, к которой принцип максимума Понтрягина сводит решение поставленной задачи оптимального управления, численно решается методом Ньютона.



В начальный момент времени управляемый аппарат находится на орбите Земли. В декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , начало которой находится в центре Солнца, а плоскость  $Ox_1x_2$  совпадает с плоскостью орбиты Земли, в безразмерных переменных положение и скорость управляемого аппарата определяются координатами  $x_1 = 1.0$ ,  $x_2 = 0.0$ ,  $x_3 = 0.0$ ,  $v_1 = 0.0$ ,  $v_2 = 1.0$ ,  $v_3 = 0.0$ . Неуправляемый аппарат находится на орбите Марса и его начальное положение сдвинуто на угол  $\varphi_0$  относительно управляемого аппарата. Безразмерное значение величины, характеризующей площадь солнечного паруса,  $d = 0.1$ . Орбита неуправляемого аппарата имеет наклон к плоскости орбиты Земли. В таблице для различных значений угла  $\varphi_0$  приводятся длительности полета управляемого аппарата в безразмерных переменных и в земных годах, безразмерные координаты места мягкой встречи аппаратов.

$\varphi_0, ^\circ$	Время полета	Время полета в земных годах	$x_1$	$x_2$	$x_3$
75	9.6764	1.5400	1.4972	0.2732	0.1013
90	10.1976	1.6230	1.1441	1.0022	0.1073
120	11.1576	1.7726	-0.2770	1.4946	0.0970

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
2. Сапунков Я. Г. Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космические исследования. 1996. Т. 34, вып. 4. С. 428–433.

Г. Д. Севостьянов

## МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕГУЛЯРНОМ ПЕРЕСЕЧЕНИИ КОСЫХ СКАЧКОВ

Дан алгоритм расчета параметров течения газа (на основе уравнений Чаплыгина) при регулярном взаимодействии косых скачков уплотнения. Рассмотренная схема течения устойчива по отношению к изгибу преломленных скачков, при этом «жидкий клин» отсутствует.

Уравнения Чаплыгина в переменных  $\theta, \sigma$  [1] для плоского безвихревого установившегося течения идеального газа:  $\varphi_\theta = -\psi_\sigma, \varphi_\sigma = K(\sigma)\psi_\theta$  ( $\varphi$  – потенциал скорости,  $\theta$  – угол наклона вектора скорости к оси  $x$ ,  $\psi$  – функция тока,  $K, \sigma$  – функции Чаплыгина) в [2] приведены к нелинейной системе в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} (L(u))_\varphi = v_\psi, \quad v_\varphi = u_\psi, \quad u = -c\sigma, \quad v = c\theta, \\ L'(u) = k(u) = -K(\sigma), \quad c = (\gamma + 1) \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{3/(\gamma-1)}, \quad (1) \\ k(0) = 0, \quad k'(0) = 1, \end{aligned}$$

где  $\gamma > 1$  – отношение теплоемкостей газа.

Тогда на скачке уплотнения имеем ( $[f] = f_+ - f_-$  – разрыв  $f$  на скачке)

$$\left( \frac{d\varphi}{d\psi} \right)_c = -\frac{[v]}{[u]} = -\frac{[L]}{[v]}, \quad \left( \frac{d\varphi}{d\psi} \right)_c^2 = \frac{[L]}{[u]}, \quad [v]^2 = [L][u]. \quad (2)$$

Система Чаплыгина в переменных  $v, u$  имеет вид

$$\varphi_v = \psi_u, \quad \varphi_u = k(u)\psi_v.$$

На скачке (индекс «+» для величин на задней стороне скачка) (см. [2])

$$\left( \frac{d\varphi}{du} \right)_c = k_+ \psi_v + \left( \frac{dv_+}{du_+} \right)_c \psi_u = \pm \sqrt{\frac{[L]}{[u]}} \left\{ \psi_u + \left( \frac{dv_+}{du_+} \right)_c \psi_v \right\}, \quad (3)$$

т. е. на ударной поляре имеем из (3) условие косой производной для  $\psi$ :  $a\psi_u + b\psi_v = 0$ .

Так как из уравнения ударной поляры

$$v_+ - v_- = \mp \sqrt{(L_+ - L_-)(u_+ - u_-)}, \quad L_+ = L(u_+), \quad L_- = L(u_-)$$

имеем

$$\left(\frac{dv_+}{du_+}\right)_c = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[u]}{[L]}} \left\{ k_+ + \frac{[L]}{[u]} \right\},$$

то

$$2b = 3k_+ + \frac{[L]}{[u]}, \quad 2a = \mp \left( k_+ \sqrt{\frac{[u]}{[L]}} + 3 \sqrt{\frac{[L]}{[u]}} \right). \quad (4)$$

Для криволинейного скачка в однородном потоке Л. Крокко (Л. Сроссо) в 1937 г. ввел понятие «ежевидной» поляры. Для наклона «иголки» на поляре (образе линии тока  $0 = d\psi = \psi_u du + \psi_v dv$  на плоскости  $(v, u)$ ), который характеризует кривизну линии тока на скачке, имеем:  $(dv/du)_{иг} = -\psi_u/\psi_v = b/a$ .

Функции  $u$  и  $L$  представимы (см. [1]) интегралами по  $\tau = V^2 V_{max}^{-2} < 1$ :

$$u = u(\tau \setminus \tau_*) = c \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{(1 - \tau)^\beta}{2\tau} d\tau,$$

$$L = L(\tau \setminus \tau_*) = c \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{-1 + (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1 - \tau)^{\beta+1}} d\tau \geq 0, \quad (5)$$

$$\tau_* = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} > 0, \quad 0 < \tau < 1, \quad \beta = \frac{1}{\gamma - 1} > 0,$$

$$k = k(\tau) = \frac{-1 + (2\beta + 1)\tau}{(1 - \tau)^{2\beta+1}}.$$

Если  $\gamma = 1 + 2/m$ , где  $m$  – число степеней свободы молекулы газа (без колебательных степеней свободы), то интегралы в (5) вычисляются аналитически. Из интеграла Бернули для числа Маха  $M$  имеем связь с  $\tau$ :  $(\gamma - 1)M^2 = 2\tau/(1 - \tau)$ .

Пусть в однородном сверхзвуковом потоке с  $M_\infty > 1$ ,  $V_\infty$ ,  $\theta_\infty = 0$  (ось  $Ox \parallel \bar{V}_\infty$ ) два косых скачка  $A_+O$  ( $y \geq 0$ ) и  $A_-O$  ( $y \leq 0$ ) в точке  $O(0, 0)$  преломляются в виде косых скачков  $OB_+$  ( $y \geq 0$ ) и  $OB_-$ . За ними в однородном дозвуковом потоке  $M_2 \leq 1$ ,  $\theta_2$ ,  $p_2$ ,  $V_2$ . Углы падения обозначим  $\omega_+ > 0$ ,  $\omega_- > 0$ , углы преломления  $\omega'_+ > 0$ ,  $\omega'_- > 0$  (индекс «+» для величин при  $y \geq 0$ ; «-» для  $y \leq 0$ ). Между скачками наклонные однородные сверхзвуковые потоки имеют  $M_{1\pm} > 1$ ,  $\theta_{1\pm}$ .

Интенсивности падающих скачков  $\xi_{\pm} = p_{\infty}/p_{1\pm} < 1$ ; для преломленных скачков  $\xi'_{\pm} = p_2/p_{1\pm} > 1$  ( $p$  – давление в газе).

Пусть дано  $M_{\infty}$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_2$  (параметр несимметрии). Требуется найти остальные параметры. На плоскости  $(v, u)$  вершины двух малых ударных поляр ( $u_{1+}$  и  $u_{1-}$ ) лежат на большой поляре ( $u_{\infty} > 0$ ,  $v_{\infty} = 0$ ).  $(v_2, u_2)$  – верхняя точка пересечения малых поляр, при этом в ней наклон  $b/a$  иголок двух поляр должны быть одинаковы (кривизны линий тока в  $O$  одинаковы). Тогда для  $\tau_2$ ,  $\tau_{1+}$ ,  $\tau_{1-}$  имеют место три уравнения ( $v_2$  задано):

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{L(\tau_{1+} \setminus \tau_2) u(\tau_{1+} \setminus \tau_2)} - \sqrt{L(\tau_{\infty} \setminus \tau_{1+}) u(\tau_{\infty} \setminus \tau_{1+})}, \\ v_2 &= \sqrt{L(\tau_{\infty} \setminus \tau_{1-}) u(\tau_{\infty} \setminus \tau_{1-})} - \sqrt{L(\tau_{1-} \setminus \tau_2) u(\tau_{1-} \setminus \tau_2)}, \\ -\frac{3k(\tau_2) + W(\tau_{1+} \setminus \tau_2)}{k(\tau_2) + 3W(\tau_{1+} \setminus \tau_2)} \sqrt{W(\tau_{1+} \setminus \tau_2)} &= \frac{3k(\tau_2) + W(\tau_{1-} \setminus \tau_2)}{k(\tau_2) + 3W(\tau_{1-} \setminus \tau_2)} \sqrt{W(\tau_{1-} \setminus \tau_2)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где введено обозначение:  $W(x \setminus y) = L(x \setminus y)/u(x \setminus y)$ .

После решения системы определяем другие параметры:

$$c\theta_{1+} = v_{1+} = -\sqrt{L(\tau_{\infty} \setminus \tau_{1+}) u(\tau_{\infty} \setminus \tau_{1+})} < 0,$$

$$v_{1-} = \sqrt{L(\tau_{\infty} \setminus \tau_{1-}) u(\tau_{\infty} \setminus \tau_{1-})} > 0,$$

$$\operatorname{tg}\omega_{\pm} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\tau_{1\pm}}{\tau_{\infty}}} \cos(\theta_{1\pm})}{\sqrt{\frac{\tau_{1\pm}}{\tau_{\infty}}} \sin(|\theta_{1\pm}|)},$$

$$\operatorname{tg}\omega'_{\pm} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_{1\pm}}{\tau_{\infty}}} \cos \theta_{1\pm} - \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_{\infty}}} \cos \theta_2}{\sqrt{\frac{\tau_{1\pm}}{\tau_{\infty}}} \sin |\theta_{1\pm}| \pm \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_{\infty}}} \sin \theta_2},$$

$$\xi_{\pm} = \left( \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{\infty}^2 \sin^2(\omega_{\pm}) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{-1},$$

$$\xi'_{\pm} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_{1\pm}^2 \sin^2(\omega'_{\pm} + |\theta_{1\pm}|) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

При изменении параметра  $v_2$  (или угла  $\theta_2$ ) точка  $(v_2, u_2)$  на плоскости  $(v, u)$  вычерчивает «пояс» большой поляры (при  $v_2 = 0$  имеем точку Крокко для регулярного отражения косога скачка от стенки [2]), его концы – звуковые точки, в которых исчезает одна малая поляра. Сход с пояса приводит к теоретическому «жидкому клину».

В околзвучковой теории взаимодействия скачков ( $M \approx 1$ ,  $u \approx 0$ ) [3,4]:

$$k(u) = u, \quad L(u) = \frac{u^2}{2}, \quad [v] = \mp \langle u \rangle [u];$$

$$2b = 3u_{++} \langle u \rangle, \quad 2a = \pm \left( \frac{u_+}{\langle u \rangle} + 3 \langle u \rangle \right),$$

$$\langle u \rangle = \frac{u_+ + u_-}{2},$$

и уравнения (6) упрощаются.

Расчет параметров потока при  $v_2 = 0$  показывает (см. [2]) удовлетворительное приближение к экспериментальным значениям (не очень надежным) (в [5–7] дана библиография по данной задаче).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика : в 2 ч. 4-е изд. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. Ч. 2.
2. *Севостьянов Г. Д.* Метод расчета параметров регулярного отражения косоуго скачка от стенки // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 140–143.
3. *Севостьянов Г. Д.* Регулярное несимметричное взаимодействие околзвучковых скачков // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 219–222.
4. *Севостьянов Г. Д.* Регулярное несимметричное пересечение косых околзвучковых скачков // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 184–186.
5. Основы газовой динамики / под ред. Г. Эммонса. М. : Изд-во иностр. лит., 1963.
6. *Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г.* Нестационарные взаимодействия ударных волн. М. : Наука, 1977.
7. Ударные и детонационные волны. Методы исследования. 2-е изд., доп. и перераб. М. : Физматлит, 2004.

Г. П. Шиндяпин, А. А. Матутин

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЙ ПРИ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА

Для различных режимов нелинейной рефракции ударных волн на поверхности океана методами асимптотической теории коротких волн [1] проведем анализ основных параметров, характеризующих картину течения; с помощью численного метода последовательных приближений [2] построены поля давлений для случаев нерегулярной рефракции и регулярной рефракции с ударной волной, замыкающей область разрежения.

1. При падении ударной волны (УВ)  $AR$ ,  $BR$  (рис. 1, *a*, *б*) относительной интенсивности  $\Delta p/(\rho_0 c_0^2)$  под углом  $\alpha$  к вертикали на свободную поверхность  $AF$  океана, разделяющую воздух и воду с газосодержащими  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$ , возникают различные режимы рефракции:  $NR$  – нерегулярный (см. рис. 1, *a*),  $RR$  – регулярный (отсутствует фронт  $AB$ ),  $RRV$  – регулярный с ударной волной  $EB_1$ , замыкающей зону разрежения  $EAB_1$  (см. рис. 1, *б*).

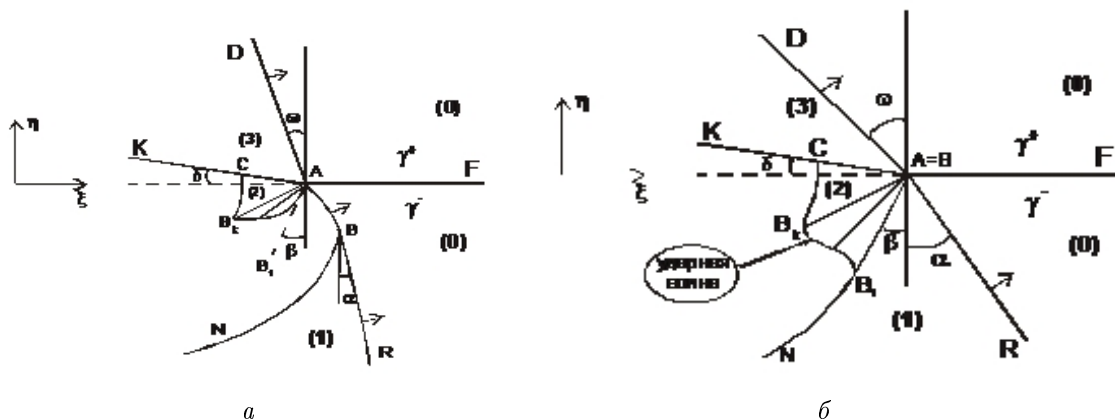


Рис. 1 Рефракция: *a* – нерегулярная рефракция ( $NR$ );  
*б* – регулярная рефракция с ударной волной,  
замыкающей волну разрежения ( $RRV$ )

Установлены основные параметры (параметры подобия) [3] для относительно слабых УВ ( $AR$ ,  $BR$ )

$$\bar{\varepsilon} \ll 1, \bar{\varepsilon} = L_0(\gamma^-)\varepsilon_{10} = R_0(\gamma^-)P_{10}, P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0(\gamma^-),$$

$$B_0 = p_0(\gamma^-)c_0^2(\gamma^-), L_0 = p_0R_0(\gamma^-)/B_0(\gamma^-), \varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0.$$

При использовании модели гомогенной локально-равновесной пузырьковой среды с газосодержанием  $\gamma^- = m_{\text{II}}/m_{\text{I}}$  для жидкости и  $\gamma^+ = \infty$  для газа были установлены [4], в точке А два инварианта рефракции

$$\text{I: } c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad \text{II: } v^+ = v^-. \quad (1)$$

В переменных теории коротких волн (см. [1])

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \bar{\varepsilon}X, \eta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y; R/c_0t = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \Theta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y; \\ \delta &= X + \frac{1}{2}Y^2, \quad \frac{u}{c_0} = P_{10}\frac{u^{(1)}}{c_0}, \quad \frac{v}{c_0} = P_{10}^{\frac{3}{2}}R_0^{\frac{1}{2}}\frac{v^{(1)}}{c_0}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{p - p_0}{B_0} = P_{10}P^{(1)}, \quad \frac{u}{c_0} = \bar{\varepsilon}\frac{\mu}{R_0}, \quad \frac{v}{c_0} = \bar{\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{\nu}{R_0}\frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} = P_{10}H^{(1)}$$

течения в области возмущения АВНРК описываются системой уравнений

$$[\mu(\mu - 2\delta)]_{\delta} + \nu_y + 3\mu = 0, \quad \mu_y = \nu_{\delta}, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)}. \quad (3)$$

Решение (3) для волны разрежения  $AB_1E$  имеет вид

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, \quad \nu = \frac{1}{3}z^3 - \mu Y + d, \quad z = (X - X_A)/Y. \quad (4)$$

На фронтах УВ, ограничивающих область возмущения  $(AB, EB_1)X = X^*(Y)$ , имеем условия  $(\mu', \nu' - \text{значения перед фронтом})$

$$X - \psi^{\nu}Y = \frac{1}{2}(\psi^{\nu^2} + \mu + \mu'), \quad \psi^{\nu} = \frac{dX^*}{dY}, \quad (\psi^{\nu} = \frac{d\xi^*}{d\eta}/\bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}), \quad (5)$$

$$(\mu - \mu') \cdot (\psi^{\nu} + Y) = \nu' - \nu, \quad P^{(1)} = \mu.$$

В точке  $A$  имеем  $\mu_A = q^-$  – перед передним фронтом волны разрежения ( $AB_1$ ),  $\mu_A = q^+$  – за задним фронтом волны разрежения ( $AE$ ), т. е.

$$q^- = (p_A^- - p_0)/(p_1 - p_0), q^+ = (p_A^+ - p_0)/(p_1 - p_0).$$

Инварианты I, II (1) в переменных (2) для верхней и нижней сред приводятся к виду (см. [3])

$$(I) : \quad \omega^\nu = 2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^2}{\bar{L}} + q^-, \quad \omega^\nu = \frac{tg\omega}{\bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}, \alpha^\nu = \frac{tg\alpha}{\bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}, \quad (6)$$

$$(II) : \quad \frac{q^+ \bar{B}}{\bar{c}} \omega^\nu = \frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{\frac{3}{2}} + d, \quad \frac{\bar{B}}{\bar{c}} = \bar{\rho} \bar{c}, \quad c_\gamma = (c_0^- - c_0^+)/ (c_0^- \bar{\varepsilon}), \quad \bar{L} = \frac{L_0^-}{L_0^+}.$$

Исключая  $\omega^\nu$  в (6), получим выражение для определения  $q^+$

$$q^{+2} \bar{\rho} \bar{c} (2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{\bar{L}} + q^-) = \left[ \frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{\frac{3}{2}} + d \right]^2. \quad (7)$$

Здесь  $\alpha^\nu, c_\gamma, \bar{L}, \bar{\rho}, \bar{c}$  – параметры подобия;  $X_A, d$  – постоянные, которые определяются из условий на переднем фронте волны разрежения  $AB_1$ .

При режимах рефракции  $RR$  и  $RRV$  значение  $q^- = 1$ . При режиме  $NR$  для определения  $q^-$  в [5] использовалось точное решение (3), удовлетворяющее условиям течения в области  $EB_K ABN$  и позволяющее проинтегрировать уравнение фронта (5). Получена зависимость  $q^- = 1 - m^2$  от  $\alpha^\nu$ , при  $0 \leq \alpha^\nu \leq 1$ ,  $0.2 \leq q^- \leq 1$ . Переход от режима  $NR$  к  $RR$  происходит при  $\alpha^\nu = 1$ ; от  $RR$  к  $RRV$  при  $\alpha^\nu = 2.098$ .

При рефракции на поверхности океана ( $\gamma^+ = \infty, 0 \leq \gamma^- \leq 10^{-6}$ ) согласно (6) имеем для параметров подобия  $\bar{L} = \frac{L_0^-}{L_0^+} \ll 1, c_\gamma \gg 1, \bar{\rho} \bar{c} \gg 1$ , т. е. при режимах  $NR, RR, RRV$  имеем

$$q^+ = 0. \quad (8)$$

Поверхность океана гасит ударные волны. Вывод (8) согласуется с более общими расчетами с помощью модели потенциальных адиабатических течений для ГЖС (см. [1]), когда  $0 \leq q^+ \leq 10^{-2}$  при  $0 \leq \gamma \leq 10^{-6}$ .

**2.** Численный метод решения краевых задач рефракции для областей возмущения  $ABNPK$  для системы уравнений (3) коротких волн основан (см. [1]) на использовании метода последовательных приближений (см. [2]). Краевые задачи для различных режимов рефракции представляют задачи эллиптического типа для системы (3) с заранее неиз-



вестными положениями УВ ( $AB, EB_1$ ), представляющими границы областей возмущений, и известными условиями на свободной поверхности  $AK$ , границах  $BN, BN_1, CE$ , представляющих линии слабого разрыва, а также условиями срачивания с областями линейного решения на  $DM$  и областью квазиодномерного решения на  $PN$ .

Задаются приближенные положения фронтов УВ, строится начальное поле давлений (методом прямых). Полученная краевая задача (I) для системы (3) решается численно методом конечных разностей 2-го порядка точности. Решение краевой задачи (I) используется для уточнения положений фронтов УВ путем численного интегрирования (5). Ставится краевая задача (II), решение которой также ищется методом конечных разностей. Начальным приближением берется решение задачи (I). Снова уточняется фронт. Решение считается найденным, если во всех расчетных точках области погрешность не превышает установленных значений.

На рис. 2 приведены результаты расчета поля давлений  $P^{(1)} = P^{(1)}(X, Y)$  для случая  $NR$  при  $\alpha^\nu = 0.5$ . Для получения точности  $\varepsilon_\Pi = 0.003$  потребовалось 12 итераций; для определения положения фронта УВ  $AB$  с точностью  $\varepsilon_\Phi = 0.005$  потребовалось 18 итераций.

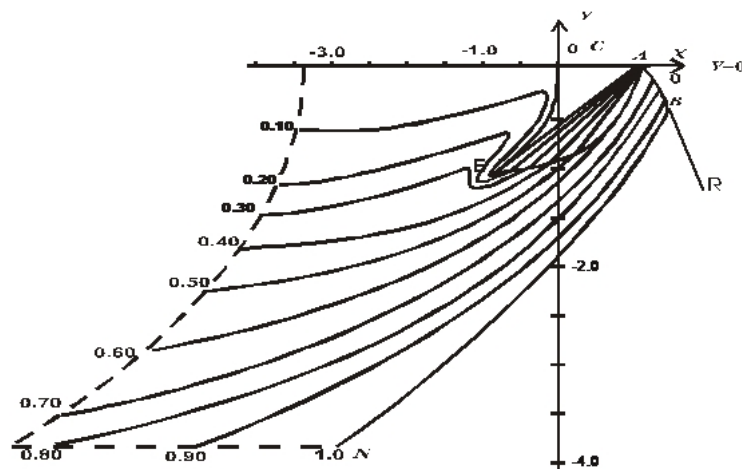


Рис. 2. Поле давлений, рассчитанное численным методом решения краевых задач нелинейной рефракции УВ

На рис. 3 представлены результаты расчета поля давлений для случая  $RRV$  при  $\alpha^\nu = 3.162$ . Для получения точности  $\varepsilon_\Pi = 0.003$  решения краевой задачи потребовалось 12 итераций; для определения положения фронта УВ  $EB_1$  с точностью  $\varepsilon_\Phi = 0.005$  потребовалось 16 итераций.

Следует отметить специфику поведения линий равных давлений: их сгущение вблизи фронтов слабых возмущений  $CE$ ,  $BN$  ( $B_1N$ ), а также за фронтом УВ  $EB_1$ , замыкающим область разрежения. Результаты расчетов согласуются с результатами, полученными при использовании класса точных решений в соответствующих случаях [5], а также экспериментальными интерферограммами.

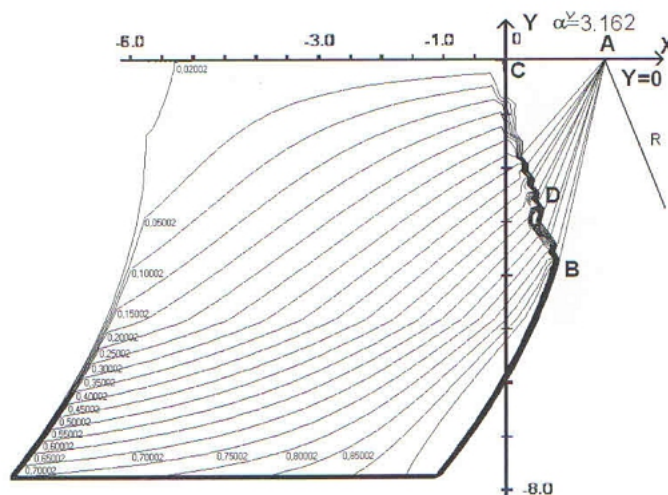


Рис. 3. Поле давлений, рассчитанное численным методом решения краевых задач нелинейной рефракции УВ

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. Шиндяпин Г. П. Численное решение задачи нерегулярного отражения слабой ударной волны от жесткой стенки в идеальном газе // ЖВМ и МФ. 1980. № 1. С. 249–254.
3. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. Анализ нелинейной рефракции ударных волн методами асимптотической теории коротких волн // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 150–154.
4. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.
5. Шиндяпин Г. П. Об особенностях «сверхзвукового» взаимодействия слабых ударных волн и задаче преломления слабой ударной волны в воде на свободной поверхности // Аэродинамика: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 3(6). С. 92–104.

# СОДЕРЖАНИЕ

## СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

БЕЛЯЕВ Д. Д., ДУДОВ С. И. Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой с варьруемой шириной и наименьшей площадью . . . . .	3
БУКУШЕВА А. В. Финслерово пространство с метрикой Беравальда – Мора как обобщение метрического пространства невырожденных поличисел . . . . .	6
БУКУШЕВА А. В., ГАЛАЕВ С. В., ИВАНЧЕНКО И. П. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой . . . . .	10
БУРЛУЦКАЯ М. Ш., ХРОМОВ А. П. Асимптотика фундаментальной системы решений для уравнения Дирака . . . . .	14
ВОДОЛАЗОВ А. М. Алгебры целозначных функций для разложимых алгебраических торов . . . . .	20
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. О задаче равномерного распределения риска финансового портфеля . . . . .	23
ГАЛАЕВ С. В. О продолжении внутренней связности неголономного многообразия с финслеровой метрикой . . . . .	26
ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. О внутренней геометрии метрических почти контактных многообразий . . . . .	29
ИВАНОВ Р. А., ФИРСТОВ В. Е. Принцип минимума информации при оптимизация группового сотрудничества в учебном процессе. . . . .	33
ИОФИНА Т. В. Приближение функций средними Эйлера рядов Фурье по системам Виленкина . . . . .	37
КОРОБЧЕНКО Е. В. Изоморфность гомотопических групп толерантных пространств, определенных через толерантные сфероиды разного размера . . . . .	41
КОЧЕРГИН А. П. Уточнение асимптотики решения Йоста для дифференциального пучка второго порядка . . . . .	44
КУЗНЕЦОВА И. А. Об одной иерархической игре трёх лиц . . . . .	48
КУРДЮМОВ В. П., ХРОМОВ А. П. Базисность Рисса собственных функций интегральных операторов с разрывными ядрами . . . . .	51
ЛУКОМСКИЙ Д. С., ЛУКОМСКИЙ С. Ф. Всплесковые базисы и криптография . . . . .	55
МАЗУР Т. В. Алгоритм решения обратной задачи Штурма — Лиувилля на звездообразном графе . . . . .	58

МАЛИНСКИЙ А. И. Реализация алгоритма построения дерева сценариев с заданными статистическими свойствами . . . . .	62
МАТВЕЕВА Ю. В. О кубическом многочлене на четырехграннике . . . . .	64
МОЛЧАНОВ В. А. Конкретная характеристика универсальных планарных автоматов . . . . .	68
НЕБАЛУЕВ С. И. Спектральная последовательность Картана — Лере для толерантных пространств . . . . .	70
НОВИКОВ В. Е. Некоторые алгебраические операции над формальными контекстами . . . . .	73
ОРЕЛА А. О некоторых видах фантомных типов данных . . . . .	76
ПАСЕКОВ П. Ю. Применение теории Марковица к портфелю механических торговых систем . . . . .	79
ПОЛЯКОВ В. Н. О некоторых диофантовых уравнениях . . . . .	82
РОЗЕН В. В. Нахождение крайних сбалансированных подматриц заданной матрицы . . . . .	85
РЫХЛОВ В. С. Разложение по собственным функциям одного пучка дифференциальных операторов второго порядка . . . . .	89
САВИНА Т. Ф. О полных семействах гомоморфизмов игр с отношениями предпочтения . . . . .	92
ТРЫНИН А. Ю. О необходимых и достаточных условиях равномерной и поточечной сходимости интерполяционных процессов по «взвешенным» многочленам Якоби . . . . .	96
ФАДЕЕВ Р. Н. Оценки наилучших приближений по мультипликативным системам в некоторых пространствах . . . . .	100
ФАЙЗЛИЕВ А. Р. Статистические методы определения числа локальных центров на территории города . . . . .	103
ФЕДОСЕЕВ А. Е. Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения с особенностью . . . . .	106
ФОКИН П. В. Внутреннее представление булевых многочленов в виде ZDD-диаграмм . . . . .	109
ХВОРОСТУХИНА Е. В. Об элементарных свойствах универсальных гиперграфических автоматов . . . . .	112
ХРОМОВ А. А. О выборе параметра при восстановлении функций с интегральным условием . . . . .	114
ХРОМОВА Г. В. О сходимости приближений функции с «размазанным» граничным условием . . . . .	116
ЧИКИНА Т. С. Приближение средними Зигмунда — Рисса в $p$ -вариационной метрике . . . . .	118
ШАТАЛИНА О. И. Решение задачи типа Колмогорова — Никольского для регуляризирующих операторов Тихонова . . . . .	121
ШЕБАЛДИН В. Р. Необходимые условия экстремума в задаче экономического роста с ограничениями на фондовооруженность . . . . .	123
ШИШКОВА Е. В. Об оценке скорости сходимости приближения функций некоторым семейством интегральных операторов на классах Липшица . . . . .	126
ЮРКО В. А. Обратная задача для сингулярных дифференциальных операторов на некомпактных графах . . . . .	128

## СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНТИПОВА А. С., БИРЮКОВ В. Г. Аналитическое и численное исследование кинематической задачи оптимальной переориентации твердого тела . . . . .	133
БАРЫШЕВ А. А., ФЕДУКИНА М. А. О реализации алгоритма решения краевой задачи вибрационного изгиба вязкоупругой пластины – полосы с использованием технологий параллельного программирования . .	136
БИРЮКОВ В. Г., ВАХЛЮЕВ В. Ю. Оптимальная остановка вращательного движения твердого тела . . . . .	140
ДОЛЬ А. В., ГУЛЯЕВ Ю. П. Интегрирование основной системы уравнений динамики кровотока методом разделения переменных . . . . .	143
ИВАНОВ М. К., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Алгоритмы определения ориентации движущегося объекта в инерциальной системе координат . . . . .	147
ЛЯГАЕВА Т. В., ЧЕРНОВ И. А. К учету противодействия в задаче о сильном взрыве . . . . .	150
КИТАРОВА А. К., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата за фиксированное время . . . . .	154
КОЖАНОВ В. С., ЧЕРНОВ И. А. Роль гипергеометрической функции в нахождении автомодельных решений одномерной газовой динамики . . .	157
ЛИВЕРОВСКИЙ Д. И., ШЕВЫРЕВ С. П. Метод Давыдова для случая несжимаемой невязкой тяжелой жидкости на регулярной сетке . . . . .	161
ЛИВЕРОВСКИЙ Р. И., ШЕВЫРЕВ С. П. Метод Давыдова на треугольной сетке для случая сжимаемого газа . . . . .	164
ОЛЬШАНСКИЙ В. Ю., СЕРЕБРЯКОВ А. В., АБИТОВА И. Ф. Анализ влияния граничных условий на характеристики пьезогироскопа . . . .	167
ПАНКРАТОВ И. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Аналитическое решение уравнений задачи переориентации орбиты космического аппарата в отклонениях .	169
РАСТЕГАЕВ Ю. О. Влияние геометрических параметров на величину выходного сигнала пьезогироскопа . . . . .	173
САПУНКОВ Я. Г. Оптимальное управление движением космического аппарата с солнечным парусом . . . . .	176
СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Метод расчета параметров при регулярном пересечении косых скачков . . . . .	180
ШИНДЯПИН Г. П., МАТУТИН А. А. Аналитическое и численное исследование полей давлений при рефракции ударных волн на поверхности океана . . . . .	184