

УДК 517.984

Н.П. Бондаренко

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

Рассматривается обратная задача спектрального анализа для матричного уравнения Штурма—Лиувилля, являющаяся обобщением хорошо изученной скалярной задачи [1]. Обратная задача в матричном случае изучалась в работах [2–5]. В данной статье получена локальная разрешимость обратной задачи и устойчивость ее решения.

Рассмотрим краевую задачу $L(Q(x), h, H)$ для матричного уравнения Штурма—Лиувилля:

$$lY := -Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \quad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0.$$

Здесь $Y = [y_k]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, причем $Q_{jk}(x) \in L_2(0, \pi)$ — комплекснозначные функции, λ — спектральный параметр. Матрицу $Q(x)$ в дальнейшем будем называть *потенциалом*. Краевые условия задаются матрицами $h = [h_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, $H = [H_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, где h_{jk} и H_{jk} — комплексные числа. В данной статье будем рассматривать самосопряженный случай, когда $Q = Q^*$, $h = h^*$, $H = H^*$.

Обозначим $\{\lambda_p\}_{p \geq 0}$ — собственные значения задачи L с учетом кратностей, $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p \leq \dots$.

Пусть $\Phi(x, \lambda) = [\Phi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — решение уравнения (1) при условиях $U(\Phi) = I_m$, $V(\Phi) = 0_m$ (I_m — единичная $m \times m$ матрица, 0_m — нулевая $m \times m$ матрица). Положим $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$. Матрицу $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ будем называть *матрицей Вейля* задачи L . Нетрудно показать, что матрица-функция $M(\lambda)$ мероморфна по λ и имеет простые полюса в точках $\{\lambda_p\}$.

Положим

$$\alpha_p := \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_p} M(\lambda).$$

Величины $\Lambda := \{\lambda_p, \alpha_p\}_{p \geq 0}$ будем называть *спектральными данными* задачи L .

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. По заданным спектральным данным Λ построить Q , h и H .

Пусть $\{p_k\}_{k \geq 0} = \{0\} \cup \{p: p \geq 1, \lambda_p > \lambda_{p-1}\}$, т.е. $\{\lambda_{p_k}\}_{k \geq 0}$ — все различные собственные значения задачи L , $\lambda_{p_0} < \lambda_{p_1} < \dots < \lambda_{p_k} < \dots$. Введем $\{\alpha'_p\}$ следующим образом:

$$\alpha'_{p_k} := \alpha_{p_k}, \quad k \geq 0, \quad \alpha'_p = 0_m, \quad p \notin \{p_k\}_{k \geq 0}.$$

Будем говорить, что некоторые величины $\{\lambda_p, \alpha_p\}_{p \geq 0} \in \text{Sp}$, если λ_p — вещественные числа, $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p \leq \dots$, $\alpha_p = (\alpha_p)^* \geq 0$, $\alpha_p = \alpha_q$, если $\lambda_p = \lambda_q$ и ранги матриц α_p совпадают с кратностями соответствующих λ_p . В этом случае можно ввести α'_p , как описано выше.

Введем в рассмотрение задачу $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$. Условимся, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче L , то символ $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \tilde{L} .

Пусть дана задача \tilde{L} и $\tilde{\Lambda}$ — ее спектральные данные. Пусть $\Lambda \in \text{Sp}$ — некоторые величины. Разобьем числа $\{\lambda_p\}$ и $\{\tilde{\lambda}_p\}$ на группы

$$G_n^0 = \{\lambda_{mn}, \lambda_{mn+1}, \dots, \lambda_{m(n+1)-1}, \tilde{\lambda}_{mn}, \tilde{\lambda}_{mn+1}, \dots, \tilde{\lambda}_{m(n+1)-1}\} =: \{\lambda_{nq}^0, \tilde{\lambda}_{nq}^0\}_{q=\overline{1, m}}.$$

Тогда верны асимптотические формулы (см. [3])

$$\tilde{\rho}_{nq}^0 = \sqrt{\tilde{\lambda}_{nq}^0} = n + O(n^{-1}), \quad q = \overline{1, m}, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

поэтому можно выбрать и фиксировать n^* , зависящее только от задачи \tilde{L} , такое, что при $n, k \geq n^*$ равенство $\tilde{\lambda}_{nq}^0 = \tilde{\lambda}_{kl}^0$ возможно только при $n = k$.

Рассмотрим разбиение чисел $\{\lambda_p\}$ и $\{\tilde{\lambda}_p\}$ на группы G_s , $s = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Каждая группа G_s содержит одинаковое количество чисел из λ_p и $\tilde{\lambda}_p$ с учетом кратностей. Введем нумерацию $G_s = \{\lambda_{sq}, \tilde{\lambda}_{sq}\}_{q=\overline{1, m_s}}$, m_s — размер группы, $0 < m_s \leq m$, $\{\alpha_{sq}, \tilde{\alpha}_{sq}\}_{q=\overline{1, m_s}}$ — соответствующие вычеты.

2. Каждая группа кратных значений из $\{\lambda_p\}$ (или из $\{\tilde{\lambda}_p\}$) целиком содержится в некоторой группе G_s .

3. Существует s^* такое, что $\bigcup_{s=0}^{s^*} G_s = \bigcup_{n=0}^{n^*-1} G_n^0$ и для любого $s > s^*$ группа G_s целиком содержится в некоторой группе G_n^0 . В свою очередь $G_n^0 = \bigcup_{G_s \subset G_n^0} G_s$ при всех $n \geq n^*$.

Определим диаметр группы

$$d_s := \sum_{q=1}^{m_s} |\rho_{sq} - \tilde{\rho}_{sq}| + \sum_{q=1}^{m_s} |\rho_{sq} - \rho_{s1}| + \sum_{q=1}^{m_s} |\tilde{\rho}_{sq} - \tilde{\rho}_{s1}| + \|\alpha^s - \tilde{\alpha}^s\|,$$

где $\alpha^s = \sum_{q=1}^{m_s} \alpha'_{sq}$. Здесь и далее $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма. Для разбиения $\{G_s\}$ введем величину Ω

$$\Omega := \sum_{s=0}^{s^*} d_s + \left(\sum_{n=n^*}^{\infty} ((n+1)\xi_n)^2 \right)^{1/2}, \quad \xi_n = \sum_{G_s \subset G_n^0} d_s, \quad n \geq n^*.$$

Будем говорить, что величины Λ δ -близки со спектральными данными $\tilde{\Lambda}$ задачи L , если существует такое разбиение чисел $\{\lambda_p\}_{p \geq 0}$ и $\{\tilde{\lambda}_p\}_{p \geq 0}$ на группы G_s , $s = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям 1-3, что $\Omega < \delta$.

Замечание. Согласно [4], верны более точные, чем (2), асимптотические формулы

$$\tilde{\rho}_{nq}^0 = \sqrt{\tilde{\lambda}_{nq}^0} = n + \frac{\tilde{\omega}_q}{\pi n} + \frac{\tilde{\varkappa}_{nq}}{n}, \quad \{\tilde{\varkappa}_{nq}\}_{n \geq 0} \in l_2, \quad q = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где $\tilde{\omega} := \{\tilde{\omega}_q\}_{q=\overline{1, m}}$, $\tilde{\omega}_1 \leq \tilde{\omega}_2 \leq \dots \leq \tilde{\omega}_m$ — вещественные числа, зависящие от задачи \tilde{L} . Нетрудно видеть, что из условия δ -близости для Λ и $\tilde{\Lambda}$ при некотором $\delta < \infty$ следует выполнение соотношений, аналогичных (3), для λ_{nq}^0 , причем $\omega = \tilde{\omega}$.

Следующая теорема утверждает локальную разрешимость обратной задачи 1 и устойчивость ее решения.

Теорема 1. Пусть дана задача $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$ и $\tilde{\Lambda}$ — ее спектральные данные. Существует $\delta > 0$ (зависящее от \tilde{L}) такое, что если величины $\Lambda = \{\lambda_p, \alpha_p\}_{p \geq 0} \in Sp$ δ -близки с $\tilde{\Lambda}$, то существует единственная краевая задача $L(Q(x), h, H)$, для которой Λ являются спектральными данными, причем

$$\|Q(x) - \tilde{Q}(x)\|_{L_2((0, \pi), \mathbb{C}^{m \times m})} = \max_{1 \leq j, k \leq m} \|Q_{jk}(x) - \tilde{Q}_{jk}(x)\|_{L_2(0, \pi)} < C\Omega,$$

$$\|h - \tilde{h}\| < C\Omega, \quad \|H - \tilde{H}\| < C\Omega,$$

где C зависит только от \tilde{L} .

Для доказательства теоремы 1 используется развитие идей метода спектральных отображений [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00099).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
2. Yurko V.A. Inverse problems for matrix Sturm—Liouville operators // Russian J. of Mathematical Physics. 2006. Vol. 13, №1. P. 111–118.
3. Yurko V.A. Inverse problems for the matrix Sturm—Liouville equation on a finite interval // Inverse Problems. 2006. Vol. 22. P. 1139–1149.
4. Бондаренко Н.П. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного уравнения Штурма—Лиувилля // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 3–5.
5. Chelkak D., Korotyaev E. Weyl-Titchmarsh functions of vector-valued Sturm—Liouville operators on the unit interval // J. of Functional Analysis. 2009. Vol. 257, is. 5. P. 1546–1588.

УДК 519.4

Д.А. Бредихин

О КЛАССАХ АЛГЕБР ОТНОШЕНИЙ С ОПЕРАЦИЯМИ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

Множество бинарных отношений Φ , замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения \subset . Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1, 2]. Им были рассмотрены алгебры отношений вида $(\Phi, \circ, {}^{-1}, \cup, \cap, -, \Delta, \emptyset, U)$, где $\circ, {}^{-1}$ – операции умножения и обращения отношений; $\cup, \cap, -$ – булевы операции объединения, пересечения и дополнения; Δ – тождественное, \emptyset и U – пустое и универсальное отношения, рассматриваемые как нульарные операции. Существует ряд других важных операций над отношениями. К таковым, в частности, относятся операции цилиндрификации [3], играющие существенную роль в алгебраической логике и определяемые следующим образом:

$$\nabla_1(\rho) = \{(x, y) : (\exists z)(x, z) \in \rho\}, \quad \nabla_2(\rho) = \{(x, y) : (\exists z)(z, y) \in \rho\}.$$

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр),

изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω . Пусть $Q\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) – квазимногообразиие и $Q\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) – многообразиие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$). Одной из основных задач теории алгебр отношений является аксиоматизация указанных классов алгебр для различных совокупностей операций над алгебрами отношений. Нами будут рассмотрены классы алгебр отношений с множеством операций $\Omega \subset \{0, \cap, \cup, \nabla_1, \nabla_2\}$.

Введем ряд определений, необходимых для формулировки основных результатов. Под *упорядоченной алгеброй* мы будем понимать алгебру, на базисном множестве которой задано отношение порядка \leq , согласованной с операциями этой алгебры. *Полурешеточно упорядоченной полугруппой* называется алгебра (A, \cdot, \wedge) типа $(2, 2)$, где (A, \cdot) – полугруппа и (A, \wedge) – полурешетка, каноническое отношение порядка \leq которой согласовано с операцией умножения этой полугруппы. *Решеточно упорядоченной полугруппой* называется алгебра (A, \cdot, \vee, \wedge) типа $(2, 2, 2)$, где (A, \cdot, \wedge) – полурешеточно упорядоченная полугруппа и (A, \cdot, \vee, \wedge) – решетка. Элемент 0 называется *нулевым элементом упорядоченной полугруппы* (A, \cdot, \leq) , если $x0 = 0x = 0$ и $0 \leq x$ для любого x из A . Заметим, что если такой элемент существует, то он определяется однозначно.

Сформулируем ряд ранее полученных результатов для классов алгебр отношений с множеством операций $\Omega \subset \{0, \cap, \cup, \nabla_1, \nabla_2\}$. Общеизвестно, что класс $R\{0\}$ совпадает с многообразиием всех полугрупп. В работе [4] показано, что класс $R\{0, \cap\}$ совпадает с классом всех полурешеточно упорядоченных полугрупп. Конечные базисы тождеств для многообразиий $V\{0, \cup, \cap\}$, $V\{0, \nabla_1\}$, $Q\{0, \nabla_2\}$, $V\{0, \nabla_1, \subset\}$, $V\{0, \nabla_2, \subset\}$, $V\{0, \nabla_1, \cup\}$, $V\{0, \nabla_2, \cup\}$ были найдены в работах [5–11].

Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах.

Теорема 1. *Квазимногообразиие $Q\{0, \nabla_1, \subset\}$ образует многообразиие в классе всех упорядоченных алгебр типа $(2, 1)$. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, *, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит квазимногообразиию $Q\{0, \nabla_1, \subset\}$ тогда и только тогда, когда (A, \cdot) – полугруппа и выполняются следующие тождества:*

$$(x^*)^* = x^*, \quad (1)$$

$$(xy)^* = xy^*, \quad (2)$$

$$x \leq x^*x, \quad (3)$$

$$x^*y \leq x^*. \quad (4)$$

Теорема 2. Квазимногообразия $Q\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ образует многообразие в классе всех упорядоченных алгебр типа $(2, 1)$. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, *, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит квазимногообразию $Q\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ тогда и только тогда, когда (A, \cdot) – полугруппа и выполняются следующие тождества:

$$(x^*)^* = x^*, \quad (1')$$

$$(xy)^* = x^*y, \quad (2')$$

$$x \leq xx^*, \quad (3')$$

$$xy^* \leq y^*. \quad (4')$$

Теорема 3. Класс $R\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ не является квазимногообразием. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, *, \leq)$ принадлежит классу $R\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она принадлежит квазимногообразию $Q\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ и удовлетворяет аксиоме

$$y, z \neq 0 \Rightarrow x^*y = x^*z. \quad (5)$$

Теорема 4. Класс $R\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ не является квазимногообразием. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, *, \leq)$ принадлежит классу $R\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она принадлежит квазимногообразию $Q\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ и удовлетворяет аксиоме

$$x, y \neq 0 \Rightarrow xz^* = yz^*. \quad (5')$$

Теорема 5. Квазимногообразия $Q\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ является многообразием. Алгебра $(A, \cdot, \wedge, *)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит квазимногообразию $Q\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ тогда и только тогда, когда (A, \cdot, \wedge) – полурешеточно упорядоченная полугруппа, выполняются тождества (1)–(4) и

$$(x^* \wedge y)z = x^*z \wedge yz), \quad (6)$$

$$x(y \wedge z^*) = xy \wedge z^*). \quad (7)$$

Теорема 6. Квазимногообразия $Q\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ является многообразием. Алгебра $(A, \cdot, \wedge, *)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит квазимногообразию $Q\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ тогда и только тогда, когда (A, \cdot, \wedge) –

полурешеточно упорядоченная полугруппа, выполняются тождества (1)–(4) и

$$x(y \wedge z^*)z = xy \wedge z^*, \quad (6')$$

$$(x^* \wedge y)z = x^*z \wedge yz. \quad (7')$$

Теорема 7. Алгебра $(A, \cdot, \wedge, *)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит классу $R\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ тогда и только тогда, когда (A, \cdot, \wedge) принадлежит квази-многообразию $Q\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ и выполняется аксиома (5).

Теорема 8. Алгебра $(A, \cdot, \wedge, *)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит классу $R\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ тогда и только тогда, когда (A, \cdot, \wedge) принадлежит квазимногообразию $Q\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ и выполняется аксиома (5').

Следствие 8. Алгебра $(A, \cdot, \vee, \wedge, *)$ типа $(2, 2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $R\{\circ, \cup, \cap, \nabla_1\}$ тогда и только тогда, когда (A, \cdot, \vee, \wedge) – решеточно упорядоченная полугруппа, (A, \vee, \wedge) – дистрибутивная решетка, (A, \cdot, \wedge) принадлежит многообразию $V\{\circ, \cap, \nabla_1\}$ и выполняются тождества

$$(x \vee y)z = xy \vee yz, \quad (8)$$

$$x(y \vee z) = xy \vee xz, \quad (9)$$

$$(x \vee y)^* = x^* \vee y^*. \quad (10)$$

Следствие 9. Алгебра $(A, \cdot, \vee, \wedge, *)$ типа $(2, 2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $R\{\circ, \cup, \cap, \nabla_2\}$ тогда и только тогда, когда (A, \cdot, \vee, \wedge) – решеточно упорядоченная полугруппа, (A, \vee, \wedge) – дистрибутивная решетка, (A, \cdot, \wedge) принадлежит многообразию $V\{\circ, \cap, \nabla_2\}$ и выполняются тождества (8)–(10).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 6. P. 73–89.
2. Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. C. 188–189.
3. Henkin L, Monk J.D., Tarski A. Cylindric algebras I, II. North-Holland. Amsterdam, 1971, 1985.
4. Bredikhin D.A., Schein B.M. Representations of ordered semigroups and lattices by binary relations // Colloq. Math. 1978. Vol. 49. P. 2–12.
5. Andreka H., Bredikhin D.A. The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. Vol. 33. P. 516–532.
6. Бредихин Д.А. Эквиациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.
7. Bredikhin D.A. On varieties of semigroups of relations with operations of cylindricfication // Contributions to General Algebra. 2005. Vol. 16. P. 1–6.

8. Бредихин Д.А. О квазигождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.

9. Бредихин Д.А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.

10. Бредихин Д.А. О редуктах алгебр отношений Тарского // Алгебра и логика. 1998. № 1. С. 3–16.

11. Bredikhin D.A. On classes of Omega-semigroups // Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings / St-Petersburg State University of Technology. St-Petersburg, 1999. P. 59–62.

УДК 514.763

А.В. Букушева, С.В. Галаев

УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ МЕТРИКИ БЕРВАЛЬДА—МООРА

В работах [1, 2] было положено начало исследованиям пространств вида (P_n, g) , где P_n – алгебра поличисел с заданной на ней n -линейной симметрической формой. На пути обобщения заложенных в этих работах идей естественно было бы рассмотреть гладкие многообразия с подходящей полиаффинорной структурой. Довольно развитая сейчас геометрия пространств над алгебрами имеет обширную библиографию [3]. В обзоре [4], подготовленном В.В. Вишневым, содержатся сведения по интегрируемым аффинорным структурам. В настоящей статье излагаются условия, при которых метрика Бервальда—Моора (БМ), согласованная с полиаффинорной структурой, заданной на гладком многообразии, задается с помощью интегрируемой полиформы.

1. Алгебраические метрики, согласованные с полиаффинорной структурой AN_n

Алгебра поличисел P_n является обобщением алгебры двойных чисел. В алгебре поличисел P_n существует базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ такой, что

$$\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha.$$

В работе [1] в алгебре P_n как на дифференцируемом многообразии специальным образом вводится согласованная с алгебраической структурой метрика БМ. В результате задания метрики БМ, алгебра поличисел становится финслеровым пространством, обозначаемым H_n . Пусть M – связное C^∞ -многообразие размерности n . Все встречающиеся на M функции и геометрические объекты будем считать бесконечно дифференцируемыми.

Рассмотрим на многообразии алгебраическую метрику n -го порядка, т.е. n -линейную симметрическую дифференциальную форму g с компонентами $g_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x)$ относительно произвольного, вообще говоря, неголономного поля базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Будем говорить, что ненулевой вектор \vec{e} определяет нулевое направление формы g , если

$$g(\vec{e}, \vec{e}, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n) = 0.$$

Не нулевая алгебраическая метрика называется метрикой Бервальда-Моора, если существует базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ такой, что каждый вектор \vec{e}_α базиса задает нулевое направление формы g . Такой базис будем называть *адаптированным базисом формы g* . Форма g в адаптированном базисе имеет единственную, отличную от нуля, компоненту $g_{12\dots n}$. Свойства метрики БМ хорошо изучены (см., например, [5]).

В области определения поля адаптированных базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ определим n -гладких одномерных распределений D_1, D_2, \dots, D_n , полагая

$$D_\alpha = \langle e_\alpha \rangle. \quad (1)$$

Из сформулированного ниже предложения следует, что распределения D_1, D_2, \dots, D_n могут быть корректно определены на всем многообразии M .

Предложение. *Всякий вектор \vec{e} , задающий нулевое направление формы g , коллинеарен одному из векторов адаптированного базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.*

Таким образом, определение распределений D_α не зависит от выбора адаптированного базиса. Метрика БМ определяет на M структуру почти произведения:

$$TM = \bigoplus_{\alpha=1}^n D_{\hat{\alpha}}. \quad (2)$$

Очевидно, что две метрики g_1, g_2 Бервальда-Моора конформны ($g_1 = \lambda(x)g_2$) тогда и только тогда, когда они определяют одно и то же разложение (2). Рассмотрим n распределений D_α , определяемых следующим образом:

$$D_{\hat{\alpha}} = D_1 \oplus \dots \oplus D_{\alpha-1} \oplus D_{\alpha+1} \oplus \dots \oplus D_n.$$

Для любого α , таким образом, получаем разложение

$$TM = D_\alpha \oplus D_{\hat{\alpha}}. \quad (3)$$

Разложение (3) определяет проектор $\varphi_\alpha : TM \rightarrow D_\alpha$.

Совокупность аффиноров φ_α относительно операции композиции образует n -мерную полиаффинорную алгебру AH_n , изоморфную

алгебре P_n . Будем говорить, что алгебра AH_n согласована с метрикой g . Если на многообразии M существует атлас, состоящий из карт, адаптированных к метрике g , то алгебра AH_n оказывается интегрируемой. В этом случае многообразии M может рассматриваться как многообразие $M(P_n, g)$ над алгеброй поличисел P_n .

2. Связности, совместимые с метрикой БМ

Связности, совместимые с метрикой БМ, построены в работе [6]. Предположим, что на $M(P_n, g)$ существует линейная связность ∇ , совместимая с метрикой g . Используя равенство $\nabla g = 0$, получаем, что её коэффициенты $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ обращаются в нуль, если $\beta \neq \gamma$, кроме того, выполняется равенство

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta = \frac{\partial_\alpha g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}.$$

Для тензора кручения S связности ∇ получаем следующее выражение:

$$S_{\alpha\beta}^\gamma = \begin{cases} 0, \gamma \neq \beta, \gamma \neq \alpha, \\ -\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma, \gamma \neq \beta, \gamma = \alpha, \\ 0, \gamma = \beta = \alpha. \end{cases} \quad (4)$$

Если потребовать обращения кручения S в нуль, то отличными от нуля компонентами связности ∇ будут

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = \frac{\partial_\alpha g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}. \quad (5)$$

В равенстве (5) суммирование по α нет. Задавая ненулевые компоненты связности ∇ с помощью равенства (5) и учитывая равенство (4), заключаем, что справедлива

Теорема 1. *На многообразии $M(P_n, g)$ существует единственная связность нулевого кручения, совместимая с метрикой БМ.*

Г.И. Кручкович [7] сформулировал следующее утверждение: *Если тензорная структура T допускает локально плоскую T -связность, то T -структура интегрируема. Всякая интегрируемая T -структура допускает плоскую связность, по крайней мере, локально.* Утверждение Кручковича и сформулированная теорема позволяют эффективно решать задачу нахождения условий интегрируемости формы g . Будем называть метрику БМ *интегрируемой*, если интегрируема соответствующая дифференциальная форма. Воспользуемся леммой Кручковича [6]. Используя равенство (5) и выражение в координатах тензора кривизны R получаем, что единственным, отличным от нуля,

компонентом тензора R являются

$$K_{acc}^c = \partial_\alpha \frac{\partial_c g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}}$$

($a \neq c$, по c суммирования нет).

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Метрика БМ интегрируема тогда и только тогда, когда ее компоненты удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных*

$$\partial_\alpha \frac{\partial_c g_{12\dots n}}{g_{12\dots n}} = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Павлов Д.Г. Обобщённые аксиомы скалярного произведения // ГЧГФ. 2004. №1. С. 5–19.
2. Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // ГЧГФ. 2007. №1(7). С. 3–25.
3. Широков А.П. Пространства над алгебрами и их применения // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения/ВИНИТИ. М., 2002. Т. 73. С. 135–161.
4. Вишневский В.В. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения/ВИНИТИ. М., 2002. Т. 73. С. 5–64.
5. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. 502 с.
6. Галаев С.В. Об одной полиаффинорной структуре на гладком многообразии с метрикой Бервальда-Моора // Тр. Математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы Восьмой молодежной науч. шк.-конф. «Лобачевские чтения - 2009». Казань, 2009. Т. 39. С. 24–28.
7. Кручкович Г.И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1972. Т. 16. С. 174–201.

УДК 517.984

С.А. Бутерин

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО НЕПОЛНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Введение. Рассмотрим краевую задачу $L = L(q_0(x), q_1(x), h, H)$ вида

$$\ell y(x) := y'' + (\rho^2 - 2\rho q_1(x) - q_0(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $q_j(x) \in W_1^j[0, \pi]$ – комплекснозначные функции, h, H – комплексные числа. Обратные спектральные задачи для дифференциальных пучков второго порядка исследовались в [1, 2] и других работах. В частности, в [2] с помощью идеи метода спектральных отображений [3] доказано, что пучок L однозначно восстанавливается по функции Вейля, являющейся обобщением классической функции Вейля для оператора Штурма–Лиувилля, что равносильно заданию спектров двух краевых задач для уравнения (1) с одним общим краевым условием. Кроме того, получена конструктивная процедура решения обратной задачи.

В настоящей статье исследуется следующая *неполная* обратная задача: по спектру $\{\rho_n\}$ краевой задачи L найти функции $q_0(x), q_1(x)$ и число H в предположении, что $q_0(x), q_1(x)$ на $(0, \pi/2)$ и h известны априори. Доказывается теорема единственности и приводится конструктивная процедура решения этой обратной задачи. Отметим, что в [4] исследовалась единственность решения рассматриваемой обратной задачи при дополнительном предположении, что функция $q_1(x)$ априори известна и на второй половине отрезка.

Теорема 1. *Задание спектра $\{\rho_n\}$ однозначно определяет L в предположении, что функции $q_0(x), q_1(x)$ на $(0, \pi/2)$ и число h известны априори. То есть если (1), (2) заданы на одной половине отрезка, то на другой они определяются по спектру.*

1. Решение неполной обратной задачи. Пусть функции $S(x, \rho), \varphi(x, \rho), \psi(x, \rho), \Phi(x, \rho)$ являются решениями уравнения (1) при условиях

$$\begin{aligned} S'(0, \rho) = \varphi(0, \rho) = \psi(\pi, \rho) = U(\Phi) = 1, \\ S(0, \rho) = U(\varphi) = V(\psi) = V(\Phi) = 0. \end{aligned}$$

Собственные значения ρ_n краевой задачи (1), (2) совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\rho) := \langle \psi(x, \rho), \varphi(x, \rho) \rangle$, где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$. Очевидно, что $\Delta(\rho) = V(\varphi) = -U(\psi)$. Числа ρ_n удобно занумеровать по $n \in A := \{n : n = \pm 0, \pm 1, \dots\}$, тогда имеет место асимптотика

$$\rho_n = n + \omega + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad \omega = \frac{Q(\pi)}{\pi}, \quad Q(x) = \int_0^x q_1(t) dt. \quad (3)$$

В дальнейшем для определенности будем считать, что $\omega \notin \mathbb{Z}$ (случай целого ω вносит незначительные изменения).

Справедливо следующее представление

$$\Delta(\rho) = (\rho - \rho_{-0}) \sin \omega\pi \exp(\pi\rho \operatorname{ctg} \omega\pi) \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\rho_n - \rho}{n + \omega} \exp\left(\frac{\rho}{n + \omega}\right). \quad (4)$$

Функции $\Phi(x, \rho)$ и $M(\rho) := \Phi(0, \rho)$ называются соответственно решением Вейля и функцией Вейля для L . Имеем

$$\Phi(x, \rho) = S(x, \rho) + M(\rho)\varphi(x, \rho) = -\frac{\psi(x, \rho)}{\Delta(\rho)}, \quad M(\rho) = -\frac{\Delta^0(\rho)}{\Delta(\rho)}, \quad (5)$$

где $\Delta^0(\rho) = \psi(0, \rho)$ – характеристическая функция краевой задачи для уравнения (1) с краевыми условиями $y(0) = V(y) = 0$. Пусть $\{\rho_n^0\}$ – спектр последней. Имеет место асимптотика

$$\rho_n^0 = n + \omega_1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \omega_1 - \text{const.}$$

Формулы (5) дают

$$\psi(x, \rho) = \Delta^0(\rho)\varphi(x, \rho) - \Delta(\rho)S(x, \rho). \quad (6)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_1(\rho) &:= -\psi'(\pi/2, \rho), \quad \Delta_1^0(\rho) := \psi(\pi/2, \rho), \\ \Theta(\rho) &:= \varphi(\pi/2, \rho), \quad \Xi(\rho) := \varphi'(\pi/2, \rho). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что $\Delta_1(\rho)$ – характеристическая функция краевой задачи

$$\ell y(x) = 0, \quad \pi/2 < x < \pi, \quad y'(\pi/2) = V(y) = 0, \quad (8)$$

а функция

$$M_1(\rho) := -\frac{\Delta_1^0(\rho)}{\Delta_1(\rho)} \quad (9)$$

является функцией Вейля для (8). Функции $\Xi(\rho)$ и $\Theta(\rho)$, в свою очередь, являются характеристическими функциями краевых задач для уравнения (1) на интервале $(0, \pi/2)$ с краевыми условиями Неймана и Дирихле соответственно в точке $\pi/2$ и общим краевым условием $U(y) = 0$ в точке 0. Пусть $\{\xi_n\}_{n \in A}$ и $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – последовательности нулей функций $\Xi(\rho)$ и $\Theta(\rho)$ соответственно, тогда

$$\xi_n = 2n + \omega_1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \theta_n = 2n + \omega_1^0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (10)$$

Пусть m_n и m_n^0 – кратности нулей ξ_n и θ_n соответственно. В силу (10) $m_n = m_n^0 = 1$ для достаточно больших $|n|$. Выберем подмножества индексов $S \subset A$, $S_0 \subset \mathbb{Z}$ так, чтобы подпоследовательности $\{\xi_n\}_{n \in S}$ и

$\{\theta_n\}_{n \in S_0}$ содержали все нули функций $\Xi(\rho)$, $\Theta(\rho)$ без учета кратности. Далее, согласно (6) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1^0(\rho) &= \Delta^0(\rho)\Theta(\rho) - \Delta(\rho)S(\pi/2, \rho), \\ -\Delta_1(\rho) &= \Delta^0(\rho)\Xi(\rho) - \Delta(\rho)S'(\pi/2, \rho). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Согласно асимптотике функций $\psi(x, \rho)$, $\psi'(x, \rho)$ при $|\rho| \rightarrow \infty$ (см. [2]) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} d(\rho) &:= \Delta_1(\rho) + \rho \sin\left(\frac{\rho\pi}{2} + Q\left(\frac{\pi}{2}\right) - \omega\pi\right) = O\left(\exp\left(\frac{|Im\rho|\pi}{2}\right)\right), \\ d_0(\rho) &:= \Delta_1^0(\rho) - \cos\left(\frac{\rho\pi}{2} + Q\left(\frac{\pi}{2}\right) - \omega\pi\right) = O\left(\frac{1}{\rho} \exp\left(\frac{|Im\rho|\pi}{2}\right)\right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Кроме того, при достаточно больших $|\rho|$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\Theta(\rho)| &\geq C_\delta \exp\left(\frac{|Im\rho|\pi}{2}\right), \quad \rho \in G_\delta^{\omega_0}, \\ |\Xi(\rho)| &\geq C_\delta |\rho| \exp\left(\frac{|Im\rho|\pi}{2}\right), \quad \rho \in G_\delta^{\omega_1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $G_\delta^a = \{\rho : |\rho - 2n - a| \geq \delta, n \in \mathbb{Z}\}$.

Следующее утверждение следует из теоремы об интерполяции целых функций [5], а также может быть доказано непосредственно, исходя из (10), (12), (13).

Лемма 1. *Задание чисел $\{\xi_n\}_{n \in A}$, $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$,*

$$\{d^{(\nu)}(\xi_n)\}_{\nu=0, m_n-1, n \in \mathbb{S}}, \quad \{d_0^{(\nu)}(\theta_n)\}_{\nu=0, m_n^0-1, n \in S_0}, \quad (14)$$

а также величин $Q(\frac{\pi}{2})$, ω однозначно определяет функции $\Delta_1(\rho)$, $\Delta_1^0(\rho)$. При этом

$$\begin{aligned} \Delta_1(\rho) &= -\rho \sin\left(\frac{\rho\pi}{2} + Q\left(\frac{\pi}{2}\right) - \omega\pi\right) + d(\rho), \\ \Delta_1^0(\rho) &= \cos\left(\frac{\rho\pi}{2} + Q\left(\frac{\pi}{2}\right) - \omega\pi\right) + d_0(\rho), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$d(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} d(\theta_n) \frac{\Xi(\rho)}{(\rho - \xi_n)\Xi'(\xi_n)}, \quad d_0(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} d_0(\theta_n) \frac{\Theta(\rho)}{(\rho - \theta_n)\Theta'(\theta_n)}, \quad (16)$$

если все нули функций $\Theta(\rho)$, $\Xi(\rho)$ простые (в случае кратных нулей формулы (16) имеют более громоздкий вид).

Приходим к следующему алгоритму решения неполной обратной задачи и утверждению теоремы 1.

Алгоритм 1. Пусть задан спектр $\{\rho_n\}_{n \in A}$, число h и функции $q_0(x)$, $q_1(x)$ на $(0, \pi/2)$.

- 1) Находим число ω из асимптотики (3) и вычисляем функцию $\Delta(\rho)$ по формуле (4);
- 2) строим функции $\Theta(\rho)$, $\Xi(\rho)$ по формулам (7) и находим их нули $\{\xi_n\}_{n \in A}$, $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$;
- 3) находим числа (14) с помощью формул (11), (12);
- 4) строим функции $\Delta_1(\rho)$, $\Delta_1^0(\rho)$ по формулам (15), (16);
- 5) вычисляем функцию Вейля $M_1(\rho)$ краевой задачи (8) по формуле (9) и находим функции $q_0(x)$, $q_1(x)$ на $(\pi/2, \pi)$ и коэффициент H , используя алгоритм из [2].

Замечание 1. Согласно асимптотике (3) задание собственных значений ρ_n определяет число ω с точностью до целого слагаемого. Поэтому в силу (4), (12) функция $\Delta(\rho)$, числа (14), а следовательно, и функции $\Delta_1(\rho)$, $\Delta_1^0(\rho)$ определяются с точностью до знака, в то время как их отношение (9) определяется однозначно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099, 10-01-92001-ННС-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш. Определение оператора диффузии по спектральным данным // ДАН Азерб. ССР. 1981. Т. 37, № 2. С. 19–23.
2. Бутерин С.А., Юрко В.А. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на конечном интервале // Вестн. Башкир. ун-та 2006. № 4. С. 8–12.
3. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
4. Koyunbakan H., Panakhov E.S. Half-inverse problem for diffusion operator on the finite interval // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 326. P. 1024–1030.
5. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.

И.Ю. Выгодчикова

О ФОРМИРОВАНИИ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ С РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫМ РИСКОМ

Рассматривается задача равномерного распределения риска финансового портфеля за счёт эффекта равномерной диверсификации взвешенных оценок волатильностей активов. Для получения решения задачи применяется аппарат негладкого анализа

Классическая задача минимизации риска портфеля предложена Г. Марковицем в 1952 г. Следующая задача включает значительно меньше исходных параметров, решается с применением современных программных средств достаточно просто и также нацелена на рационализацию финансовых решений. Пусть θ_i – доли активов n видов, из которых инвестор формирует портфель. Заданы ожидаемые доходности активов m_i и требуемая доходность портфеля m_p . В качестве рисков показателей σ_i могут выступать среднеквадратические отклонения доходностей, либо иные показатели негативного для инвестора характера.

Требуется равномерно распределить риски (σ_i) между всеми активами, взвесив их по долям активов в портфеле, за счёт выбора этих долей:

$$\Psi(\theta) := \max_{1=\overline{1,n}} \sigma_i \theta_i \longrightarrow \min_{\theta \in D}, \quad (1)$$

$$D = \left\{ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \theta_i = 1, \sum_{i=1}^n m_i \theta_i = m_p \right\}. \quad (2)$$

Активы, у которых риск больше, чем у некоторого актива, а доходность меньше, можно сразу исключить из рассмотрения. Поэтому считаем $m_1 > \dots > m_n > 0$, $\sigma_1 > \dots > \sigma_n > 0$. Обозначим через $I(\theta) = \{i \in \overline{1,n} : \Psi(\theta) = \sigma_i \theta_i\}$.

Лемма. Если $\theta^* \in D$ является решением задачи (1), (2) при $m_p \neq (\sum_{i=1}^n m_i \sigma_i^{-1}) / \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-1}$, то либо $I(\theta^*) = \{1, \dots, n-1\}$, либо $I(\theta^*) = \{2, \dots, n\}$.

Доказательство. Функция $\Psi(\theta)$ является выпуклой на \mathbb{R}^n , а задача (1), (2) является задачей выпуклого программирования. В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [1, с. 142], критерием решения $\theta^* \in D$ задачи (1), (2) является выполнение соотношения

$$0_n \in \partial \Psi(\theta^*) - K^+(\theta^*, D), \quad (3)$$

где $0_n = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Psi(\theta)$ – субдифференциал функции $\Psi(\cdot)$ в точке θ , а $K^+(\theta, D)$ – сопряжение конуса возможных направлений множества D в точке θ . Пользуясь средствами выпуклого анализа (например, [1]), нетрудно установить, что для $\theta^* \in D$

$$\partial\Psi(\theta^*) = \text{co}\{(0, \dots, 0, \sigma_i, 0, \dots, 0) : i \in I(\theta^*)\}, \quad (4)$$

$$K^+(\theta^*, D) = \{\theta = \lambda 1_n + \mu m, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \quad (5)$$

Здесь $1_n = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$, $\text{co} A$ – выпуклая оболочка множества A . Подстановка формул (4), (5) в соотношение (3) и допущение о том, что множество $I(\theta^*)$ содержит менее $n - 1$ элементов, сразу приводит к противоречию. А предположение о том, что $I(\theta^*) = \{1, \dots, n\}$, говорит о том, что это возможно только при $m_p = (\sum_{i=1}^n m_i \sigma_i^{-1}) / \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-1}$.

Осталось доказать, что множество $I(\theta^*)$ состоит из элементов, расположенных «подряд». Предположим противное, то есть $I(\theta^*) = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$, $i_0 \in [2 : n - 1]$. Тогда из (3)–(5) следует существование $\alpha_i > 0$, $i \in [1 : n] \setminus \{i_0\}$, а также λ и μ из \mathbb{R} таких, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 \sigma_1 + \lambda + \mu m_1 &= 0, \\ &\dots, \\ \lambda + \mu m_{i_0} &= 0, \\ &\dots, \\ \alpha_n \sigma_n + \lambda + \mu m_n &= 0, \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) получаем $\sigma_i = \mu(m_{i_0} - m_i) \alpha_i^{-1}$ для $i \in [1 : n] \setminus \{i_0\}$. Поэтому если $1 < i_0 < n$, то σ_1 и σ_n принимают разные знаки ввиду упорядоченности чисел $\{m_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Это противоречит условию их положительности.

Лемма доказана.

Обозначим через $\nu = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-1}$, $\gamma = \sum_{i=1}^n m_i \sigma_i^{-1}$, $m_p^* = \gamma / \nu$.

Теорема. В зависимости от m_p решением задачи (1), (2) является вектор $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$:

- 1) при $m_p = m_p^*$, $\theta_i^* = 1 / (\nu \sigma_i)$, $i = \overline{1, n}$;
- 2) при $m_p > m_p^*$, $\theta_i^* = (m_p - m_n) / (\sigma_i (\gamma - m_n \nu))$, $i = \overline{1, n - 1}$,
 $\theta_n^* = ((\gamma - m_p \nu) \sigma_n + (m_p - m_n)) / (\sigma_n (\gamma - m_n \nu))$;
- 3) при $m_p < m_p^*$, $\theta_i^* = (m_p - m_1) / (\sigma_i (\gamma - m_1 \nu))$, $i = \overline{2, n}$,
 $\theta_1^* = ((\gamma - m_p \nu) \sigma_1 + (m_p - m_1)) / (\sigma_1 (\gamma - m_1 \nu))$.

Доказательство. Нетрудно показать, что решение задачи (1), (2) существует. В соответствии с доказанной леммой возможны 3 варианта для множества $I(\theta^*)$: $I(\theta^*) = \{1, \dots, n\}$, $I(\theta^*) = \{1, \dots, n - 1\}$,

$I(\theta^*) = \{2, \dots, n\}$, что легко приводит к однозначным соответствующим вариантам решения.

Замечание 1. В варианте 2) теоремы, если $m_p > (\gamma - m_n/\sigma_n) / (\nu - 1/\sigma_n)$, то $\theta_n^* < 0$, соответственно в варианте 3), если $m_p < (\gamma - m_1/\sigma_1) / (\nu - 1/\sigma_1)$, то $\theta_1^* < 0$.

Замечание 2. При экономической интерпретации задачи считаем $m_n \leq m_p \leq m_1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

УДК 517.54

В.Г. Гордиенко

О СЕДЛОВОЙ ТОЧКЕ ФУНКЦИОНАЛА $a_3 - \alpha a_2^2$ В КЛАССЕ S^M

Обозначим через S – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad (1)$$

а через S^M , $M > 1$, – подкласс, состоящий из всех ограниченных функций $f \in S$, удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < M$, $z \in E$.

Проблема коэффициентов однолистных функций заключается в исследовании множеств значений систем начальных коэффициентов разложения (1). В работе [1] описан характер седловой точки множества $V_3 = \{(\operatorname{Re} a_2, \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Re} a_3) : f \in S\}$, доставляемой функцией

$$K_2(z) = \frac{z}{1 - z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1} \in S.$$

В настоящей статье алгоритм, предложенный авторами указанной работы, используется для описания характера седловой точки множества $V_3(M) = \{(\operatorname{Re} a_2, \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Re}(a_3 - \alpha a_2^2)) : f \in S^M, \alpha \in R\}$, доставляемой функцией

$$K_{2M} = z + (1 - 1/M^2)z^3 + \dots$$

Функция K_{2M} соответствует точке $(0, 0, 1 - 1/M^2)$ на границе множества $V_3(M)$ и отображает единичный круг E на круг

радиуса M с двумя прямолинейными разрезами. Известно [2], что все функции $f \in S^M$, отображающие единичный круг E на круг радиуса M с двумя кусочно аналитическими разрезами, можно представить в виде $f(z) = Mw(z, \log M)$, где $w(z, t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \dots)$ является интегралом обобщенного дифференциального уравнения Левнера:

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, w|_{t=0} = z, 0 \leq t \leq \log M, \quad (2)$$

с непрерывными функциями $u_k = u_k(t)$, $k = 1, 2$, и постоянными числами $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2$, $\sum_{k=1}^2 \lambda_k = 1$. Кроме того, управляющие функции u_k удовлетворяют необходимым условиям оптимальности скользящего режима. Пусть $a_k(t)$, $k \geq 2$, определяются разложением (1). Совершим замену переменной $t \rightarrow 1 - e^{-t}$ и обозначим $x_1(t) = \operatorname{Re} a_2(t)$, $x_2(t) = \operatorname{Im} a_2(t)$, $x_3(t) = \operatorname{Re} (a_3 - \alpha a_2^2)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в равенстве (2), после произведенной замены, получим управляемую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = -2[\lambda \cos u_1 + (1 - \lambda) \cos u_2], x_1(0) = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2[\lambda \sin u_1 + (1 - \lambda) \sin u_2], x_2(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} = & -4x_1(1 - \alpha)[\lambda \cos u_1 + (1 - \lambda) \cos u_2] - 4x_2(1 - \alpha)[\lambda \sin u_1 + \\ & + (1 - \lambda) \sin u_2] + 2(t - 1)[\lambda \cos 2u_1 + (1 - \lambda) \cos 2u_2], x_3(0) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$0 \leq t \leq 1 - 1/M$, $0 \leq \lambda \leq 1$, с непрерывными управляющими функциями u_1 и u_2 .

Обозначим правые части системы (3) через

$$\lambda g_k(t, x, u_1) + (1 - \lambda)g_k(t, x, u_2), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad k = 1, 2, 3,$$

и составим функцию Гамильтона $H(t, x, \Psi, u) = \sum_{k=1}^3 g_k(t, x, u)\Psi_k$, где $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$, $\Psi_3 = 1$, а Ψ_1 и Ψ_2 являются решением сопряженной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dt} &= 4(1 - \alpha)[\lambda \cos u_1 + (1 - \lambda) \cos u_2], \\ \frac{d\Psi_2}{dt} &= 4(1 - \alpha)[\lambda \sin u_1 + (1 - \lambda) \sin u_2]. \end{aligned} \quad (4)$$

Непрерывные управления u_1 и u_2 удовлетворяют принципу максимума Понтрягина вдоль траектории $x(t)$, а вектор $\Psi(t)$ – условиям трансверсальности $\Psi_j(1 - 1/M) = 0$, $j = 1, 2$.

Функции $K_{2M}(z)$ соответствуют значения $\lambda = 1/2$, $u_1 = \pi/2$, $u_2 = -\pi/2$ в управляемой системе (3), следовательно, $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = 2t - t^2$, $0 \leq t \leq 1 - 1/M$. Этим же значениям параметров λ , u_1 и u_2 отвечают нулевые сопряженные координаты $\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = 0$. Покажем, что точка граничной поверхности множества $V_3(M)$, доставляемая функцией $K_{2M}(z)$, является седловой, и исследуем ее характер. Граничные точки множества $V_3(M)$ из окрестности точки, доставляемой функцией $K_{2M}(z)$, описываются при помощи варьирования параметров λ , $\xi_1 = \Psi_1(0)$, $\xi_2 = \Psi_2(0)$ в системах (3) и (4) с условиями сохранения скользящего режима [2, теор. 1]. Поскольку

$$H(0, 0, \xi, u) = -2\xi_1 \cos u + 2\xi_2 \sin u - 2 \cos 2u,$$

то известно [1], что она достигает максимума в двух точках отрезка $[-\pi; \pi]$ лишь при условии $\xi_2 = \Psi_2(0) = 0$. Таким образом, окрестность точки, соответствующей функции $K_{2M}(z)$, параметризуется двумя переменными (p, q) из окрестности точки $(0, 0)$, где $\lambda = 1/2 + p$ и $\xi_1 = \Psi_1(0) = q$.

Пусть $F^M(p, q) : (p, q) \rightarrow x_3(1 - 1/M)$, $F^M(0, 0) = 1 - 1/M^2$, где $p = \lambda - 1/2$ и $q = \Psi_1(0)$ в системах (3) и (4). Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Функция F^M имеет в точке $(0, 0)$ при $\alpha > 1$ локальный минимум по переменному p и локальный максимум по переменному q , при $\alpha < 1$ локальный максимум по переменному p и локальный минимум по переменному q при выполнении неравенства $M > e^{\frac{1}{1-\alpha}}$.*

Доказательство. Дифференцируя третье уравнение системы (3) по переменным p и q , непосредственной проверкой установим, что

$$\left. \frac{d(x_3)_p}{dt} \right|_{(p,q)=(0,0)} = \left. \frac{d(x_3)_q}{dt} \right|_{(p,q)=(0,0)} = 0,$$

и, следовательно, $(x_3)_p(1 - 1/M) = (x_3)_q(1 - 1/M) = 0$ в точке $(p, q) = (0, 0)$. Вычислим теперь частные производные второго порядка

функции $F^M(p, q)$ в точке $(0, 0)$, получим

$$\left. \frac{d(x_3)_{pp}}{dt} \right|_{(p,q)=(0,0)} = 8(x_1)_p(1 - \alpha)(u_1)_p - 16(x_2)_p(1 - \alpha) + 8(t - 1)(u_1)_p^2, \quad (5)$$

$$(x_3)_{pp}(0) = 0,$$

$$\left. \frac{d(x_3)_{qq}}{dt} \right|_{(p,q)=(0,0)} = 8(x_1)_q(1 - \alpha)(u_1)_q + 8(t - 1)(u_1)_q^2, \quad (x_3)_{qq}(0) = 0. \quad (6)$$

Оптимальная управляющая функция u_1 удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, т.е. при всех (p, q) является корнем уравнения

$$H_u(t, x, \Psi, u) = 0.$$

Дифференцируя последнее равенство по p и q , находим, что

$$(u_1)_p = -\frac{(\Psi_1)_p + 2(x_1)_p(1 - \alpha)}{4(t - 1)}, \quad (u_1)_q = -\frac{(\Psi_1)_q + 2(x_1)_q(1 - \alpha)}{4(t - 1)}.$$

Вычисляя далее частные производные функций x_1, x_2, Ψ_1 по переменным p и q , элементарными средствами дифференциального исчисления решения задач на экстремум из равенств (5) и (6) получим утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Захаров А.М., Прохоров Д.В. Седловые точки множества начальных коэффициентов однолистных функций // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун.-та, 2003. Вып. 5. С. 33–36.
2. Прохоров Д.В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659–1667.

УДК 517.518.82

С.И. Дудов, Е.В. Сорина

СРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ С ЗАДАЧЕЙ БЛ. СЕНДОВА

Пусть сегментная функция (с.ф.) $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ задана на отрезке $[c, d]$ двумя непрерывными функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$, причём $f_1(t) \leq f_2(t)$ при $t \in [c, d]$. Далее под $P_n(A, t) = a_0 + a_1t +$

$+ \dots + a_n t^n$ понимаем полином степени n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим задачу

$$\rho(A) \equiv \max_{t \in [c, d]} \max\{P_n(A, t) - f_1(t), f_2(t) - P_n(A, t)\} \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}, \quad (1)$$

геометрическое толкование которой заключается в построении полиномиальной полосы наименьшей (по ординате) ширины, содержащей график с.ф. $F(t)$. ([1]).

Величина $\max\{P_n(A, t) - f_1(t), f_2(t) - P_n(A, t)\}$, задействованная в определении целевой функции $\rho(A)$, выражает расстояние Хаусдорфа между сегментом $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ и значением полинома $P_n(A, t)$. Поэтому возникает причина для сравнения задачи (1) с задачей наилучшего приближения графика сегментной функции графиком полинома заданной степени в метрике Хаусдорфа двумерного пространства. Эта задача исследовалась Бл.Сендовым и рядом болгарских математиков (см. [2]), а также Е.П. Долженко, Е.А. Севастьяновым, работы которых упоминаются в [2]. Постановка этой задачи имеет вид

$$h(grF(\cdot), grP_n(A, \cdot)) \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}. \quad (2)$$

Здесь под $grF(\cdot)$ и $grP_n(A, \cdot)$ понимаются графики сегментной функции $F(\cdot)$ и полинома $P_n(A, \cdot)$ на отрезке $[c, d]$:

$$grF(\cdot) = \{z = (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [c, d], x \in [f_1(t), f_2(t)]\},$$

$$grP_n(A, \cdot) = \{z = (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [c, d], x = P_n(A, t)\},$$

а $h(X, Y)$ выражает расстояние Хаусдорфа между множествами X и Y по формуле

$$h(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \mu(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \mu(x, y)\}. \quad (3)$$

При этом по выбору автора [2, с. 7] использовалась метрика

$$\mu(x, y) = \max\{\alpha^{-1}|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \quad (4)$$

где $\alpha > 0$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

Пример, приведённый в [2, с. 117-118], показывает что множество решений задачи (2) может быть невыпуклым. Уже это обстоятельство говорит о том, что задача (2), в общем случае, не является задачей выпуклого программирования. Однако, как мы сейчас покажем, выбрав

другую, отличную от (4), метрику и наложив некоторое дополнительное условие, можно говорить об эквивалентности этих задач.

Обозначим через $L_\lambda[c, d]$ класс липшицевых функций на отрезке $[c, d]$ с константой Липшица $\lambda > 0$.

Теорема. Пусть $P_n(A, t), f_1(t), f_2(t) \in L_{\lambda_0}[c, d]$. Тогда, если заменить в (3) метрику (4) на

$$\mu(x, y) = \lambda|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad (5)$$

то для любого $\lambda \geq \lambda_0$ выполняется равенство

$$\rho(A) = h(grF(\cdot), grP_n(A, \cdot)). \quad (6)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$h(grF(\cdot), grP_n(A, \cdot)) = \max\{h(grf_1(\cdot), grP_n(A, \cdot)), h(grf_2(\cdot), grP_n(A, \cdot))\}. \quad (7)$$

Распишем более подробно, используя специфику метрики (5)

$$\begin{aligned} h(grf_1(\cdot), grP_n(A, \cdot)) &= \\ &= \max\left\{ \sup_{x \in grf_1(\cdot)} \inf_{y \in grP_n(A, \cdot)} \mu(x, y), \sup_{y \in grP_n(A, \cdot)} \inf_{x \in grf_1(\cdot)} \mu(x, y) \right\} = \\ &= \max\left\{ \sup_{t \in [c, d]} \inf_{\xi \in [c, d]} \{\lambda|t - \xi| + |f_1(t) - P_n(A, \xi)|\}, \right. \\ &\quad \left. \sup_{t \in [c, d]} \inf_{\xi \in [c, d]} \{\lambda|t - \xi| + |P_n(A, t) - f_1(\xi)|\} \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

В силу липшицевости функции $f_1(t)$ имеем:

$$\begin{aligned} |P_n(A, t) - f_1(\xi)| &= |P_n(A, \xi) - f_1(t) + f_1(t) - f_1(\xi)| \geq \\ &\geq |P_n(A, t) - f_1(t)| - |f_1(t) - f_1(\xi)| \geq |P_n(A, t) - f_1(t)| - \lambda|t - \xi|, \end{aligned}$$

или

$$\lambda|t - \xi| + |P_n(A, t) - f_1(\xi)| \geq |P_n(A, t) - f_1(t)|.$$

По этой причине

$$\inf_{t \in [c, d]} \{\lambda|t - \xi| + |P_n(A, t) - f_1(\xi)|\} = |P_n(A, t) - f_1(t)|. \quad (9)$$

По аналогии, используя липшицевость полинома $P_n(A, t)$, получаем соответственно

$$\inf_{\xi \in [c, d]} \{\lambda |t - \xi| + |f_1(t) - P_n(A, \xi)|\} = |f_1(t) - P_n(A, t)|. \quad (10)$$

Подставляем (9)–(10) в (8):

$$\begin{aligned} h(gr f_1(\cdot), gr P_n(A, \cdot)) &= \sup_{t \in [c, d]} \{|f_1(t) - P_n(A, t)|\} = \\ &= \max_{t \in [c, d]} \{|f_1(t) - P_n(A, t)|\}. \end{aligned} \quad (11)$$

По аналогичной причине

$$h(gr f_2(\cdot), gr P_n(A, \cdot)) = \max_{t \in [c, d]} \{|f_2(t) - P_n(A, t)|\}. \quad (12)$$

Наконец, подставив (11)–(12) в (7), получаем

$$\begin{aligned} h(gr f_1(\cdot), gr P_n(A, t)) &= \\ &= \max \left\{ \max_{t \in [c, d]} |f_1(t) - P_n(A, t)|, \max_{t \in [c, d]} |f_2(t) - P_n(A, t)| \right\} = \\ &= \max_{t \in [c, d]} \max \{|f_1(t) - P_n(A, t)|, |f_2(t) - P_n(A, t)|\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Но поскольку $f_1(t) \leq f_2(t)$ для всех $t \in [c, d]$, то

$$\begin{aligned} \max \{|f_1(t) - P_n(A, t)|, |f_2(t) - P_n(A, t)|\} &= \\ &= \max \{P_n(A, t) - f_1(t), f_2(t) - P_n(A, t)\}. \end{aligned}$$

Поэтому из (12) получаем (6).

Теорема доказана.

Таким образом, на основании доказанной теоремы можем сделать следующий вывод.

Если сегментная функция задаётся липшицевыми функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то при выборе достаточно большого значения λ , которым определяется метрика (5), задачи (1) и (2) становятся эквивалентными. Понятно, что оценка снизу этих значений λ зависит от константы Липшица для $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Однако получение этой оценки требует дополнительного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И.Ю., Дудов С.И., Сорина Е.В.* Внешняя оценка сегментной функций полиномиальной полосой // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49, № 7. С. 1175–1183.
2. *Сендов Бл.* Хаусдорфовы приближения. София, 1979.

УДК 517.984

М.Ю. Игнатьев

О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

Пусть G – геометрический граф с вершиной v_1 и ребрами r_0, r_1 , где r_0 – луч с началом в v_1 , r_1 – цикл $[v_1, v_1]$ длины π . Будем считать, что ребро r_0 параметризовано параметром $x_0 \in [0, \infty)$, а r_1 – параметром $x_1 \in [0, \pi]$. Функцию y на графе G будем трактовать как пару функций $(y_0(x_0), y_1(x_1))$.

На каждом из $r_j (j = 0, 1)$ рассмотрим дифференциальное выражение:

$$\ell_j y_j = -y_j'' + q_j(x_j)y_j \quad (1)$$

с вещественными потенциалами $q_j \in L(r_j)$, $(1 + x_0)q_0(x_0) \in L(0, \infty)$.

Обозначим через $C_j(x_j, \lambda)$, $S_j(x_j, \lambda)$ решения уравнений $\ell_j y = \lambda y$ с начальными условиями типа косинуса и синуса соответственно, через $e_0(x_0, \rho)$ – решение Йоста на ребре r_0 .

Пусть Λ – множество собственных значений действующего в $L_2(G)$ оператора, порожденного дифференциальными выражениями (1) и следующими (*стандартными*) условиями склейки:

$$y_0(0) = y_1(0) = y_1(\pi), \quad y_1'(\pi) = y_0'(0) + y_1'(0). \quad (2)$$

Обозначим: Λ_0 – множество собственных значений оператора, порожденного в $L_2(0, \infty)$ выражением $\ell_0 y$ и краевым условием $y(0) = 0$, Λ_1 – спектр оператора, порожденного $\ell_1 y$ и краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, Λ_2 – спектр оператора, порожденного $\ell_1 y$ и периодическими краевыми условиями. Через $d_1(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ обозначим характеристические функции:

$$d_1(\lambda) := S_1(\pi, \lambda), \quad D_1(\lambda) := 2 - C_1(\pi, \lambda) - S_1'(\pi, \lambda).$$

В силу самосопряженности всех введенных в рассмотрение операторов $\Lambda, \Lambda_\nu \subset \mathbb{R}$, $\nu = \overline{0, 2}$. Представим Λ как объединение положительной и

отрицательной частей: $\Lambda = \Lambda^+ \cup \Lambda^-$, $\Lambda^+ := \Lambda \cap [0, \infty)$, аналогично $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^+ \cup \Lambda_\nu^-$, $\nu = 1, 2$.

Всюду далее предполагаются выполненными следующие условия:

Условие 1. $\Lambda_0 \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$;

Условие 2. $\Lambda^- \cap (\Lambda_2^- \setminus \Lambda_1^-) = \emptyset$.

Теорема 1. $\Lambda^+ = \Lambda_1^+ \cap \Lambda_2^+$.

Определим

$$a(\rho) := D_1(\lambda)e_0(0, \rho) + d_1(\lambda)e_0'(0, \rho),$$

$$Z = \{\rho : \text{Im}\rho > 0, a(\rho) = 0\}.$$

Теорема 2. Λ^- – конечное множество, совпадающее с множеством $\{\rho^2 : \rho \in Z\}$.

Пусть $\psi(x, \rho) = (\psi_0(x_0, \rho), \psi_1(x_1, \rho))$ – решение уравнения $\ell_j \psi_j = \rho^2 \psi_j$, $j = 0, 1$, $\text{Im}\rho > 0$, удовлетворяющее условиям склейки (2), нормированное асимптотикой

$$\psi_0(x_0, \rho) = \exp(-i\rho x_0)(1 + o(1)), \quad x_0 \rightarrow \infty.$$

Теорема 3. $\psi_0(x_0, \rho)$ мероморфна в верхней полуплоскости $\{\text{Im}\rho > 0\}$. При всех вещественных $\rho \neq 0$ существуют предельные значения $\psi_0(x_0, \rho) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi_0(x_0, \rho + i\varepsilon)$. При $\rho \rightarrow 0$ $\psi_0(x_0, \rho)$ ограничена.

При $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, справедлива асимптотика

$$\psi_0(x_0, \rho) = \exp(-i\rho x_0) + s(\rho) \exp(i\rho x_0) + o(1), \quad x_0 \rightarrow \infty.$$

Коэффициент $s(\rho)$ ($\rho \in \mathbb{R}$) будем называть коэффициентом отражения.

Обозначим $Z_0 := \{\rho \in Z : \rho^2 \in \Lambda^- \setminus (\Lambda_1 \cap \Lambda_2)\}$.

Теорема 4. Множество полюсов функции $\psi_0(x_0, \rho)$ совпадает с Z_0 . Все полюса простые, и справедливо представление:

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} (\rho - \rho_0) \psi_0(x_0, \rho) = \psi_{\langle -1 \rangle}(x_0, \rho_0), \quad \rho_0 \in Z_0,$$

$$\psi_{\langle -1 \rangle}(x_0, \rho_0) = \alpha(\rho_0) \exp(i\rho_0 x_0)(1 + o(1)), \quad x_0 \rightarrow \infty.$$

Коэффициенты $\alpha(\rho_0)$, $\rho_0 \in Z_0$ будем называть весовыми числами.

Отметим, что для справедливости теоремы 4 существенны условия 1, 2. В общем случае, если какое-либо из этих условий не выполняется, $\psi_0(x_0, \rho)$ может иметь кратные полюса, что требует отдельного рассмотрения, выходящего за рамки данной статьи.

Следующая теорема показывает, что (при выполнении условий 1, 2) коэффициент отражения, множество Z_0 и весовые числа однозначно определяют потенциал q_0 на луче r_0 .

Теорема 5. Пусть потенциалы $q(x) = (q_0(x_0), q_1(x_1))$ и $\tilde{q}(x) = (\tilde{q}_0(x_0), \tilde{q}_1(x_1))$ на G таковы, что $s(\rho) = \tilde{s}(\rho), \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, Z_0 = \tilde{Z}_0, \alpha(\rho_0) = \tilde{\alpha}(\rho_0), \rho_0 \in Z_0$. Тогда $q_0 = \tilde{q}_0$.

При доказательстве теоремы 5 используются в основном те же идеи, что и при доказательстве теоремы 11.18 в [1] (см. также метод спектральных отображений на полуоси [2]).

Для восстановления потенциала на всем графе нам понадобится все множество Λ и, кроме того, некоторый набор чисел («знаков»), относящийся к периодической задаче на r_1 . А именно, пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_n^1\}_{n=1}^\infty$, где нумерация идет по возрастанию λ_n^1 . Тогда [3]:

$$S'_1(\pi, \lambda_n^1) = \frac{1}{2}F(\lambda_n^1) + \frac{\omega_n}{2}\sqrt{F^2(\lambda_n^1) - 4},$$

где $F(\lambda) := C_1(\pi, \lambda) + S'_1(\pi, \lambda)$ – дискриминант Хилла, $\omega_n \in \{-1, 1\}$.

Определение. Данными рассеяния называется набор

$$J := \{s(\rho), \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \Lambda, Z_0, \alpha(\rho), \rho \in Z_0, \omega_n, n = \overline{1, \infty}\}.$$

Теорема 6. Из $J = \tilde{J}$ следует $q = \tilde{q}$, т.е. $q_0(x_0) = \tilde{q}_0(x_0)$ п.в. на $(0, \infty)$, $q_1(x_1) = \tilde{q}_1(x_1)$ п.в. на $(0, \pi)$. Таким образом, задание данных рассеяния однозначно определяет потенциал.

Первый этап доказательства теоремы 6 – применение теоремы 5. После восстановления $q_0(x_0)$ мы получаем возможность по коэффициенту отражения однозначно восстановить мероморфную функцию $D_1(\lambda)/d_1(\lambda)$, которая определяет нули $D_1(\lambda)$ и $d_1(\lambda)$, не входящие в $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$. Далее, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ восстанавливается по спектру Λ и множеству Z_0 . После чего нам известны все нули $D_1(\lambda)$ и $d_1(\lambda)$ и соответственно сами эти функции. Таким образом, фактически, нам известны дискриминант Хилла, спектр Λ_1 и числа $\omega_n, n = \overline{1, \infty}$. Этого достаточно [3] для однозначного восстановления $q_1(x_1)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line // *Math. Surveys and Monographs*. Vol. 28, Amer. Math. Soc, Providence: RI, 1988.
2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
3. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма—Лиувилля. М.: Наука, 1984.

УДК 517.51

Т.В. Иофина

СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В РАВНОМЕРНОЙ И ГЕЛЬДЕРОВЫХ МЕТРИКАХ

Пусть $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ – система Виленкина, построенная по ограниченной последовательности $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{N}$ [1, §1.5]. Коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье для $f \in L[0, 1)$ задаются формулами $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\chi_k(x) dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать пространства $L^p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, и $C^*[0, 1)$ – пространство функций, непрерывных относительно \mathbf{P} -ичного сдвига, $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1)} |f(x)|$. Пусть $\omega^*(f, \delta)_p = \sup_{0 < h < \delta} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_p$ – модуль непрерывности в этих пространствах. Будем говорить, что $\omega \in \Omega$, если $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на $[0, 1)$, $\omega(0) = 0$. Тогда $f \in H_p^{\omega}[0, 1)$, если $f \in L_p[0, 1)$ ($1 \leq p < \infty$) или $f \in C^*[0, 1)$ ($p = \infty$) и $\omega^*(f, \delta)_p \leq C\omega(\delta)$; $\|f\|_{p, \omega} = \|f\|_p + \sup_{0 < h < 1} \omega^*(f, h)_p / \omega(h)$.

Далее будем считать, что $\omega(t) \in \Omega$ удовлетворяет Δ_2 -условию, т.е. $\omega(t) \leq C\omega(t/2)$, $t \in [0, 1)$. Кроме того, для $\omega(t), \mu(t) \in \Omega$ существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $\omega^{\alpha}(t)/\mu(t)$ ограничена на $[0, 1)$.

Определим класс GM последовательностей $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству $\sum_{k=m}^{2m-1} |d_k - d_{k+1}| \leq Cd_m$. Пусть MRBVS – класс последовательностей

$\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых верно $\sum_{k=2m}^{n-1} |d_k - d_{k+1}| \leq K \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{d_k}{m+1}$,

$1 \leq m \leq (n-1)/2$. Эти классы изучались С.Ю. Тихоновым. В частности, им было показано, что квазимонотонные последовательности $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (такие, что $a_n n^{-\tau} \downarrow 0$ для некоторых $\tau \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$) содержатся в GM. Ему же принадлежит идея доказательства того факта, что данный класс и класс GM не содержат друг друга (см. леммы 1, 2).

Пусть $A = \{a_{nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ – нижнетреугольная неотрицательная матрица, такая что $\sum_{k=1}^n a_{nk} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $\sum_{k=2m}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \leq K \frac{1}{m+1} \sum_{k=m}^{2m-1} a_{nk}$, $1 \leq m \leq (n-1)/2$.

В данной статье приведены оценки следующих величин $R_n(f, r)(x) = \left(\sum_{k=1}^n a_{nk} |S_k(f)(x) - f(x)|^r \right)^{1/r}$, для которых строки матрицы A принадлежат классу MRBVS.

Лемма 1. *Последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, \dots, a_{99}, 0, a_{101}, \dots\}$, где $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная неотрицательная убывающая последовательность, не принадлежит классу GM, однако $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ входит в класс MRBVS.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как $d_{100} = 0 \leq \sum_{i=100}^{200} |d_i - d_{i+1}|$. Для доказательства второго утверждения проверим оценку $d_n \asymp \sum_{k=n}^{\infty} |d_k - d_{k+1}|$. При $n > 100$ оценка превращается в равенство, при $n < 100$ $\sum_{k=n}^{\infty} |d_k - d_{k+1}| = a_n + 2a_{101}$, $a_n < \sum_{k=n}^{\infty} |d_k - d_{k+1}| \leq 3a_n$.

При $n < 100$ и $n > 200$ получаем $2 \sum_{k=n/2}^n \frac{d_k}{n} > d_n$, так как $\{d_n\}$ убывает. При $100 \leq n \leq 200$ $2 \sum_{k=n/2}^n \frac{d_k}{n} \geq 2 \left(\sum_{k=n/2}^n \frac{a_k}{n} - \frac{a_n}{n} \right) > a_n(n-1)/n > d_n/2$. Из последних неравенств и асимптотической оценки следует утверждение леммы.

Далее будем использовать обозначение $A \asymp B$, если существуют такие константы c_1, c_2 , что верно $c_1 A \leq B \leq c_2 A$.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена следующим образом: при $n \in [2^\nu, 2^{\nu+1})$*

$$d_n = \begin{cases} \nu^{-\alpha}; & n - \text{четное}; \\ \nu^{-\alpha}(1 - 2^{-\nu}); & n - \text{нечетное}, \end{cases}$$

где $\alpha > 1$. Тогда $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$ и $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \notin MRBVS$.

Доказательство. Покажем, что $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$.

В силу теоремы Лагранжа о среднем справедлива следующая оценка:

$$|\Delta d_{2^{\nu+1}-1}| = \nu^{-\alpha}(1 - 2^{-\nu}) - (\nu + 1)^{-\alpha} = \nu^{-\alpha} - (\nu + 1)^{-\alpha} - \nu^{\alpha} 2^{-\nu} \asymp \nu^{-\alpha-1}.$$

При $n \in (2^\nu, 2^{\nu+1})$ имеем $|\Delta d_n| = \nu^{-\alpha} 2^{-\nu}$. Тогда

$$\sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} |\Delta d_n| = \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} |\Delta d_n| + |\Delta d_{2^{\nu+1}-1}| \asymp (2^\nu - 1) \nu^{-\alpha} 2^{-\nu} + \nu^{-\alpha-1} \asymp \nu^{-\alpha}.$$

Из определения $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ получаем, что $d_n \asymp \nu^{-\alpha}$. А из последних двух оценок следует, что $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$.

С другой стороны,

$$\nu^{-\alpha+1} \leq \sum_{n=\nu}^{2\nu} n^{-\alpha} \leq \sum_{n=\nu}^{\infty} n^{-\alpha} \leq \int_{\nu}^{\infty} t^{-\alpha} dt = \nu^{-\alpha+1}.$$

А значит, справедлива оценка

$$\nu^{-\alpha+1} \asymp \sum_{n=\nu}^{\infty} n^{-\alpha} \asymp \sum_{n=\nu}^{\infty} \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} |\Delta d_j| = \sum_{n=2^\nu}^{\infty} |\Delta d_\nu|.$$

Из оценки $d_n \asymp \nu^{-\alpha}$ получаем $2^{-\nu-1} \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} |d_n| \asymp \nu^{-\alpha}$. Так как $\nu^{-\alpha+1} \not\leq C\nu^{-\alpha}$, получаем, что последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ не входит в класс MRBVS.

Лемма доказана.

Замечание. Из лемм 1 и 2 следует, что классы последовательностей GM и MRBVS не совпадают и каждый из классов не лежит в другом, поэтому имеет смысл рассматривать оба класса.

Теорема 1. Пусть $f \in C^*[0, 1)$, $r \geq 1$. Тогда

$$\|R_n(f, r)\|_{\infty} = O \left(\sum_{k=1}^n a_{nk} E_k^r(f)_{\infty} \right)^{1/r}.$$

Теорема 2. Если $f \in H_p^{\omega}$, $\infty \geq p \geq r \geq 1$, и $\omega(t)/\mu(t)$ возрастает на $[0, 1)$, то $\exists \alpha \in [0, 1)$ и

$$\|R_n(f, r)\|_{p, \mu} \leq C \left(\sum_{k=1}^n a_{nk} \omega^r(k^{-1}) \right)^{(1-\alpha)/r}.$$

Теорема 1 является аналогом теоремы из [2] для тригонометрических рядов.

В работе [3] мною совместно с С.С. Волосивцом были получены оценки величин $R_n(f, r)(x)$, для которых строки матрицы A принадлежат классу GM . В силу замечания 1 теоремы 1, 2 дополняют результаты, полученные в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
2. Szal B. On the degree of strong approximation of continuous functions by special matrix // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 10(4), № 111.
3. Иофина Т.В., Волосивец С.С. Сильная аппроксимация функций в гильбертовых метриках // Современные проблемы теории функций и их применения: материалы 15-й Саратов. зимней шк., посвящ. 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. С. 80–81.

УДК 519.852.2

М.Ю. Калмыков

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассматривается задача конического программирования, связанная с конусом функций, производные некоторых порядков которых имеют фиксированный знак на $[0, 1]$, и доказывается соответствующая теорема двойственности.

Пусть $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$, $m < n$, $m, n \in N$. Пусть $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$. Для $g \in C[0, 1]$ обозначим $Ig = (g(x_1), \dots, g(x_n))$. Пусть $k \geq 0$, $\sigma = (\sigma_i)_{i=0}^k$, $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$. Пусть $\Delta^p[0, 1]$ – множество p -монотонных на $[0, 1]$ функций. Напомним, что функция называется p -монотонной на $C[0, 1]$, если разложенная разность порядка p по любой системе $p + 1$ точек из $[0, 1]$ является неотрицательной. Следуя [1], рассмотрим конус $\Delta^{0,k}[0, 1] := \{f \in C[0, 1] : \sigma_p f \in \Delta^p[0, 1], 0 \leq p \leq k\}$. Обозначим $V_{0,k}(\sigma) := \{If \in R^n : f \in \Delta^{0,k}(\sigma)\}$. Двойственный конус имеет вид $V_{0,k}^*(\sigma) := \{y \in R^m : u^T y \geq 0, \forall u \in V_{0,k}(\sigma)\}$.

Рассмотрим задачу

$$f(x) := c^T x \rightarrow \min_{x \in M}, \quad M := \{x \in R^n : Ax^T = b, \quad x \in V_{0,k}(\sigma)\}. \quad (1)$$

Тогда, согласно [2], двойственная задача будет иметь вид

$$f^*(y) := b^T y \rightarrow \max_{y \in M^*}, \quad M^* := \{y \in R^m : A^T y + s = c, \quad s \in V_{0,k}(\sigma)\}. \quad (2)$$

Обозначим $\|A\|_\infty := \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Лемма. Множество $Q := \{Ax^T, x \in V_{0,k}^*(\sigma)\}$ является непустым, замкнутым и выпуклым.

Доказательство. Ясно, что Q выпукло. Более того, так как $0 \in Q$, очевидно, что Q есть непустое множество. Теперь остается показать, что множество Q замкнуто. Пусть q^k – последовательность в Q такая, что $q^k \rightarrow q$. Наша цель показать, что $q \in Q$. Рассмотрим задачу оптимизации: $\min_{x \in V_{0,k}^*(\sigma)} \|q - Ax^T\|_\infty$, которую можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \min t, \\ & t \geq q_i - (Ax)_i, \forall i = 1, \dots, n, \\ & t \geq -q_i + (Ax)_i, \forall i = 1, \dots, n, \\ & x \in V_{0,k}(\sigma) \Leftrightarrow \langle x, v_i^* \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

где $v_i \in V_{0,k}(\sigma)$ – крайние лучи конуса $V_{0,k}(\sigma)$.

Заметим, что данная система является нелинейным полиэдром. Отсюда, согласно [2], существует оптимальное решение (x^*, t^*) такое, что $t^* \geq 0$. Мы утверждаем, что $t^* = 0$. Предположим, что $t^* > 0$. Тогда, так как $q^k \rightarrow q$, существует индекс k' такой, что $\|q - q^{k'}\|_\infty = t' < t^*$, так как $q^{k'} \in Q$, существует $x' \in V_{0,k}^*(\sigma)$ такое, что $y^{k'} = A(x')^T$. Откуда следует, что (x', t') является возможным решением этой системы, что противоречит оптимальному решению (x^*, t^*) . Таким образом, мы имеем $t^* = 0$, из этого следует, что $q = A(x^*)^T$, то есть $q \in Q$.

Будем писать $u \succ_{V_{0,k}(\sigma)} v$, если $u - v \in V_{0,k}(\sigma)$.

Лемма. Пусть $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, тогда только одна из следующих систем имеет решение:

$$Ax^T = b^T, x \in V_{0,k}^*(\sigma), \quad (3)$$

$$-A^T y^T \succ_{V_{0,k}(\sigma)} 0, b^T y > 0. \quad (4)$$

Доказательство. Предположим противное, пусть $x_* \in R^n$ – решение (??), а $y_* \in R^m$ – решение (??). Так как $y_* A \in (-V_{0,k}(\sigma))$, а $x_* \in V_{0,k}^*(\sigma)$ и

$$-V_{0,k}^*(\sigma) := \{u : -u \in V_{0,k}(\sigma)\}, \quad (5)$$

то $0 \geq (y_* A)x_*^T = y_*(Ax_*^T) = y_* b^T > 0$, мы получаем противоречие. Теперь остается показать, что если (??) не имеет решения, то (??) имеет

решение. Рассмотрим непустое замкнутое и выпуклое множество $Q = \{Ax^T, x \in V_{0,k}^*(\sigma)\}$. Так как (??) не имеет решения, то мы имеем $b^T \notin Q$. Применяя теорему отделимости, получаем, что существует $y \in R^m$ такой, что $yAx^T < yb^T, \forall x \in V_{0,k}^*(\sigma)$. Так как $0 \in Q$, то $b^Ty > 0$. Таким образом, мы имеем, что $b^Ty > 0$ и в силу (??) $(-A^Ty^T) \succ_{V_{0,k}(\sigma)} 0$. Покажем, что $(-A^Ty) \succ_{V_{0,k}(\sigma)} 0$. Предположим, что это не так. Тогда существует крайний луч $v_i \in V_{0,k}^*(\sigma)$ такой, что $(A^Ty)v_i > 0$. Рассмотрим вектор $x' = \lambda v_i$, где $\lambda > 0$, и v_i – крайний луч. Очевидно, что $x' \in V_{0,k}^*(\sigma)$. Кроме того, имеем $y^Tb > y^TAx' = \lambda(A^Tyv_i)$ для всех $\lambda > 0$, что невозможно. Следовательно, мы имеем $-A^Ty^T \succ_{V_{0,k}(\sigma)} 0$.

Теорема 1 (о слабой двойственности). Пусть $x_* \in R^n$ – возможное решение для (??), а $y_* \in R^m$ – возможное решение для (??). тогда мы имеем

$$b^Ty_* \leq c^Tx_*. \quad (6)$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $b^Ty_* = x_*^TA^Ty_* \leq x_*^T(A^Ty_* + s) = x_*^Tc$, где $s \geq 0, x_* \in V_{0,k}^*(\sigma), A^Ty_* + s = c$ по определению.

Теорема 2 (о сильной двойственности). Предположим, что задача (??) имеет оптимальное решение $x_* \in R^n$, тогда задача (??) также имеет оптимальное решение $y_* \in R^m$, причем

$$b^Ty_* = c^Tx_*. \quad (7)$$

Доказательство. Предположим, что задача (??) имеет оптимальное решение $x_* \in R^n$. Мы утверждаем, что система

$$Ax - bt = 0, \quad c^Tx - (c^Tx_*)t = -1 < 0, \quad x \in V_{0,k}^*(\sigma), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

не должна иметь решения (x, t) .

Конечно, если (x', t') – возможное решение этой системы, $t' > 0$, то (x'/t') – возможное решение для (??), и $c^T(x'/t') < c^Tx_*$, что противоречит оптимальности x_* . С другой стороны, если $t' = 0$, то $x_* + x'$ – возможное решение для (??), и $c^T(x_* + x')$, согласно (8), равно $c^Tx_* - 1 < c^Tx_*$, что снова противоречит оптимальности x_* .

Существует [2] $y_* \in R^m$ такое, что $c - A^Ty_* \geq 0$ и $-c^Tx_* + b^Ty_* \geq 0$. из этого следует, что y_* – возможное решение для (??). Более того, по теореме 1 мы имеем $b^Ty_* \leq c^Tx_*$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Muñoz-Delgado F.J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.
2. *Shapiro A.* On duality theory of conic linear problems: Semi-Infinite Programming: Recent Advances. Kluwer Academic Publishers, 2002.

УДК 519.852.2

М.Ю. Калмыков, С.П. Сидоров

УСЛОВИЯ ПУСТОТЫ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается задача конического линейного программирования. Показано, что при выполнении некоторых условий на коэффициенты системы ограничений допустимое множество этой задачи будет пустым.

Пусть $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$, $If = (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^n$, $f \in C[0, 1]$.

Говорят, что функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ является p -монотонной, $p \geq 1$, на отрезке $[0, 1]$, если для произвольных $p + 1$ различных точек t_0, \dots, t_p из $[0, 1]$ выполняется неравенство

$$[t_0, \dots, t_p]f \geq 0,$$

где $[t_0, \dots, t_p]f = \sum_{j=0}^p (f(t_j)/w'(t_j))$ означает дифференциальную разность порядка p функции f по узлам $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_p \leq 1$, и $w(t) = \prod_{j=0}^p (t - t_j)$.

Заметим, что 2-монотонные функции есть выпуклые функции. Множество всех p -монотонных функций, определенных на $[0, 1]$, обозначим $\Delta^p[0, 1]$. Если $f \in C^p[0, 1]$, то $f \in \Delta^p[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $f^{(p)}(t) \geq 0$, $t \in [0, 1]$. Обозначим $\Delta^0[0, 1] := \{f \in C[0, 1] : f(t) \geq 0, t \in [0, 1]\}$.

Пусть $k = 0$, $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_k) \in R^{k+1}$, $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\sigma_0 \sigma_k \neq 0$, $k \geq 1$. Следуя [1], положим

$$\Delta^{0,k}(\sigma) := \{f \in C[0, 1] : \sigma_p f \in \Delta^p[0, 1], 0 \leq p \leq k\}$$

и рассмотрим конус

$$V_{0,k}(\sigma) := \{If : f \in \Delta^{0,k}(\sigma)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Обозначим

$$V_{0,k}^*(\sigma) = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, v \rangle \geq 0 \forall v \in V_{0,k}\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение, конус, двойственный к конусу $V_{0,k}(\sigma)$.

В дальнейшем без потери общности будем полагать $\sigma_0 = 1$.

Пусть $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрица $A : \mathbb{R}^{m \times n}$ такова, что $\text{rank } A = m < n$. Рассмотрим задачу конического программирования:

$$\inf_{x \in V_{0,k}^*(\sigma)} \{\langle c, x \rangle : Ax = b\}. \quad (1)$$

Обзор задач и результатов теории конического программирования можно найти в книге [2].

Обозначим $e_r(t) = t^r$, $r = 0, 1, \dots$, $t \in [0, 1]$.

Теорема. Пусть $2 \leq k \leq n - 1$ (при $k = 2$ полагаем $\sigma_0 \sigma_2 = 1$), $\zeta \in [0, 1]$. Если

$$A = (e_p(x_i))_{p=0, i=1}^{k, n}, \quad b = (e_0(\zeta), \dots, e_k(\zeta))^T,$$

то допустимое множество задачи (1) будет пустым, т.е.

$$\{v \in V_{0,k}^*(\sigma) : Ax = b\} = \emptyset.$$

Доказательство. Необходимо показать, что множество векторов $v \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям

- 1) $\langle v, If \rangle \geq 0$ для всех $f \in \Delta^{0,k}(\sigma)$;
- 2) $\langle v, Ie_p \rangle = e_p(\zeta)$ для всех $p = 0, \dots, k$,

является пустым.

Возьмем алгебраический полином p степени k таким образом, чтобы выполнялись условия

- 1) $\sigma_k p \in \Delta^k[0, 1]$;
- 2) $p(x) > 0$, $x \in [0, 1] \setminus (x_{l-1}, x_l)$;
- 3) $p(x) < 0$, $x \in (x_{l-1}, x_l)$,

где $x_{l-1} < \zeta < x_l$.

Обозначим

$$\Gamma(\zeta) := \{0 \leq i \leq n - k : \zeta \in [x_{i+1}, x_{i+k}] \text{ and } \sigma_k \prod_{j=1}^k (\zeta - x_{i+j}) < 0\}.$$

Пусть натуральное число $s \in \Gamma(\zeta)$ будет таким, что

$$\begin{aligned} & \sigma_k[x_{s+1}, \dots, x_{s+k}, \zeta] p \prod_{i=1}^k |\zeta - x_{s+i}| = \\ & = \min_{j \in \Gamma(\zeta)} \sigma_k[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}, \zeta] p \prod_{i=1}^k |\zeta - x_{j+i}|. \end{aligned}$$

Обозначим: $L_p f(\cdot; y_0, y_1, \dots, y_p)$ – интерполяционный полином Ньютона функции f по узлам y_0, y_1, \dots, y_p :

$$L_p f(x; y_0, y_1, \dots, y_p) = \sum_{j=0}^p [y_0, \dots, y_j] f \cdot \prod_{i=-1}^{j-1} (x - y_i), \quad x - y_{-1} := 1.$$

Обозначим

$$p^*(x) := \begin{cases} p(x), & x \in [0, 1] \setminus (x_{l-1}, x_l), \\ L_{k-1} p(x; x_{s+1}, \dots, x_{s+k}), & [x_{l-1}, x_l] \end{cases}$$

и

$$q := p^* + L_{k-1} p(\zeta; x_{s+1}, \dots, x_{s+k}).$$

Тогда будет $q \in \Delta^{0,k}[0, 1]$ и для произвольного $v \in V_{0,k}^*(\sigma)$ имеет место $\langle v, Iq \rangle = p(\zeta) < 0$, что невозможно.

Теорема доказана.

Замечание. Утверждение теоремы не будет иметь место, если взять $k = 2$ и $\sigma_0 \sigma_2 = -1$. Действительно, пусть $x_{l-1} < \zeta < x_l$, тогда вектор v , определенный следующим образом

$$\langle v, If \rangle = \begin{cases} L_2(\zeta; x_{l-1}, x_l, x_{l+1}), & \text{if } 0 \leq l \leq n-1, \\ L_2(\zeta; x_{l-2}, x_{l-1}, x_l), & \text{if } n-1 \leq l \leq n, \end{cases}$$

обладает свойствами:

- 1) $A(If) \geq 0$ для всех $f \in \Delta^{0,2}(\sigma)$;
- 2) $A(Ie_p) = e_p(\zeta)$ для всех $p = 0, 1, 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Muñoz-Delgado F.J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144-159.

2. *Shapiro A.* On duality theory of conic linear problems / M. A. Goberna, M. A. Lopez, eds.: Semi-Infinite Programming: Recent Advances. Kluwer Academic Publishers, 2002.

УДК 517.984

В.В. Корнев

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОПЕРАТОРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Рассмотрим оператор

$$Af = \int_0^{\theta(x)} f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $\theta(x)$ — инволюция (т.е. $\theta(\theta(x)) \equiv x$), удовлетворяющая условиям: $\theta(x)$ непрерывна, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, $\theta(x) \in C^3(0, 1)$ и в некоторой δ -окрестности нуля $\theta'(x) = -x^\alpha r(x)$, $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) > 0$.

В случае $r(x) \equiv 1$ в работе [1] была доказана равносходимость разложений суммируемых функций по собственным функциям оператора A и тригонометрических рядов Фурье. Важным этапом в доказательстве этого факта является исследование поведения резольвенты Фредгольма

$$y(x) = (E - \lambda A)^{-1} Af$$

(E — единичный оператор, λ — комплексный параметр) в окрестности точек $x = 0$ и $x = 1$, так как в этих точках дифференциальные уравнения резольвенты имеют особенность. В частности, было показано, что в окрестности нуля

$$y(\delta t) = (c_1 + g_1(t))x_{11}(t) + (c_2 + g_2(t))x_{12}(t),$$

где c_1, c_2 — константы, не зависящие от t , $g_1(t)$ — линейная комбинация первообразных для функций $x_{22}(t)f(\theta(\delta t))\theta'(\delta t)$ и $x_{12}(t)f(\delta t)$, $g_2(t)$ — линейная комбинация первообразных для функций $x_{21}(t)f(\theta(\delta t))\theta'(\delta t)$ и $x_{11}(t)f(\delta t)$. Функции $x_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, образуют фундаментальную

систему решений дифференциальных уравнений, определяющих резольвенту, и для них в [1] были получены асимптотические формулы (см. лемму 7).

В рассматриваемом нами случае наличие множителя $r(x)$ в формуле для $\theta'(x)$ существенно усложняет вывод асимптотических формул для функций $x_{ij}(t)$. Возникшие трудности удалось преодолеть с помощью метода эталонных уравнений [2]. В итоге был получен следующий результат.

Теорема. При $\lambda \rightarrow \infty$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} x_{1j}(t) &= O(\lambda^{\nu-1}), \quad x_{2j}(t) = O(\lambda^{-\nu}) \quad \text{при} \quad |\lambda\omega^q(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2; \\ x_{1j}(t) &= (-1)^j A(t, \lambda) \exp(-(-1)^j i\mu\omega^q(t)) [1], \\ x_{2j}(t) &= B(t, \lambda) \exp(-(-1)^j i\mu\omega^q(t)) [1] \quad \text{при} \quad |\lambda\omega^q(t)| \geq 1, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где

$$q = \frac{1}{2}(\alpha+2), \nu = (2q)^{-1}, \mu = -q^{-1}\delta^q\lambda, \omega(t) = \left(\frac{2}{2+\alpha} \int_0^t \sqrt{\tau^\alpha r(\delta\tau)} d\tau \right)^{\frac{2}{2+\alpha}},$$

$$\begin{aligned} A(t, \lambda) &= \delta^{\frac{\alpha-2}{4}} q^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \omega^{\frac{q-1}{2}}(t), \quad B(t, \lambda) = -i\delta^{\frac{-\alpha-2}{4}} q^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \omega^{\frac{1-q}{2}}(t), \\ [1] &= 1 + O(|\lambda\omega^q(t)|^{-1}). \end{aligned}$$

Метод эталонных уравнений позволяет получить соответствующие асимптотические формулы и в окрестности второй особой точки $x = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корнев В.В., Хромов А.П. Оператор интегрирования с инволюцией, имеющей степенную особенность // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2008. Т. 8. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 18–33.
2. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. 1952. Т. VII, вып. 6(52). С. 1–96.

Е.В. Коробченко

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ТОЛЕРАНТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В статье получен аналог теоремы Брауэра о неподвижных точках для толерантных отображений.

Толерантное пространство [1] является наиболее общей математической моделью понятия схожести и предстает собой пару (X, τ) , где X — множество, а $\tau \subset X \times X$ — рефлексивное бинарное отношение, называемое *отношением толерантности*. Принято записывать для краткости $x_1 \tau x_2$ вместо $(x_1, x_2) \in \tau$ и называть точки x_1 и x_2 *толерантными*.

Максимальные по включению подмножества $L \subset X$, все точки которых попарно толерантны, называются *классами толерантности*.

Отношение эквивалентности ε_τ такое, что

$$x_1 \varepsilon_\tau x_2 \iff \tau \langle x_1 \rangle = \tau \langle x_2 \rangle, \text{ где } \tau \langle x \rangle = \{x' \in X \mid x' \tau x\},$$

называется *ядерным* и его классы $\varepsilon_\tau \langle x \rangle$ называются *ядрами толерантности* и обозначаются \check{x} . Если классы толерантности интерпретируются как признаки, по которым устанавливается сходство (толерантность), то ядра — это все элементы, имеющие одинаковый набор признаков. Если все ядра толерантности таковы, что $\check{x} = \{x\}$, то пространство (X, τ) называется *безъядерным*.

Определение 1. Отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \theta)$ толерантных пространств называется *сильно толерантным*, если

$$x_1 \tau x_2 \implies f(x_1) \theta f(x_2), \quad x_1 \varepsilon_\tau x_2 \implies f(x_1) \varepsilon_\theta f(x_2). \quad (1)$$

Если отображение f удовлетворяет лишь первому свойству из (1), то отображение f называется *толерантным*. Для безъядерных пространств оба понятия толерантности и сильной толерантности совпадают.

Определение 2. Пусть $f : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ — толерантное отображение. *Неподвижной точкой отображения f* называется точка $x \in X$ такая, что $f(x) \tau x$.

Для толерантных пространств развита гомотопическая теория [2], в которой роль единичного отрезка $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ берут на себя толерантные отрезки (I_n, ι_n) , где

$$n \in \mathbb{N}, I_n = \left\{ \frac{k}{n} \mid k = \overline{0, n} \right\}, \quad \frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \iff |k - l| \leq 1.$$

Определение 3. Два (сильно) толерантных отображения

$$f_0, f_1 : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \theta)$$

называются *толерантно гомотопными*, что записывается $f_0 \sim f_1$, если найдется $n \in \mathbb{N}$ и (сильно) толерантное отображение

$$F : (X \times I_n, \tau \times \iota_n) \longrightarrow (Y, \theta)$$

такие, что

$$(\forall x \in X) f_0(x) = F(x, 0), f_1(x) = F(x, 1).$$

Определение 4. Толерантное пространство (X, τ) называется *толерантно стягиваемым*, если тождественное отображение толерантно гомотопно постоянному.

Каждое толерантное пространство (X, τ) определяет симплициальный комплекс $S(X)$, вершинами которого являются ядра толерантности, а симплексы — это конечные наборы ядер с попарно толерантными представителями. При этом сильные толерантные отображения индуцируют, согласно свойствам (1), симплициальные отображения. По симплициальному комплексу $S(X)$ строится (см. [1]) цепной комплекс $C(X, k) = \bigoplus_{q \geq 0} C_q(X, k)$, где $C_q(X, k)$ — линейное векторное пространство над k , базисом которого являются ориентированные симплексы

$$[\check{x}_0, \check{x}_1, \dots, \check{x}_q], (\forall i, j = \overline{0, q}) x_i \tau x_j. \quad (2)$$

Из (1) следует, что сильное толерантное отображение f — цепной гомоморфизм

$$f_{\#} = \{(f_{\#})_q : C_q(X, k) \longrightarrow C_q(Y, k)\}_{q \geq 0},$$

который на базисе определяется формулой

$$(\forall q \geq 0) f_{\#}([\check{x}_0, \check{x}_1, \dots, \check{x}_q]) = [f(\check{x}_0), \dots, f(\check{x}_q)]. \quad (3)$$

Комплекс $C(X, k)$ определяет пространство $H(x, k) = \bigoplus_{q \geq 0} H_n^q(X, k)$ гомологий толерантного пространства (X, τ) , а цепное отображение $f_{\#}$ индуцирует линейное отображение гомологий:

$$f_* = \{(f_*)_q : H_q(X, k) \longrightarrow H_q(Y, k)\}_{q \geq 0}.$$

Следующая теорема является толерантным аналогом известной теоремы Брауэра о неподвижных точках.

Теорема 1. Если толерантное пространство (X, τ) имеет конечное число классов и является толерантно стягиваемым, то любое сильно толерантное отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ имеет неподвижную точку.

Доказательство. Из предложения 1.2.5 работы [2] и толерантной стягиваемости пространства (X, τ) следует гомотопность $f \sim \mathbf{1}_X$. Отсюда по теореме 2.2.1 из [2] получаем $f_* = (\mathbf{1}_X)_* = \mathbf{1}_{H(X,k)}$. Это позволяет вычислить число Лефшеца [3] оператора f_* , которое определяется формулой

$$\lambda(f_*) \stackrel{df}{=} \sum_{q \geq 0} (-1)^{-q} Tr(f_*)_q.$$

В самом деле, согласно предложению 2.2.3 из [2], имеем

$$H_q(X, k) = \begin{cases} k, & q = 0; \\ 0, & q > 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lambda(f_*) = \lambda(\mathbf{1}_{H(X,k)}) = 1$.

Так как в (X, τ) конечное число классов, то число ядер тоже будет конечным. Это значит, что пространство $C(X, k)$ будет конечно порожденным. Следовательно, имеет место теорема Хопфа (см. [3, теорема 4.7.6.]), т.е.

$$\lambda(f_{\#}) = \lambda(f_*) = 1 \neq 0.$$

Отсюда, по определению числа Лефшеца, следует, что

$$(\exists q \geq 0) Tr(f_{\#})_q \neq 0. \quad (4)$$

Из (4), (3) и определения следа Tr получается, что

$$(\exists [\check{x}_0, \dots, \check{x}_q]) (f_{\#})_q([\check{x}_0, \dots, \check{x}_q]) = [f(\check{x}_0), \dots, f(\check{x}_q)] = [\check{x}_0, \dots, \check{x}_q]. \quad (5)$$

Наконец из (5) и (2) получаем

$$(\exists q \geq 0)(\exists x_0, \dots, x_q \in X) f(x_i) \tau x_i,$$

что и доказывает теорему.

Замечание. Примерами пространств (X, τ) , для которых имеет место теорема 1, являются толерантные кубы $\left(\times_{i=1}^n I_{m_i}, \times_{i=1}^n \iota_{m_i} \right)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zeeman E.C. The topology of brain fnd visual perception // The topology of 3-Manifolds/ Ed. M.K. Fort, 1962.

2. *Небалухев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006.

3. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.:Мир, 1971.

УДК 517.51+517.98

С.А. Крейс

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА СИНТЕЗА, АССОЦИИРОВАННОГО С АЛЬТЕРНАТИВНЫМ ДУАЛЬНЫМ ФРЕЙМОМ

Пусть X – банахово пространство и X^* – сопряженное к нему. Далее, пусть задано банахово пространство X_d , состоящее из числовых последовательностей $a = \{a_n\}$ и удовлетворяющее следующему условию: система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}$ образует базис в X_d .

Определение 1. Пусть заданы линейные ограниченные операторы $A : X_d \mapsto X_d$ и $B : X \mapsto X$. Оператор $S : X_d \mapsto X$ называется *сплетающим* для пары $[A, B]$, если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & X \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ F & \xrightarrow{B} & F \end{array}$$

т.е. если имеет место равенство

$$SA = BS.$$

Определение 2. Пусть заданы системы $\{x_n\} \subset X$ и $\{y_n\} \subset X^*$. Для всех $x \in X$ имеет место принадлежность $\{(x, y_n)\} \in X_d$. Предположим, что существуют положительные постоянные $A, \tilde{A}, B, \tilde{B}$ такие, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$A \|x\|_X \leq \| \{(x, y_n)\} \|_{X_d} \leq B \|x\|_X \quad (1)$$

и любого $y \in X^*$ выполняется неравенство

$$\tilde{A} \|y\|_{X^*} \leq \| \{(x_n, y)\} \|_{X_d^*} \leq \tilde{B} \|y\|_{X^*} \quad (2)$$

Если при этом справедлива формула восстановления

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n) x_n, \quad (3)$$

то пара систем $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ образует *кросс-фрейм*.

Замечание. Данное определение было введено в [1]. Кросс-фрейм в банаховом пространстве – это аналог альтернативных дуальных фреймов в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим пару $\{x_n\}, \{y_n\}$, образующую кросс-фрейм. Известно [1], что мы можем задать оператор синтеза $S : X_d \mapsto X$, действующий по формулам

$$Sa = \sum (a_n, x_n).$$

Тогда очевидно, что пространство коэффициентов нуль-рядов совпадает с ядром оператора S : $N = Ker(S)$.

Наряду с оператором синтеза также введем оператор $\tilde{R} : X \mapsto X_d$:

$$\tilde{R}x = \{(x, y_n)\}$$

Теорема 1. Пусть определен линейный ограниченный оператор $A : X_d \mapsto X_d$, S – оператор синтеза. Тогда существование такого оператора $B : X \mapsto X$, что S является сплетающим для пары $[A, B]$, эквивалентно принадлежности $A(N) \subset N$.

Доказательство. Необходимость. Пусть такой оператор B существует. Рассмотрим произвольный нуль-ряд $\sum c_n \varphi_n$. Подействуем оператором A на последовательность (c_n) :

$$\sum Ac_n \varphi_n = S(Ac_n) = SA(c_n) = BS(c_n) = B0_X = 0.$$

Таким образом, $A(N) \subset N$.

Достаточность. Пусть теперь $A(N) \subset N$, то есть из равенства $Sc = 0$ сразу следует $SAc = 0$. Определим оператор B следующим образом: $B(S(c_n)) = SA(c_n)$ для всех $(c_n) \in X_d$. Так как оператор S сюръективен, B определен на всем пространстве X . Из предположения следует $B0_X = 0$. Также легко убедиться, что B – линейный и ограниченный оператор.

Теорема 2. Пусть определен линейный ограниченный оператор $B : X \mapsto X$, S – оператор синтеза. Если существует такой оператор $A :$

$X_d \mapsto X_d$, что S является сплетающим для пары $[A, B]$, то он имеет следующий вид:

$$A = \tilde{R}BS + A_0,$$

где A_0 – такой оператор, что $A_0(X_d) \subset N$.

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$BS = SA.$$

Поддействуем операторами в левой и правой части тождества на оператор \tilde{R} :

$$BS\tilde{R} = SA\tilde{R}. \quad (4)$$

Так как для кросс-фрейма верна формула восстановления (3), то $S\tilde{R} = I_X$, и $\tilde{R}S = I_{X_d} - P$ (см. [1]), где P – проектор на пространство N . Перепишем формулу (4) с учетом вышесказанного:

$$B = SA\tilde{R}. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим конструкцию $\tilde{R}BS$. С учетом (5) получаем

$$\tilde{R}BS = \tilde{R}SA\tilde{R}S.$$

Отсюда следует:

$$\tilde{R}BS = (I - P)A(I - P) = A - AP - PA + PAP.$$

По теореме 1 $A(N) \subset N$. Тогда положим $A_0 = AP + PA - PAP$. Очевидно, что $A_0(X_d) \subset N$ и $A = \tilde{R}BS + A_0$.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект МК-346.2009.1) и РФФИ (проект 10-01-00097-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крейс С.А. Альтернативные дуальные фреймы в банаховых пространствах// Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 36–38.

И.А. Кузнецова

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ДВУЗНАЧНЫМ КРИТЕРИЕМ ЭФФЕКТИВНОСТИ

В данной статье рассматриваются иерархические игры [1–4]. Отличием от обычных предположений является то, что критерии эффективности зависят непосредственно от стратегий-функций игроков. Предложен метод нахождения наибольшего гарантированного результата первого игрока при двузначном критерии эффективности второго игрока.

Пусть задана игра $\Gamma = (X, Y, F, G)$, где X, Y — конечные множества стратегий игроков, F и G — их критерии эффективности. Рассмотрим игру ${}_1\Gamma = \{\tilde{X}, Y, \tilde{F}, \tilde{G}\}$, где $\tilde{X} = \{\tilde{x}\}$, $\tilde{x} : Y \rightarrow X$, \tilde{F} и \tilde{G} — критерии эффективности в игре ${}_1\Gamma$, определенные на $\tilde{X} \times Y$. Наибольший гарантированный результат первого игрока в данной игре обозначается $\gamma({}_1\Gamma)$ и определяется равенством

$$\gamma({}_1\Gamma) = \max_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \min_{y \in M(\tilde{x})} \tilde{F}(\tilde{x}, y),$$

где

$$M(\tilde{x}) = \{y' : \tilde{G}(\tilde{x}, y') = \max_y \tilde{G}(\tilde{x}, y)\}.$$

Обычно \tilde{F} и \tilde{G} задаются равенствами

$$\tilde{F}(\tilde{x}, y) = F(\tilde{x}(y), y), \quad \tilde{G}(\tilde{x}, y) = G(\tilde{x}(y), y), \quad (1)$$

то есть оценка пары стратегий (\tilde{x}, y) зависит только от точки $(\tilde{x}(y), y)$. Но на формирование критерия эффективности оказывает влияние множество факторов, в том числе и психологических, поэтому вполне может быть, что для некоторых $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, y$ верно равенство $\tilde{x}_1(y) = \tilde{x}_2(y)$, но при этом $\tilde{G}(\tilde{x}_1, y) \neq \tilde{G}(\tilde{x}_2, y)$. В статье рассматривается случай, когда в игре ${}_1\Gamma$ функция \tilde{F} определяется из условия (1) (что вполне естественно для игрока, выбирающего свою стратегию первым), а критерий эффективности второго игрока, определенный на $\tilde{X} \times Y$, двузначен, то есть задается равенством

$$\tilde{G}(\tilde{x}, y) = \begin{cases} 1, & (\tilde{x}, y) \in \tilde{\tau}, \\ 0, & (\tilde{x}, y) \notin \tilde{\tau}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\tilde{\tau} \subset \tilde{X} \times Y$. Вычисление наибольшего гарантированного результата первого игрока при данных предположениях сводится в ряде случаев к решению некоторого числа иерархических игр с ограничениями.

Предположим, что существуют множества $\tilde{X}_i \subset \tilde{X}$ и отношения $\omega_i, \tau_i \subset X \times Y, i = 1, \dots, n$, удовлетворяющие условиям

$$\bigcup_{i=1}^n \tilde{X}_i = \tilde{X}, \quad (3)$$

$$\tilde{x} \in \tilde{X}_i \Leftrightarrow \forall y (\tilde{x}(y), y) \in \omega_i, \quad (4)$$

$$\tilde{x} \in \tilde{X}_i \Rightarrow ((\tilde{x}, y) \in \tilde{\tau} \Leftrightarrow (\tilde{x}(y), y) \in \tau_i), \quad (5)$$

причем $n \ll |\tilde{X}|$. Покажем, что в таком случае вычисление наибольшего гарантированного результата первого игрока сводится к решению n задач с ограничениями. Доказательство этого утверждения основано на двух леммах.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\max_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \min_{y \in M(\tilde{x})} F(\tilde{x}(y), y) = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{\tilde{x} \in \tilde{X}_i} \min_{y \in M(\tilde{x})} F(\tilde{x}(y), y).$$

Лемма 2. *Вычисление $\max_{\tilde{x} \in \tilde{X}_i} \min_{y \in M(\tilde{x})} F(\tilde{x}(y), y), i = 1, \dots, n$, эквивалентно решению задачи с ограничениями при условии, что первый игрок ограничен множеством \tilde{X}_i , а критерий эффективности второго игрока имеет вид*

$$G_i(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \tau_i, \\ 0, & (x, y) \notin \tau_i. \end{cases}$$

Из данных лемм и результатов [5] вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *В игре ${}_1\Gamma$, обладающей свойствами (3)–(5), справедливо равенство*

$$\gamma(\Gamma_2) = \max_{1 \leq i \leq n} \max(K_i, M_i),$$

где $K_i = \max_{(x,y) \in \omega_i} F(x, y), M_i = \min_{E_i} \max_{x \in \omega_i^{-1}(y)} F(x, y), E_i = \{y' : \min_{x \in \omega_i^{-1}(y')} G_i(x, y') = L_i\}, L_i = \max_y \min_{x \in \omega_i^{-1}(y)} G_i(x, y)$.

Рассмотрим пример отношения $\tilde{\tau} \subset \tilde{X} \times Y$, обладающего свойством (5). Определим $\tilde{\tau} \subset \tilde{X} \times Y$ равенством

$$(\tilde{x}, y') \in \tilde{\tau} \Leftrightarrow H(\tilde{x}(y'), y') \geq \max_y H(\tilde{x}(y), y) - c(\max_y H(\tilde{x}(y), y)), \quad (6)$$

где H , c – некоторые функции, причем c неотрицательна. Очевидно, что здесь выполнение условия $(\tilde{x}, y') \in \tilde{\tau}$ не определяется значением $(\tilde{x}(y'), y')$, а зависит именно от стратегии \tilde{x} . С каждой парой (x', y') , удовлетворяющей условию $H(x', y') \geq L_1$, где $L_1 = \max_y \min_x H(x, y)$ (и только с такими парами), можно связать подмножество $\tilde{X}_{x'y'} \subset \tilde{X}$, обладающее свойством

$$\tilde{x} \in \tilde{X}_{x'y'} \Leftrightarrow \tilde{x}(y') = x' \ \& \ H(x', y') = \max_y H(\tilde{x}(y), y).$$

Если определить отношения $\omega_{x'y'}$ и $\tau_{x'y'}$ равенствами

$$(x, y) \in \omega_{x'y'} \Leftrightarrow \begin{cases} H(x, y) \leq H(x', y'), & y \neq y', \\ x = x', & y = y', \end{cases}$$

$$(x, y) \in \tau_{x'y'} \Leftrightarrow H(x, y) \geq H(x', y') - c(H(x', y')),$$

то требования (3)–(5) удовлетворены. Таким образом, для нахождения наибольшего гарантированного результата первого игрока в данной игре можно применять теорему 1. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для функции $\tilde{G}(\tilde{x}, y)$, определенной условиями (2), (6), выполняется равенство*

$$\max_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \min_{y \in M(\tilde{x})} F(\tilde{x}(y), y) = \max_{(x', y') : H(x', y') \geq L_1} \min_{y \in E_{x'y'}} \max_{x \in \omega_{x'y'}^{-1}(y)} F(x, y). \quad (7)$$

Замечание. *Формула (7) имеет смысл, так как $|X \times Y| \ll |\tilde{X}|$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
2. Кукушкина Н.С., Морозов В.В. Лекции по теории неантагонистических игр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.
3. Родюков А.В., Тараканов А.Ф. О решении иерархической игры при неопределённости с суммарным риском игроков // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 5. С. 11–17.
4. Кузнецова И.А. Иерархические игры трех лиц с коалициями // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 41–43.
5. Новикова Н.М. Игры двух лиц со связанными ограничениями // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 2. С. 48–53.

В.А. Молчанов

ОТНОШЕНИЯ ГРИНА НА ПОЛУГРУППАХ НЕСТАНДАРТНЫХ СЛОВ

В работе [1] разработан нестандартный подход к теории псевдомногообразий, который позволяет характеризовать псевдомногообразия в терминах нестандартных тождеств с помощью нестандартных слов над конечным алфавитом.

Для конечного множества $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ символом $W = W(A)$ обозначим полугруппу слов над алфавитом A с операцией конкатенации. По принципу переноса нестандартное расширение $*W = *W(A)$ полугруппы W является полугруппой всех нестандартных слов над алфавитом A с операцией конкатенации. Слово $w \in *W$ называется *конечным*, если $w \in W$, и *бесконечным* в противном случае. Символом $W^1 = W(A)^1$ обозначим моноид слов над алфавитом A с операцией конкатенации, единичным элементом которого является пустое слово Λ . Тогда $*W^1 = *W(A)^1$ – моноид всех нестандартных слов над алфавитом A с операцией конкатенации и единичным элементом Λ .

Как известно [2], каждый элемент $w \in *W$ порождает в полугруппе $*W$ двусторонний главный идеал $I(w) = *W^1 \cdot w \cdot *W^1$, правый главный идеал $R(w) = w \cdot *W^1$ и левый главный идеал $L(w) = *W^1 \cdot w$. С помощью этих идеалов на полугруппе $*W(A)$ определяются отношения Грина $\leq_{\mathcal{J}}$, $\leq_{\mathcal{R}}$ и $\leq_{\mathcal{L}}$ по формулам: $u \leq_{\mathcal{J}} v \Leftrightarrow I(u) \subset I(v)$, $u \leq_{\mathcal{R}} v \Leftrightarrow R(u) \subset R(v)$ и $u \leq_{\mathcal{L}} v \Leftrightarrow L(u) \subset L(v)$. Очевидно, что эти отношения являются квазипорядками на множестве $*W$, соответствующие симметричные части которых — отношения Грина $\mathcal{J} = \leq_{\mathcal{J}} \cap \overset{-1}{\leq}_{\mathcal{J}}$, $\mathcal{R} = \leq_{\mathcal{R}} \cap \overset{-1}{\leq}_{\mathcal{R}}$ и $\mathcal{L} = \leq_{\mathcal{L}} \cap \overset{-1}{\leq}_{\mathcal{L}}$ — являются эквивалентностями на множестве $*W$.

В настоящей статье исследуются свойства отношений Грина на полугруппе нестандартных слов и рассматриваются приложения этих результатов к свободной проконечной полугруппе над алфавитом A [3].

Так как в полугруппе слов $*W$ не выполняются никакие соотношения, то для слов $u, v \in *W$ условие $u \leq_{\mathcal{J}} v$ равносильно тому, что $u = xvy$ для некоторых $x, y \in *W^1$, т.е. слово v является подсловом слова u . Аналогично условие $u \leq_{\mathcal{R}} v$ равносильно тому, что $u = vx$ для некоторого $x \in *W^1$, т.е. слово v является префиксом слова u , и условие $u \leq_{\mathcal{L}} v$ равносильно тому, что $u = xv$ для некоторого $x \in *W^1$, т.е. слово v является суффиксом слова u .

Для слова $w \in {}^*W$, обозначим $F(w)$ множество всех конечных подслов w . Слово $w \in {}^*W$ называется *рекуррентным*, если для любого $u \in F(w)$ найдется такое слово v , что $uvi \in F(w)$, и *равномерно рекуррентным*, если это слово w бесконечно и $F(w) = F(u)$ для любого бесконечного подслова u слова w .

Теорема 1. *Для любых бесконечных слов $w, v \in {}^*W$ справедливы следующие утверждения: 1) если $F(v) \subset F(w)$, то найдется такой бесконечный префикс u слова v , что $w = xiu$ для некоторых слов $x, y \in {}^*W^1$; 2) условие $w \leq_{\mathcal{J}} v$ влечет $F(v) \subset F(w)$; 3) если слово w рекуррентно, то найдется такой бесконечный префикс u слова w , что $w = xiuiz$ для некоторых слов $x, y, z \in {}^*W^1$.*

Теорема 2. *Если равномерно рекуррентные слова $w, v \in {}^*W$ удовлетворяют условию $F(v) \subset F(w)$, то найдется такое подслово u слова w , что $u \leq_{\mathcal{R}} p$ и $u \leq_{\mathcal{L}} q$ для некоторого бесконечного префикса p слова v и некоторого бесконечного суффикса q слова v .*

Из [1] следует, что полугруппа нестандартных слов и ее фактор-полугруппы кодируют в своей структуре общие алгебраически-комбинаторные свойства членов соответствующих псевдомногообразий. В частности, для псевдомногообразия всех конечных полугрупп \mathbf{Sg} свободный объект над множеством A является частным полугруппы *W по конгруэнции $\varepsilon = \bigcap \{\ker {}^*f : f \text{ есть гомоморфизм } W \text{ в конечную полугруппу } S\}$.

Как показано в [4], фактор-полугруппа $F(A) = {}^*W/\varepsilon$ является нестандартной интерпретацией свободной проконечной полугруппы $\overline{\Omega}_m \mathbf{Sg}$ всех m -арных неявных операций над псевдомногообразием \mathbf{Sg} , т.е. это топологически A -порожденная компактная хаусдорфова топологическая полугруппа и для любой полугруппы $S \in \mathbf{Sg}$ и любого отображения $\theta : A \rightarrow S$ существует такой равномерно непрерывный гомоморфизм $\varphi : F(A) \rightarrow S$, что $\varphi \circ i_A = \theta$ для канонического отображения $i_A : A \rightarrow F(A)$.

С помощью [1, теорема 4.2] получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть для некоторых нестандартных слов $u, v \in {}^*W$ уравнение $u = xvu$ имеет решение в каждой конечной полугруппе S . Тогда найдутся такие нестандартные слова $s, t \in {}^*W$, что нестандартное тождество $u = svt$ будет выполняться в псевдомногообразии \mathbf{Sg} .*

В частности, изложенные результаты дают очень короткие и элементарные комбинаторные доказательства свойств свободной проко-

нечной полугруппы $F(A)$, полученных ранее Дж. Алмейдой и М. Волковым в работах [3, 5].

Следствие. *Свободная проконечная полугруппа $F(A)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

- 1) *слово $w \in {}^*W$ равномерно рекуррентно в том и только том случае, если w является \mathcal{J} -максимальным элементом в множестве $F(A) \setminus W$;*
- 2) *равномерно рекуррентные слова определяют в полугруппе $F(A)$ \mathcal{J} -классы, состоящие из регулярных элементов;*
- 3) *если $w \in {}^*W$ является равномерно рекуррентным словом, то для любого $v \in \mathcal{J}(w)$ найдется подслово u слова w , такое что $u \equiv v(\mathcal{H})$ для отношения Грина $\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$;*
- 4) *для бесконечного слова $w \in {}^*W$ множество $F(w)$ в том и только том случае будет рациональным, если w является равномерно рекуррентным периодическим словом, т.е. $w \equiv u^n(\mathcal{J})$ для некоторого $u \in W$ и $n \in {}^*\mathbf{N}$.*

Полученные результаты применяются в теории псевдомногообразий для аксиоматизации нестандартными тождествами важных классов конечных полугрупп.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Molchanov V.A.* Nonstandard characterization of pseudovarieties // *Algebra Universalis*. 1995. Vol. 33. P. 533–547.
2. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
3. *Almeida J., Volkov M.V.* Subword complexity of profinite words and subgroups of free prosemigroups // *Intern. J. Algebra Comput.* 2006. Vol. 16. P. 221–258.
4. *Molchanov V.A.* Nonstandard free objects over pseudovarieties of finite algebraic systems // *Contributions to General Algebra 16, Proceedings of the Dresden Conference 2004 (AAA68) and the Summer School 2004*, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 2005. P. 145–154.
5. *Almeida J.* Profinite groups associated with weakly primitive substitutions // *J. Mathematical Sciences*. 2007. Vol. 144, № 2. P. 3881–3903.

В.Е. Новиков

РЕШЁТКА КОНЦЕПТОВ В ОДНОЗНАЧНОМ
КОНТЕКСТЕ

В статье продолжено описание свойств решётки концептов в однозначном контексте в рамках исследования влияния функциональных зависимостей на структуру формальных концептов, которое было начато в [1, 2].

Восстановим некоторые определения концептуального анализа [3], обобщая их на контексте с n -арным отношением с помощью аппарата алгебры отношений В.В. Вагнера [4]. Будем говорить, что задан формальный контекст $\mathbb{K} = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$, если задано n -арное отношение $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ и выделено $M_{\bar{i}_s}, \bar{i}_s \subseteq \bar{n}$, множество объектов. Также говорим, что на контексте $\mathbb{K} = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$ имеет место F -зависимость $M_{\bar{i}_s} \rightarrow M_{\bar{n}}$ [1], если оператор выбора $\sigma_{\{a_{\bar{i}_s}\}}(\rho)$ генерирует отображение $\pi_{\bar{i}_s} \rightarrow \rho$. В этом случае также говорим, что контекст \mathbb{K} *однозначен относительно множества объектов*, или просто *однозначный контекст*.

Далее, если для подмножества объектов $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$ выполняется равенство $X = \widehat{\rho_{\bar{i}_s \bar{j}_k}}(X)$, то X называется \bar{i}_s -*концептом по \bar{j}_k* . Любое подмножество $Y \subseteq M_{\bar{j}_k}, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, для которого $\widehat{\rho_{\bar{i}_s}}(Y) = X$ называется \bar{j}_k -*генератором \bar{i}_s -концепта X* . В этом случае элементы множества X будем называть *объектами*, а элементы множества Y — атрибутами \bar{i}_s -концепта X по \bar{j}_k , при этом также \bar{j}_k называем *индексом генератора или атрибута*.

Теорема 1. *Если $\mathbb{K} = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$ однозначный контекст, то множество \bar{i}_s -концептов, упорядоченное отношением включения, образует полную решётку, которую обозначим $L(\mathbb{K})$.*

По свойствам дуального среза [3] в множестве всех \bar{i}_s -концептов всегда присутствуют \emptyset и $M_{\bar{i}_s}$. Отличные от этих множеств \bar{i}_s -концепты будем называть *собственными*.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{K} = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$ — однозначный контекст. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Множество собственных \bar{i}_s -концептов по $\bar{j}_k, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, образует разбиение множества $\pi_{\bar{i}_s}(\rho)$, которое в дальнейшем обозначаем $\pi_{\bar{i}_s}(\rho)/\bar{j}_k$;*

2) *Если $\bar{l}_q \subseteq \bar{j}_p \subseteq \bar{n}$, то $\pi_{\bar{i}_s}(\rho)/\bar{j}_p$ является подразбиением разбиения $\pi_{\bar{i}_s}(\rho)/\bar{l}_q$;*

3) Пусть $X^p, X^q \subseteq M_{\bar{i}_s}$ — два собственных \bar{i}_s -концепта по \bar{j}_p и \bar{l}_q соответственно, $\bar{l}_q, \bar{j}_p \subseteq \bar{n}$, и $y_{\bar{j}_p}, y_{\bar{l}_q}$ — их генераторы максимального индекса, тогда $y_{\bar{l}_q} \subseteq y_{\bar{j}_p}$ в том и только том случае, если $X^p \subseteq X^q$;

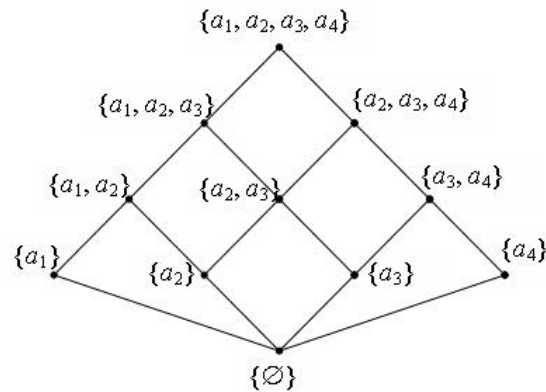
4) Если \bar{i}_s -концепт X в решётке концептов $L(\mathbb{K})$ не является атомом, то X покрывает не менее двух \bar{i}_s -концептов этого отношения;

5) Высота решётки $L(\mathbb{K})$ не превосходит $\min\{n + 1, |\pi_{\bar{i}_s}(\rho)|\}$, а её ширина равна $|\pi_{\bar{i}_s}(\rho)|$.

Проиллюстрируем все пять утверждений теоремы 2. Для этого рассмотрим контекст $\mathbb{K} = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$, где ρ задано таблицей, $n = 4$, $M_{\bar{i}_s} = M_1$.

M_1	M_2	M_3	M_4
a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	b_2	c_1	d_1
a_3	b_2	c_2	d_1
a_4	b_2	c_2	d_2

Найдём собственные концепты этого контекста. По индексу атрибута (2) (см. столбец атрибута M_2) получаем разбиение множества объектов M_1 на концепты $\{a_1\}$ и $\{a_2, a_3, a_4\}$. По индексу атрибута (3) получаем разбиение M_1 на концепты $\{a_1, a_2\}$ и $\{a_3, a_4\}$; по индексу атрибута (4) — на концепты $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{a_4\}$; по индексу атрибута (2, 3) — на концепты $\{a_1\}$, $\{a_2\}$ и $\{a_3, a_4\}$; по индексу атрибута (3, 4) — на концепты $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3\}$ и $\{a_4\}$; по индексу атрибута (2, 4) — на концепты $\{a_1\}$, $\{a_2, a_3\}$ и $\{a_4\}$; по индексу атрибута (2, 3, 4) — на концепты $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$ и $\{a_4\}$. Теперь легко изобразить решётку концептов контекста \mathbb{K} (рисунок).



Для примера второго утверждения теоремы 2 рассмотрим индексы атрибутов (3) \subset (2, 3). Действительно, по индексу атрибута (2, 3) мы

получили разбиение $\pi_1(\rho)/(2,3) = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3, a_4\}\}$, которое является подразбиением разбиения $\pi_1(\rho)/(3) = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}\}$ по индексу атрибута (3).

Для иллюстрации третьего утверждения рассмотрим концепты $\{a_3, a_4\}$ и $\{a_2, a_3, a_4\}$, поскольку $\{a_3, a_4\} \subset \{a_2, a_3, a_4\}$. Найдём их генераторы максимального индекса. Для концепта $\{a_3, a_4\}$ генераторами являются (c_2) и (b_2, c_2) , где (b_2, c_2) будет генератором максимального индекса. Для концепта $\{a_2, a_3, a_4\}$ единственным генератором является (b_2) , он же максимального индекса. При этом выполняется включение $(b_2, c_2) \supset (b_2)$, выражающее отношение Галуа между концептами и их генераторами максимального индекса в однозначном контексте. Третье утверждение отражает частный случай закона обратного соотношения содержания и объёма понятий в классической логике.

Четвёртое утверждение теоремы 2 иллюстрируется непосредственно рисунком, на котором хорошо видно, что каждый неатомный концепт покрывает ровно два концепта, т.е. каждый элемент решётки $L(\mathbb{K})$, не являющийся атомом, покрывает не менее двух элементов этой решётки.

Пятое утверждение проверяется простым подсчётом $|\pi_1(\rho)| = |\{a_1, a_2, a_3, a_4\}| = 4$. Следовательно, высота этой решётки равна $\min\{4 + 1, 4\} = 4$; ширина равна 4, что также отражено на рисунке.

Таким образом, только по внешнему виду отношения (см. таблицу) в однозначном контексте мы можем иметь некоторые представления о решётке концептов этого контекста, например, о её высоте или ширине.

Теорема 1 показывает, что функциональная зависимость между объектами и атрибутами является достаточным условием, чтобы упорядоченное множество концептов контекста с n -арным отношением являлось решёткой. Этот факт находит отражение в разных классификациях по базам данных с ключом. А из рассмотренного примера видно, что в общем случае решётка $L(\mathbb{K})$ не является модулярной, поскольку содержит подрешётку, изоморфную пентагону, например $\{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \{a_1\}, \{\emptyset\}\}$. А следовательно, не является и дистрибутивной.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков В.Е. Концепты и функциональные зависимости // Математика. Механика: сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 68–70.
2. Новиков В.Е. Функциональные зависимости в формальном контексте // Математика. Механика: сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 53–55.
3. Ganter B., Wille R. Formal Concept Analysis. Mathematical Foundatoinns. Berlin: Springer Verlag, 1999.

А.А. Орел

ФАНТОМНЫЕ ТИПЫ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОРЯДКА

В работе [1] рассмотрена технология функционального программирования на языке Haskell, основанная на применении так называемых фантомных типов (phantom types), построенных на основе отношения эквивалентности между типами. Фантомные типы определяются [2] как типы данных, применяемые только для того, чтобы создавать другие типы данных, при этом их значения никогда не используются.

В данной статье предлагается при конструировании фантомных типов в ряде случаев использовать отношение предпорядка, которое проще реализуется средствами языка Haskell, чем отношение эквивалентности.

Для иллюстрации применения этого отношения рассмотрим задачу построения интерпретатора для простого языка выражений, предложенного в работе [3]. Выражения этого языка должны представлять операции сложения целых чисел, конъюнкции и условные операторы, а также удовлетворять требованию статического контроля типов. Следующий алгебраический тип данных `Exp` на языке Haskell дает представление синтаксиса этих выражений.

```
data Exp = LitInt Int
         | LitBool Bool
         | Plus Exp Exp
         | And Exp Exp
         | If Exp Exp Exp
```

Проблема, связанная с данным представлением, состоит в том, что формальные параметры выражений не содержат информацию о типе. Таким образом, статический контроль типов успешно пройдут выражения вида

```
Plus(LitInt 3)(LitBool False)
```

Однако в процессе выполнения программы будет обнаружена ошибка несоответствия типов.

Решить проблему можно с помощью расслоения грамматики выражений так, чтобы она отражала информацию об используемых типах данных. Однако расслоение грамматики влечет за собой функциональное расслоение программы, которое, в свою очередь, приводит к большому количеству почти повторяющегося кода, что недопустимо с технологической точки зрения. В работе [3] для решения данной проблемы предложено использовать в определении `Exp` фантомный типовой параметр `a`, назначение которого состоит в том, чтобы аннотировать тип `Exp` на уровне мета описаний. В этом случае модифицированное определение `Exp` принимает вид

```
data Exp a = Lit a
           | Plus (Exp a) (Exp a)
           | And (Exp a) (Exp a)
           | If (Exp a) (Exp a) (Exp a)
```

Построенный тип позволяет решить проблему статического контроля типов выражений с помощью определения функций вида

```
plus :: Exp Int -> Exp Int -> Exp Int
plus = Plus
```

Однако не удастся создать универсальный интерпретатор выражений, подобный следующему:

```
evalExp :: Exp a -> a
evalExp (Lit i) = i
evalExp (Plus x y) = evalExp x + evalExp y
evalExp (And x y) = evalExp x && evalExp y
evalExp (If c t e) = if(evalExp c) then (evalExp t)
                    else (evalExp e)
```

При компиляции этих выражений система контроля типов Haskell сообщает о невозможности совместить тип переменной `a` с базовыми типами `Int` или `Bool`.

Решить возникшую проблему можно, включив в определение типа `Exp` выражение, требующее при выборе варианта конструктора данных использовать только определенное значение параметра типа. Таким выражением может быть конструктор типа реализующий отношение эквивалентности между типами. В данном случае, однако, можно использовать реализацию более простого отношения, а именно отношения предпорядка. Выбрав в качестве соответствующего конструктора типа стандартный конструктор функциональной зависимости `(->)`, получим модифицированное определение типа `Exp`:

```

data Exp a = Lit          a
           | Plus (Int -> a) (Exp Int) (Exp Int)
           | And  (Bool -> a) (Exp Bool) (Exp Bool)
           | If   (Exp Bool) (Exp a)   (Exp a)

```

Поскольку отношение предпорядка не симметрично, следует определить правило выбора позиций типовых аргументов. Будем всегда выбирать в качестве первого аргумента более ограниченный тип данных, чем в качестве второго аргумента. Например, правильным будет выбор `Int -> a`, а не `a -> Int`. Заметим, что первая конструкция в отличие от второй представляет фантомный тип, поскольку сигнатуру `Int -> a` может иметь только всюду неопределенная функция. Свойство рефлексивности будем моделировать с помощью тождественной функции `id`, а свойство транзитивности с помощью операции композиции `(.)`. Необходимо определить также правило замены выражений, содержащих модифицированные конструкторы данных. Считая, что отношение предпорядка задает первый параметр в определении модифицированного конструктора данных `C`, и, обозначив реализующую его функцию как `p`, будем заменять выражение

$$f (C p_1, \dots p_n) = e$$

на

$$f (C p, p_1, \dots p_n) = p e$$

Данное правило полностью согласуется с правилом модификации выражений, использующих параметр, реализующий отношение эквивалентности (см. [1]).

Применяя рассмотренные процедуры для модификации функции сложения и для интерпретатора выражений типа `Exp`, получим

```

plus :: Exp Int -> Exp Int -> Exp Int
plus = Plus id

```

и

```

evalExp :: Exp a -> a
evalExp (Lit i)      = i
evalExp (Plus f x y) = f $ evalExp x + evalExp y
evalExp (And f x y)  = f $ evalExp x && evalExp y
evalExp (If c t e)   = if (evalExp c) then (evalExp t)
                       else (evalExp e)

```

В результате могут быть вычислены выражения, подобные следующему:


```
evalExp (plus (Lit (1 :: Int)) (Lit (2 :: Int)))
```

В то же время выражения вида

```
plus (Lit (1 :: Int)) (Lit True)
```

не пройдут статического контроля типов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hinze R.* Fun with phantom types // The Fun of Programming, Cornerstones in Computing. Palgrave, 2003. P. 245–262.
2. http://www.haskell.org/haskellwiki/Phantom_type
3. <http://babel.ls.fi.upm.es/~pablo/Papers/Notes/GADTs.html>

УДК 517.95

Д.В. Поплавский

О НЕЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ МАТРИЦЫ ВЕЙЛЯ СОГЛАСНО НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КДФ

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t + 2u_x(3u^2 + v^2) + 4uvv_x + u_{xxx} = 0, \\ v_t + 2v_x(3v^2 + u^2) + 4vuu_x + v_{xxx} = 0, \quad x \geq 0, t \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u_1(t), & u_x(0, t) = u_2(t), & u_{xx}(0, t) = u_3(t), \\ v(0, t) = v_1(t), & v_x(0, t) = v_2(t), & v_{xx}(0, t) = v_3(t). \end{cases} \quad (3)$$

где $u_k, v_k, k = \overline{0, 3}$, – непрерывные комплекснозначные функции ($u_0(x), v_0(x) \in L(0, \infty)$, $u_0(0) = u_1(0)$, $v_0(0) = v_1(0)$). Известно, что система (1) допускает эквивалентное представление нулевой кривизны [1], что дает возможность для нахождения ее решения применить метод обратной спектральной задачи [2], в котором нелинейная задача (1)–(3) сводится к обратной спектральной задаче на полуоси для дифференциальной системы с кратными корнями характеристического многочлена [3]. При этом соответствующей спектральной характеристикой выступает матрица Вейля. В [2] получены эволюционные уравнения на элементы матрицы Вейля и алгоритм решения задачи (1)–(3). То обстоятельство, что данные уравнения носят нелинейный характер, в определенной степени затрудняет реализацию метода обратной спектральной задачи именно в случае «полуоси». В настоящей статье приводится один

из возможных способов получения решения указанных эволюционных уравнений с представлением такого решения явными формулами, позволяющими свести нелинейную задачу к линейной [4].

Пусть $(u(x, t), v(x, t))$ – решение задачи (1)–(3). При фиксированных $t \geq 0$ рассмотрим дифференциальную систему:

$$Y' - P(x, t)Y = \lambda P_0 Y, \quad x \geq 0, \quad (4)$$

где

$$P = i \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ u & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = -i, \quad \beta_2 = i.$$

В комплексной плоскости спектрального параметра λ определим сектора $S_0 = \{\lambda : \operatorname{Re}(\lambda\beta_1) < \operatorname{Re}(\lambda\beta_2)\}$ и $S_1 = \{\lambda : \operatorname{Re}(\lambda\beta_2) < \operatorname{Re}(\lambda\beta_1)\}$. Обозначим $\Phi(x, t, \lambda) = (\Phi_1(x, t, \lambda), \Phi_2(x, t, \lambda), \Phi_3(x, t, \lambda)) := [\Phi_{j,k}(x, t, \lambda)]_{j,k=\overline{1,3}}$, где $\Phi_k(x, t, \lambda)$, $k = \overline{1,3}$, – решения (4), удовлетворяющие следующим условиям: а) при $\lambda \in S_0$: $\Phi_{11}(0, t, \lambda) = 1$, $\Phi_1(x, t, \lambda) = O(e^{\lambda\beta_1 x})$, $x \rightarrow \infty$; $\Phi_{12}(0, t, \lambda) = \Phi_{32}(0, t, \lambda) = 0$, $\Phi_{22}(0, t, \lambda) = 1$; $\Phi_{13}(0, t, \lambda) = \Phi_{23}(0, t, \lambda) = 0$, $\Phi_{33}(0, t, \lambda) = 1$; б) при $\lambda \in S_1$: $\Phi_{11}(0, t, \lambda) = 1$, $\Phi_{21}(0, t, \lambda) = 0$, $\Phi_1(x, t, \lambda) = O(e^{\lambda\beta_2 x})$, $x \rightarrow \infty$; $\Phi_{12}(0, t, \lambda) = 0$, $\Phi_{22}(0, t, \lambda) = 1$, $\Phi_2(x, t, \lambda) = O(e^{\lambda\beta_2 x})$, $x \rightarrow \infty$; $\Phi_{13}(0, t, \lambda) = \Phi_{23}(0, t, \lambda) = 0$, $\Phi_{33}(0, t, \lambda) = 1$.

Определим матрицу $M(t, \lambda)$ следующим образом:

а) при $\lambda \in S_0$:

$$M(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M_{21}(t, \lambda) & 1 & 0 \\ M_{31}(t, \lambda) & 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Phi_{21}(0, t, \lambda) & 1 & 0 \\ \Phi_{31}(0, t, \lambda) & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б) при $\lambda \in S_1$:

$$M(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ M_{31}(t, \lambda) & M_{32}(t, \lambda) & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Phi_{31}(0, t, \lambda) & \Phi_{32}(0, t, \lambda) & 1 \end{pmatrix}.$$

Решения $\Phi_k(x, t, \lambda)$ называются решениями Вейля. Матрица $M(t, \lambda)$ – матрицей Вейля системы (4).

Определим также $M^0(\lambda) = [M_{jk}^0(\lambda)]_{j,k=\overline{1,3}} := [M_{jk}(0, \lambda)]_{j,k=\overline{1,3}}$ (матрица Вейля для начальных условий $\{u_0(x), v_0(x)\}$), $w_1 = \lambda^2 - \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2)$ и

$$F^0(t, \lambda) = [F_{ij}^0(t, \lambda)]_{i,j=\overline{1,3}} =$$

$$= 4i \begin{pmatrix} -\lambda w_1 & u_1 w_1 + \frac{1}{2}i\lambda u_2 - \frac{1}{4}u_3 & v_1 w_1 + \frac{1}{2}i\lambda v_2 - \frac{1}{4}v_3 \\ u_1 w_1 - \frac{1}{2}i\lambda u_2 - \frac{1}{4}u_3 & \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{2}u_1^2) & -\frac{1}{2}\lambda u_1 v_1 \\ v_1 w_1 - \frac{1}{2}i\lambda v_2 - \frac{1}{4}v_3 & -\frac{1}{2}\lambda u_1 v_1 & \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{2}v_1^2) \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Положим:*

$$a) \text{ при } \lambda \in S_0: \quad Z = \begin{pmatrix} M_{21} \\ M_{31} \end{pmatrix}, \quad Z^0 = \begin{pmatrix} M_{21}^0 \\ M_{31}^0 \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} F_{21}^0 \\ F_{31}^0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{22} = \begin{pmatrix} F_{22}^0 - F_{11}^0 & F_{23}^0 \\ F_{32}^0 & F_{33}^0 - F_{11}^0 \end{pmatrix}, \quad Q_{12} = (-F_{12}^0, -F_{13}^0);$$

$$б) \text{ при } \lambda \in S_1: \quad Z = \begin{pmatrix} M_{31} \\ M_{32} \end{pmatrix}, \quad Z^0 = \begin{pmatrix} M_{31}^0 \\ M_{32}^0 \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} F_{31}^0 \\ F_{32}^0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{22} = \begin{pmatrix} F_{33}^0 - F_{11}^0 & -F_{21}^0 \\ -F_{12}^0 & F_{33}^0 - F_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad Q_{12} = (-F_{13}^0, -F_{23}^0),$$

тогда $Z(t, \lambda)$ при $\lambda \in S_0 \vee S_1$ удовлетворяет следующей задаче Коши для нелинейного матричного уравнения Риккати:

$$\dot{Z} = Q_{21}(t) + Q_{22}(t)Z - ZQ_{12}(t)Z, \quad Z(0, \lambda) = Z^0(\lambda). \quad (5)$$

В силу леммы Радона решение задачи (5) может быть представлено в следующем виде:

$$Z(t, \lambda) = Y(t, \lambda)(X(t, \lambda))^{-1},$$

где $(X(t, \lambda), Y(t, \lambda))$ — решение задачи Коши для линейной системы

$$\begin{cases} \dot{X} = Q_{12}Y, & X(0, \lambda) = 1, \\ \dot{Y} = Q_{21}X + Q_{22}Y, & Y(0, \lambda) = Z^0(\lambda). \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наянов В.И.* Многополевые солитоны. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
2. *Поплавский Д.В.* Метод обратной спектральной задачи для векторного модифицированного уравнения КдФ на полуоси // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 108–111.
3. *Yurko V.A.* An inverse spectral problem for differential systems on the half-line with multiplied roots of characteristic polynomial // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2005. Vol. 13, № 5. С. 503–512.
4. *Поплавский Д.В.* Прямые и обратные задачи спектрального анализа и их приложения к нелинейным эволюционным операторам: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2006. 116 с.

Е.В. Разумовская

ОБ ОДНОЛИСТНОСТИ ОДНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $\Pi = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $\Omega = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, f — конформное отображение Π в себя. Угловыми производными f в бесконечно удаленных точках Π называются $c^\pm(f) = \lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty} (z - f(z))$, $z \in \Pi_\alpha = \{z : \alpha < \operatorname{Im} z < (1 - \alpha)\pi\}$, $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$. Совокупность всех конформных отображений $f : \Pi \rightarrow \Pi$ с $c^\pm(f) < \infty$ обозначают \mathcal{I} , а через \mathcal{I}_0 обозначают подмножество f из \mathcal{I} , которые, оставляя инвариантной вещественную ось, аналитически продолжаются через неё в полосу Ω с $f(0) = 0$.

В работе [1] получен полный аналог уравнения Лёвнера для конформных отображений полосы, причём в данной конструкции, как и в классической конструкции Лёвнера, присутствует «стирание» разреза. Однако, в отличие от классического случая, когда параметризация связана с конформным радиусом переменной области, здесь временной параметр выбран как разность $\gamma(f) = c^+(f) - c^-(f)$ с целью сохранения граничных условий. А именно, если Γ_t — жорданова кривая в Π : $\xi = \psi(s)$, $t \leq s \leq T$, $\operatorname{Im} \psi(T) = \pi$, $0 \leq t \leq T$, $D_t = \Pi \setminus \Gamma_t$, то семейство отображений $g_t : \Pi \rightarrow D_t$, $g_t \in \mathcal{I}_0$ с $\gamma(g_t) = T - t$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{\partial}{\partial z} g_t(z) \frac{e^z - 1}{e^z + e^{k(t)}} \cdot \frac{1}{1 + e^{-k(t)}},$$

$$g_t(z)|_{t=T} \equiv z,$$

где $k(t)$ — непрерывная вещественнозначная функция и $g_t^{-1}(\psi(t)) = k(t) + i\pi$.

Рассмотрим вопрос об однолиственности этого семейства отображений.

Введем цепь подчинения:

$$w(z, t) = \exp(g_t(\log z)), \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

функций, отображающих верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость с разрезом по жордановой кривой $L(t) : 0 \leq t \leq t_0$, $\operatorname{Im} L(t_0) = 0$, причем выбираем ветвь логарифма, дающую Π . В такой конструкции сохраняется «гидродинамическая» нормировка:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (w(z, t) - z) = 0,$$

обеспеченная конечностью угловой производной $c^+(f) = \lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty} (z - g_t(z))$ с дополнительным условием — «стягиванием» к нулю верхней полукрестности $z = 0$, вызываемым конечностью $c^-(f) = \lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty} (z - g_t(z))$.

Используем условие однолиственности производящей функции для полуплоскости:

$$\operatorname{Im} \frac{\frac{\partial w}{\partial z}(z, t)}{\frac{\partial w}{\partial t}(z, t)} > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

В нашем случае оно эквивалентно условию

$$e^{k(t)} > \frac{|z|^2}{1 - 2\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}.$$

Обозначив $e^{k(t)} = A$, получаем в Π область Π_A , ограниченную $w_1^{(1)} = \log(\sqrt{A^2 + Ae^{i\varphi}} - A)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; $w_1^{(2)} = t + i \cdot 0$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2 + A} - A)$; $w_1^{(3)} = t + i\pi$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2 + A} + A)$, которая однолистно отображается g_t на часть D_t , так как в цепи подчинения остальные (за исключением g_t) отображения обладали свойством однолиственности.

Таким образом, получили теорему:

Теорема. *Для отображения g_t существует область $\Pi_A \subset \Pi$, отображаемая g_t однолистно. Эта область ограничена следующими кривыми: $w_1^{(1)} = \log(\sqrt{A^2 + Ae^{i\varphi}} - A)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; $w_1^{(2)} = t + i \cdot 0$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2 + A} - A)$; $w_1^{(3)} = t + i\pi$, $-\infty < t < \log(\sqrt{A^2 + A} + A)$, где $A = e^{k(t)}$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дубовиков Д.А. Аналог уравнений Лёвнера для отображений полос // Изв. вузов. Сер. Математика. 2007. № 8(543). С. 77–80.

УДК 517.51

Е.В. Разумовская, В.Г. Тимофеев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В [1] для класса функций $u \in C(R^n)$, $n \geq 2$, оператор Лапласа которых $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ принадлежит пространству $L_\infty(R^n)$ и

понимается в обобщенном, по Соболеву, смысле, получено интегральное представление:

$$u(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\partial\Pi_h} u(\xi) \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi} d\xi - \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\Pi_h} \Delta u(\xi) G(\xi, x) d\xi,$$

где $h > 0$, $\Pi_h = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n : -h < \xi_1 < h, -\infty < \xi_i < \infty, i = \overline{2, n}\}$ — слой в R^n , $x \in \Pi_h$, а $G(\xi, x)$ — функция Грина этого слоя [2], которое позволило ввести понятие гармонической, субгармонической и полигармонической функций порядка n в слое Π_h , а именно функция $u(x)$ считается полигармонической порядка n в Π_h , если для любой области $D : \overline{D} \subset \Pi_h$, для всех точек x выражение

$$\Delta_h u(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\partial\Pi_h} u(\xi) \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi} d\xi - u(x)$$

представляет собой полигармоническую функцию порядка $n - 1$. Следуя [3], определим субгармоническую функцию условием $\Delta_h u(x) \geq 0$.

В [1, 2] доказаны важные для практического использования свойства введенных функций. С точки зрения субгармонических функций является интересным рассмотрение среди них подклассов полигармонических функций порядка $n \geq 2$. Обозначим классы субгармонических функций, являющихся и полигармоническими порядка n , символом [4]

$$\{S \underbrace{\Gamma \Gamma \dots \Gamma}_{n \text{ раз}}\}. \quad (1)$$

Определим эти классы интегральным условием: $\Delta_h u \geq 0$ есть полигармоническая функция порядка $n - 1$.

Для таким образом определенных функций справедливы, в частности, следующие теоремы.

Теорема 1. *Если семейство функций (1) в области $D \subset \Pi_h$ равномерно ограничено внутри D , то оно компактно внутри D .*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Для $n = 1$ доказательство приведено в [3]. Семейство $\Delta_h u(x)$ субгармонических функций, принадлежащих $\{S \underbrace{\Gamma \Gamma \dots \Gamma}_{(n-1) \text{ раз}}\}$, будучи

равномерно ограниченным в $D' \subset D$, $\overline{D'} \subset D$, будет компактным по предположенному в D' , а следовательно, существует последовательность

$\{\Delta_h u_k(x)\}$, равномерно сходящихся внутри D' к функции класса $\{S \underbrace{\Gamma \Gamma \dots \Gamma}_{(n-1) \text{ раз}}\}$. С другой стороны, последовательность

$$\left\{ -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\partial\Pi_h} u_k(\xi) \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi} d\xi \right\}$$

ограничена в совокупности в области D' и равномерно непрерывна в ней. По теореме Арцела существует равномерно сходящаяся в D' подпоследовательность

$$\left\{ -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\partial\Pi_h} u_{k'}(\xi) \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi} d\xi \right\}.$$

Тогда последовательность функций

$$u_{k'}(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\partial\Pi_h} u_{k'}(\xi) \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi} d\xi - \Delta_h u_{k'}(x)$$

будет равномерно сходиться внутри D' , причем в силу теорем сравнения и равномерной сходимости последовательности предельная функция будет принадлежать (1). Чтобы исключить зависимость выделенной последовательности от множества D' , применим диагональный процесс, результатом которого является утверждение о равномерной сходимости последовательности внутри D .

Аналогично доказывается и нижеследующая теорема.

Теорема 2. *Если последовательность функций $u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x), \dots$ принадлежит классу (1) в области D и равномерно ограничена внутри D ; если эта последовательность сходится на некоторой частичной области $d, \bar{d} \subset D$, то она сходится всюду в области D к функции класса (1), причем равномерно внутри D .*

Если рассмотреть частный класс субгармонических функций $\{S\Gamma\Gamma\}$, то для него условие компактности может быть сформулировано в следующем виде.

Теорема 3. *Если семейство функций $\{u(x)\}$ принадлежит классу $\{S\Gamma\Gamma\}$ в области $D \subset \Pi_h$, равномерно ограничено сверху внутри D , то оно нормальное внутри D .*

Понятие нормального семейства и схема доказательства приведены в [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Разумовская Е.В., Тимофеев В.Г.* О функциях, полигармонических в слое // Математика. Механика: сб науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 101–104.
2. *Тимофеев В.Г.* Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676–689.
3. *Привалов И.И.* Субгармонические функции. М.: Глав. ред. техн.-теорет. лит., 1937.
4. *Привалов И., Пчелин Б.* К общей теории полигармонических функций // Мат. сб. 1937. Т. 2(44), № 4. С. 745–758.

УДК 519. 83

В.В. Розен

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ БАЛАНСОВОЙ ПАРЫ ВЕКТОРОВ

В работе [1] показано, что для конечной игры двух игроков с упорядоченными исходами нахождение ее ситуаций равновесия по Нэшу сводится к нахождению сбалансированных подматриц ее функции реализации и балансовых векторов этих подматриц. Здесь мы даем ответ на вопрос, при каких условиях сбалансированная матрица имеет единственную пару балансовых векторов. Основным результатом статьи является теорема 2. Введем вначале ряд определений и предварительных результатов, доказательства которых мы опускаем.

Матрица M формата $m \times n$ над конечным множеством A рассматривается как отображение $F: I \times J \rightarrow A$, где $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$ ($m, n \geq 2$), причем $pr_2 F = A$. Обозначим через S_m^* и S_n^* стандартные симплексы m и n -мерных векторов с положительными компонентами. Для $x \in S_m^*$, $y \in S_n^*$, $a \in A$ полагаем

$$F_{(x,y)}(a) = \sum_{\substack{F(i,j)=a \\ (i,j) \in I \times J}} x_i \cdot y_j.$$

Определение. Матрица M называется *сбалансированной*, если существуют такие векторы $x \in S_m^*$, $y \in S_n^*$, что при любых $i \in I$, $j \in J$, $a \in A$ выполняется

$$F_{(i,y)}(a) = F_{(x,j)}(a).$$

При этом пара (x, y) называется *балансовой парой векторов* данной матрицы. Назовем вектор $x = (x_1, \dots, x_m) \in S_m^*$ *строчным балансовым*

вектором матрицы M , если при любом $a \in A$ для всех $j_1, j_2 \in J$ имеет место

$$F_{(x,j_1)}(a) = F_{(x,j_2)}(a).$$

Двойственно определяется столбцовый балансовый вектор.

Лемма 1. Для того чтобы пара векторов $(x, y) \in S_m^* \times S_n^*$ была балансовой парой векторов матрицы M , необходимо и достаточно, чтобы x был ее строчным балансовым вектором, а y – столбцовым балансовым вектором.

Напомним понятие сбалансированного покрытия. Пусть E – произвольное множество. Покрытие (E_1, \dots, E_k) множества E называется сбалансированным [2], если существует такой вектор с положительными компонентами $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, что для любого $e \in E$ имеет место

$$\sum_{e \in E_s} \lambda_s = 1.$$

При этом вектор λ называется репрезентативным вектором данного покрытия.

Лемма 2. Сбалансированное покрытие (E_1, \dots, E_k) множества E имеет единственный репрезентативный вектор тогда и только тогда, когда система характеристических векторов $(\chi(E_1), \dots, \chi(E_k))$ линейно независима.

Рассмотрим при фиксированном $a \in A$ семейство множеств $(T_i^a)_{i \in I}$, где $T_i^a = \{j \in J : F(i, j) = a\}$.

Лемма 3. Пусть $x = (x_1, \dots, x_m) \in S_m^*$ – строчный балансовый вектор сбалансированной матрицы M . Положим для $i = 1, \dots, m$

$$\lambda_i^a = \frac{x_i}{\mu(a)},$$

где $\mu(a) = F_{(x,j_1)}(a) = \dots = F_{(x,j_n)}(a)$. Тогда семейство подмножеств $(T_i^a)_{i \in I}$ образует сбалансированное покрытие множества J , причем вектор $\lambda^a = (\lambda_i^a)_{i \in I}$ является репрезентативным вектором этого покрытия.

Установим теперь следующий результат.

Теорема 1. Для сбалансированной матрицы M над множеством A следующие условия эквивалентны:

1. Матрица M имеет единственный строчный балансовый вектор;
2. При любом $a \in A$ система характеристических векторов $(\chi(T_1^a), \dots, \chi(T_m^a))$ линейно независима;
3. При некотором $a^* \in A$ система характеристических векторов $(\chi(T_1^{a^*}), \dots, \chi(T_m^{a^*}))$ линейно независима.

Доказательство

1 \Rightarrow 2. Зафиксируем $a \in A$. По лемме 3 система множеств (T_1^a, \dots, T_m^a) образует сбалансированное покрытие множества J . Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ – репрезентативные векторы этого сбалансированного покрытия. Рассмотрим векторы $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$, где

$$x_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{s=1}^m \lambda_s}, \quad x'_i = \frac{\lambda'_i}{\sum_{s=1}^m \lambda'_s}.$$

Непосредственно проверяется, что векторы x и x' являются строчными балансовыми векторами матрицы M . По условию 1 получаем $x = x'$, т.е. для всех $i \in I$

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{s=1}^m \lambda_s} = \frac{\lambda'_i}{\sum_{s=1}^m \lambda'_s},$$

откуда $\lambda_i = k\lambda'_i$ ($i \in I$), где k – некоторая константа. Зафиксируем произвольно $j_0 \in J$. По определению сбалансированного покрытия имеем:

$$1 = \sum_{j_0 \in T_i^a} \lambda_i = \sum_{j_0 \in T_i^a} k\lambda'_i = k \sum_{j_0 \in T_i^a} \lambda'_i = k,$$

откуда $k = 1$ и $\lambda_i = \lambda'_i$. Таким образом, сбалансированное покрытие имеет единственный репрезентативный вектор, и по лемме 2 система характеристических векторов $(\chi(T_1^a), \dots, \chi(T_m^a))$ линейно независима.

Импликация 2 \Rightarrow 3 очевидна. Покажем импликацию 3 \Rightarrow 1. Предположим, что при некотором $a^* \in A$ система характеристических векторов $(\chi(T_1^{a^*}), \dots, \chi(T_m^{a^*}))$ линейно независима. Пусть $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ и $x'' = (x''_1, \dots, x''_m)$ – строчные балансовые векторы матрицы M . По лемме 3 векторы λ' и λ'' , где

$$\lambda'_i = \frac{x'_i}{\mu(a^*)}, \quad \lambda''_i = \frac{x''_i}{\mu(a^*)},$$

являются репрезентативными векторами сбалансированного покрытия $(T_1^{a^*}, \dots, T_m^{a^*})$. С учетом линейной независимости системы характеристических векторов по лемме 2 получаем $\lambda' = \lambda''$, откуда $x' = x''$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 и двойственного ей утверждения следует, что сбалансированная матрица, имеющая единственную пару балансовых

векторов, должна быть квадратной. В самом деле, рассмотрим при некотором $a \in A$ матрицу $\chi(M^a) = (\delta_{ij}^a)_{i \in I, j \in J}$, где

$$\delta_{ij}^a = \begin{cases} 1, & \text{если } F(i, j) = a, \\ 0, & \text{если } F(i, j) \neq a. \end{cases}$$

Строками матрицы $\chi(M^a)$ являются характеристические векторы $(\chi(T_1^a), \dots, \chi(T_m^a))$. По теореме 1 эти векторы линейно независимы, откуда $m = r$, где $r = \text{rang} \chi(M^a)$. Двойственно выполняется $n = r$, откуда $m = n$. На основании леммы 1 и теоремы 1 имеем следующий основной результат.

Теорема 2. *Для сбалансированной матрицы M следующие условия эквивалентны между собой:*

- 1) *Матрица M имеет единственную пару балансовых векторов;*
- 2) *Матрица M является квадратной и $\text{Det}(\chi(M^a)) \neq 0$ при любом $a \in A$;*
- 3) *Матрица M является квадратной и $\text{Det}(\chi(M^{a^*})) \neq 0$ при некотором $a^* \in A$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В.В., Панкратова Ю.Н. Ситуации равновесия и сбалансированные покрытия в играх с упорядоченными исходами // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 105–108.
2. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.

УДК [514.133+514.174.5]

Л.Н. Ромакина

АНАЛОГ МОЗАИКИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Гиперболическую плоскость \hat{H} положительной кривизны определим [1] как область проективной плоскости P_2 , внешнюю относительно некоторой овальной линии γ , называемой *абсолютом*. Внутренняя область относительно абсолюта, как известно, является полной плоскостью Лобачевского. Геометрия плоскости \hat{H} положительной кривизны $1/\rho^2$ может быть также реализована в псевдоевклидовом пространстве R_1^3 на сфере действительного радиуса ρ с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Отличием плоскости \hat{H} от плоскостей постоянной кривизны в смысле [2] (евклидовой R^2 , сферической S^2 и Лобачевского Λ^2) является

наличие на ней прямых трех типов: *гиперболических* (*эллиптических*), пересекающих абсолют в двух действительных (мнимо сопряженных) точках, и *параболических*, изотропных на \hat{H} , касающихся абсолютной линии.

Разбиение плоскости \hat{H} (фигуры на плоскости \hat{H}), все ребра ячеек которого принадлежат изотропным прямым, назовем *изотропным*.

При построении некоторых разбиений плоскостей R^2 , S^2 , Λ^2 ячейки разбиения удается объединить в так называемые мозаики [3]. В данной статье построим аналог мозаики в изотропном разбиении на плоскости \hat{H} . Потребуется следующие определения.

Валианой точки X плоскости \hat{H} назовем множество всех внутренних точек того угла между изотропными прямыми l_1, l_2 ($X \in l_1, X \in l_2$), который не содержит абсолютной линии. Дополнение валианы точки X до \hat{H} назовем *ковалианой* точки X . Ковалиана точки X состоит из двух связных частей, ограниченных прямыми l_1, l_2 и линией γ , каждую из которых назовем *полуковалианой* точки X .

Пусть на \hat{H} каждые две из точек A, B, C общего положения принадлежат изотропной прямой, а $K = BC \cap \gamma$. Совокупность двух отрезков AB, AC и двух лучей BK, CK назовем *3-контуром с одной бесконечно удаленной точкой*, или кратко: *3-(1)-контуром*.

Точку плоскости \hat{H} назовем *внутренней* относительно 3-(1)-контура $L = ABKC$, если она не принадлежит контуру и каждая проходящая через нее прямая пересекает *расширение* контура (множество $L \cup K$) не менее чем в двух точках.

Применяя метод, использованный в работе [4] при доказательстве теорем 1, 2, несложно доказать следующие утверждения.

1. *Внутренность 3-(1)-контура $ABKC$ с бесконечно удаленной точкой K стороны BC есть пересечение валиан точек B, C .*

2. *3-(1)-контур является выпуклым.*

В работе [4] исследованы свойства конечных замкнутых n -контуров плоскости \hat{H} как упорядоченных совокупностей отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ параболических прямых размерности $n = 3, 4$. Показано, что конечные замкнутые 3-контуры не имеют внутренних точек, а простые 4-контуры имеют один независимый инвариант относительно фундаментальной группы G плоскости \hat{H} , обладают внутренностью и являются выпуклыми.

Теорема. *На плоскости \hat{H} справедливы следующие утверждения:*

1) любые два 3-(1)-контура G -эквивалентны;

2) любые два конечных замкнутых 3-контура G -эквивалентны.

Доказательство. Пусть $Y = ABKC, Y' = A'B'K'C'$ — 3-(1)-

контуры с бесконечно удаленной точкой K , K' соответственно. Несобственные точки сторон AB , AC ($A'B'$, $A'C'$) обозначим соответственно A_1 , A_2 (A'_1 , A'_2). По основной теореме о проективных преобразованиях существует единственное проективное преобразование f плоскости P_2 , которое репер $R_0 = \{A_1, A_2, A, K\}$ переводит в репер $R'_0 = \{A'_1, A'_2, A', K'\}$. Так как вершины реперов R_0 , R'_0 образуют автополярные трехвершинники второго порядка относительно абсолютной овальной линии γ и единичные точки этих реперов принадлежат абсолютной линии, то в преобразовании f линия γ является инвариантной. Следовательно, f – преобразование группы G . Реперы R_0 , R'_0 однозначно и одинаково определяют 3-(1)-контуры Y , Y' и конечные замкнутые 3-контуры ABC , $A'B'C'$ соответственно. Поэтому преобразование f переводит контур Y в контур Y' , контур ABC в контур $A'B'C'$.

Теорема доказана.

Далее под *простым 4-контуром* и *3-(1)-контуром* будем понимать эти контуры с их внутренностями.

Каждый 3-(1)-контур можно бесконечным числом способов разбить заданным простым 4-контуром, например, отсекая от него заданный 4-контур, имеющий с ним общее конечное ребро. После отсечения получим вновь 3-(1)-контур, согласно доказанной теореме, равный данному. Неограниченно продолжая процесс, заполним данный 3-(1)-контур непересекающимися равными простыми 4-контурами.

Моноэдральное разбиение плоскости \hat{H} (фигуры плоскости \hat{H}) простым конечным замкнутым 4-контуром назовем *простым*. 3-(1)-контур с заданным на нем простым разбиением назовем *черепицей*. Разбиение плоскости \hat{H} заданной черепицей назовем *черепичным*.

Приведем пример черепичного разбиения плоскости \hat{H} .

Проведем любые три изотропные прямые AB , BC , AC . Их несобственные точки обозначим K_1 , K_2 , K_3 соответственно. Плоскость \hat{H} оказывается разбитой на 3-(1)-контуры CAK_1B , ABK_2C , BCK_3A и три полуковалианы точек A , B , C , не содержащие указанных 3-(1)-контуров. Пусть η – одна из этих полуковалиан, например, AK_1K_3 . На линии γ выберем точку K так, чтобы пара точек K , K_2 разделяла пару K_1 , K_3 , т.е. так, чтобы точка пересечения прямых KK_2 , K_1K_3 была внутренней относительно γ . Изотропная прямая k ($K \in k$) разбивает полуковалиану η на 3-(1)-контур $AK_{11}KK_{13}$ ($K_{11} = k \cap AB$, $K_{13} = k \cap AC$) и две полуковалианы точек K_{11} и K_{13} , каждую из которых также можно разбить на 3-(1)-контур и две полуковалианы, не содержащие этот контур. Продолжая неограниченно таким образом

процесс, плоскость \hat{H} разобьем на 3-(1)-контур. На каждом 3-(1)-контуре зададим определенным образом простое разбиение, превращая тем самым 3-(1)-контур в равные черепицы. Черепичное разбиение \hat{H} построено.

Таким образом, черепица плоскости \hat{H} обладает следующими свойствами: является объединением непересекающихся равных простых 4-контуров; может служить разбивающим элементом плоскости \hat{H} . Следовательно, ее можно рассматривать как некоторый аналог мозаики в изотропном разбиении на плоскости \hat{H} .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1955. 744 с.
2. *Винберг Э.Б., Шварцман О.В.* Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 29. С. 147–259.
3. *Коксетер Г.С.М., Мозер У.О. Джс.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980. 240 с.
4. *Ромакина Л.Н.* Конечные замкнутые 3(4)-контур расширенной гиперболической плоскости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 14–26.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями специальной структуры:

$$\begin{aligned} U_i(y, \lambda) &:= \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \\ U_i(y, \lambda) &:= \sum_{s+k \leq \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k \leq \varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $1 \leq l \leq n-1$.

Отметим, что краевые условия (2) в случае $2l < n$ не являются полураспадающимися.

Пусть корни $\{\omega_j\}_1^n$ характеристического уравнения

$$\sum_{s+k=n} p_{sk} \omega^k = 0$$

различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n. \quad (3)$$

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует m -кратная ($1 \leq m \leq n$) полнота системы корневых (собственных и присоединенных) функций этого пучка в пространстве $L_2[0, 1]$.

Детальное исследование вопроса об n - и m -кратной полноте и неполноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, проведено в [1].

Для рассматриваемого пучка (1), (2) с условием (3) не выполняется основное предположение [1], а именно, что существует прямая d , проходящая через начало, не содержащая ω -корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше $n-l$, а также, что краевые условия (2) являются полураспадающимися.

Для формулировки основного результата введем обозначения:

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_j^k, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}, \quad i = \overline{l+1, n}; \quad [n]_+ = \begin{cases} n, & \text{если } n \geq 0, \\ 0, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если выполняется условие (3) и*

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^l \neq 0, \quad \det(a_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i,j=l+1}^n \neq 0,$$

то система корневых функций пучка (1), (2) m -кратно полна в $L_2[0, 1]$ при $m \leq n - l$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum_{i=l+1}^n [m - 1 - \varkappa_i]_+$.

Теорема точна в следующем смысле. В [1, с. 58–62] сформулирована теорема об $(n - l + 1)$ -кратной неполноте системы корневых функций частного случая пучка вида (1), (2), краевые условия которых являются полураспадающимися и не зависят от параметра λ . Но доказательство этой теоремы, по мнению автора, настоящей статьи недостаточно убедительно. В [2] при $l = n - 1$ и $m = n - l + 1 (= 2)$ получены достаточные условия на корни $\{\omega_j\}_1^n$, при которых системы корневых функций пучков вида (1), (2) m -кратно неполны в $L_2[0, 1]$ и имеют бесконечный дефект.

В случае $l = 1$ из теоремы 1 получаем $(n - 1)$ -кратную полноту корневых функций в $L_2[0, 1]$. Что же касается n -кратной полноты, то справедлив следующий результат.

Теорема 2. Если выполняется условие (3), $l = 1$ и $a_{11} \neq 0$, то система корневых функций пучка (1), (2) n -кратно неполна в $L_2[0, 1]$ с бесконечным дефектом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагабов А.И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
2. Рыжков В.С. О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 114–117.

УДК 519.83

Т.Ф. Савина

РАВНОВЕСНЫЕ И ДОПУСТИМЫЕ ИСХОДЫ ДЛЯ КОАЛИЦИЙ В ИГРЕ С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Вопрос о сохранении оптимальных решений при переходе от одной игры с отношениями предпочтения к другой с помощью гомоморфизма был рассмотрен в работе [1]. В настоящей статье изучается переход к кооперативному аспекту игры, который связан

с образованием в игре коалиций игроков. Вводятся соответствующие принципы оптимальности для игр такого типа и условия связи между оптимальными кооперативными решениями игр, находящимися в отношении гомоморфности.

Для игры игроков $N = \{1, \dots, n\}$ с отношениями предпочтения $G = \langle (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle$ под коалицией понимается произвольное непустое подмножество $T \subseteq N$. Определим множество стратегий коалиции T в виде

$$X_T = \prod_{i \in T} X_i.$$

Отношение предпочтения коалиции T строится из отношений предпочтения входящих в нее членов. При этом в качестве минимального требования для предпочтения коалиции принимается условие

$$a_1 \stackrel{\rho_T}{\lesssim} a_2 \Rightarrow (\forall i \in T) a_1 \stackrel{\rho_i}{\lesssim} a_2. \quad (1)$$

В данной статье рассматриваются три типа определения предпочтения коалиций, удовлетворяющие условию (1).

1. Парето-согласование предпочтений игроков

$$a_1 \stackrel{\rho_T}{\lesssim} a_2 \Leftrightarrow (\forall i \in T) a_1 \stackrel{\rho_i}{\lesssim} a_2.$$

Замечание. При этом симметричная часть отношения предпочтения для коалиции T имеет вид

$$a_1 \stackrel{\rho_T}{\gtrsim} a_2 \Leftrightarrow (\forall i \in T) a_1 \stackrel{\rho_i}{\gtrsim} a_2,$$

а строгая часть определена равносильностью:

$$a_1 \stackrel{\rho_T}{<} a_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall i \in T) a_1 \stackrel{\rho_i}{\lesssim} a_2, \\ (\exists j \in T) a_1 \stackrel{\rho_j}{<} a_2. \end{cases}$$

2. Модифицированное парето-согласование предпочтений

В этом случае строгая часть имеет вид

$$a_1 \stackrel{\rho_T}{<} a_2 \Leftrightarrow (\forall i \in T) a_1 \stackrel{\rho_i}{<} a_2,$$

а симметричная часть

$$a_1 \stackrel{\rho_T}{\gtrsim} a_2 \Leftrightarrow (\forall i \in T) a_1 \stackrel{\rho_i}{\gtrsim} a_2.$$

3. Правило большинства

$$a_1 \stackrel{\rho_T}{<} a_2 \Leftrightarrow \left| \left\{ i \in T : a_1 \stackrel{\rho_i}{<} a_2 \right\} \right| > \left\lfloor \frac{T}{2} \right\rfloor.$$

Пример. Пусть в игре G трех игроков множество исходов $A = \{a, b, c, d\}$. Отношения предпочтения для каждого игрока заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_1: a \stackrel{\rho_1}{<} b, b \stackrel{\rho_1}{\approx} c, c \stackrel{\rho_1}{\approx} d, \\ \rho_2: a \stackrel{\rho_2}{\approx} b, b \stackrel{\rho_2}{\approx} c, c \stackrel{\rho_2}{<} d, \\ \rho_3: a \stackrel{\rho_3}{<} c, b \stackrel{\rho_3}{\approx} c, a \stackrel{\rho_3}{<} d. \end{aligned}$$

Тогда парето-согласование предпочтений для коалиции $T = \{1, 2\}$ имеет вид

$$\rho_T: a \stackrel{\rho_T}{\lesssim} b, b \stackrel{\rho_T}{\lesssim} c, c \stackrel{\rho_T}{\lesssim} d,$$

причем строгая часть есть $a \stackrel{\rho_T}{<} b, c \stackrel{\rho_T}{<} d$, а симметричная — $b \stackrel{\rho_T}{\approx} c$.

Модифицированное парето-согласование предпочтений для коалиции $T = \{1, 2\}$ имеет вид: строгая часть есть пустое множество, симметричная часть $b \stackrel{\rho_T}{\approx} c$.

Для коалиции, состоящей из всех игроков, т.е. для $T = \{1, 2, 3\}$, парето-согласование предпочтений есть $b \stackrel{\rho_T}{\approx} c$.

По правилу большинства отношение предпочтения для $T = \{1, 2, 3\}$ примет вид

$$a \stackrel{\rho_T}{\lesssim} b, b \stackrel{\rho_T}{\approx} c, c \stackrel{\rho_T}{\lesssim} d.$$

Замечание. Пусть $\{T_1, \dots, T_m\}$ — разбиение множества N . Тогда набор стратегий этих коалиций $(x_{T_1}, \dots, x_{T_m})$ определяет единственным образом ситуацию $x \in X$ в игре G . Ситуация x характеризуется условием, что проекция ситуации x на T_k ($k = 1, \dots, m$) совпадает с x_{T_k} . Поэтому можно доопределить функцию реализации правилом: $F(x_{T_1}, \dots, x_{T_m}) \stackrel{df}{=} F(x)$. В частности, если T — фиксированная коалиция, то определен исход $F(x_T, x_{N/T})$.

Гомоморфизм одной игры в другую естественным образом продолжается до гомоморфизма стратегий коалиций.

Рассмотрим следующие кооперативные принципы оптимальности для игры G : принцип \mathcal{K} -равновесия и принцип \mathcal{K} -допустимости.

Пусть \mathcal{K} — произвольное семейство коалиций, $\mathcal{K} \subseteq 2^N$.

Определение 1. Стратегия $x_T^0 \in X_T$ называется *возражением* коалиции T на исход a , если для любой стратегии дополнительной коалиции $x_{N/T} \in X_{N/T}$ выполняется $F(x_T^0, x_{N/T}) \stackrel{\rho_T}{>} a$.

Исход a называется *допустимым* для коалиции T , если у нее не существует возражений на этот исход. Исход a называется *допустимым* для семейства коалиций $\mathcal{K} \subseteq 2^N$ (короче, *\mathcal{K} -допустимым*), если он допустим для всех коалиций этого семейства.

Определение 2. Стратегия $x_T^0 \in X_T$ называется *возражением* коалиции T на ситуацию $x^* \in X$, если она является возражением на исход $F(x^*)$.

Определение 3. Стратегия $x_T^0 \in X_T$ называется *опровержением* ситуации $x \in X$ со стороны коалиции T , если $F(x_T^0, x_{N/T}) \overset{\rho_T}{>} F(x)$.

Ситуация $(x_i^0)_{i \in N} = x^0 \in X$ называется *ситуацией \mathcal{K} -равновесия*, если у любой коалиции $T \in \mathcal{K}$ не существует опровержений этой ситуации.

Ситуация \mathcal{K} -равновесия для всех одноэлементных коалиций есть в точности ситуация общего равновесия в игре G [1]. Ситуация \mathcal{K} -равновесия для коалиции всех игроков есть в точности оптимальная, по Парето, ситуация.

Пусть, кроме игры G , задана еще одна игра с отношениями предпочтения тех же игроков $\Gamma = \langle (U_i)_{i \in N}, B, (\sigma_i)_{i \in N}, \Phi \rangle$ и пусть $f = (\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi)$ – гомоморфизм из игры G в игру Γ . Имеют место следующие результаты.

Теорема 1. Если в качестве принципов оптимальности для игр G и Γ рассматривать принцип \mathcal{K} -допустимости при парето-согласовании предпочтений, то строгий гомоморфизм [2] «на» будет контравариантным.

Теорема 2. Если в качестве принципов оптимальности для игр G и Γ рассматривать принцип \mathcal{K} -допустимости при парето-согласовании предпочтений, то регулярный гомоморфизм «на» будет ковариантным.

Теорема 3. Если в качестве принципов оптимальности для игр G и Γ рассматривать принцип \mathcal{K} -равновесия при модифицированном парето-согласовании, то строгий гомоморфизм «на» будет контравариантным.

Теорема 4. Если в качестве принципов оптимальности для игр G и Γ рассматривать принцип \mathcal{K} -равновесия при модифицированном парето-согласовании, то регулярный гомоморфизм «на» будет ковариантным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савина Т.Ф. Ковариантные и контравариантные гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 9, вып. 3. С. 66–70.

С.П. Сидоров

ОЦЕНКА ЛИНЕЙНОГО ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ПОПЕРЕЧНИКА ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Найдена оценка линейного относительного поперечника одного класса дифференцируемых функций.

Пусть $C^k[0, 1]$, $k \geq 0$, есть пространство действительных значений и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0, 1]$, D^i означает оператор дифференцирования i -го порядка, $\sigma = (\sigma_i)_{i \geq 0}$ — последовательность с $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$ и h, k — два целых числа таких, что $0 \leq h < k$ и $\sigma_h \cdot \sigma_k \neq 0$.

Следуя [1], в работе рассматриваются конуса функций $C_{h,k}(\sigma)$, производные некоторых порядков которых имеют фиксированный знак на $[0, 1]$:

$$C_{h,k}(\sigma) := \{f \in C^k[0, 1] : \sigma_i \cdot D^i f \geq 0, \quad i = h, \dots, k\}.$$

Обозначим $\sigma^{[r]} = (\sigma_i^{[r]})_{i=0}^k$, $\sigma_r^{[r]} = \sigma_r$ и $\sigma_i^{[r]} = 0$, если $i \neq r$.

Обозначим Π_k подпространство $C[0, 1]$, порожденное системой функций $\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$, где $e_i(t) = t^i$, $P_k = \{p \in \Pi_k : \|D^k p\|_{C[0,1]} \leq 1\}$.

Пусть V есть некоторый конус в $C[0, 1]$. Определим линейный относительный n -поперечник множества $A \subset C^k[0, 1]$ в $C[0, 1]$ для D^r с ограничением V следующим образом:

$$\delta_n^r(A, V)_{C[0,1]} := \inf_{\mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in A} \|D^r f - D^r L_n f\|_{C[0,1]},$$

где $\mathcal{L}_n(V)$ есть множество всех линейных операторов $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^r[0, 1]$ конечного ранга $\leq n$ таких, что $L_n(V) \subset V$.

В следующей теореме находится линейный относительный n -поперечник множества P_k в $C[0, 1]$ для D^r с ограничением $C_{h,k}(\sigma)$.

Теорема. Пусть $C_{h,k}(\sigma)$ — конус такой, что $\Gamma = \{i : h \leq i < k, \sigma_i \neq 0, \sigma_{i+1} = 0, \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\} \neq \emptyset$ и пусть $r \in \Gamma$. Тогда

$$\delta_n^r(P_k, C_{h,k}(\sigma))_{C[0,1]} \asymp \frac{1}{n^{k-r}}.$$

Доказательство. Пусть $k \in N$, $0 \leq m \leq k$, $c \in R$, $c > 0$. Обозначим

$$R_k^{(m)}(c) := \{a = (a_0, \dots, a_k) \in R^{k+1} : |a_m| \leq c\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \inf_{L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{h,k}(\sigma^{[r]})} \sup_{p \in P_k^{(k)}} \|D^r p - D^r L_n p\| = \\ &= \inf_{L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{h,k}(\sigma^{[r]})} \sup_{p \in P_k^{(k)}} \sup_{x \in [0,1]} |D^r p(x) - D^r L_n p(x)| = \\ &= \inf_{L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{h,k}(\sigma^{[r]})} \sup_{x \in [0,1]} \sup_{a \in R_k^{(m)}(\frac{1}{k!})} \left| \sum_{i=0}^k a_i (D^r e_i(x) - D^r L_n e_i(x)) \right| = \\ &= \inf_{L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{h,k}(\sigma^{[r]})} \sup_{x \in [0,1]} \sup_{a \in R_k^{(m)}(\frac{1}{k!})} \sum_{i=0}^k |a_i| |D^r e_i(x) - D^r L_n e_i(x)| = \\ &= \frac{1}{k!} \inf \sup_{x \in [0,1]} |D^r e_k - D^r L_n e_k(x)|, \end{aligned}$$

где инфимум ищется среди всех линейных операторов конечного ранга n таких, что $L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{h,k}(\sigma^{[r]})$ и

$$D^r L_n e_i = D^r e_i, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Известно [2], что если линейный оператор $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^r[0, 1]$ конечного ранга n удовлетворяет условиям:

- 1) $L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{h,k}(\sigma^{[r]})$,
- 2) $D^r L_n e_r = D^r e_r$,
- 3) если $r > 0$, то $L_n(\Pi_{r-1}) \subset \Pi_{r-1}$,

тогда имеет место неравенство

$$\sum_{i=r+1}^k \frac{1}{i!} \|D^r L_n e_i - D^r e_i\| \geq \frac{1}{\tau n^{k-r}}, \quad (1)$$

где константа $\tau > 1$ не зависит от n .

С другой стороны, линейный оператор конечного ранга n , удовлетворяющий условиям 1)–3) и доставляющий точную по порядку оценку в неравенстве (1), приведен в [2].

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Muñoz-Delgado F.J., Ramírez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.
2. *Sidorov S.P.* Optimal Approximation of the r th differential operator by means of linear shape preserving operators of finite rank // J. of Approx. Theory. 2003. Vol. 124. P. 232–241.

УДК 517.51

В.Г. Тимофеев

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ЛАНДАУ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $C = C(R^n)$, $n \geq 2$, — пространство непрерывных ограниченных на R^n функций с обычно определенной нормой

$$\|u\|_C = \sup\{|u(x)| : x \in R^n\};$$

$L_\infty = L_\infty(R^n)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций с нормой

$$\|u\|_\infty = \text{ess sup}\{|u(x)| : x \in R^n\}.$$

Обозначим через U класс функций $u \in C$, для которых значение оператора Лапласа принадлежит $L_\infty(R^n)$ и понимается в обобщенном, по Соболеву, смысле.

Начнем изложение основных результатов с нескольких вспомогательных утверждений, необходимых в дальнейшем. Приведем интегральное представление производной u'_{x_i} функции $u \in U$. Для всех x и ξ таких, что $\xi_1 \neq x_1 + 2kh$, $k \in Z$, $h > 0$, полагаем

$$G(\xi, x) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \ln \frac{1}{r_k} - \ln \frac{1}{\rho_k} \right\}, & \text{если } n = 2, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r_k^{n-2}} - \frac{1}{\rho_k^{n-2}} \right\}, & \text{если } n \geq 3, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$r_k = \sqrt{(\xi_1 - x_1 - 4kh)^2 + \sum_{i=2}^n (\xi_i - x_i)^2},$$

$$\rho_k = \sqrt{(\xi_1 + x_1 - 4kh - 2h)^2 + \sum_{i=2}^n (\xi_i - x_i)^2}.$$

Выделим в R^n слой

$$\Pi_h = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n : -h < \xi_1 < h, -\infty < \xi_i < \infty, i = \overline{2, n}\},$$

$h > 0$.

Лемма 1. *Функция (1) является функцией Грина слоя Π_h , а для производной любой функции $u \in U$ имеет место следующее интегральное представление:*

$$u'_{x_i} = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\partial\Pi_h} u(\xi) \frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial x_i \partial n_\xi} d\xi - \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\Pi_h} \Delta u(\xi) \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial x_i} d\xi, \quad (2)$$

$x \in \Pi_h$, $i = \overline{1, n}$; $\frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n_\xi}$ — производная по направлению внешней нормали к границе $\partial\Pi_h$ области Π_h .

Доказательство леммы для $i = 1$ приведено в статье [1].

Воспользуемся представлением (2) для вычисления знаков производных $\frac{\partial G(\xi, x)}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial x_i \partial n_\xi} \Big|_{\partial\Pi_h}$ при фиксированном $x \in \Pi_h$. Для определенности положим $i = 1$.

Лемма 2. *Пусть x фиксировано внутри слоя Π_h , а $\xi \neq x$. Если $-h \leq \xi_1 \leq x_1$, то $\frac{\partial G}{\partial x_1} \leq 0$, а если $x_1 \leq \xi_1 \leq h$, то $\frac{\partial G}{\partial x_1} \geq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\xi) = \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial x_1} = (\xi_1 - x_1) \left\{ \frac{k}{r_0^n} + \frac{H(\xi)}{\xi_1 - x_1} \right\}, \quad (3)$$

где $k = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2, \\ n - 2, & \text{если } n \geq 3. \end{cases}$

Без особого труда [2] устанавливается, что $\left| \frac{H(\xi)}{\xi_1 - x_1} \right| \leq C_0$, где C_0 — константа. Пусть $\xi_1 \in [x_1, h]$. Из (3) следует, что $\Phi(\xi) \geq (\xi_1 - x_1) \left\{ \frac{k}{r_0^n} - C_0 \right\}$ и если $|r_0| \leq \left(\frac{k}{C_0} \right)^{1/n}$, то $\text{sgn } \Phi(\xi) = \text{sgn } (\xi_1 - x_1)$. Поскольку

$$\Phi(\xi)|_{\xi_1=x_1} = \Phi(\xi)|_{\xi_1=h} = 0 \quad (4)$$

и $\Phi(\xi)$ экспоненциально убывает к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, то, взяв $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon < \left(\frac{k}{C_0} \right)^{1/n}$ и рассмотрим множество $\Pi_{\varepsilon, h}^+ = \{\xi \in \Pi_h : r_0 \geq \varepsilon, \xi_1 - x_1 \geq 0\}$, получим, что в этом множестве $\Phi(\xi) \geq 0$.

Функция $\Phi(\xi)$ гармоническая по ξ в $\Pi_{\varepsilon, h}^+$. Тогда в силу принципа максимума для гармонических в неограниченных областях функций имеем

$$\Phi(\xi) \geq 0. \quad (5)$$

Для случая $\xi_1 \in [-h, x_1]$ доказательство аналогично.

Лемма 3. Если $\xi_1 = -h$, то $\frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial x_1 \partial n_\xi} \geq 0$, если $\xi_1 = h$, то $\frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial x_1 \partial n_\xi} \leq 0$.

Доказательство. Из (4) и (5) следует, что $\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=h} = \frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial \xi_1 \partial x_1} \Big|_{\xi_1=h} \leq 0$, а поскольку всюду в $\Pi_h \setminus \{x\}$ $\frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial \xi_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial x_1 \partial \xi_1}$ и, значит, $\frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial x_1 \partial n_\xi} \Big|_{\xi_1=h} = \frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial x_1 \partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=h} \leq 0$.

Второй случай доказывается так же.

Теорема. Функции $u \in U$: $\|u\|_C \leq \delta$, $\|\Delta u\|_\infty \leq \eta$, $\delta, \eta > 0$ удовлетворяют следующим точным неравенствам:

$$\|u'_{x_i}\|_C \leq \frac{1}{h} \|u\|_C + h \|\Delta u\|_\infty, \quad \text{если } h < \sqrt{\frac{\delta}{\eta}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

$$\|u'_{x_i}\|_C \leq 2\sqrt{\|u\|_C \|\Delta u\|_\infty}, \quad \text{если } h \geq \sqrt{\frac{\delta}{\eta}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Доказательство. Из (2) вытекает, что

$$|u'_{x_i}(x)| \leq J_1 \|u\|_C + J_2 \|\Delta u\|_\infty, \quad (8)$$

где

$$J_1 = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\partial \Pi_h} \left| \frac{\partial^2 G(\xi, x)}{\partial x_i \partial n_\xi} \right| d\xi, \quad (9)$$

$$J_2 = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)} \int_{\Pi_h} \left| \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial x_i} \right| d\xi. \quad (10)$$

Величины (9) и (10) могут быть получены как решение соответствующих задач Дирихле: $\Delta v = 0$, $v|_{\partial \Pi_h} = \text{sgn}(\xi_1 - x_1)$ и $\Delta v = -\text{sgn}(\xi_1 - x_1)$, $v|_{\partial \Pi_h} = 0$, где $v \in U$.

Минимизируя полученное соотношение (8) по h , получаем оценки (6) и (7). Точность неравенств проверяется на одномерных функциях [3].

Следствие. Пусть $\omega_h(\delta, \eta) = \sup\{\|u'_{x_i}\|_C : u \in U, \|u\|_C \leq \delta, \|\Delta u\| \leq \eta\}$, $\delta, \eta > 0$, $i = \overline{1, n}$, тогда $\omega_h(\delta, \eta) = \begin{cases} \frac{\delta}{h} + h\eta, & \text{если } h < \sqrt{\frac{\delta}{\eta}}, \\ 2\sqrt{\delta\eta}, & \text{если } h \geq \sqrt{\frac{\delta}{\eta}}. \end{cases}$

Замечания

1. Приведенные результаты для случая всего пространства R^n были получены автором в [1].

2. Историю одномерных задач можно найти в [1–6].

3. Поскольку нормы оператора свёртки из L_∞ в L_∞ и из L_1 в L_1 совпадают, то полученные результаты остаются верны и для $L_1(R^n)$. Точность неравенств в этом случае можно доказать по аналогии с [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимофеев В.Г. Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 676–689.

2. Будаг Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.

3. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Наука, 1948.

4. Тимофеев В.Г. Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа // Теория функций и приближений: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1983. С. 84–92.

5. Стечкин С.Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

6. Арестов В.В. О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.

УДК 517.518.85

А.Ю. Трынин, И.С. Панфилова

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ ТИПА ДИНИ—ЛИПШИЦА СХОДИМОСТИ ОБОБЩЁННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ УИТТЕКЕРА—КОТЕЛЬНИКОВА—ШЕННОНА

В статье изучаются аппроксимативные свойства операторов интерполирования лагранжева типа, представляющих собой некоторое обобщение усечённых кардинальных функций Уиттекера и классических интерполяционных многочленов. Полученные результаты являются продолжением исследований, опубликованных в статьях [1–3].

Будем обозначать $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$. В предположении $\rho_\lambda \geq 0$ при каждом неотрицательном λ считаем, что

$$V_{\rho_\lambda}[0, \pi] = \{q_\lambda : V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, q_\lambda(0) = 0\}, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda}\right), \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ после его доопределения на всю ось \mathbf{R} с сохранением вариации через $x_{k,\lambda}, k \in \mathbf{Z}$, будем обозначать нули обобщённого решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \quad (2)$$

или при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$ — задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \quad (3)$$

перенумерованные в порядке возрастания таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \dots < x_{n,\lambda} \leq \pi \quad (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n+1,\lambda} > \pi). \quad (4)$$

В данной статье получен признак сходимости в точке значений операторов типа Лагранжа, построенных по решениям задачи Коши вида (2) или (3) и ставящих в соответствие любой, определённой на отрезке $[0, \pi]$ функции f , интерполирующую её в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^n$ непрерывную функцию таким образом:

$$S_\lambda(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{y(x, \lambda)}{y'(x_{k,\lambda}, \lambda)(x - x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^n s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \quad (5)$$

Исключив из рассмотрения тривиальный случай $f \equiv 0$ ($f \in C_0[0, \pi]$), возьмём фиксированную положительнозначную функцию $\vartheta(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\vartheta(\lambda) = o(1), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})} = \infty; \quad \text{положим} \quad \varepsilon(\lambda) = \exp\left(-\frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}\right). \quad (6)$$

Например, в качестве $\vartheta(\lambda)$ можно взять $\vartheta(\lambda) = \sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}$, тогда $\varepsilon(\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}}\right)$.

Для любых фиксированных точки $x \in [0, \pi]$ и функции ϑ рассмотрим „относительный“ модуль непрерывности функции f в точке x

$$\Omega(f, x, \vartheta, \lambda, \delta) = \sup_{t, t+h \in [x-\varepsilon(\lambda), x+\varepsilon(\lambda)], |h| \leq \delta} |f(t+h) - f(t)|. \quad (7)$$

Функция Ω как функция переменной δ при фиксированных x, ϑ, λ обладает всеми свойствами обычного модуля непрерывности и является «локальной» характеристикой гладкости функции f вблизи точки x с учётом её гладкости на всём отрезке, выбора функции ϑ и параметра λ . В частном случае $\vartheta(\lambda) = \sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}$ имеем

$$\hat{\Omega}(f, x, \lambda, \delta) = \sup_{t, t+h \in [x - \exp(-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})})}, x + \exp(-\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})})}], |h| \leq \delta} |f(t+h) - f(t)|. \quad (8)$$

Для любого положительного λ и $x \in [0, \pi]$ обозначим через p, m_1, m_2 такие целые числа, что

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2} \right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2} \right], \quad x_{p,\lambda} \leq x < x_{p+1,\lambda}, \quad (9)$$

где номера нулей k_1 и k_2 определяются из неравенств $x_{k_1-1,\lambda} < x - \varepsilon(\lambda) \leq x_{k_1,\lambda}$, $x_{k_2,\lambda} \leq x + \varepsilon(\lambda) < x_{k_2+1,\lambda}$. Теперь сформулируем результаты работы [1], которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема 1 (критерий сходимости в точке [1]). Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (1) в случае задачи Коши (2) или (1) и $h(\lambda) \neq 0$ в случае задачи (3). Доопределим функцию $f(x) = 0$ для всех $x \notin [0, \pi]$. Тогда для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (2), равномерно по x на $[0, \pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| S_\lambda(f, x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \sum_{m=m_1}^{m_2} ' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda}))}{p - 2m} \right| = 0. \quad (10)$$

А для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (3), равномерно по x на $[0, \pi]$, а также по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| S_\lambda(f, x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=m_1}^{m_2} ' \frac{f(x_{2m+1,\lambda}) - 2f(x_{2m,\lambda}) + f(x_{2m-1,\lambda}))}{p - 2m} \right| = 0. \quad (11)$$

Здесь штрих у сумм в (10) и (11) означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю. Если $m_2 < m_1$, то суммы в (10) и (11) равны нулю.

Предложение [1, предложение 4]. Для любого потенциала q_λ из шара (1) для нулей решений задачи Коши (2), попадающих в $[0, \pi]$ и перенумерованных в порядке возрастания согласно (4), справедливы следующие асимптотические формулы:

$$x_{k,\lambda} = \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + h^2(\lambda)}} + o\left(\frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\ln \lambda}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (12)$$

А для перенумерованных согласно (4) нулей решений задачи Коши (3) с $h(\lambda) \neq 0$ и q_λ , удовлетворяющими соотношению $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$, см. (1) справедливы следующие асимптотические формулы:

$$x_{k,\lambda} = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}\pi + o\left(\frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\ln \lambda}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Стремление к нулю в о равномерно по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ и $k : 0 \leq k \leq n$.

Теорема 2. Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (1) и $h(\lambda) \in \mathbf{R}$ в случае задачи Коши (2) или (1) и $h(\lambda) \neq 0$ в случае задачи (3). Доопределим функцию $f(x) = 0$ для всех $x \notin [0, \pi]$.

Тогда для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (2), из соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\lambda}|y(x, \lambda)|\Omega(f, x, \vartheta, \lambda, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}})}{\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \max\left\{1, \left(\ln \lambda - \frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}\right)\right\} = 0 \quad (14)$$

следует

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |S_\lambda(f, x) - f(x)| = 0. \quad (15)$$

А для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (3), из соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)\Omega(f, x, \vartheta, \lambda, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}})}{h(\lambda)} \max\left\{1, \left(\ln \lambda - \frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}\right)\right\} = 0$$

следует (15).

Доказательство. Из (10) и (12) вытекает существование константы C такой, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{\lambda}y(x, \lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f(x_{2m+1, \lambda}) - 2f(x_{2m, \lambda}) + f(x_{2m-1, \lambda}))}{p - 2m} \right| \leq \\ & \leq C \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\lambda}|y(x, \lambda)|\Omega(f, x, \vartheta, \lambda, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}})}{\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \max\left\{1, \left(\ln \lambda - \frac{\vartheta(\lambda)}{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Значит, в силу теоремы 1 из (14) следует (15) для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (2). Аналогично получаем из соотношений (10), (11) и (13) справедливость утверждения теоремы для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (3).

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $f \in C_0[0, \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию (1) и $h(\lambda) \in \mathbf{R}$ в случае задачи Коши (2) или (1) и $h(\lambda) \neq 0$ в случае задачи (3). Доопределим функцию $f(x) = 0$ для всех $x \notin [0, \pi]$. Тогда для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (2), из соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\lambda}|y(x, \lambda)|\hat{\Omega}(f, x, \lambda, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}})}{\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \max\left\{1, \left(\ln \lambda - \frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}}\right)\right\} = 0$$

следует (15). А для операторов вида (5), построенных с помощью решений задачи Коши (3), из соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\lambda} y(x, \lambda) \hat{\Omega}(f, x, \lambda, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}})}{h(\lambda)} \max \left\{ 1, \left(\ln \lambda - \frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}} \right) \right\} = 0$$

следует (15), где «относительный» модуль непрерывности $\hat{\Omega}$ определяется (8).

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы 3 устанавливается аналогично доказательству теоремы 2 в случае $\vartheta(\lambda) = \sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}})}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трынин А.Ю. Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера—Котельникова—Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Т. 200, вып. 11. С. 61–108.
2. Трынин А.Ю. Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1158–1169.
3. Трынин А.Ю. Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2007. Т. 198, вып. 10. С. 141–158.

УДК 517.518.85

А.Ю. Трынин, И.С. Панфилова

О РАСХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА ПО УЗЛАМ ЯКОБИ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЛНОЙ МЕРЫ

В настоящей работе получено усиление результата А.А. Привалова [1, теорема 1]. Показано существование непрерывной функции, интерполяционные процессы Лагранжа—Якоби которой расходятся почти всюду на $[-1; 1]$.

Пусть $R = \{x_{k,n}\}$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$; $n = 1, 2, 3, \dots$, — матрица узлов интерполирования, n -я строка которой

$$-1 < x_{n,n} < x_{n-1,n} < x_{n-2,n} < \dots < x_{1,n} < 1$$

есть корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, т.е. многочленов $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$, ортогональных на отрезке $[-1; 1]$ с дифференциальным весом $\omega(x) = (1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta$, $\alpha > -1, \beta > -1$.

Для любой непрерывной на $[-1; 1]$ функции $f(x)$ положим

$$L_n(R, f, x) = \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}) l_{k,n}(R, x),$$

где $l_{k,n}(R, x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) / P_n^{(\alpha, \beta)}(x_{k,n}) \cdot (x - x_{k,n})$.

Лемма 1. Пусть $R = \{x_{k,n}\}$ – матрица узлов интерполирования Якоби и пусть ε_l – наперед заданная последовательность положительных чисел $0 < \varepsilon_l < 1$, $l = 1, 2, 3, \dots$. Тогда найдутся положительные постоянные $c_{1,l}$ и $c_{2,l}$, не зависящие от n , такие, что для любых узлов $x_{k,n}$ и $x_{k+1,n} \in [-1 + \varepsilon_l, 1 - \varepsilon_l]$ справедливы неравенства

$$c_{1,l}/n < x_{k,n} - x_{k+1,n} < c_{2,l}/n. \quad (1)$$

Доказательство см. в [1, следствие к лемме 2].

Лемма 2. Пусть $R = \{x_{k,n}\}$ – матрица узлов Якоби, $\gamma_1 = \min(\alpha, \beta) > -1$ и пусть положительные числа ε_l и q такие, что $0 < \varepsilon_l < 1$, $q > 2$.

Тогда существуют положительные постоянные $c_{l0} = c(\varepsilon_l, q)$, зависящие только от ε_l и q и не зависящие от n , такие, что для всех $x = \cos \theta$, $x \in I_n(q, \varepsilon_l)$,

$$I_n(q, \varepsilon_l) = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \left[x_{k+1,n} + \frac{x_{k,n} - x_{k+1,n}}{q}; x_{k,n} - \frac{x_{k,n} - x_{k+1,n}}{q} \right] \right) \cap [-1 + \varepsilon_l; 1 - \varepsilon_l] \quad (2)$$

и всех номеров n , $n \geq n_{l0}$, где n_{l0} зависит только от ε_l , α и β , справедливы неравенства

$$|\cos(N \arccos x + \gamma) + O(1)(n\sqrt{1-x^2})^{-1}| \geq c_{l0},$$

где $N = n + (\alpha + \beta + 1)/2$, $\gamma = -(\alpha + 1/2)\pi/2$.

Доказательство см. в [1, лемма 7].

Лемма 3. Пусть множества E_1, E_2, E_3, \dots измеримы. Если $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ и если сумма $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ ограничена, то $\text{mes} E = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{mes} E_n)$ [2].

Доказательство см. [3, гл.3, §4, теорема 11].

Теорема 1. Пусть вещественные α и β такие, что $\gamma_1 = \min(\alpha, \beta) > -1$, и пусть R – матрица узлов интерполирования, n -я строка которой есть нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Якоби, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда для любого положительного числа ε , $0 < \varepsilon < 1$, существуют

множество E , $E \subset [-1; 1]$, $\text{mes}E > 2 - \varepsilon$, и непрерывная на $[-1; 1]$ функция $f(x)$ такие, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |L_n(R, f, x)| = \infty$, если только $x \in E$.

Доказательство см. [1, теорема 1].

Теорема 2. Пусть вещественные α и β такие, что $\gamma_1 = \min(\alpha, \beta) > -1$, и пусть R – матрица узлов интерполирования, n -я строка которой есть нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Якоби, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда существует непрерывная на $[-1; 1]$ функция $f(x)$, для которой $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |L_n(R, f, x)| = \infty$ почти везде на $[-1; 1]$.

Доказательство. В силу [1, лемма 11] для последовательности положительных чисел ε_l , $0 < \varepsilon_l < 1/4$, существует бесконечная последовательность $\{n_s\}$ номеров такая, что $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, и если $n_{s_i} \neq n_{s_j}$, то многочлены $P_{n_{s_i}}^{(\alpha, \beta)}(x)$ и $P_{n_{s_j}}^{(\alpha, \beta)}(x)$ на отрезке $[-1 + \varepsilon_l; 1 - \varepsilon_l]$ имеют не более одного общего нуля; кроме того, в силу [1, лемма 3] считаем, что $L_{n_1}(R) \leq L_{n_2}(R) \leq L_{n_3}(R) \leq \dots$.

Возьмем бесконечную последовательность $\{m_s\}$ натуральных чисел такую, что $m_1 > 6/\varepsilon_l$ и ряд $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln m_s}}$ сходится, и будем искать функцию, удовлетворяющую теореме, в виде (см. [1, (59)])

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_j(x)}{\sqrt{\ln m_{s_j}}}. \quad (3)$$

Так же как в [1, теорема 1], только на каждом шаге заменяя ε на ε_l , построим две числовые последовательности $\{m_{s_j}\}$ и $\{n_{s_j+i-1}\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, m_{s_j}$; $j = 1, 2, 3, \dots$, последовательность промежутков $\{\Delta_{i, m_{s_j}}\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, m_{s_j}$; $j = 1, 2, 3, \dots$; две последовательности $\{\psi_j(x)\}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, и $\{\varphi_{i,j}(x)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, m_{s_j}$; $j = 1, 2, 3, \dots$, функций, непрерывных на $[-1; 1]$. Эти последовательности обладают следующими свойствами:

- 1) функция $\psi_j(x) \in \text{Lip}_{M_j} 1$ на отрезке $[-1; 1]$ и $\max_{-1 \leq x \leq 1} |\psi_j(x)| = 1$;
- 2) $L_{n_{s_l+m_l-1}}(R) \cdot \sum_{i=l+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln m_{s_j}}} \leq c_{12}$, $l = 1, 2, 3, \dots$;
- 3) $\max_{-1+\varepsilon_l \leq x \leq 1-\varepsilon_l} |L_n(R, \psi_j, x) - \psi_j(x)| \leq c_{12}$, $n \geq n_{s_l}$, $j = 1, 2, 3, \dots, l-1$;
- 4) если $x \in \Delta_{i+1, m_l} \cap [-1 + \varepsilon_l; 1 - \varepsilon_l]$, $i \in [1; m_{s_l} - 1]$, то

$$\begin{aligned} |L_{n_{s_l+i-1}}(R, \psi_l, x)| &= |L_{n_{s_l+i-1}}(R, \varphi_{i,l}, x)| \geq c_{3,l} \cos |(N_{s_l+i-1} \cdot \arccos x + \gamma) + \\ &+ O(1)(n_{s_l+i-1} \sqrt{1-x^2})^{-1}| \times (\ln m_l - c_6) \geq \cos |(N_{s_l+i-1} \cdot \arccos x + \gamma) + \\ &+ O(1)(n_{s_l+i-1} \sqrt{1-x^2})^{-1}| \times ((\ln m_l)^{\frac{3}{4}} - c_6); \end{aligned} \quad (4)$$

5) для любого $l = 1, 2, 3, \dots$ справедливы соотношения

$$\bigcup_{i=1}^{m_{s_l-1}} \Delta_{i+1, m_{s_l}} = [-1 + 2/m_{s_l}; 1 - 2/m_{s_l}] \supset [-1 + \varepsilon_l; 1 - \varepsilon_l], \quad (5)$$

где $\Delta_{i+1, m_{s_l}} \cap \Delta_{j+1, m_{s_l}} = \emptyset$, если $1 \leq i \neq j \leq m_{s_l} - 1$;

6) функция $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_j(x)}{\sqrt{\ln m_{s_j}}}$ непрерывна на отрезке $[-1; 1]$.

Строим множество E . В силу леммы 1 существуют положительные постоянные $c_{1,l}$ и $c_{2,l}$, не зависящие от n , такие, что если узлы $x_{k,n}$ и $x_{k+1,n}$ матрицы R принадлежат отрезкам $[-1 + \varepsilon_l/2; 1 - \varepsilon_l/2]$, то $c_{1,l}/n < |x_{k,n} - x_{k+1,n}| < c_{2,l}/n$.

Возьмем положительное число $q > 4c_{2,l}/c_{1,l}\varepsilon_l$ и рассмотрим множества $I_{n_{s_l+i-1}}(q, \varepsilon_l)$ из леммы 2, где $l = 1, 2, 3, \dots$ и индекс i изменяется от номера μ_l до номера ν_l , которые определяются из неравенств

$$2(\mu_l - 1)/m_{s_l} \leq -1 + \varepsilon_l < 2\mu_l/m_{s_l}$$

и

$$2(\nu_l - 1)/m_{s_l} \leq 1 - \varepsilon_l < 2\nu_l/m_{s_l}.$$

В дальнейшем рассматриваем только множества $I_{n_{s_l+i-1}}(q, \varepsilon_l)$, $l = 1, 2, 3, \dots$; $i = \mu_l, \mu_l + 1, \mu_l + 2, \dots, \nu_l$. Каждое множество $I_{n_{s_l+i-1}}(q, \varepsilon_l)$ получается из сегментов $[-1 + \varepsilon_l; 1 - \varepsilon_l]$ выбрасыванием конечного числа интервалов (см. (2)), причем наибольшая из длин этих интервалов не превосходит $2c_{2,l}/qn_{s_l+i-1}$.

Отсюда и из того, что $n_{s_l+i-1} > m_{s_l}^3$, следует, что множества

$$E_{i, m_{s_l}} = \Delta_{i+1, s_l} \cap I_{n_{s_l+i-1}}(q, \varepsilon_l), l = 1, 2, 3, \dots; i = \mu_l, \dots, \nu_l, \quad (6)$$

не пустые и

$$mes E_{i, m_{s_l}} > 2/m_{s_l} - 4c_{2,l}/m_{s_l}qc_{1,l} > 2(1 - \varepsilon_l)/m_{s_l}, \quad (7)$$

так как в силу (1) на промежутке $\Delta_{i+1, m_{s_l}}$ лежит не более чем $2n_{s_l+i-1}/m_{s_l}c_l$ узлов n_{s_l+i-1} -й строки матрицы R , а выбрасываем из отрезка $\Delta_{i+1, m_{s_l}}$ интервалы, содержащие эти узлы и имеющие длину, не превосходящую $2c_{2,l}/q \cdot n_{s_l+i-1}$.

Положим

$$E_{m_{s_l}} = \bigcup_{i=\mu_l}^{\nu_l} E_{i, m_{s_l}} \quad (8)$$

и

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} E_{m_{s_l}}. \quad (9)$$

Очевидно, что $E \subset [-1; 1]$ и из (5), (6), (7) имеем $\text{mes} E_{m_{s_l}} > 2 - 4\varepsilon_l$, а в силу [1, лемма 12] $\text{mes} E \geq 2 - 4\varepsilon_l$. Применяя лемму 3, получаем $\text{mes} E = \lim_{l \rightarrow \infty} (\text{mes} E_{m_{s_l}}) = 2$ при $\lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_l = 0$.

Так же, как в [1, теорема 1], доказывается, что функция (3) и множество (9) — искомые. Далее для всех точек $x \in E$ из [1, (82)] и (4) получаем, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |L_n(R, f, x)| = \infty$.

Теорема доказана [2, 3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Привалов А.А. О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 837–854.
2. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. Минск: Высш. шк., 1968.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

УДК 517.51

К.А. Туктамышева

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФАБЕРА—ШАУДЕРА

Классическая система Фабера—Шаудера $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ на $[0, 1]$ [1, глава 6] определяется так, чтобы $\|\varphi_k\|_{\infty} = 1$. При этом коэффициенты разложения функции f по системе $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ определяются так: $A_0(f) = f(0)$, $A_1(f) = f(1) - f(0)$, а при $n = 2^k + i$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq i \leq 2^k$, верно $A_n(f) = f((2i - 1)/2^k) - (f((i - 1)/2^k) + f(i/2^k))/2$. Мы рассматриваем коэффициенты $a_n(f)$ разложения по системе $\{\varphi_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$, где $\varphi_k^{(2)} = C_k \varphi_k$ и $\|\varphi_k^{(2)}\|_{L^2[0,1]} = 1$.

Пусть $\xi = \{x_i\}_0^n$ — разбиение $[0, 1]$ и $\kappa_{\xi}^p = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ для $p \in (1, \infty)$. Положим $\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup_{\|\xi\| \leq \delta} \kappa_{\xi}^p(f)$, где $\|\xi\|$ — диаметр

разбиения ξ . Пространство $C_p[0, 1] = \left\{ f : \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{1-1/p}(f, \delta) = 0 \right\}$ является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_{\infty}, \omega_{1-1/p}(f, 1))$. По определению

$$E_n(f)_{C_p} = \inf_{c_i} \left\| f - \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i \right\|_{C_p}.$$

Результаты следующей леммы можно найти в [2].

Лемма 1. 1) Пусть $\{E'_k\}_{k=1}^\infty$ – убывающая к нулю последовательность. Тогда

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (E'_{2^n} - E'_{2^{n+1}}) 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} \varphi_i(x), \quad 1 < p < \infty,$$

обладает свойством $E_k(f)_{C_p} \leq E'_k$, $k \in \mathbb{N}$.

2) Пусть $t \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Тогда $\sum_{n=2^{m+1}}^{2^{m+1}} |A_n(f)|^p \leq 2^p E_{2^m}^p(f)_{C_p}$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 3 из [2].

Теорема 1. Пусть φ – вогнутая возрастающая функция, такая что $\varphi(0) = 0$, $f \in C_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, и γ таково, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma \varphi\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\right)$ расходится. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma \varphi\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} E_n(f)_{C_p}\right)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma \varphi(|a_n|)$ тоже сходится.

Если же $\{E'_n\}_{n=1}^\infty$ – убывающая последовательность, $\gamma + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{p} > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma \varphi\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} E'_n\right) = \infty$, то найдется $F_0 \in V_p[0, 1]$, такая что $E_n(f_0)_p \leq E'_n$ и при этом $\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma \varphi(|a_n(f_0)|) = \infty$.

Доказательство. Рассмотрим $b_k = \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}} n^\gamma = o(2^{k(\gamma+1)})$ и $\alpha_n = n^\gamma/b_k$, $2^k < n \leq 2^{k+1}$. Тогда $\alpha_n \geq 0$ и $\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \alpha_n = 1$, так что можно применять неравенство Йенсена. С одной стороны, имеем

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} n^\gamma \frac{|a_n|}{b_k} \leq \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} 2^{(k+1)\gamma} \frac{|a_n|}{2^{k(\gamma+1)}} \leq 2^{\gamma-k} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_n|,$$

а с другой стороны, по неравенству Йенсена

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} n^\gamma \varphi(|a_n|) \leq b_k \varphi\left(\left(\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_n|\right) 2^{\gamma-k}\right).$$

Применяя к внутренней скобке неравенство Гельдера, получаем

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} n^\gamma \varphi(|a_n|) \leq b_k \varphi\left(2^\gamma \left(\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} 2^{k(1-\frac{1}{p})} 2^{-k}\right).$$

Используя вторую часть леммы, находим что:

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} n^\gamma \varphi(a_n) \leq b_k \varphi \left(2^\gamma C_1 2^{-\frac{k}{2}} E_{2^k}(f)_{C_p} 2^{-\frac{k}{p}} \right) \leq C_2 b_k \varphi \left(2^{k(-\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} E_{2^k}(f)_{C_p} \right).$$

Так как $b_k \leq C_3 2^{k(\gamma+1)}$ и при $n \in [2^{k-1} + 1, 2^k]$ верно $2^{-k(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} E_{2^k}(f)_{V_p} \leq \leq n^{-(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} E_n(f)_{C_p}$, то

$$\varphi \left(2^{-k} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right) E_{2^k}(f)_{V_p} \right) \leq 2^{1-k} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \varphi \left(n^{-(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} E_n(f)_{V_p} \right)$$

и соответственно

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} n^\gamma \varphi(|a_n|) \leq C_3 2^{k(\gamma+1)} 2^{-k+1} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \varphi \left(n^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} E_n(f)_{C_p} \right).$$

Суммируя последнее неравенство по $k \geq 1$, получаем

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^\gamma \varphi(|a_n|) \leq C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} n^\gamma \varphi \left(n^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} E_n(f)_{C_p} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} n^\gamma \varphi \left(n^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} E_n(f)_{C_p} \right),$$

откуда следует первая часть теоремы.

2) Рассмотрим функцию f_0 из части 1) леммы. Так как $\varphi_n^{(2)} = = 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{3} \varphi_n$ при $n \in [2^k + 1, 2^{k+1}]$, то $a_n(f_0) = (E'_{2^k} - E'_{2^{k+1}}) 2^{-\frac{k}{2}-\frac{k}{p}} 3^{-\frac{1}{2}}$ при $n \in [2^{k-1} + 1, 2^k]$. Докажем, что при $\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma \varphi \left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} E'_n \right) = \infty$ ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma \varphi(|a_n(f_0)|)$ будет расходиться.

Известно, что вогнутая функция $\varphi(x)$, такая что $\varphi(0) = 0$, удовлетворяет $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$, $x, y > 0$, и $\varphi(Cx) \leq C\varphi(x)$, $x > 0$, $C > 1$.

Поэтому при $i \in [2^{n-1} + 1, 2^n]$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\varphi(|a_i|) = \varphi \left((E'_{2^n} - E'_{2^{n+1}}) 2^{-\frac{n}{p}-\frac{n}{2}} 3^{-\frac{1}{2}} \right) \geq 3^{-\frac{1}{2}} \left((E'_{2^n} - E'_{2^{n+1}}) 2^{-\frac{n}{p}-\frac{n}{2}} \right)$$

и тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} i^\gamma \varphi(|a_i|) &\geq C_5 2^{n-1} 2^{n\gamma} \varphi \left((E'_{2^n} - E'_{2^{n+1}}) 2^{-\frac{n}{p}-\frac{n}{2}} \right) \geq \\ &\geq C 2^{n(1+\gamma)} \left(\varphi \left(E'_{2^n} 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}} \right) - \varphi \left(E'_{2^{n+1}} 2^{-\frac{(n+1)}{p}-\frac{(n+1)}{2}} 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} \right) \right) \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq C_6 \left(2^{n(1+\gamma)} \varphi \left(E'_{2^n} 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}} \right) - 2^{n+n\gamma+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} \varphi \left(E'_{2^{n+1}} 2^{-\frac{n+1}{p}-\frac{n+1}{2}} \right) \right) \geq \\ &\geq C_6 \left(2^{n(1+\gamma)} \varphi \left(E'_{2^n} 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}} \right) - 2^{(n+1)(1+\gamma)-1-\gamma+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} \varphi \left(E'_{2^{n+1}} 2^{-\frac{n+1}{p}-\frac{n+1}{2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства по n от 0 до ∞ , получаем

$$\sum_{i=2}^{\infty} i^\gamma \varphi(|a_i|) \geq C_6 \left(2^{1+\gamma} \gamma \left(E'_2 2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n(1+\gamma)} \varphi \left(E'_{2^n} 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}} \right) C_7 \right),$$

где $C_7 = 1 - 2^{-1-\gamma+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$.

Таким образом, $\sum_{i=2}^{\infty} i^\gamma \varphi(|a_i|) \geq C_8 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1+\gamma)} \varphi \left(E'_{2^n} 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}} \right)$. Пусть $i \in [2^n + 1, 2^{n+1}]$. Тогда $\varphi(E'_{2^n} 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}) \geq \varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})$. Поэтому

$$2^n 2^{n(1+\gamma)} \varphi(E'_{2^n} 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}) \geq \sum_{i=2^{n+1}}^{2^{n+1}+1} \frac{i^\gamma}{2^\gamma} \varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}) = 2^{-\gamma} \sum_{i=2^{n+1}}^{2^{n+1}+1} i^\gamma \varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}).$$

Суммируя, получаем $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1+\gamma)} \varphi(E'_{2^n} 2^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}) \leq 2^{-\gamma} \sum_{i=3}^{\infty} i^\gamma \varphi(E'_i i^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})$.

Последний ряд по условию расходится, следовательно, расходится левая часть последнего неравенства и $\sum_{i=2}^{\infty} i^\gamma \varphi(|a_i|) = \infty$, что и требовалось доказать.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 496 с.
2. *Волосивец С.С.* Приближение функций ограниченной p вариации полиномами по системе Фабера—Шаудера // Мат. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3. С. 363–371.

УДК 517.518.85

К.Б. Турашвили

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ АНАЛОГЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРИЗНАКА ДИНИ

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} u''(x) + [\lambda - q(x)]u(x) = 0, \\ u'(0) - hu(0) = 0, \\ u'(\pi) + Hu(\pi) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где h и H — произвольные действительные числа, а потенциал q — непрерывная функция ограниченной вариации.

Введем оператор Лагранжа:

$$L_n^{SL}(f, x) = \sum_{k=1}^n \frac{u_n(x)}{u_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}), \quad (2)$$

где $u_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (1), $u_n(x_{k,n}) = 0$, $0 \leq x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} \leq \pi$. Для $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ данный оператор обладает интерполяционным свойством Лагранжа $L_n^{SL}(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n})$, $k = \overline{1, n}$.

Заметим, что интегральный признак Дини сходимости рядов Фурье непрерывных функций не имеет места в случае интерполяционных процессов Лагранжа—Штурма—Лиувилля.

Теорема 1 (признак Дини сходимости рядов Фурье). *Если функция f удовлетворяет условию*

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| dx < \infty,$$

то ее ряд Фурье по тригонометрической системе в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.

Теорема 2 (аналог признака Дини). *Пусть h и H — произвольные действительные числа в краевых условиях, q — непрерывный потенциал ограниченной вариации, функция f интегрируема в смысле Римана на $[A, B] \subset (0, \pi)$, точка $x_0 \in (A, B)$ и функция $\varphi_{x_0}(x)$, мажорирующая функцию $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|$, монотонно возрастает при $x < x_0$ и убывает при $x > x_0$. Тогда, если для некоторого a , $0 < a \leq \pi$, φ_{x_0} суммируема в a -окрестности точки x_0 , то есть*

$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} \varphi_{x_0}(x) dx < \infty, \quad (3)$$

то интерполяционный процесс Лагранжа—Штурма—Лиувилля (1) сходится к значению функции f в точке x_0 .

Доказательство. Возьмем произвольное положительное ε . Из (3) следует непрерывность функции f в точке x_0 и существование положительного δ , для которого имеет место неравенство

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi_{x_0}(x) dx < \frac{\varepsilon \pi}{2M}, \quad (4)$$

где

$$M = \sup\{|u_n(x)|, x \in [0, \pi], n \in \mathbb{N}\}. \quad (5)$$

Индекс p определим из неравенств:

$$x_{p,n} \leq x_0 < x_{p+1,n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Из непрерывности f в точке x_0 и асимптотической формулы для $x_{k,n}$ (вывод асимптотических формул см. [1]):

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{1}{n^2}\beta\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + O(n^{-3}) \quad (7)$$

находим номер n_1 , начиная с которого выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=p-1}^{p+1} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| \leq 3C_1 \omega_{x_0}(f, \max_{k=p-1, p, p+1} |x_{k,n} - x_0|) < \varepsilon, \quad (8)$$

где ω_{x_0} — модуль непрерывности в точке x_0 . Существование константы C_1 следует из леммы 1.2 [2, С. 14, 15].

Из асимптотических формул (см. [1, 3]):

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx + O(n^{-2}), \\ u'_n(x) &= -n \sin nx + \beta(x) \cos nx + O(n^{-1}), \\ u'_n(x_{k,n}) &= (-1)^k n + O(n^{-1}), \end{aligned}$$

неравенства треугольника и формулы конечных приращений Лагранжа получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n |l_{k,n}^{SL}(x)| - \frac{|u_n(x)|}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{|x - x_{k,n}|} \right| &\leq \\ &= \sum_{k=1}^n u'_n(\xi_{k,n}) O(n^{-3}) = O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (9)$$

В силу ограниченности интегрируемой в смысле Римана функции f и (9) найдется такой номер n_2 , что для всех $n \geq n_2$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n |f(x_{k,n}) - f(x_0)| |l_{k,n}^{SL}(x_0)| - \frac{|u_n(x_0)|}{n} \sum_{k=1}^n \frac{|f(x_{k,n}) - f(x_0)|}{|x_{k,n} - x_0|} \right| &\leq \\ &\leq 2 \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)| \frac{C_2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Найдем номер n_3 , начиная с которого выполняется

$$\min_{k=1, n-1} (x_{k+1, n} - x_{k, n}) \geq \frac{\pi}{2n}.$$

Тогда из (5) и (8) получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k: x_{k, n} \in O_\delta(x_0)} (f(x_{k, n}) - f(x_0)) l_{k, n}^{SL}(x_0) \right| &\leq \frac{|u_n(x_0)|}{n} \left\{ \sum_{k=m}^{p-2} \frac{|f(x_{k, n}) - f(x_0)|}{|x_{k, n} - x_0|} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=p+2}^l \frac{|f(x_{k, n}) - f(x_0)|}{|x_{k, n} - x_0|} \right\} + 2\varepsilon \leq \frac{2M}{\pi} \left\{ \sum_{k=m}^{p-2} \varphi_{x_0}(x_{k, n})(x_{k+1, n} - x_{k, n}) + \right. \\ &\left. + \sum_{k=p+2}^l \varphi_{x_0}(x_{k, n})(x_{k, n} - x_{k-1, n}) \right\} + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

где $O_\delta(x_0)$ — δ -окрестность точки x_0 ; m и l — номера наименьшего и наибольшего из узлов, попадающих в δ -окрестность точки x_0 .

По условию теоремы функция $\varphi_{x_0}(x)$ возрастает при $x < x_0$ и убывает $x > x_0$. Тогда из (6) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k: x_{k, n} \in O_\delta(x_0)} (f(x_{k, n}) - f(x_0)) l_{k, n}^{SL}(x_0) \right| &\leq \frac{2M}{\pi} \left\{ \sum_{k=m}^{p-2} \int_{x_{k, n}}^{x_{k+1, n}} \varphi_{x_0}(x) dx + \right. \\ &\left. + \sum_{k=p+2}^l \int_{x_{k-1, n}}^{x_{k, n}} \varphi_{x_0}(x) dx \right\} + 2\varepsilon \leq \frac{2M}{\pi} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi_{x_0}(x) dx + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В точке $x_0 \in [0, \pi]$ имеет место принцип локализации (в силу леммы 5.2 из [2]). Определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(x_0), & \text{если } x \in O_\delta(x_0), \\ 0, & \text{если } x \notin O_\delta(x_0). \end{cases}$$

Теперь из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} L_n^{SL}(f, x_0) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^n f(x_{k, n}) l_{k, n}^{SL}(x_0) - f(x_0) \sum_{k=1}^n l_{k, n}^{SL}(x_0) + \\ &+ O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \sum_{k=1}^n (f(x_{k, n}) - f(x_0)) l_{k, n}^{SL}(x_0) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \end{aligned}$$

$$|L_n^{SL}(f(\cdot) - f(x_0), x_0) - L_n^{SL}(g, x_0)| =$$

$$= \left| \sum_{k: x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| < \varepsilon,$$

неравенства (4) и соответствующего выбора n получим

$$|L_n^{SL}(f, x_0) - f(x_0)| \leq \left| \sum_{k: x_{k,n} \in O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k: x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| + \varepsilon \leq \left| \sum_{k: x_{k,n} \in O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| +$$

$$+ 2\varepsilon \leq \frac{2M}{\pi} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi_{x_0}(x) dx + 4\varepsilon \leq 5\varepsilon.$$

Таким образом, теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения: М., 1953. Т. 1, 2.
2. Трынин А.Ю. Сходимость интерполяционных процессов по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1992. 121 с.
3. Трынин А.Ю. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа—Штурма—Лиувилля. Саратов, 1991. 32 с. Деп. в ВИНТИ 26.04.91, № 1763-В91.

УДК 517.984

А.Е. Федосеев

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С РАЗРЫВНЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В данной статье получена теорема равносходимости разложений в тригонометрические ряды Фурье и в ряды по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, в котором верхний предел интегрирования является разрывной функцией.

Обозначим через A оператор, действующий в пространстве $L[0, 1]$:

$$Af = \int_0^{\theta(x)} f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\theta(x) = x + \frac{1}{2}$ при $x \in [0, \frac{1}{2})$, $\theta(x) = 1 - x$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Оператор вида (1) в случае, когда функция $\theta(x)$ является инволюцией, то есть $\theta(\theta(x)) = x$, был рассмотрен в работе [1]. В данном случае $\theta(x)$ инволюцией не является. Для доказательства теоремы равносходимости разложений в тригонометрические ряды Фурье и в ряды по собственным и присоединенным функциям оператора (1) используется метод, предложенный в [2].

Пусть $y = R_\lambda(A)f = (I - \lambda A)^{-1}Af$, где I — единичный оператор, λ — спектральный параметр. Рассмотрим краевую задачу:

$$v'(x) = \lambda Dv(x) + Dm(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (2)$$

$$P_0v(0) + P_1v\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (3)$$

где $v(x) = (v_i(x))_{i=1,4}^T$, $D = (a_{ij})_{i,j=1}^4$, $a_{ij} = 0$, за исключением $a_{41} = a_{12} = -a_{23} = -a_{34} = 1$, $m(x) = (f(x), f(\frac{1}{2} + x), f(\frac{1}{2} - x), f(1 - x))^T$, $P_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$, матрицы P_0, P_1 размерности 4×4 , $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (T — знак транспонирования).

Теорема 1. *Если $v(x)$ является решением краевой задачи (2), (3), а соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A)$ существует и $R_\lambda(A)f = v_1(x)$ при $x \in [0, \frac{1}{2})$, $R_\lambda(A)f = v_2(x - \frac{1}{2})$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.*

Обозначим через $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -i$, $\omega_3 = i$, $\omega_4 = -1$ — собственные значения матрицы D . Тогда, если $\lambda \in S_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{4}\}$, то

$$\operatorname{Re} \omega_1 \geq \operatorname{Re} \omega_2 \geq 0 \geq \operatorname{Re} \omega_3 \geq \operatorname{Re} \omega_4.$$

Положим $v = \Gamma h$, где $h(x)$ — вектор той же размерности что и $v(x)$, $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^4$, $\gamma_{1j} = 1$, $\gamma_{ij} = (-1)^i \omega_j^{i-1}$. Задача (2), (3) перейдет в задачу

$$h'(x) = \lambda D_1 h(x) + m_1(x), \quad (4)$$

$$U(h) = P_0\Gamma h(0) + P_1\Gamma h\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (5)$$

где $m_1(x) = \Gamma^{-1}Dm(x)$, $\Gamma^{-1}D\Gamma = D_1 = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$.

Рассмотрим дополнительную краевую задачу, в которой дифференциальное уравнение то же, что и в (4), а краевые условия являются периодическими:

$$u'(x) = \lambda D_1 u(x) + m_1(x), \quad (6)$$

$$U_0(u) = u(0) - u\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (7)$$

Обозначим

$$g_j(x, t, \lambda) = \begin{cases} \varepsilon(x, t)e^{\lambda\omega_j(x-t)}, & \text{Re}\lambda\omega_j \leq 0, \\ -\varepsilon(t, x)e^{\lambda\omega_j(x-t)}, & \text{Re}\lambda\omega_j > 0, j = \overline{1, 4}, \end{cases}$$

$$g(x, t, \lambda) = \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), \dots, g_4(x, t, \lambda)),$$

$$g_\lambda m_1(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x, t, \lambda) m_1(t) dt,$$

$$\text{где } \varepsilon(x, t) = \begin{cases} 1, & t \leq x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Теорема 2. Если λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ и $\Delta_0^{-1}(\lambda)$ существуют, то для решения $h(x) = h(x, \lambda)$ задачи (4), (5) и решения $u(x) = u(x, \lambda)$ задачи (6), (7) имеет место формулы

$$h(x, \lambda) = -Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x, t, \lambda)) m_1(t) dt + g_\lambda m_1(x),$$

$$u(x, \lambda) = -Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda) \int_0^{\frac{1}{2}} U_{0x}(g(x, t, \lambda)) m_1(t) dt + g_\lambda m_1(x),$$

где $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda\omega_1 x}, \dots, e^{\lambda\omega_4 x})$, $\Delta(\lambda) = P_0\Gamma - P_1\Gamma Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$, $\Delta_0(\lambda) = E - Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$, U_x и U_{0x} означает, что U и U_0 применяется к $g(x, t, \lambda)$ по x .

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots$ нули функции $\Delta(\lambda)$ в рассматриваемом секторе. Выберем число $\delta > 0$ так, что $|\lambda_m - \lambda_n| > \delta$ при $m \neq n$. Введем область

$$S_\delta = \left\{ \lambda \in S_0 : |\lambda - \lambda_m| \geq \delta, \left| \lambda - i \frac{4\pi k}{\omega_j} \right| \geq \delta, j = \overline{1, 4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Лемма 1. Если $x \in [\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$, $\lambda \in S_\delta$ то

$$\|Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\|_{C[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]} = O(e^{-\varepsilon \operatorname{Re} \lambda \omega_2} + e^{\varepsilon \operatorname{Re} \lambda \omega_3}),$$

$$\|Y(x, \lambda)\Delta_0^{-1}(\lambda)\|_{C[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]} = O(e^{-\varepsilon \operatorname{Re} \lambda \omega_2} + e^{\varepsilon \operatorname{Re} \lambda \omega_3}).$$

Аналогичные оценки получаются при $\frac{\pi}{4} < \arg \lambda < 2\pi$.

Лемма 2. Имеют место оценки:

$$\|g_\lambda m_1(x)\|_\infty = O(\|f\|_1), \quad \|g_\lambda \chi(x)\|_\infty = O(\lambda^{-1}),$$

где компоненты вектор-функции $\chi(x)$ являются характеристическими функциями отрезков из $[0, \frac{1}{2}]$, $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$, $\|\cdot\|_\infty$ — норма в $L_\infty[0, 1]$.

Используя метод контурного интегрирования получаем теорему.

Теорема 3 (равносходимости). Для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$ имеют место соотношения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\omega_j} \sigma_r(m_{1j}, x) \right\|_{C[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sum_{j=1}^4 \sigma_r\left(m_{1j}, x - \frac{1}{2}\right) \right\|_{C[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$; γ_{kj} — компоненты матрицы Γ : $\Gamma^{-1}D\Gamma = D_1 = \operatorname{diag}(\omega_1, \dots, \omega_4)$; $\sigma_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по системе $\{e^{i4\pi kx}\}$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ при таких $k \in \mathbb{Z}$, что $|k| < \frac{r}{4\pi}$; m_{1j} — компоненты $m_1(x)$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кувардина Л.П., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией // Изв. вузов. Сер. Математика. 2008. № 5. С. 67–76.

2. Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.

Е.В. Хворостухина

О ПРОБЛЕМАХ РАЗРЕШИМОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

Рассматриваются так называемые гиперграфические автоматы, т.е. автоматы без выходных сигналов, у которых множества состояний наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как многообразие таких алгебраических систем охватывает, в частности, автоматы, у которых множества состояний являются плоскостями (например, проективными или аффинными), а также автоматы, у которых множество состояний разбивается на классы некоторой эквивалентности.

Данная статья посвящена исследованию проблем разрешимости элементарных теорий универсальных гиперграфических автоматов.

Согласно [1] *гиперграфом* называется система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество вершин гиперграфа и L — семейство произвольных подмножеств X , называемых *ребрами* гиперграфа. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются *смежными*. Гиперграф $H = (X, L)$ называется *эффективным*, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа. Пусть p — произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть *гиперграфом с p -определимыми ребрами*, если в каждом его ребре найдется по крайней мере $p + 1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более чем в одном ребре, т.е. каждое ребро однозначно определяется любыми своими p вершинами.

Эндоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ называется преобразование φ множества вершин X , которое смежные в гиперграфе вершины переводит в смежные вершины этого гиперграфа, т.е. удовлетворяет следующему условию:

$$(\forall l \in L)(\exists l' \in L)(\varphi(l) \subset l').$$

Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\text{End}H$.

В настоящей статье под гиперграфическим автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов [2] $A = (X, S, \delta)$,

множество состояний которого X наделено такой структурой гиперграфа $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов δ_s является эндоморфизмом H . Например, для любого гиперграфа H алгебраическая система $A = (H, \text{End}H, \delta)$ с функцией $\delta(\varphi, x) = \varphi(x)$, где $(\varphi, x) \in \text{End}H \times X$, является гиперграфическим автоматом, который обозначается $\text{Atm}(H)$ и называется *универсальным гиперграфическим автоматом*.

Полугруппу входных сигналов автомата $A = (X, S, \delta)$ будем обозначать также $\text{Inp}(A)$.

Пусть T — теория некоторой сигнатуры σ . Согласно [3] теория T называется *разрешимой*, если существует эффективная процедура, позволяющая по любому предложению Φ сигнатуры σ определить, принадлежит или нет Φ теории T . Если теория T не является разрешимой, то она называется *неразрешимой*.

Согласно [3] теория T называется *наследственно неразрешимой*, если любая подтеория теории T той же сигнатуры σ неразрешима.

Для формального языка \mathbf{L} сигнатуры σ символом $P_{\mathbf{L}}$ обозначим множество всех предложений этого языка. Для класса \mathbf{K} алгебраических систем сигнатуры σ символом \mathbf{K}_{fin} обозначается класс конечных систем из \mathbf{K} . Теория $\text{Th}(\mathbf{K})$ называется *эффективно неотделимой*, если рекурсивно неотделимы множества $\text{Th}(\mathbf{K})$ и $P_{\mathbf{L}} \setminus \text{Th}(\mathbf{K}_{fin})$, т. е. не существует таких непересекающихся рекурсивных множеств $\Phi, \Psi \subset P_{\mathbf{L}}$, что $\text{Th}(\mathbf{K}) \subset \Phi$ и $P_{\mathbf{L}} \setminus \text{Th}(\mathbf{K}_{fin}) \subset \Psi$.

Одним из важнейших методов доказательства неразрешимости теорий является метод относительно элементарной определимости [3].

Элементарная теория гиперграфических автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка УИП с трехсортными переменными L_A , которые используются для обозначения входных сигналов автомата, состояний автомата и ребер гиперграфа состояний автомата. Формула Φ языка L_A истинна на гиперграфическом автомате A , если при любой интерпретации этого языка в автомате A она образует истинное утверждение об этом автомате. Множество всех предложений языка L_A , истинных на всех автоматах из некоторого класса гиперграфических автоматов \mathbf{K} , обозначается через $\text{Th}(\mathbf{K})$ и называется *элементарной теорией класса гиперграфических автоматов \mathbf{K}* .

Построенная в [4] относительно элементарная интерпретация класса универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами в классе полугрупп дает возможность проанализировать взаимосвязь важных проблем

алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов универсальных гиперграфических автоматов и классов полугрупп.

Для класса гиперграфических автоматов \mathbf{K} символом $\text{Inp}(\mathbf{K})$ обозначается класс полугрупп вида $\text{Inp}(A)$, где $A \in \mathbf{K}$.

Теорема. *Для любого класса универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p -определимыми ребрами \mathbf{K} справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если элементарная теория класса \mathbf{K} наследственно неразрешима, то и элементарная теория класса полугрупп $\text{Inp}\mathbf{K}$ наследственно неразрешима;*
- 2) *если элементарная теория класса \mathbf{K} эффективно неотделима, то и элементарная теория класса полугрупп $\text{Inp}\mathbf{K}$ эффективно неотделима.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зыков А.А. Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29, № 6. С. 89–154.
2. Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.
3. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
4. Хворостухина Е.В. Об относительно элементарной определимости класса гиперграфических автоматов в классе всех полугрупп // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. Саратов, Россия, 1-4 июля 2009г. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 212–213.

УДК 517.51

А.А. Хромов

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМ СЕМЕЙСТВОМ РАЗРЫВНЫХ

В данной статье получена оценка погрешности приближения непрерывных функций семейством разрывных функций, построенных с помощью резольвенты оператора дифференцирования.

Рассматривается семейство операторов с разрывными образами:

$$\Omega_r u = \begin{cases} r \int_0^1 e^{r(x-t)} u(t) dt, & x \in [0, 1/2], \\ r \int_x^1 e^{-r(x-t)} u(t) dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Известно[1], что для любой функции $u(x) \in C[0, 1]$ выполняется сходимость:

$$\|\Omega_r u - u\|_{L_\infty[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty,$$

где

$$\|\cdot\|_{L_\infty[0,1]} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}.$$

Выясняется вопрос о скорости этой сходимости.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\Omega_r 1 = \begin{cases} 1 - e^{-r(1-x)}, & x \in [0, 1/2], \\ 1 - e^{-rx}, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$|\Omega_r u - u| \leq |\Omega_r u - \Omega_r 1 \cdot u(x)|_{|t-x| \leq h} + |\Omega_r u - \Omega_r 1 \cdot u(x)|_{|t-x| \geq h} + |u(x)|e^{-r/2}.$$

При этом для $x \in [0, 1/2]$

$$(\Omega_r u - \Omega_r 1 \cdot u(x))_{|t-x| \leq h} = r \int_x^{x+h} e^{r(x-t)} (u(t) - u(x)) dt,$$

$$(\Omega_r u - \Omega_r 1 \cdot u(x))_{|t-x| \geq h} = r \int_{x+h}^1 e^{r(x-t)} (u(t) - u(x)) dt;$$

для $x \in [1/2, 1]$

$$(\Omega_r u - \Omega_r 1 \cdot u(x))_{|t-x| \leq h} = r \int_{x-h}^x e^{-r(x-t)} (u(t) - u(x)) dt,$$

$$(\Omega_r u - \Omega_r 1 \cdot u(x))_{|t-x| \geq h} = r \int_0^{x-h} e^{-r(x-t)} (u(t) - u(x)) dt,$$

h — произвольное положительное число, не превосходящее $1/2$.

Теорема 1. *Для любой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $u(x)$ справедлива оценка:*

$$|\Omega_r u - u| \leq \omega(h) + 2\|u\|_{C[0,1]} e^{-rh} + |u(x)|e^{-r/2},$$

где $\omega(h)$ — модуль непрерывности функции $u(x)$, $0 < h \leq 1/2$.

Теорема 2. Если $u(x) \in Lip_M 1$, то при $h = h(r) = \frac{1}{r} \ln \frac{2Kr}{M}$ справедлива оценка

$$|\Omega_r u - u| \leq \frac{M}{r} \ln \frac{2Kr}{M} + \frac{M}{r} + Ke^{-r/2},$$

где $K = \|u\|_{C[0,1]}$, $x \in [0, 1]$ – любое.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и гранта РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.А. Приближающие свойства степеней резольвенты оператора дифференцирования // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 75–78.

УДК 517.984

А.П. Хромов

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С РАЗРЫВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ

Пусть A — интегральный оператор:

$$Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt,$$

ядро которого есть

$$A(x, t) = \varepsilon\left(\frac{1}{2}, x\right) \varepsilon(t, x) + \varepsilon\left(x, \frac{1}{2}\right) \varepsilon(x, t),$$

где $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$. Ядро $A(x, t)$ терпит разрывы при $x = t$ и $x = \frac{1}{2}$. Область значений оператора A , вообще говоря, разрывна при $x = \frac{1}{2}$. Мы рассмотрим задачу разложения по собственным функциям (в дальнейшем с.ф.) этого оператора. Оператор A интересен тем, что соответствующая краевая задача на собственные значения нерегулярна по Биркгофу и сходимость разложений по с.ф. обеспечивается специальным функциональным соотношением, которому должна удовлетворять разлагаемая функция. Функциональные соотношения в нерегулярных краевых задачах использовались и ранее [1, 2].

Пусть $y = \lambda Ay$. Тогда имеем

$$y(x) = \lambda \int_x^1 y(t) dt, \quad x \in [0, \frac{1}{2}], \quad (1)$$

$$y(x) = \lambda \int_0^x y(t) dt, \quad x \in [\frac{1}{2}, 1]. \quad (2)$$

Лемма 1. Пусть $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(\frac{1}{2} + x)$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Тогда (1), (2) эквивалентна краевой задаче

$$z_1'(x) = -\lambda z_1(x), \quad z_2'(x) = \lambda z_2(x), \quad (3)$$

$$z_1(0) = z_2(\frac{1}{2}), \quad z_1(0) = z_1(\frac{1}{2}) + z_2(0). \quad (4)$$

Уравнение для собственных значений есть

$$\Delta(\lambda) = e^{\frac{1}{2}\lambda} - 2 = 0.$$

Краевые условия (4) нерегулярны по Биркгофу, так как в $\Delta(\lambda)$ нет члена с $e^{-\frac{1}{2}\lambda}$.

Лемма 2. Для собственных значений краевой задачи (3), (4) справедливы формулы

$$\lambda_k = 4k\pi i + 2 \ln 2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При этом все λ_k простые. Соответствующие собственные функции есть

$$z(x, \lambda_k) = (2 \cdot 4^{-x} e^{-4k\pi i x}, 4^x e^{4k\pi i x})^T.$$

По лемме 2 на основании леммы 1 получаем

Теорема 1. Собственные функции оператора A есть

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 2 \cdot 4^{-x} e^{-4k\pi i x}, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 2^{-1} \cdot 4^x e^{4k\pi i x}, & x > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отметим, что все собственные функции $\varphi_k(x)$ непрерывны на $[0, 1]$, ибо $\varphi_k(\frac{1}{2} - 0) = \varphi_k(\frac{1}{2} + 0)$.

Теорема 2. Если $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на всем $[0, 1]$ ряд Фурье по с.ф. оператора A , то $f(x) \in C[0, 1]$, $f(x) = f(1 - x)$, $f(1) = 2f(\frac{1}{2})$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum a_k \varphi_k(x)$, где ряд сходится равномерно на $[0, 1]$. Тогда, прежде всего, $f(x) \in C[0, 1]$. Пусть теперь $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Тогда имеем

$$f(x) = 2^{-1} \cdot 4^x \sum a_k e^{4k\pi i x}.$$

Положим $g(x) = \sum a_k e^{4k\pi i x}$. Тогда $g(x) \in C(-\infty, \infty)$, периодична с периодом $\frac{1}{2}$ и, в частности, имеем

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1). \quad (5)$$

Пусть $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Тогда

$$f(x) = 2 \cdot 4^{-x} \sum a_k e^{-4k\pi i x} = 2^{-1} \cdot 4^{1-x} \sum a_k e^{4k\pi i(1-x)} = f(1-x).$$

Наконец, $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$ и в силу (5) $f(1) = 2g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Если $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$, $f(x) = f(1-x)$, $f(1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$, то $f(x)$ разлагается в сходящийся на $[0, 1]$ ряд Фурье по с.ф. оператора A .

Доказательство. Пусть $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Положим $g(x) = 2 \cdot 4^{-x} f(x)$. Тогда $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f(1) = g(1)$. Значит, $g(x)$ разлагается на $[\frac{1}{2}, 1]$ в равномерно сходящийся ряд Фурье по тригонометрической системе $\{e^{4k\pi i x}\}_{-\infty}^{+\infty}$, т. е. $g(x) = \sum a_k e^{4k\pi i x}$. Тем самым $f(x) = 2^{-1} \cdot 4^x \sum a_k e^{4k\pi i x} = \sum a_k \varphi_k(x)$. Пусть теперь $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1-x) = 2^{-1} \cdot 4^{1-x} \sum a_k e^{4k\pi i(1-x)} = \\ &= 2 \cdot 4^{-x} \sum a_k e^{-4k\pi i x} = \sum a_k \varphi_k(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и гранта РФФИ (проект № 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов: сб. науч. тр. Уфа, 1988. С. 182–193.

2. Гуревич А.П., Хромов А.П. Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 1. С. 3–15.

Г.В. Хромова

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ ГРИНА И МЕТОД ЛАВРЕНТЬЕВА

В данной статье устанавливается сходимость метода Лаврентьева в равномерной метрике применительно к интегральному уравнению с ядром Грина.

Рассмотрим интегральное уравнение:

$$Au = \int_0^1 A(x, t)u(t)dt = f(x), \quad (1)$$

где $A(x, t)$ — функция Грина дифференциального оператора L :

$$ly = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + p_n(x)y(x),$$

$$U_i(y) = 0, \quad (2)$$

$U_i(y)$ — линейно независимые линейные формы относительно $y^{(k)}(0)$, $y^{(k)}(1)$, $k = 0, \dots, n - 1$.

Предполагается, что функции $u(x)$, $p_k(x)$, $k = 2, \dots, n$, непрерывны, а краевые условия оператора L регулярны [1].

Ранее для приближенного решения уравнения (1) использовались методы регуляризации А.Н. Тихонова, требующие гладкости коэффициентов $p_k(x)$ [2,3].

Метод М.М. Лаврентьева, более простой по конструкции, состоит в замене уравнения (1) уравнением $(\alpha E + A)u = f$ (α — параметр) и в классической постановке дает сходимость к $u(x)$ при $\alpha > 0$ в гильбертовых пространствах [4]. В [5] даны необходимые и достаточные условия сходимости метода Лаврентьева в других метриках. Согласно [5] в случае равномерной метрики указанная сходимость будет выполняться только на замыкании области значений оператора A и только тогда, когда справедлива оценка

$$\|T_\alpha A\|_{C[0,1]} \leq K, \quad (3)$$

где $T_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$, K — константа, не зависящая от α .

Теорема. Если $T_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$, то для любой непрерывной функции $u(x)$, удовлетворяющей тем из краевых условий оператора L , которые не содержат производных, выполняется сходимость

$$\|T_\alpha f - u\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

При этом для n четного $\alpha > 0$, если $\frac{n}{2}$ четно, $\alpha < 0$, если $\frac{n}{2}$ нечетно; для n — нечетного можно брать как $\alpha > 0$, так и $\alpha < 0$.

Доказательство. В нашем случае имеем

$$T_\alpha A = \frac{1}{\alpha}(A^{-1} + \frac{1}{\alpha}E)^{-1} \equiv \lambda R_\lambda(A^{-1})|_{\lambda=-\frac{1}{\alpha}},$$

где $R_\lambda(A^{-1})$ — резольвента оператора A^{-1} , λ — спектральный параметр.

Так как $A^{-1} = L$, то речь идет об оценке резольвенты дифференциального оператора L при условии, что луч $\lambda = -\frac{1}{\alpha}$ в комплексной λ -плоскости не задевает собственных значений оператора L . Согласно [1] это будет выполняться, если выбрать α , как указано в теореме.

Далее, используем метод возмущений из теории линейных дифференциальных операторов: исследуем сначала дифференциальный оператор L_0 , содержащий в дифференциальном выражении (2) только старшую производную, а затем оцениваем вклад остальных слагаемых из (2). В результате получаем оценку (3).

В [2] показано, что замыкание области определения дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями в равномерной метрике состоит из непрерывных функций, указанных в теореме. Отсюда следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1) и РФФИ (проект 10-01-00270).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
2. *Хромова Г.В.* О регуляризации интегральных уравнений первого рода с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика. 1972. Т. 8(123). С. 94–104.
3. *Хромова Г.В.* Об оценке погрешности метода регуляризации Тихонова для интегральных уравнений с ядром Грина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 1992. № 4. С. 22–27.
4. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962 92 с.
5. *Хромова Г.В.* О сходимости метода Лаврентьева // ЖВМиМФ. 2009. Т. 49, № 6. С. 958–965.

Г.В. Хромова, О.И. Шаталина

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОЛМОГорова—
НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ
ТИХОНОВСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

В данной статье рассмотрено семейство операторов, соответствующее тихоновской регуляризации и для него решена задача типа Колмогорова—Никольского на некотором компактном классе непрерывных функций.

Пусть T_α — семейство операторов Тихонова, построенных для приближения непрерывных функций при $r = 1$ [1]. В [2] показано, что для любой непрерывной функции $u(x)$ имеет место сходимость

$$\|T_\alpha u - u\|_{C[a,b]} \rightarrow 0, \text{ при } \alpha \rightarrow 0. \quad (1)$$

В нашем случае оператор T_α является интегральным с ядрами

$$T_\alpha(x, t) = \frac{1}{\alpha} G(x, t, -\frac{1}{\alpha}),$$

где

$$G(x, t, -\frac{1}{\alpha}) = \begin{cases} \frac{ch\alpha_1 t \ ch\alpha_1(1-x)}{\alpha_1 sh\alpha_1}, & t \leq x, \\ \frac{ch\alpha_1 x \ ch\alpha_1(1-t)}{\alpha_1 sh\alpha_1}, & t > x, \end{cases} \quad (2)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 1} \quad [3, 4].$$

Пусть $u(x) \in M_B$, где

$$M_B = \{u \in C[0, 1] : u(x) = \int_0^1 B(x, t)v(t)dt, \quad \|v\|_{L_2} \leq 1\}.$$

Рассматривается величина

$$\Delta_1(T_\alpha, M_B) = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left(\int_0^1 \left[\int_0^1 T_\alpha(x, \xi)B(\xi, t)d\xi - B(x, t) \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Решается задача: получить наилучшую по порядку α оценку для $\Delta_1(T_\alpha, M_B)$ с указанием величины порядка (т.е. решить задачу типа Колмогорова—Никольского [5]).

Теорема. Если $B(x, t) = \begin{cases} 1, & t \leq x, \\ 0, & t > x \end{cases}$, то при достаточно малых α выполняется двусторонняя оценка:

$$\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{4}} - \Psi_2(\alpha) \leq \Delta_1(T_\alpha, M_B) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha^{\frac{1}{4}} + \Psi_1(\alpha),$$

где $\Psi_1(\alpha), \Psi_2(\alpha)$ суть $O(\alpha^{\frac{5}{4}})$.

Доказательство. Подставляем выражение для $B(x, t)$ и (2) в (3), обозначаем внутренний интеграл в (3) через J . Получаем

$$J = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1^2} \left(1 - \frac{ch\alpha_1(1-x)sh\alpha_1 t}{sh\alpha_1}\right), & t \leq x, \\ \frac{ch\alpha_1 x sh\alpha_1(1-t)}{\alpha_1^2 sh\alpha_1}, & t > x. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\Delta_1(T_\alpha, M_B) = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \left[\frac{1}{4\alpha_1 sh^2\alpha_1} (ch^2\alpha_1(1-x)sh2\alpha_1 x + ch^2\alpha_1 x sh2\alpha_1(1-x)) - \frac{xch^2\alpha_1(1-x) + (1-x)ch^2\alpha_1 x}{2sh^2\alpha_1} \right] (1 + O(\alpha)) \right\}^{\frac{1}{2}}$.

Далее, заменяем гиперболические функции их выражениями через экспоненты, α_1 выражаем через α , учитываем, что $1 + O(\alpha)^{\frac{1}{2}} = 1 + O(\alpha)$, а

$$\max_{x \in [0,1]} [xe^{-2\alpha_1 x} + (1-x)e^{-2\alpha_1(1-x)}] = e^{-\alpha_1},$$

и приходим к утверждению теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
2. Хромова Г.В. О тихоновской регуляризации // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 75–78.
3. Хромова Г.В. Об одном способе нахождения приближенных решений операторных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 58–79.
4. Хромова Г.В. О модулях непрерывности неограниченных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2006. № 9(532). С. 71–78.
5. Хромова Г.В. Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // ДАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

УДК 517.984

В.А. Юрко

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА НЕКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

1. Исследуется обратная задача восстановления операторов Бесселя на некомпактных звездообразных графах. Доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура решения

обратной задачи. Отметим, что обратные задачи на компактных графах исследовались в [1–3] и других работах.

Рассмотрим некомпактный звездообразный граф T в \mathbf{R}^ℓ с множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_p\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_p\}$, где $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1, p}$ — конечные отрезки, а $e_0 = [v_0, v_{p+1})$ — луч, $v_{p+1} := \infty$. Пусть l_j — длина ребра e_j , $j = \overline{1, p}$. Каждое ребро e_j , $j = \overline{1, p}$, параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка v_j соответствует $x_j = 0$, а конечная точка v_0 соответствует $x_j = l_j$. Луч $e_0 = [v_0, \infty)$ параметризуется параметром $x_0 \in [0, \infty)$ так, что $x_0 = 0$ соответствует вершине v_0 .

Интегрируемая функция Y на T имеет вид: $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0, p}}$, где функция $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j . Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0, p}}$ — интегрируемая функция на T ; q называется потенциалом. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T :

$$-y_j''(x_j) + \left(\frac{\omega_j}{x_j^2} + q_j(x_j)\right)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad j = \overline{0, p}, \quad (1)$$

со стандартными условиями склейки в вершине v_0 (см. [2]). Здесь $\omega_j = \nu_j^2 - 1/4$, $Re \nu_j > 0$, $\nu_j \notin \mathbf{N}$, $\nu_0 = 1/2$, и комплекснозначные функции $q_j(x_j)x_j^{1-2Re \nu_j}$ интегрируемы на e_j . Введем линейные формы:

$$\sigma_{jk}(y_j) := (-1)^{k-1} \langle y_j(x_j), S_{j,3-k}(x_j, \lambda) \rangle|_{x_j=0}, \quad k = 1, 2, \quad j = \overline{1, p},$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$, а $\{S_{jm}(x_j, \lambda)\}_{m=1,2}$ — фундаментальная система решений Бесселя уравнения (1) на ребре e_j такая, что $S_{jm}(x_j, \lambda) \sim c_{jm}x_j^{\mu_{jm}}$, $x_j \rightarrow 0$, $\mu_{jm} = (-1)^m \nu_j + 1/2$, $c_{j1}c_{j2} = (2\nu_j)^{-1}$, $\langle S_{j1}, S_{j2} \rangle \equiv 1$ [4]. Рассмотрим вектор $h = [h_j]_{j=\overline{1, p}}$, где h_j — комплексные числа. Положим $U_j(y_j) = \sigma_{j2}(y_j) - h_j \sigma_{j1}(y_j)$, $V_j(y_j) = \sigma_{j1}(y_j)$. Пусть $\lambda = \rho^2$, $Im \rho \geq 0$, и пусть $e(x_0, \rho)$ — решение Йоста [1] на ребре e_0 , а $\varphi_j(x_j, \lambda)$ — решение на ребре e_j при условиях $V_j(\varphi_j) = 1$, $U_j(\varphi_j) = 0$.

Зафиксируем $k = \overline{1, p}$. Пусть $\Psi_k = \{\psi_{kj}\}_{j=\overline{0, p}}$ — решение уравнения (1) на T , удовлетворяющее условиям склейки

$$\psi_{kj}(l_j, \lambda) = \psi_{k0}(0, \lambda), \quad j = \overline{1, p}, \quad \sum_{j=1}^p \psi'_{kj}(l_j, \lambda) = \psi'_{k0}(0, \lambda) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$U_j(\psi_{kj}) = \delta_{kj}, \quad j = \overline{1, p}, \quad \psi_{k0}(x_0, \lambda) = O(\exp(i\rho x_0)), \quad x_0 \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Функцию $M_k(\lambda) := V_k(\psi_{kk})$ будем называть функцией Вейля относительно вершины v_k , а вектор $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1, p}}$ — вектором Вейля.

Обратная задача. Дан вектор Вейля $M(\lambda)$, построить потенциал q на графе T и вектор h .

2. Функции Вейля имеют вид

$$M_k(\lambda) = \frac{\Delta_k(\rho)}{\Delta(\rho)},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\rho) &= G_0(\lambda)e'(0, \rho) - g_0(\lambda)e(0, \rho), \\ \Delta_k(\rho) &= G_k(\lambda)e'(0, \rho) - g_k(\lambda)e(0, \rho), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$G_0(\lambda) = \prod_{j=1}^p \varphi_j(l_j, \lambda), \quad g_0(\lambda) = G_0(\lambda) \sum_{j=1}^p \frac{\varphi_j'(l_j, \lambda)}{\varphi_j(l_j, \lambda)}, \quad (5)$$

а $G_k(\lambda)$ и $g_k(\lambda)$ получаются из $G_0(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$ заменой $\varphi_k^{(\xi)}(l_k, \lambda)$ на $S_{k2}^{(\xi)}(l_k, \lambda)$, $\xi = 0, 1$. Обозначим $\Omega_\delta = \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$. Зафиксируем $k = \overline{1, p}$, $\xi = 0, 1$ и $x_k \in (0, l_k)$. Тогда при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \Omega_\delta$, справедливы асимптотические формулы:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k^{(\xi)}(x_k, \lambda) &= (2i)^{-1} b_k \rho^{\nu_k - 1/2} (-i\rho)^\xi \exp(-i\rho x_k) [1], \\ \psi_{kk}^{(\xi)}(x_k, \lambda) &= (b_k)^{-1} \rho^{-\nu_k - 1/2} (i\rho)^\xi \exp(i\rho x_k) [1], \\ M_k(\lambda) &= b_k^0 (b_k)^{-1} \rho^{-2\nu_k} [1], \quad [1] = 1 + O(\rho^{-\delta}), \quad \delta = \min(1, 2\operatorname{Re} \nu_1, \dots, 2\operatorname{Re} \nu_p). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где константы b_k и b_k^0 вычисляются по c_{k1} , c_{k2} . Используя условия склейки (2) и граничные условия (3), вычисляем:

$$\psi_{kk}(x_k, \lambda) = S_{k2}(x_k, \lambda) + M_k(\lambda) \varphi_k(x_k, \lambda), \quad (7)$$

$$\psi_{kj}(x_j, \lambda) = M_{kj}(\lambda) \varphi_j(x_j, \lambda), \quad j \neq k, \quad \psi_{k0}(x_0, \lambda) = M_{k0}(\lambda) e(x_0, \rho), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} M_{kj}(\lambda) &= \frac{e(0, \rho) \varphi_1(l_1, \lambda) \cdots \varphi_p(l_p, \lambda)}{\Delta(\rho) \varphi_k(l_k, \lambda) \varphi_j(l_j, \lambda)}, \\ M_{k0}(\lambda) &= \frac{\varphi_1(l_1, \lambda) \cdots \varphi_p(l_p, \lambda)}{\Delta(\rho) \varphi_k(l_k, \lambda)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Теорема 1. Задание вектора Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет потенциал q на T и вектор h .

Решение обратной задачи строится следующим образом.

1) Для каждого фиксированного $k = \overline{1, p}$ решаем вспомогательную обратную задачу: по заданной функции Вейля $M_k(\lambda)$ построить потенциал q_k на e_k и число h_k . При этом используются асимптотические формулы (6), соотношение (7) и метод спектральных отображений [1].

2) Строим решения $\varphi_k(x_k, \lambda)$ и $S_{k2}(x_k, \lambda)$ на ребре e_k , а затем $\psi_{kk}(x_k, \lambda)$ по формуле (7).

3) Используя условия склейки (2), вычисляем $\psi_{kj}(l_j, \lambda)$, $j = \overline{1, p}$:

$$\psi_{kj}(l_j, \lambda) = \psi_{kk}(l_k, \lambda).$$

4) Строим $M_{kj}(\lambda)$ из соотношений (8):

$$M_{kj}(\lambda) = \frac{\psi_{kj}(l_j, \lambda)}{\varphi_j(l_j, \lambda)}.$$

5) Находим $G_0(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$ из (5).

6) Вычисляем $\frac{\Delta(\rho)}{e(0, \rho)}$ из (9):

$$\frac{\Delta(\rho)}{e(0, \rho)} = \frac{\varphi_1(l_1, \lambda) \cdots \varphi_p(l_p, \lambda)}{M_{kj}(\lambda) \varphi_k(l_k, \lambda) \varphi_j(l_j, \lambda)}.$$

7) Строим $M_0(\lambda) := \frac{e'(0, \rho)}{e(0, \rho)}$, используя (4):

$$M_0(\lambda) = \frac{1}{G_0(\lambda)} \left(\frac{\Delta(\rho)}{e(0, \rho)} + g_0(\lambda) \right).$$

8) Решая обратную задачу на ребре e_0 , строим потенциал q_0 по известной функции Вейля $M_0(\lambda)$ (см. [1]).

Таким образом, мы установили единственность решения обратной задачи на графе T и указали конструктивную процедуру построения этого решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
2. Yurko V.A. Inverse spectral problems for Sturm—Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.
3. Юрко В.А. Обратная задача для операторов Штурма—Лиувилля на произвольных компактных пространственных сетях // ДАН. 2010. Т. 432, № 3. С. 318–321.
4. Freiling G., Yurko V.A. Inverse problems for differential operators with singular boundary conditions // Mathematische Nachrichten. 2005. Vol. 278, № 12–13. P. 1561–1578.

И.Ф. Абитова, В.Ю. Ольшанский

**ОБ УЧЕТЕ ПЕРЕНОСНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ
В ОДНОЙ МОДЕЛИ ПЬЕЗОГИРОСКОПА**

Построена математическая модель устройства для измерения угловой скорости на основе пьезоэффекта при учете кориолисовых и переносных сил инерции. Выполнен анализ влияния на амплитуду вынужденных колебаний каждой из указанных сил инерции при различных значениях угловой скорости.

Рассматривается следующая модель [1] устройства для измерения угловых скоростей подвижного объекта: к взаимно перпендикулярным плоскостям прикреплены тонкие пластины толщиной δ и площадью σ . Груз массы m закреплен так, что от него на контактирующие пластины передаются только нормальные усилия.

Пластины выполнены из пьезокерамики. Материал сориентирован таким образом, что при сжатии пластины силой, перпендикулярной ее плоскости, возникает продольный пьезоэффект [2, с. 228–232]. К пластинам крепят электроды, $u_i(t)$ – разность потенциалов на свободной поверхности и поверхности, которая закреплена на соответствующей координатной плоскости. Электрическое поле, переменное во времени, порождает в пластине плоские деформационные волны, – этот процесс вынуждает груз двигаться. При наличии угловой скорости относительно инерциальной системы возникают силы инерции, которые действуют на груз M .

Рассматривается простейшая математическая модель, позволяющая оценить влияние угловой скорости подвижной системы на амплитуду и другие характеристики колебаний.

Пусть силовое поле отсутствует. Кроме реакций связей на груз M действует сила инерции. Относительная деформация S_i с механическим напряжением T_i и напряженностью электрического поля E_i в пластине Π_i связана уравнением обратного пьезоэффекта [2, с. 228–232]

$$S_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = d^E E_i + s^E T_i. \quad (1)$$

Здесь $\xi_i(x_i, t)$ — перемещение плоского слоя с координатой x_i в пластине Π_i , $T_i(x_i, t)$ — механическое напряжение в пластине Π_i по оси i , $E_i(t) = U_i/\delta$, $x_i \in [0, \delta]$, d^E — пьезомодуль при продольном пьезоэффекте, s^E — упругие податливости по осям при $E = \text{const}$.

Приравнявая силы, вызванные механическими напряжениями T_i в пластине, и силы, действующие на свободную поверхность пластины со стороны груза M , получим

$$T_i(\delta_i, t)\sigma_i = F_i + M \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2}, \quad i = 2, 3. \quad (2)$$

Здесь F_i — сила инерции, обусловленная движением объекта, $F_i = F_i^e + F_i^c$, F_i^e , F_i^c — переносная и кориолисова составляющие силы инерции.

$$\begin{aligned} F_2^e &= -\frac{ma}{2} [\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 - (\omega_1^2 + \omega_3^2)], \\ F_3^e &= -\frac{ma}{2} [\omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)], \\ F_2^c &= 2m\omega_1 \frac{\partial \xi_3(\delta, t)}{\partial t}, \quad F_3^c = -2m\omega_1 \frac{\partial \xi_2(\delta, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ранее эта задача была рассмотрена без учета переносной силы инерции (см. [1]).

Для описания распространения плоских упругих волн используем волновое уравнение:

$$k_1 \xi_{tt}'' + k_2 \xi_t' = \xi_{xx}'' \quad (4)$$

где $k_1 = \frac{1}{(c^E)^2}$, c^E — скорость звука в пьезокерамической пластине при $E = \text{const}$, $k_2 = \frac{2\beta}{Qc^E}$, (по этой формуле определяется коэффициент затухания), β — резонансная частота, Q — механическая добротность пьезоматериала.

Дополним уравнения (4) начальными и граничными условиями:

$$\xi_i(x_i, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad i = 2, 3; \quad (5)$$

$$\xi_i(0, t) = 0, \quad i = 2, 3. \quad (6)$$

В дальнейшем считаем, что напряженность электрического поля для пластины Π_2 изменяется по закону $E_2(t) = E \sin \beta t$, а напряженность электрического поля, приложенного к пластине Π_3 , — $E_3 = 0$.

Из условий (1), (2) получаем соотношения, связывающие граничные условия волновых уравнений (4):

$$\left. \frac{\partial \xi_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right|_{x_i=\delta} = d^E E_i(t) + \frac{s^E}{\sigma} \left[-m \frac{\partial^2 \xi_i(\delta, t)}{\partial t^2} + 2(-1)^j m \omega_1 \frac{\partial \xi_j(\delta, t)}{\partial t} + P_i \right],$$

$$i = 2, 3, \quad j = 5 - i, \quad (7)$$

где P_2 и P_3 — компоненты переносной силы по соответствующим осям. Рассмотрим в дальнейшем квазистационарный случай $\omega_1 = \text{const}$. Затем перейдем в задаче к безразмерным переменным $x_i = x_i^P/\delta$, $\xi_i = \xi_i^P/\delta$, $t = t^p \cdot c^E/\delta$, $i = 2, 3$.

Будем рассматривать установившиеся колебания. Для функций ξ_i , $i = 2, 3$, имеем уравнение (4) с граничными условиями (6) и (7), решение которого представляется в виде суммы решений двух задач. Функция ξ^E есть решение уравнения (4), удовлетворяющего условию (6) и условию

$$\left. \frac{\partial \xi^E}{\partial x} \right|_{\tilde{x}=1} = d^E E \sin \beta t + \kappa \left[-\frac{\partial^2 \xi^E(1, t)}{\partial t^2} - i\epsilon \frac{\partial \xi^E(1, t)}{\partial t} \right], \quad (8)$$

где $\kappa = \frac{s^E(c^E)^2 m}{\sigma \delta}$, $\epsilon = \frac{2\omega_1 \delta}{c^E}$. Для удобства решения введена новая функция $\xi^E = \xi_2^E + i\xi_3^E$.

Для функций ξ_i^P условие (8) заменяется двумя условиями:

$$\left. \frac{\partial \xi_i^P(x, t)}{\partial x} \right|_{\tilde{x}=1} = \frac{s^E}{\sigma} P_i + \kappa \left[-\frac{\partial^2 \xi_i^P(1, t)}{\partial t^2} + \epsilon(-1)^i \frac{\partial \xi_j^P(1, t)}{\partial t} \right],$$

$$i = 2, 3, \quad j = 5 - i. \quad (9)$$

Решение первой задачи описывает вынужденные колебания, решение второй — учитывает вклад постоянных сил. Для первой задачи решение ищем в виде

$$\xi^E(x, t) = X_1(x) \cos \beta t + X_2(x) \sin \beta t.$$

Решение второй задачи запишем в следующем виде:

$$\xi_2^P(x, t) = X_3(x) = a_3 + b_3 x, \quad \xi_3^P(x, t) = X_4(x) = a_4 + b_4 x.$$

Решением уравнения (4) будет функция $\xi_i(x, t) = \xi^E(x, t) + \xi_i^P(x, t)$.

На основе этого решения была построена зависимость амплитуды колебаний пластины Π_3 от частоты вынужденных колебаний β . При частоте $\beta=0,463(2,778\text{МГц})$ достигается максимальная амплитуда.

Учет переносных сил инерции P_2 и P_3 становится существенным, когда угловая скорость достигает значений 300 об/мин и выше. Расчеты проведены при следующих значениях характеристик $\delta = 6 \cdot 10^{-4}$ м, $\sigma = 1,75 \cdot 10^{-4}$ м², $c^E = 3,6 \cdot 10^3$ м/с, $m = 10^{-3}$ кг, $s^E = 3,5 \cdot 10^{-11}$ м²/Н, $d^E = 4 \cdot 10^{-10}$ м/В, $U_0 = 400$ В, $Q = 90$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нагар Ю.Н., Ольшанский В.Ю., Панкратов В.М., Серебряков А.В.* Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2. С. 71–74.
2. *Окадзаки К.* Технология керамических диэлектриков. М.: Энергия, 1976.

УДК 539.3

Н.С. Анофрикова, Н.В. Сергеева

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОМ СЛОЕ: СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОГО ПО НОРМАЛЬНОЙ КООРДИНАТЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

В работах [1–3] на примере упругого слоя и цилиндрической оболочки показана возможность построения дисперсионных кривых с помощью асимптотических приближенных теорий. Данная работа посвящена исследованию влияния наследственности на поведение дисперсионных кривых в случае наследственно-упругого слоя, материал которого описывается с помощью модели Работнова [4]. Будем рассматривать распространение волн в бесконечной наследственно-упругой пластине ограниченной плоскостями $z = \pm h$, в направлении оси x (рис. 1). Динамическое напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины описывается уравнениями движения в напряжениях, записанных для случая плоской задачи, и уравнениями состояния:

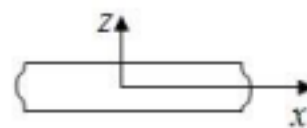


Рис. 1

$$\begin{cases} \tilde{E}\epsilon_{ii} = \sigma_{ii} - \tilde{\nu}(\sigma_{22} + \sigma_{kk}), \\ 0 = \sigma_{22} - \tilde{\nu}(\sigma_{ii} + \sigma_{jj}), \\ \tilde{E}\epsilon_{ij} = (1 + \tilde{\nu})\sigma_{ij}, \quad i \neq j \neq k = 1, 3, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{E} = E(1 - \Gamma^*)$, $\tilde{\nu} = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2}\Gamma^*$,

$$\Gamma^* f(t) = k \int_{-\infty}^t \mathfrak{D}_{-\frac{1}{2}}(-\beta_*, t - t_*) f(t_*) dt_*, \quad (2)$$

$\mathfrak{D}_{-\frac{1}{2}}(-\beta_*, t) = t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_*)^n t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, σ_{ij} , ϵ_{ij} — компоненты тензора напряжений и тензора деформаций соответственно, E , ν — мгновенные

значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, k , β_* — параметры материала, t — время.

При изучении собственных колебаний будем исследовать свойства тех мод, которые изменяются во времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения, уравнениям состояния (1), записанным в перемещениях и напряжениях, и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях. Тогда решение для перемещений v_i будем искать в виде

$$v_i = v_i(z) \exp(i\omega t - (\alpha_* + i\chi)x), \quad (3)$$

где ω — частота, χ — волновое число, $\alpha_* > 0$ — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты x .

С учетом (2) и (3) уравнения состояния (1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} EE^F \epsilon_{ii} = \sigma_{ii} - \nu^F (\sigma_{22} + \sigma_{kk}), \\ 0 = \sigma_{22} - \nu^F (\sigma_{ii} + \sigma_{jj}), \\ EE^F \epsilon_{ij} = (1 + \nu^F) \sigma_{ij}, \quad i \neq j \neq k = 1, 3, \end{cases} \quad (4)$$

где $E^F = 1 - \frac{k}{\beta_* + \sqrt{i\omega}}$, $\nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k}{\beta_* + \sqrt{i\omega}}$.

Рассмотрим случай симметричного по нормальной координате НДС, когда перемещение v_1 и напряжения σ_{11} , σ_{33} являются четными по нормальной координате функциями, а v_3 , σ_{13} — нечетными. В этом случае приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\gamma^4 \cosh(\alpha) \frac{\sinh(\beta)}{\beta} - \alpha^2 \chi_*^2 \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha} \cosh(\beta) = 0, \quad (5)$$

где $\alpha^2 = \chi_*^2 - \kappa_F^2 \Omega^2$, $\beta^2 = \chi_*^2 - \Omega^2$, $\gamma^2 = \chi_*^2 - \frac{\Omega^2}{2}$, $i\chi_* = \alpha_* + i\chi$, $\kappa_F^2 = \frac{1 - 2\nu^F}{2 - 2\nu^F}$, $\Omega^2 = \omega_*^2 \frac{2(1 + \nu^F)}{E^F}$, $\omega_* = \frac{h}{c_2} \omega$, $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \nu)\rho}}$, ρ — плотность материала.

Формально уравнение (5) имеет тот же вид, что и дисперсионное уравнение для упругой полосы (см. [1]), но в отличие от последнего уравнение (5) является комплексным. Поэтому дисперсионное уравнение в случае наследственно-упругого слоя в отличие от дисперсионного уравнения упругого слоя (см. [1–3]) не имеет комплексно-сопряженных корней. Но из вида уравнения (5) следует, что если χ_* — решение дисперсионного уравнения (5), то и $-\chi_*$ также будет его решением,

следовательно, существует симметрия дисперсионных кривых при замене χ_* на $-\chi_*$.

Отсутствие комплексно-сопряженных корней ведет к нарушению симметрии частотного спектра относительно плоскостей $\chi = 0$ и $\alpha_* = 0$. Таким образом, в наследственно-упругом спектре ветви разделяются. На рис. 2, а, б, в показаны проекции на плоскость (ω_*, χ) ветвей дисперсионного спектра как с положительной, так и с отрицательной мнимой частью χ_* для случаев: а) $k_* = 0.53$, $\beta_{**} = 1$; б) $k_* = 0.53$, $\beta_{**} = 2$; в) $k_* = 0.05$, $\beta_{**} = 1$ ($k_* = \sqrt{\frac{h}{c_2}}k$, $\beta_{**} = \sqrt{\frac{h}{c_2}}\beta_*$) соответственно. Из графиков видно, что чем больше значение k_* или меньше значение β_{**} , тем раньше и больше начинают расходиться дисперсионные кривые. На рис. 2, г изображены дисперсионные кривые для упруго-подобного материала ($k_* = 0$).

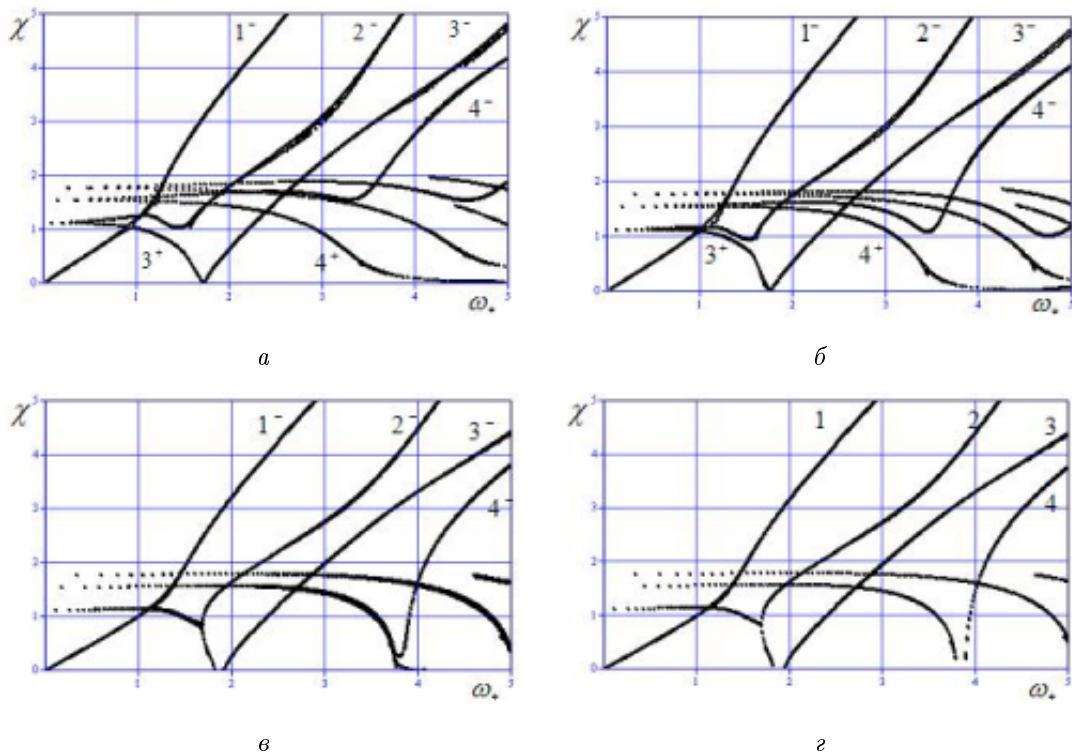


Рис. 2

Из графиков видно, что при уменьшении значений k_* или при увеличении значений β_{**} поведение дисперсионных кривых стремится к упругому случаю. Также численные расчеты показывают, что дисперсионные кривые наследственно-упругого спектра, соответствующие действительным ветвям упругого спектра, являются комплексными с отрицательной мнимой частью χ_* , что определяет затухание решения по координате. Кроме того, из графиков видно, что в окрестностях частот запираения и частотных минимумов упруго-подобного спектра ветви наследственно-упругого спектра имеют

наибольшую кривизну. Увеличение значения k_* , как и уменьшение значения β_{**} , ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях.

Следует заметить, что для наследственно-упругого спектра теряют смысл понятия частоты запираения, так как $\chi_* = 0$, $\omega_* > 0$ не являются корнями уравнения (5) и частотного минимума, поскольку при движении вдоль ветви ω_* монотонно возрастает.

Таким образом, упруго-подобный спектр приближенно можно рассматривать как асимптотический для наследственно-упругого при $k_* \rightarrow 0$, $\beta_{**} \gg 1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кожанова Т.В., Коссович Л.Ю. Дисперсионные уравнения Релея—Лэмба. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 21 с.
2. Karlnov J.D., Kossovich L.Ju., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. Jan Diego: Academic Press, 1998.
3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
4. Работнов Ю.И. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

УДК 539.3

Н.С. Анофрикова, Ю.В. Шевцова

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОПРУГОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

В данной работе результаты асимптотических методов исследования динамических задач для тонких упругих пластин и оболочек [1–3] применяются к случаю двухслойных пластин, выполненных из вязкоупругого материала. В основу исследования положена методика непосредственного вывода асимптотических приближений из точных трехмерных уравнений [4].

Рассмотрим бесконечную двухслойную пластину, каждый слой которой выполнен из вязкоупругого материала, свойства которого описываются моделью стандартного вязкоупругого тела. В l -м слое ($l = 1, 2$) введем декартову систему координат $(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, z^{(l)})$, совмещая плоскость $Ox_1^{(l)}x_2^{(l)}$ со срединной плоскостью слоя и направляя ось $z^{(l)}$ по нормали к срединной плоскости. Введем обозначения: $\sigma_{ij,l}$ —

напряжения, $u_{i,l}$ — перемещения в l -м слое пластины; $2h_l$ — толщина слоя.

Будем предполагать, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки. Тогда граничные условия на них имеют вид ($k = \overline{1, 3}$)

$$\begin{aligned} \text{при } z^{(1)} = -h_1 \quad \sigma_{3k,1} &= 0, \\ \text{при } z^{(2)} = h_2 \quad \sigma_{3k,2} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия на стыке двух слоев пластины — условия непрерывного контакта — сформулируем следующим образом [5]:

$$\text{при } z^{(2)} = -h_2, \quad z^{(1)} = h_1 : \quad \sigma_{3k,2} = \sigma_{3k,1}, \quad u_{k,2} = u_{k,1}. \quad (2)$$

Приведем точные трехмерные динамические уравнения теории вязкоупругости для пластины. Уравнения движения возьмем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ii,l}}{\partial x_i^{(l)}} + \frac{\partial \sigma_{ji,l}}{\partial x_j^{(l)}} + \frac{\partial \sigma_{zi,l}}{\partial z^{(l)}} - \rho_l \frac{\partial^2 u_{i,l}}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{i3,l}}{\partial x_i^{(l)}} + \frac{\partial \sigma_{j3,l}}{\partial x_j^{(l)}} + \frac{\partial \sigma_{33,l}}{\partial z^{(l)}} - \rho_l \frac{\partial^2 u_{3,l}}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ_l — плотность материала слоя.

Уравнения состояния для l -го слоя могут быть записаны следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} E_l \left(\frac{1}{t_{2l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_{i,l}}{\partial x_i} &= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{(1-2\nu_l)}{t_{2l}} + 2 \frac{(1+\nu_l)}{t_{1l}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \right] \sigma_{ii,l} + \\ &+ \left[\frac{1}{3} \left(\frac{(1-2\nu_l)}{t_{2l}} - \frac{(1+\nu_l)}{t_{1l}} \right) - \nu_l \frac{\partial}{\partial t} \right] (\sigma_{jj,l} + \sigma_{33,l}), \\ E_l \left(\frac{1}{t_{2l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_{3,l}}{\partial z} &= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{(1-2\nu_l)}{t_{2l}} + 2 \frac{(1+\nu_l)}{t_{1l}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \right] \sigma_{33,l} + \\ &+ \left[\frac{1}{3} \left(\frac{(1-2\nu_l)}{t_{2l}} - \frac{(1+\nu_l)}{t_{1l}} \right) - \nu_l \frac{\partial}{\partial t} \right] (\sigma_{ii,l} + \sigma_{jj,l}), \\ \frac{E_l}{1+\nu_l} \left(\frac{1}{t_{2l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_{i,l}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{j,l}}{\partial x_i} \right) &= \left(\frac{1}{t_{1l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{ij,l}, \\ \frac{E_l}{1+\nu_l} \left(\frac{1}{t_{2l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_{i,l}}{\partial z} + \frac{\partial u_{3,l}}{\partial x_i} \right) &= \left(\frac{1}{t_{1l}} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{3i,l}, \\ &(i \neq j = 1, 2; l = 1, 2), \end{aligned} \quad (4)$$

где t_{1l} — характерное время релаксации, t_{2l} — характерное время ползучести, E_l , ν_l — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициент Пуассона l -го слоя соответственно.

Произведем в уравнениях (3), (4) растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$x_i^{(l)} = L\eta_l^{q_l}\xi_i^{(l)}, \quad z^{(l)} = L\eta_l\zeta^{(l)}, \quad t = Lc_{2l}^{-1}\eta_l^{a_l}\tau_l, \quad (5)$$

где $\eta_l = h_l L^{-1}$ — малый параметр, L — характерный размер длины, q_l — показатель изменяемости, c_{2l} — скорость волны сдвига, a_l — показатель динамичности. Предположим, что дифференцирование по безразмерным переменным $\xi_i^{(l)}$, $\zeta^{(l)}$, τ_l не меняет асимптотический порядок неизвестных величин. Введение независимых переменных (5) позволяет методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории вязкоупругости вывести асимптотически приближенные уравнения для составляющих НДС при различных показателях изменяемости и динамичности. Остановимся на случае так называемых длинноволновых низкочастотных тангенциальных приближений. К этому виду относятся приближения, для которых $q_l < 1$, $a_l < 1$. Данный тип приближений соответствует теории растяжения тонких пластин. В этом случае тангенциальные компоненты вектора перемещений велики по сравнению с его нормальной компонентой $u_{i,l} \gg u_{3,l}$.

Оценим величины времен ползучести и релаксации, вводя показатели их интенсивности по формулам

$$t_{il} = Lc_{2l}^{-1}\eta_l^{r_{il}}\tau_{il}, \quad (6)$$

и будем предполагать, что $r_{il} \leq a_l$ ($i = 1, 2$).

При построении тангенциального приближения показатели изменяемости и динамичности для каждого слоя связаны соотношением $q_l = a_l$. Введем следующие асимптотики для компонент НДС [7]:

$$\begin{aligned} u_{i,l} &= L\eta_l^{q_l}u_{i,l}^0, & u_{3,l} &= L\eta_l u_{3,l}^0, & \sigma_{ii,l} &= E_l\sigma_{ii,l}^0, & \sigma_{ij,l} &= E_l\sigma_{ij,l}^0, \\ \sigma_{3i,l} &= E_l\eta_l^{1-q_l}\sigma_{3i,l}^0, & \sigma_{33,l} &= E_l\eta_l^{2-2q_l}\sigma_{33,l}^0 \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (7)$$

Предполагается, что величины с индексом «0» имеют один и тот же асимптотический порядок.

В силу выбора асимптотик (7) в уравнения движения, записанные с учетом (5), (6) в рамках погрешности $O(\eta_l^{2-2q_l})$, входят слагаемые, содержащие производные по $\zeta^{(l)}$ от $\sigma_{3i,l}^0$ ($i = \overline{1, 3}$). Такой выбор асимптотик позволяет удовлетворить всем граничным условиям на лицевых поверхностях при асимптотическом интегрировании.

Введем следующую зависимость компонент НДС от нормальной координаты:

$$\begin{aligned} u_{i,l}^0 &= u_{i,l}^{(0)}, & u_{3,l}^0 &= u_{3,l}^{(0)} + \zeta v_{3,l}^{(1)}, & \sigma_{ii,l}^0 &= \sigma_{ii,l}^{(0)}, & \sigma_{ij,l}^0 &= \sigma_{ij,l}^{(0)}, \\ \sigma_{3i,l}^0 &= \sigma_{3i,l}^{(0)} + \zeta \sigma_{3i,l}^{(1)}, & \sigma_{33,l}^0 &= \sigma_{33,l}^{(0)} + \zeta \sigma_{33,l}^{(1)} + \zeta^2 \sigma_{33,l}^{(2)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где величины с индексами в скобках не зависят от $\zeta^{(l)}$.

Переход в граничных условиях (1), (2) к представлениям (7), (8) позволяет установить связь между компонентами НДС первого и второго слоев.

В результате асимптотического интегрирования получена система относительно асимптотически главных компонент НДС $u_{i,l}^{(0)}$, $\sigma_{ii,l}^{(0)}$, $\sigma_{ij,l}^{(0)}$, $\sigma_{i3,l}^{(0)}$, $\sigma_{i3,l}^{(1)}$ и система, определяющая асимптотически второстепенные компоненты через асимптотически главные.

Приведем вид размерной двумерной формы записи полученной системы для асимптотически главных компонент НДС. Введем перемещения u_i , усилия T_i , S_{ij} и усредненную плотность ρ по формулам

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= u_{i,2} = u_i, & T_i &= 2(h_1 \sigma_{ii,1} + h_2 \sigma_{ii,2}), & S_{ij} &= 2(h_1 \sigma_{ij,1} + h_2 \sigma_{ij,2}), \\ \rho &= \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h}, & h &= h_1 + h_2. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом (9) система разрешающих уравнений для асимптотически главных компонент НДС имеет вид

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - 2\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0,$$

$$\left[\frac{h_1 E_1}{1 + \nu_1} f_{12} f_{21} + \frac{h_2 E_2}{1 + \nu_2} f_{11} f_{22} \right] \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = f_{11} f_{12} S_{ij},$$

$$\begin{aligned} 2[h_1 E_1 (f_{32} + f_{42}) f_{21} + h_2 E_2 (f_{31} + f_{41}) f_{22}] \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \\ = (f_{31} + f_{41})(f_{32} + f_{42})(T_i + T_j), \end{aligned}$$

где $f_{il} = \left(\frac{1}{t_{il}} + \frac{\partial}{\partial t} \right)$, $f_{3l} = \frac{1}{3} \left(\frac{1-2\nu_l}{t_{2l}} + 2 \frac{1+\nu_l}{t_{1l}} \right) + \frac{\partial}{\partial t}$, $f_{4i} = \frac{1}{3} \left(\frac{1-2\nu_l}{t_{2l}} - \frac{1+\nu_l}{t_{1l}} \right) - \nu_l \frac{\partial}{\partial t}$, $i \neq j = 1, 2$, $l = 1, 2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kaplanov Ju.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. London: Academic Press, 1998. 226 p.

2. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.

3. *Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д.* Асимптотический анализ нестационарных упругих волн // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 111–131.

4. *Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83–91.

5. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1971.

6. *Новацкий В.* Динамика сооружений. М.: Госстройиздат, 1963. 376 с.

7. *Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В.* Асимптотические приближения трехмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. науч. тр. Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2005. Вып. 67. С. 102–111.

УДК 533.6.011

Э.В. Антоненко, Н.А. Привалова

МОДЕЛИ СТАНДАРТНОЙ АТМОСФЕРЫ

Использование летательных аппаратов (ЛА) в различных странах мира связано с единым подходом к аэродинамическому и баллистическому расчетам. Эти расчеты определяют летные и летно-тактические качества ЛА, их прочность и допускаемые перегрузки.

Параметры атмосферы и ближнего космоса, определяющие нагрузки и прочность ЛА, зависят от географического положения, времени года, суток, от случайных метеорологических условий. Испытания ЛА требуется приводить к одинаковым условиям. Появилась необходимость создания некоторой условной стандартной атмосферы (СА), являющейся моделью действительной атмосферы, в которой отсутствуют колебания, связанные с метеорологическими или астрономическими факторами. Такие СА в различных странах мира появились в начале XX в. в виде таблиц и формул, позволяющих найти температуру T , давление p , плотность ρ , скорость звука и другие характеристики газовой среды для любой заданной высоты H . Они отражают некоторое среднее состояние атмосферы.

В основе закономерностей, принятых в СА, лежит закон изменения температуры по высоте, найденный из опытов. Используя его, уравнение состояния и уравнение равновесия элементарного объема воздуха [1] в плотных слоях атмосферы

$$p = \rho RT, \quad dp = -\rho g dH,$$

где g — ускорение свободного падения, устанавливают связь всех параметров атмосферы от высоты над уровнем мирового океана. Например,

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\int \frac{gdH}{RT}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T} \frac{p}{p_0},$$

где нулевой индекс соответствует высоте $H = 0$.

В России идея создания СА была предложена и реализована М.В. Остроградским и Н.В. Майевским в нормальной артиллерийской атмосфере (НАА), разработанной до высот 30 километров [2]. В НАА, как и в других СА, воздух считается неподвижным.

Спустя некоторое время зарубежные СА превратились в документ, получивший наименование международная стандартная атмосфера (МСА). Его первые результаты были представлены до высот 15 км [3]. Зависимости давления и плотности воздуха до 11 км определялись формулами Бьеркнесса, при $H > 11$ км — формулами Галлея соответственно:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{H}{4430}\right)^{4,256}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{H-11000}{6340}}. \quad (1)$$

В.П. Ветчинкиным была предложена другая зависимость (для $H = 5$ – 100 км)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{H}{D}}, \quad D = 7500\text{м}. \quad (2)$$

Результаты расчётов по (1) и (2) приведены на рис. 1, где номера кривых соответствуют номерам формул.

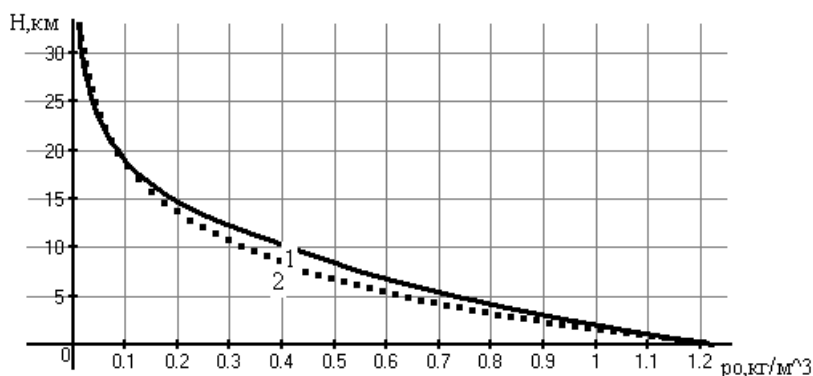


Рис. 1

Увеличение высот полёта ракет и современные технологии позволили уточнить состояние атмосферы, что отражено в документах: Временная СА ВСА-60 и СА-64 (ГОСТ 4401 – 64) до высот 200 км; СА-81 (ГОСТ 4401-81) и МСА до высот 300 км. В двух последних документах

ассортимент параметров существенно расширен. В массивы данных введены скорость звука, динамическая и кинематическая вязкость, молекулярная масса и др. Различие этих параметров в данных документах незначительно.

Исходные данные для построения массивов параметров атмосферы – зависимость $T = T(H)$ представлены на рис. 2, 3, где номера кривых соответствуют: 1 – НАА, 2 – СА-64, 3 – СА-81.

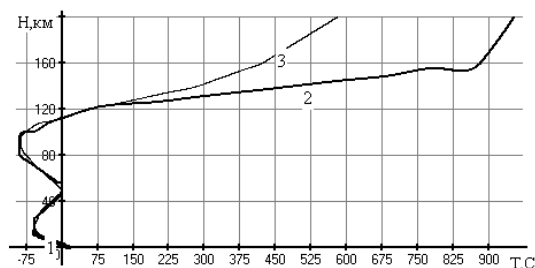


Рис. 2

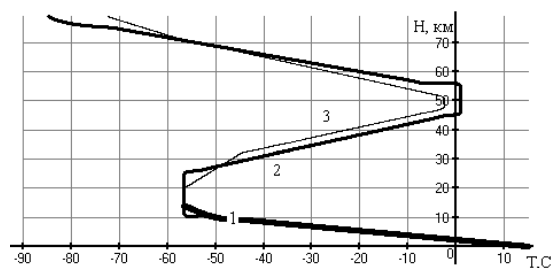


Рис. 3

Используя различные модели СА были рассчитаны осевые перегрузки N_x ЛА при баллистическом спуске с орбиты. Результаты расчётов по методу Ветчинкина [4] представлены на рис. 4

$$N_x = -\frac{C_x S v_k^2}{2m} \rho e^{-2\xi\rho}, \xi = \frac{C_x S D}{2m \sin \Theta_k},$$

где коэффициент лобового сопротивления $C_x = 0.5$, площадь мидела $S = 1m^2$, скорость в конце активного участка траектории $v_k = 6000$ м/с, масса ЛА $m = 1000$ кг, $\rho = 1.225$ кг/м³, $D = 7500$, угол наклона траектории $\Theta_k = \frac{\pi}{6}$.

Номера кривых соответствуют моделям: 1 – НАА, 2 – СА-64, 3 – СА – 81, 4 – модель Ветчинкина, 5 – модель Бьернесса–Галлея.

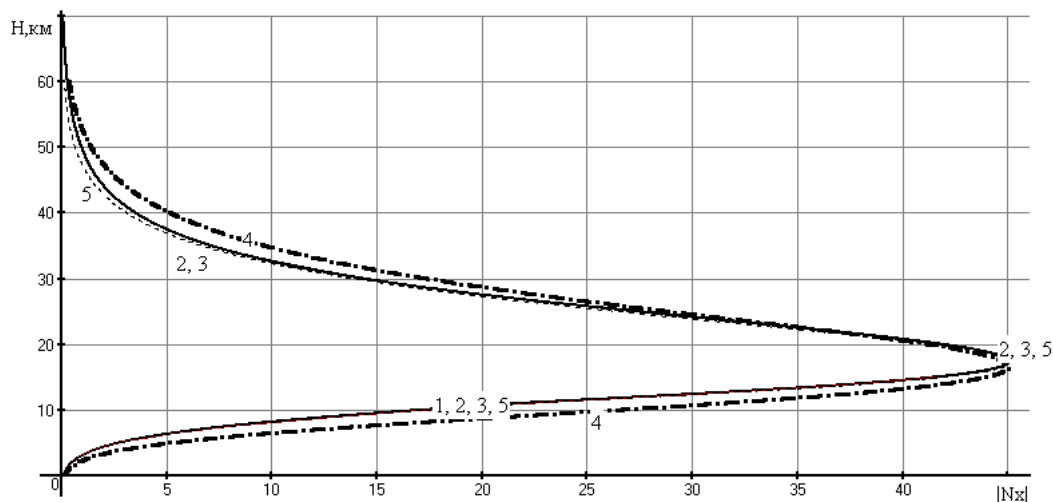


Рис. 4

Максимальные значения осевых перегрузок оказались практически одинаковыми для всех моделей, высоты их достижения варьируются от 16 до 18 км. На высотах $H > 23$ км и $H < 15$ км значения перегрузок для всех моделей СА (кроме модели Ветчинкина) практически одинаковы, для модели Ветчинкина они значительно больше. Результаты измеренных перегрузок при баллистических спусках оказались в диапазонах между представленными зависимостями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Аппазов Р.Ф., Лавров С.С., Мишин В.П.* Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М.: Наука, 1966. 308 с.
2. *Дмитриевский А.А., Кошевой В.Н.* Основы теории полёта ракет. М.: Воениздат, 1964. 312 с.
3. *Чесалов А.В.* Международная стандартная атмосфера и приведение к ней результатов испытаний самолётов // Тр. ЦАГИ. М., 1929. Вып. 42. С. 161–168.
4. *Антоненко Э.В.* Основы теории движения летательных аппаратов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. 64 с.

УДК 539.3

В.М. Аранович, А.А. Барышев

АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НДС ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА

В статье проведен анализ одномерной модели определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тазобедренного сустава. Изучены известные математические модели распределения сил на головку и шейку бедра, предложенные В.Е. Беленьким [1] и Х.А. Янсоном [2]. Обе они описывают распределение сил при одноопорном устойчивом положении конечности, но при этом модель Беленького учитывает влияние на сустав только веса тела и тяги отводящих мышц, а модель Янсона учитывает еще и действие подвздошно-поясничной мышцы. На рис. 1 изображено схематичное представление сил, действующих в области тазобедренного сустава (\vec{T} — тяга подвздошно-поясничной мышцы, \vec{Q} — тяга отводящих мышц бедра, \vec{P} — вес тела, \vec{R} — равнодействующая сила).

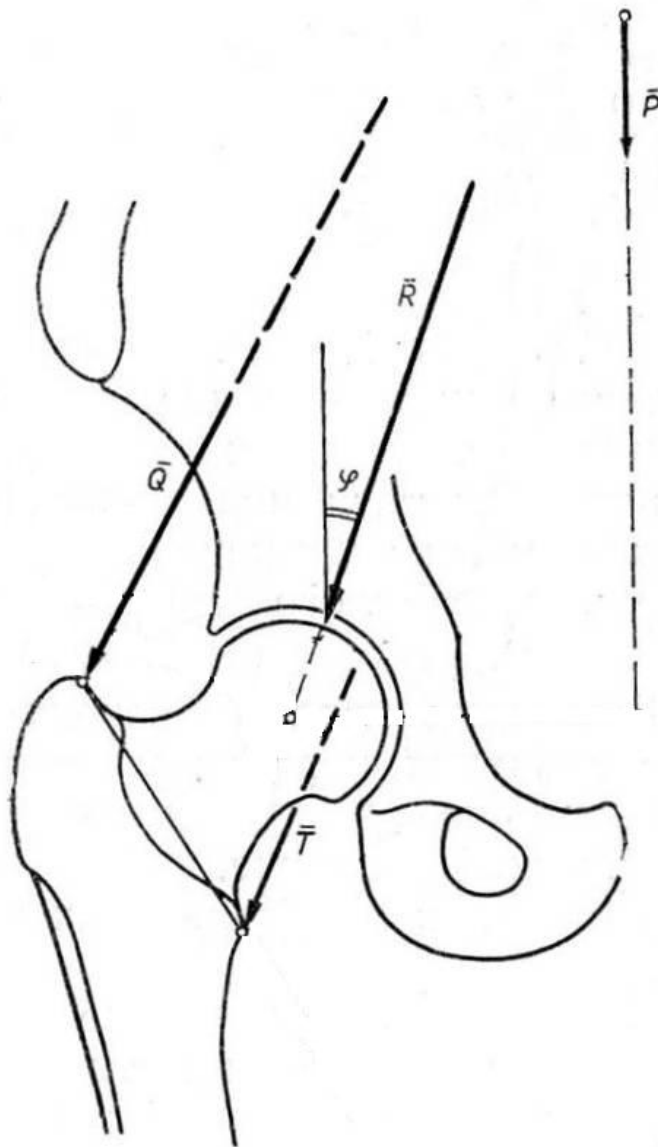


Рис. 1

Математическая постановка задачи в обоих случаях определяет статико-динамическое равновесие сил в отношении центра сустава. Используя известные соотношения, были получены значения равнодействующей, угол ее отклонения от вертикали и выражения для нахождения напряжений в головке бедренной кости и на межвертельной линии. Для сравнения вычисленных значений с результатами конечно-элементного анализа в программном комплексе Ansys [3] была создана конечно-элементная модель бедренной кости человека (рис. 2), построенная по снимкам компьютерной томограммы и учитывающая кортикальную и губчатую структуру. Снимки обрабатывались в комплексе Mimics 12.0 [4]. В рамках построенной модели предполагалось, что слои упругие изотропные.

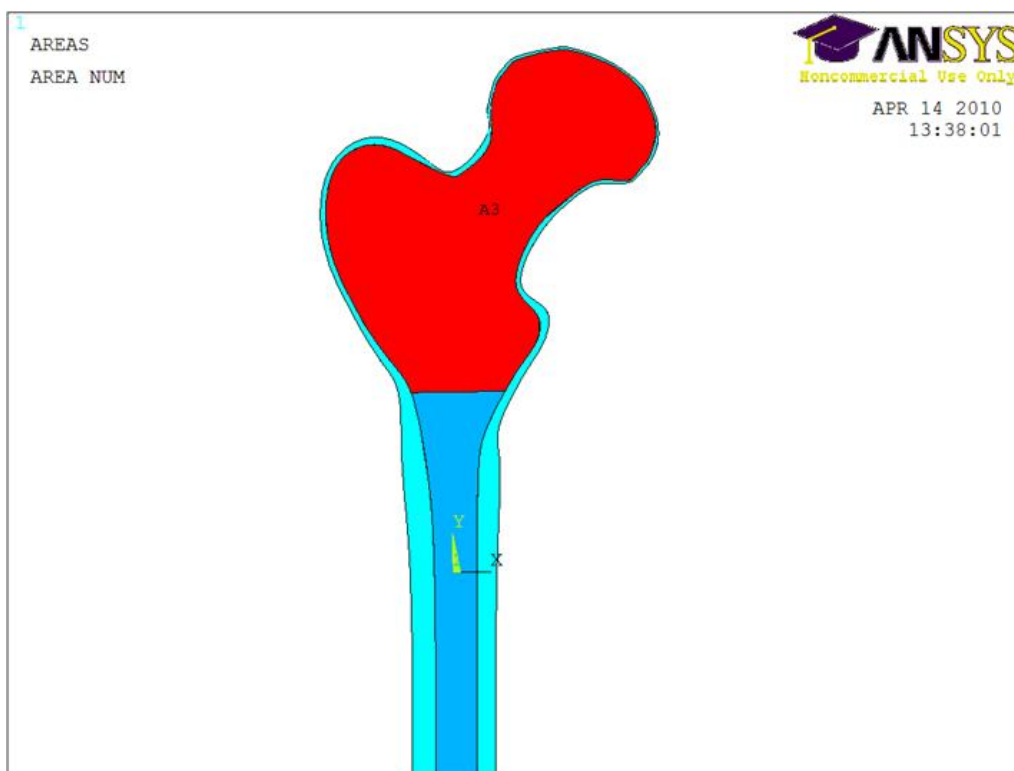


Рис. 2

При разбиении на конечные элементы использовался восьмиузловой элемент PLANE 183, так как разбиение другими типами элементов приводило к неудовлетворительным результатам, вследствие сложности формы кортикального слоя. В результате было получено качественное разбиение, включающее в общей сложности 37447 элементов. Для кортикального слоя были выбраны следующие упругие постоянные: модуль Юнга $E=17000$ Мпа, коэффициент Пуассона $\eta = 0,32$; для губчатого: модуль Юнга $E=1000$ Мпа, коэффициент Пуассона $\eta = 0,3$ [5]. Нижняя часть кости закреплялась по всем степеням свободы, равнодействующая, равная 1000 Н, прикладывалась в одном случае к одному, а во втором — к 8 соседним узлам, согласно указанным выше моделям. Результаты показали, что распределение напряжений в обоих случаях близки, то есть для упрощения постановки задачи можно задавать сосредоточенную силу. На основе статического анализа были сделаны следующие выводы: значения нормальных напряжений на линиях 1 и 2 (рис. 3) конечно-элементной модели качественно совпадают со значениями, вычисленными по одномерным моделям, по большей части в областях кортикального слоя (на рис. 3 области совпадения результатов отмечены черным цветом). Таким образом, настоящую двумерную модель можно рассматривать как один из вариантов моделирования нормы НДС бедренной кости человека.

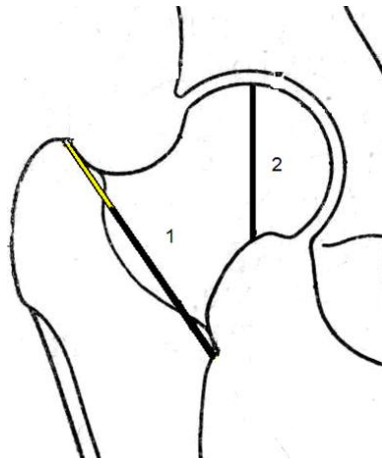


Рис. 3

Представленная в статье модель может быть использована для прогнозирования результатов различных видов операционного вмешательства, например таких как ваизирующая межвертельная остеотомия с медиализацией дистального фрагмента (см. [1]) на проксимальном отделе бедренной кости с целью получения оптимального результата.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гиммельфарб А.Л. Биомеханические аспекты межвертельной остеотомии при коксартрозе // Сборник Казанского НИИ травматологии и ортопедии №XXVI.
2. Янсон Х.А. Биомеханика нижней конечности человека. Рига, 1975.
3. Ansys 11.0 Academic research help. // URL:<http://www.ansys.com/>
4. Барышев А.А., Аранович В.М., Сидоренко О.В. Трехмерное моделирование костных тканей человека с использованием компьютерной томографии // Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине. 2009. Саратов, 2009.
5. A comparative study on different methods of automatic mesh generation of human femurs. Medical Engineering and Physics 20 (1998).// URL:<http://www.materialise.com/>

УДК 539.3

А.В. Аристамбекова, О.М. Ромакина

СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА КВАДРАТНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим квадратную пластинку, изготовленную из изотропного материала. Размеры пластинки в плане $a \times a$, толщина h считается малой. В угловых точках пластинка подкреплена шарнирами, а её контур свободен. На пластинку действует нормальная нагрузка интенсивности $q(x, y)$.

Для определения НДС в задачах статики и изгиба такой пластинки применяется модифицированный метод сплайн-коллокации [1].

Считаем справедливыми гипотезы классической теории Кирхгофа.

Тогда уравнение для определения прогибов $w(x, y, t)$ такой пластинки от распределенной нагрузки интенсивности $q(x, y, t)$ имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2w = q(x, y) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

В случае установившихся колебаний справедливы представления

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \exp^{i\omega t}, \quad w(x, y, t) = \tilde{W}(x, y) \exp^{i\omega t}.$$

Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial^4 \tilde{W}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \tilde{W}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \tilde{W}}{\partial y^4} + \frac{\rho h \omega^2 \tilde{W}}{D} = \frac{q_0(x, y)}{D}. \quad (1)$$

Здесь обозначено $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — жесткость пластинки на изгиб, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластинки соответственно.

Введем безразмерные величины: координаты $\xi = x/a, \eta = y/a$ и амплитуду прогиба $W(\xi, \eta) = \tilde{W}(x, y)/h$. Тогда уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \frac{\rho h^2 \omega^2 a^4 W}{D_*} = \frac{q(\xi, \eta)}{D_*}. \quad (2)$$

Внутренние усилия и моменты связаны с $W(\xi, \eta)$ соотношениями:

$$\begin{aligned} M_x &= -D_* a^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), \quad M_y = -D_* a^2 \left(\nu \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), \\ H_{xy} &= -(1 - \nu) D_* a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}, \\ Q_x^* &= -D_* a \left[\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} \right], \\ Q_y^* &= -D_* a \left[(2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнении (2) и формулах (3) обозначено $D_* = \frac{Eh_0^4}{12(1-\nu^2)}$, $h_0 = h/a$. Решение уравнения (2) должно удовлетворять граничным условиям при $\xi = 0$ и $\xi = 1$

$$M_x = Q_x^* = 0, \quad (4)$$

при $\eta = 0$ и $\eta = 1$

$$M_y = Q_y^* = 0. \quad (5)$$

Так как угловые точки пластинки подкреплены шарнирами, то в этих точках должны выполняться условия:

в точках $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$

$$W = M_y = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (2) ищем согласно модифицированному методу сплайн-коллокации в следующем виде [1]:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=-2}^{N+2} B_{5,j}(\xi)W_j(\eta), \quad (7)$$

где $B_{5,j}(\xi)$ – B -сплайны пятой степени [2], которые определены на системе узлов $\xi_{-5} < \xi_{-4} < \dots < \xi_0 < \dots < \xi_N < \dots < \xi_{N+5}$; $\xi_i = i/N$ ($i = -5, N+5$) и обладают свойством: при $\xi \leq \xi_{i-3}$ и $\xi \geq \xi_{i+3}$ $B_{5,j}(\xi) \equiv 0$.

Потребуем, чтобы выражения M_x и Q_x^* из (3) удовлетворяли условиям (4) при $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Тогда после некоторых преобразований для функций $W_j(\eta)$ и $W_{N+j}(\eta)$ ($j = 1, 2$) получим зависимости вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_{-j}}{d\eta} &= \sum_{k=-2}^2 a_{j,k} W_k(\eta) + \sum_{r=0}^2 b_{j,r} \frac{d^2 W_r}{d\eta^2}, \\ \frac{d^2 W_{N+j}}{d\eta} &= \sum_{k=N-2}^{N+2} a_{j+2,k} W_k(\eta) + \sum_{r=0}^2 b_{j+2,N+r} \frac{d^2 W_{N-r}}{d\eta^2}, \quad (j = 1, 2), \quad (r = \overline{0, 2}), \end{aligned} \quad (8)$$

с известными коэффициентами $a_{s,k}$, $b_{s,r}$.

Подставим (7) в (2) и потребуем его выполнения в $N + 1$ точках коллокации, тогда получим

$$\frac{d^4 \overline{W}}{d\eta^4} = B_2 \frac{d^2 \overline{W}}{d\eta^2} + B_0 \overline{W} + \overline{R}_1 W_{-1} + \overline{R}_2 W_{-2} + \overline{R}_3 W_{N+1} + \overline{R}_4 W_{N+2} + \overline{Q} \quad (9)$$

с известными матрицами B_2 , B_0 и векторами \overline{R}_1 , \overline{R}_2 , \overline{R}_3 , \overline{R}_4 , \overline{Q} .

Уравнения (8) и (9) составляют полную систему для определения всех неизвестных функций $W_r(\eta)$ ($r = \overline{0, N}$).

Для численного решения задачи от полученной полной системы уравнений переходим к системе дифференциальных уравнений первого

порядка, коэффициенты которых в общем случае зависят от ω . Для этой системы граничные условия записываются согласно способам закрепления сторон $\eta = 0$ и $\eta = 1$ с учетом условий в угловых точках.

Если положим во всех формулах $\omega = 0$, то получим статическую краевую задачу, которая решается численно устойчивым методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Были получены решения статической и динамической задач об изгибе пластинки под действием распределённой нагрузки.

Изгибающая пластинку нагрузка принимается в виде

$$q(\xi, \eta, t) = p_0 \sin(\omega t), \quad p_0 = \text{const.}$$

Вычисления выполнены для двух пластинок:

- 1) стальной ($E = 2.0 \cdot 10^5$ МПа);
- 2) алюминиевой ($E = 7.0 \cdot 10^4$ МПа).

В случае статической задачи ($\omega = 0$) был получен график изогнутой поверхности стальной пластинки.

Максимальный прогиб в центре такой пластики $\max W = 1,393 \cdot 10^{-4}$, для пластинки, изготовленной из алюминия, $\max W = 3,893 \cdot 10^{-4}$.

В случае задачи о колебаниях вычислены первые три резонансные частоты стальной и алюминиевой пластинок. В таблице представлены значения частот $\omega_k^* = \omega_k^{rez} - \delta$ ($\delta < 0,1 \text{ с}^{-1}$ при $k = 1$ и $\delta < 1 \text{ с}^{-1}$ при $k = 2, 3$).

Частоты	Сталь	Алюминий
ω_1^*	108.9	110.5
ω_2^*	680	686
ω_3^*	1412	1424

Графики изогнутой поверхности для пластинок качественно похожи. Были получены графики для первых трех резонансных частот.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Недорезов П.Ф., Шевцова Ю.В., Ромакина О.М. Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. II Всерос. науч. конф. Самара, 2005. Ч. 1. С. 203–209.
2. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций. М., 1980. 352 с.

А.И. Вельмисова

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛОСКОМ АКУСТИЧЕСКОМ СЛОЕ С ГИБКИМИ СТЕНКАМИ В СЛУЧАЕ РАЗРЫВА УПРУГИХ СВОЙСТВ НА ОДНОЙ ИЗ СТЕНОК

Рассматривается плоский акустический слой, ограниченный упругими мембранами, одна из которых имеет разрыв упругих свойств. Исследуется распределение энергии между отраженными и прошедшими волнами при прохождении гармонической волны через линию разрыва. Изучение распространения волн в волноводах с такими свойствами представляет интерес для моделирования гемодинамики крупных кровеносных сосудов в норме и после реконструктивной операции (рис. 1).

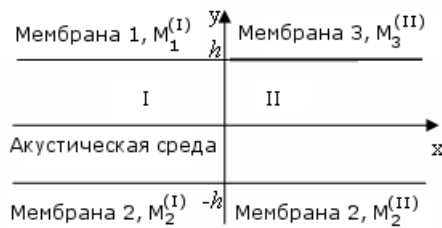


Рис. 1

Рассмотрим распространение гармонических волн в плоском акустическом слое с гибкими кусочно-однородными стенками, находящимися на расстоянии $2h$ друг от друга [1].

В безразмерных переменных уравнения движения для мембран и акустической среды записываются в виде

$$\begin{cases} (\varepsilon_i^{(j)})^2 \frac{\partial^2 w_i^{(j)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w_i^{(j)}}{\partial \tau^2} + \kappa_i^{(j)} q_i^{(j)} = 0, \\ \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (i = 1, 2, 3; j = I, II), \\ \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \zeta}, \end{cases} \quad (1)$$

где безразмерные переменные вводятся по формулам $\xi = \frac{x}{h}$, $\zeta = \frac{y}{h}$, $\tau = \frac{c_0 t}{h}$, $w_i^{(j)} = h w_i^{*(j)}$, $v^{(j)} = h v^{*(j)}$, $p^{(j)} = c_0^2 \rho_0 p^{*(j)}$ (при этом звездочки в дальнейшем опускаем). В системе (1) индексом i ($i = 1, 2, 3$) обозначены величины, принадлежащие соответственно первой, второй и третьей мембране, индексом j ($j = I, II$) — акустические среды; $w_i^{(j)}$ — смещение i -й мембраны в j -й акустической среде, $c_i^{(j)}$ — скорость распространения упругой волны в i -й мембране, $c_i^{(j)} = \sqrt{\frac{F_i}{\tilde{\rho}_i^{(j)}}}$, где F_i — силы натяжения i -й мембраны, $\tilde{\rho}_i^{(j)} = \rho_i^{(j)} h_i^{(j)}$, $h_i^{(j)}$ — толщина i -й мембраны, $\rho_i^{(j)}$ — плотность материала i -й мембраны; $q_i^{(j)}$ — давление, оказываемое j -й акустической средой на i -ю мембрану, c_0 — скорость распространения

звука в акустической среде, ρ_0 — плотность акустической среды, x и y — продольная и поперечная координаты, $v^{(j)}$ — смещение j -й среды, $p^{(j)}$ — акустическое давление I и II акустических сред, $\varepsilon_i^{(j)} = \frac{c_i^{(j)}}{c_0}$, $\varepsilon_i^{(j)} \ll 1$, $\kappa_i^{(j)} = \frac{h\rho_0}{h_i^{(j)}\rho_i^{(j)}}$, ($i = 1, 2, 3$; $j = I, II$).

На верхней и нижней мембранах должны быть выполнены следующие условия:

$$M_1^{(I)} : q_1^{(I)} = p^{(I)}, M_3^{(II)} : q_3^{(II)} = p^{(II)}, M_2^{(I)} : q_2^{(I)} = -p^{(I)}, M_2^{(II)} : q_2^{(II)} = -p^{(II)}. \quad (2)$$

Граничные условия при $y = \pm h$ ($\zeta = \pm 1$) выглядят так же, как и в [1]. Граничные условия на стыке $\xi = 0$ запишутся следующим образом:

$$v^{(I)} = v^{(II)}, \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v^{(II)}}{\partial \xi}, w_1^{(I)} = w_3^{(II)}, w_2^{(I)} = w_2^{(II)}, \frac{\partial w_1^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_3^{(II)}}{\partial \xi}, \frac{\partial w_2^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2^{(II)}}{\partial \xi}. \quad (3)$$

Рассмотрим распространение гармонической волны с заданной частотой ω и волновыми числами $\chi^{(j)}$, $j = I, II$. Дисперсионное уравнение для волноводов рассматриваемого типа получено в [1]. Решения для элементарных волн записываются в виде

$$p_r^{(j)} = P_r^{(j)}(\zeta)e^{i(\omega\tau - \chi^{(j)}\xi)}, \quad p_l^{(j)} = P_l^{(j)}(\zeta)e^{i(\omega\tau + \chi^{(j)}\xi)}, \quad (4)$$

где ω — частота и $\chi^{(j)}$ — волновое число, собственные функции $P_r^{(j)}(\zeta)$ и $P_l^{(j)}(\zeta)$ были получены в [2].

Решение для падающей ($p_r^{(I)}$), отраженной ($p_l^{(I)}$) и прошедшей ($p_r^{(II)}$) волн должны удовлетворять граничным условиям для функции давления $p^{(j)}$ ($j = I, II$) на стыке $\xi = 0$:

$$p_r^{(II)} = p_r^{(I)} + p_l^{(I)}, \quad \frac{\partial p_r^{(II)}}{\partial \xi} = \frac{\partial p_r^{(I)}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_l^{(I)}}{\partial \xi}. \quad (5)$$

Пусть на стык падает мода номер l_0 . Тогда выражение для падающей волны имеет вид

$$p_r^{(I)} = q_0 P_{l_0}^{(I)} e^{i(\omega\tau - \chi_{l_0}^{(I)}\xi)}, \quad (6)$$

где q_0 — некоторая постоянная. Решение для отраженной волны представим в виде линейной комбинации

$$p_l^{(I)} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m P_m^{(I)}(\zeta) e^{i(\omega\tau + \chi_m^{(I)}\xi)}. \quad (7)$$

Решение для прошедшей волны представим в виде

$$p_r^{(II)} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m P_m^{(II)}(\zeta) e^{i(\omega\tau - \chi_m^{(II)}\xi)}. \quad (8)$$

В (7), (8) A_m, B_m — некоторые постоянные, требующие определения.

Введем скалярное произведение:

$$\langle f_1(\zeta), f_2(\zeta) \rangle_{I,II} = \int_{-1}^1 f_1 f_2 d\zeta + f_1'(1) f_2'(1) \frac{(\varepsilon_{1,3}^{(I,II)})^2}{k_{1,3}^{(I,II)} \omega^2} + f_1'(-1) f_2'(-1) \frac{(\varepsilon_2^{(I,II)})^2}{k_2^{(I,II)} \omega^2}. \quad (9)$$

Подставим решения (6), (7) и (8) в граничные условия на стыке (5). Используя соотношение ортогональности [2], получим систему для определения постоянных A_m и B_m :

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(II)} + \chi_m^{(I)}) = q_0 \gamma_{l_0 n} (\chi_{l_0}^{(II)} - \chi_n^{(I)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$B_n = \frac{q_0 \gamma_{l_0 n}}{\delta_{nn}} + \frac{1}{\delta_{nn}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn}, \quad (11)$$

где $\gamma_{mn} = \langle P_m^{(I)}, P_n^{(II)} \rangle_{II}$, $\delta_{nn} = \langle P_n^{(II)}, P_n^{(II)} \rangle_{II}$.

После определения коэффициентов A_m и B_m можно сосчитать величины среднего за период потока энергии, проходящей через поперечное сечение волновода.

Для падающей, отраженной и прошедшей волн запишутся следующим образом:

$$R_{\text{пад}} = \frac{h\rho_0 c_0^3 \chi_{l_0}^{(I)}}{2\omega} \langle P_{l_0}^{(I)}(\zeta), \bar{P}_{l_0}^{(I)}(\zeta) \rangle_I,$$

$$R_{\text{отраж}} = \frac{h\rho_0 c_0^3}{2\omega} \sum_{n=1}^{M_0^{(I)}} \chi_n^{(I)} |A_n|^2 \langle P_n^{(I)}(\zeta), \bar{P}_n^{(I)}(\zeta) \rangle_I,$$

$$R_{\text{прош}} = \frac{h\rho_0 c_0^3}{2\omega} \sum_{n=1}^{M_0^{(I)}} \chi_n^{(II)} |B_n|^2 \langle P_n^{(II)}(\zeta), \bar{P}_n^{(II)}(\zeta) \rangle_I, \quad (12)$$

где $M_0^{(j)}$ — число распространяющихся волн в j -й среде на заданной частоте.

Из закона сохранения энергии имеем $R_{\text{пад}} = R_{\text{отраж}} + R_{\text{прош}}$.

На рис. 2–5 представлены графики зависимости от частоты отношения энергии отраженной (R_2) и прошедшей (R_3) волн к энергии

падающей волны ($R1$). В расчетах приняты следующие параметры задачи: $\kappa_1^{(I)} = 2, \kappa_2^{(I,II)} = 4, \kappa_3^{(II)} = 1, \varepsilon_1^{(I)} = 0.1, \varepsilon_2^{(I,II)} = 0.2, \varepsilon_3^{(II)} = 0.1/\sqrt{2}$.

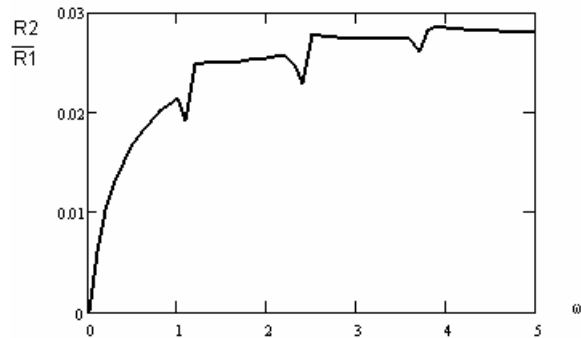


Рис. 2

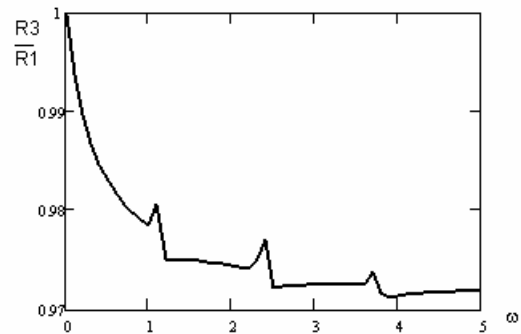


Рис. 3

На рис. 2 и 3 в качестве падающей волны принимается вторая фундаментальная мода. Как видно из графиков, с ростом частоты доля энергии отраженной волны растет, а доля энергии прошедшей волны падает. Пики на графиках соответствуют частотам запирания волн высшего порядка.

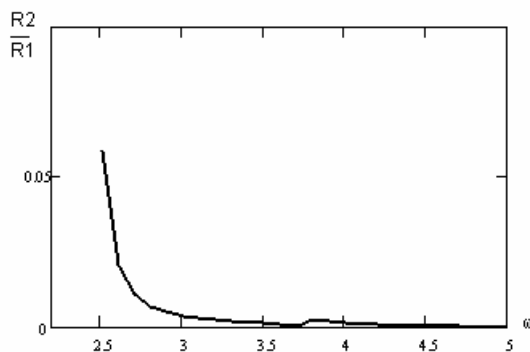


Рис. 4

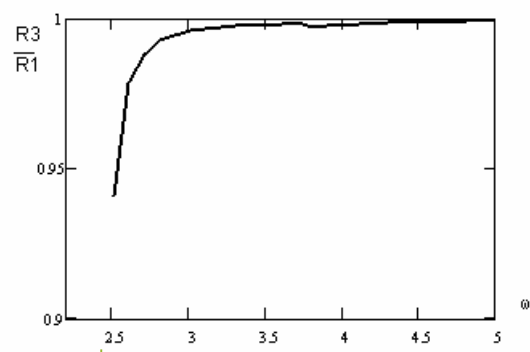


Рис. 5

На рис. 4 и 5 в качестве падающей волны принимается четвертая мода высшего порядка. В данном случае энергия отраженной волны приближается к нулю, и падающая волна практически полностью переходит в прошедшую.

Принятые параметры задачи соответствуют изменению толщины мембраны в два раза при переходе от мембраны 1 к мембране 3. Приведенные результаты и результаты вычислений для других мод показывают, что при таком соотношении параметров разрыв упругих свойств на одной из стенок оказывает незначительное влияние на распространение гармонической волны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Постнова Ю.А. Дисперсия волн в плоском акустическом слое с упругими стенками с различными геометрическими и материальными свойствами // Механика деформируемых сред. Саратов, 2004. Вып. 15. С. 95–101.

А.А. Барышев, Е.А. Номеровская

АНАЛИЗ НДС И ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ

Постановка задачи и основные соотношения

В статье рассматривается изотропная кольцевая пластинка малой толщины h , внутренний радиус которой R_1 , внешний – R_2 , изготовленная из вязкоупругого материала, свойства которого зависят от температуры. На срединной плоскости введена цилиндрическая система координат. Считаем, что пластинка испытывает малые деформации под действием распределенной по плоскости $z = -h/2$ поперечной нагрузки с частотой ω

$$q(r, t) = q_1(r) \cos(\omega t) + q_2(r) \sin(\omega t). \quad (1)$$

Предположим, что компоненты тензоров напряжения и деформаций связаны линейным законом вязкоупругости:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-\infty}^t K(t - \tau, \Theta, \omega) (\epsilon_r(\tau) + \nu \epsilon_\phi(\tau)) d\tau, \\ \sigma_\phi &= \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-\infty}^t K(t - \tau, \Theta, \omega) (\nu \epsilon_r(\tau) + \epsilon_\phi(\tau)) d\tau, \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2(1 + \nu)} \int_{-\infty}^t K(t - \tau, \Theta, \omega) \gamma_{rz}(\tau) d\tau, \nu = \text{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ν — коэффициент Пуассона, t — время, $\Theta = \Theta(r, z)$ — неизвестная безразмерная установившаяся температура саморазогрева, $\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$, $\epsilon_\phi = \frac{u_r}{r}$, $\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$ — компоненты тензора малых деформаций, u_r, u_z — компоненты вектора перемещений.

Уравнения движения малого элемента пластинки будут следующими:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r + M_\phi}{r} = N_r, \quad \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r}{r} = \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - q(r, t). \quad (3)$$

Здесь M_r — изгибающий момент, N_r — перерезывающая сила, ρ — плотность материала пластинки.

Решение будем проводить на основе метода гипотез.

Классическая модель (Модель Кирхгоффа)

На основе гипотез Кирхгоффа запишем поле перемещений в виде

$$u_r(r, z) = -z \frac{\partial w}{\partial r}, u_z = w(r, t), \quad (4)$$

где $w(r, t)$ – прогиб, $u_r(r, z)$ – тангенциальное смещение точек пластинки.

Модель Тимошенко [1]

В этом случае для компонент вектора перемещения запишем

$$u_r = z\gamma(r, t), u_z = w(r, t), \quad (5)$$

где $\gamma(r, t)$ – искомая функция, характеризующая угол поворота нормали к срединной плоскости.

Будем искать неизвестные функции в следующей форме:

$$z(r, t) = z_1(r) \cos(\omega t) + z_1(r) \sin(\omega t).$$

Для этих моделей разрешающие уравнения определения напряженно-деформированного состояния (НДС) пластинки имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dw_k}{dr} &= -\theta_k + C_T (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^2 b_{k+j-1}(\Theta) N_r^{(j)}, \\ \frac{d\theta_k}{dr} &= -\frac{\nu}{r} \theta_k + (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^2 d_{k+j-1}(\Theta) M_r^{(j)}, \\ \frac{dM_r^{(k)}}{dr} &= N_r^{(k)} - \frac{1-\nu}{r} M_r^{(k)} + \frac{1-\nu^2}{r^2} \sum_{j=1}^2 D_{k+j-1}(\Theta) \theta_j, \\ \frac{dN_r^{(k)}}{dr} &= -\frac{N_r^{(k)}}{r} - \rho h \omega^2 w_k - q_k(r, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $d_k = \frac{D_k}{D_1^2 + D_2^2}$, $b_k = \frac{B_k}{B_1^2 + B_2^2}$.

Если в уравнениях (6) положить $C_T = 0$, $\theta_k = -\frac{\partial w_k}{\partial r}$, то они описывают НДС по модели Кирхгоффа, при $C_T = 1$, $\theta_k = \gamma_k$ – по модели Тимошенко.

Поскольку свойства материала зависят от температуры $\Theta(r, z)$, то необходимо рассмотреть уравнение теплопроводности. Для определения максимально возможной температуры саморазогрева при вычислении

мощности источников тепла $Q(r, z)$ считаем, что вся работа внешних сил переходит в тепло. Мощность за цикл колебаний определяется формулой

$$Q(r, z) = -\frac{E_2\omega}{2(1-\nu^2)}\left(\sum_{k=1}^2((\epsilon_r^{(k)})^2 + (\epsilon_\phi^{(k)})^2 + 2\nu\epsilon_r^{(k)}\epsilon_\phi^{(k)}) + \frac{1-\nu}{2}(\gamma_{rz}^{(k)})^2\right). \quad (7)$$

В случае модели Кирхгоффа слагаемое с функцией $\gamma_{rz}^{(k)}$ равно нулю.

Уравнение теплопроводности в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda_\nu T_s}Q(r, z) = 0. \quad (8)$$

Здесь $\Theta = \frac{T-T_0}{T_s}$, $T_s = T_0 - T_1$, T_0, T_1 – характерные температуры, λ_ν – коэффициент теплопроводности материала.

Полученные уравнения должны удовлетворять граничным условиям. НДС:

при $r = R_1$ $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$, ($w = 0$, $\gamma = 0$);

при $r = R_2$ $w = w_0 \cos(\omega t)$, $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$, ($w = w_0 \cos(\omega t)$, $\gamma = 0$).

Температура:

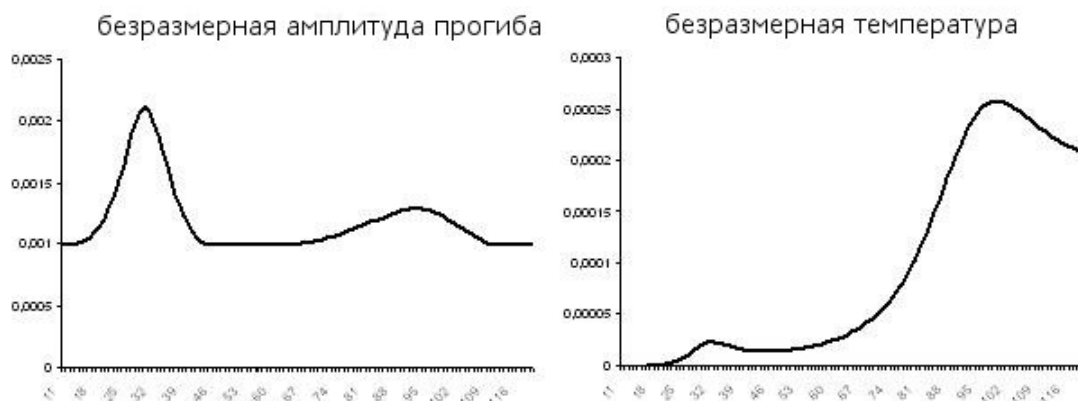
при $z = \mp \frac{h}{2}$ $\theta = 0$, при $r = R_1, r = R_2$ $\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$.

Численные расчеты выполнены для вязкоупругого материала [2].

Решение краевых задач для систем разрешающих уравнений (6), (8), описывающих НДС и тепловое поле, проводилось по алгоритму из [3].

Геометрические размеры пластинки следующие: $h = 0,01$ м, $R_1 = 0,5$ м, $R_2 = 1$ м; компоненты интенсивности нагрузки – $q_1(r) = 0$, $q_2(r) \equiv 0$.

Ниже приведены графики зависимости безразмерной температуры и безразмерной амплитуды прогиба от частоты внешнего возбуждения для модели Тимошенко. Амплитуда $w_0 = 0,001$ м.



Сравнительный анализ показывает:

- 1) при малой толщине пластинки значения, полученные в обеих моделях, практически совпадают;
- 2) учет зависимости свойств материала от температуры не влияет на характеристики НДС и тепловое поле.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1946.
2. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости. Киев: Наук. думка, 1982. 260 с.
3. Барышев А.А., Мылъцина О.А., Брюшко М.И. Вибрационный изгиб вязкоупругой оболочки с учетом связанности теплового и механического полей // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 202–204.

УДК 629

А.Г. Бирюков, В.Г. Бирюков, Ю.Н. Челноков

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВЫВОДА ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ЗАДАННУЮ ПРОГРАММНУЮ ТРАЕКТОРИЮ

Рассматривается задача оптимального вывода твердого тела на заданную программную траекторию углового движения. Введем в рассмотрение следующие системы координат: ξ — инерциальная, Z — опорная (программная) система координат, вращающаяся в инерциальном пространстве с заданной (программной) угловой скоростью $\bar{\omega}^0 = \bar{\omega}^0(t)$ и угловым ускорением $\bar{\varepsilon}^0 = \bar{\varepsilon}^0(t)$, X — система координат, жестко связанная с твердым телом. Движение твердого тела описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений в отклонениях [1]

$$\begin{aligned} \delta \dot{\bar{\omega}}_{\xi} &= \delta \bar{\varepsilon}_{\xi} + [\bar{\nu} \circ \bar{\omega}_{\xi}^0 \circ \tilde{\nu}] \times \delta \bar{\omega}_{\xi}, \\ 2\dot{\bar{\nu}} &= \delta \bar{\omega}_{\xi} \circ \bar{\nu}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\delta \bar{\omega}_{\xi}$, $\delta \bar{\varepsilon}_{\xi}$ — векторы ошибки по угловой скорости и углового ускорения, $\bar{\nu}$ — кватернион ошибки ориентации, \circ — кватернионное умножение, $\tilde{\nu}$ — сопряженный кватернион.

Требуется построить управление $\delta \bar{\varepsilon}_{\xi}$, переводящее твердое тело из начального состояния

$$\delta \bar{\omega}_{\xi}(0) = \delta \bar{\omega}_{\xi}^0, \quad \bar{\nu}(0) = \bar{\nu}^0 \quad (2)$$

в конечное состояние

$$\delta \bar{\omega}_{\xi}(t_1) = 0, \quad \bar{\nu}(t_1) = 1 \quad (3)$$

за фиксированное время t_1 . При этом функционал качества

$$J = \int_0^{t_1} \left[\alpha_1 (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2) + \alpha_2 (\delta\omega_1^2 + \delta\omega_2^2 + \delta\omega_3^2) + \alpha_3 (\delta\varepsilon_1^2 + \delta\varepsilon_2^2 + \delta\varepsilon_3^2) \right] dt, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const} > 0, \quad (4)$$

должен принимать минимальное значение.

В работе [2] рассмотрен частный случай такой задачи, когда программным движением является ориентированное положение твердого тела в пространстве и весовые коэффициенты функционала $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 \neq 0$. Для этого частного случая построено аналитическое решение задачи в классе плоских эйлеровых разворотов.

Рассмотрим теперь случай, когда программным движением по-прежнему является ориентированное положение в пространстве, а весовые коэффициенты функционала $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$. В этом случае функционал качества (4) принимает вид

$$J = \int_0^{t_1} \left[\alpha_2 (\delta\omega_1^2 + \delta\omega_2^2 + \delta\omega_3^2) + \alpha_3 (\delta\varepsilon_1^2 + \delta\varepsilon_2^2 + \delta\varepsilon_3^2) \right] dt. \quad (5)$$

Будем искать решение задачи в предположении, что векторы $\delta\bar{\omega}_\xi$ и $\bar{p} = \text{vect}(\bar{\nu} \circ \tilde{\psi})$ коллинеарны на всем интервале времени. Для данного случая имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\bar{\omega}}_\xi &= \frac{\bar{\varphi}}{2\alpha_3}, \\ 2\dot{\nu}_0 &= -\bar{\nu}_v \cdot \delta\bar{\omega}_\xi, \\ 2\dot{\bar{\nu}}_v &= 2\nu_0\delta\bar{\omega}_\xi - \bar{\nu}_v \times \delta\bar{\omega}_\xi, \\ \dot{\bar{\varphi}} &= 2\alpha_2\delta\bar{\omega}_\xi + \frac{1}{2}\bar{p}, \\ \dot{\bar{p}} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из последнего уравнения (6) находим $\bar{p} = \bar{p}_0 = \text{const}$. Дифференцируя первое уравнение (6) по времени и учитывая четвертое уравнение, получаем дифференциальное уравнение для нахождения вектора $\delta\bar{\omega}_\xi$:

$$\delta\ddot{\bar{\omega}}_\xi = \frac{1}{2\alpha_3} (2\alpha_2\delta\bar{\omega}_\xi + \frac{1}{2}\bar{p}_0).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\delta\bar{\omega} = \bar{C}_1 e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t} + \bar{C}_2 e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t} - \frac{1}{4\alpha_2}\bar{p}_0. \quad (7)$$

Из граничных условий (2) и (3) находим постоянные интегрирования \bar{C}_1, \bar{C}_2 :

$$\bar{C}_1 = \frac{-(\delta\bar{\omega}^0 - \frac{1}{4\alpha_2}\bar{p}_0)e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1} - \frac{1}{4\alpha_2}\bar{p}_0}{e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1} - e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1}}, \quad (8)$$

$$\bar{C}_2 = \frac{(\delta\bar{\omega}^0 - \frac{1}{4\alpha_2}\bar{p}_0)e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1} + \frac{1}{4\alpha_2}\bar{p}_0}{e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1} - e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1}}.$$

Из первого и четвертого уравнений (6) следует $\bar{\varphi} \times \delta\bar{\omega} = \bar{D}$, тогда из конечных условий получаем $\bar{D} = 0$, а из равенства $\bar{\varphi} \times \delta\bar{\omega} = 0$ находим, что вектор $s\bar{p}, \delta\bar{\omega}, \bar{\varphi}$ коллинеарны. Из условия, что $\dot{\bar{p}} = \dot{\bar{p}}^*$, где $\bar{p}^* = \tilde{\nu} \circ \bar{p} \circ \bar{\nu}$ следует, что $\bar{p} \parallel \bar{\nu}_v$. Из соотношений (8) следует, что $\bar{C}_1 \parallel \bar{p}_0$ и $\bar{C}_2 \parallel \bar{p}_0$.

Решение кватернионного кинематического дифференциального уравнения для постоянного по направлению вектора абсолютной угловой скорости имеет вид

$$\bar{\nu} = \left(\exp\left[\frac{1}{2} \int_0^{t_1} \delta\bar{\omega} dt\right] \right) \circ \bar{\nu}^0. \quad (9)$$

Подставляя выражение (8) в (7) и выполняя интегрирование, получаем

$$\int_0^{t_1} |\delta\bar{\omega}| dt = I_1 + I_2, \quad (10)$$

где

$$I_1 = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \frac{e^{t_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}} - 1}{e^{t_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}} + 1}, \quad I_2 = \frac{t_1}{4\alpha_2} - \frac{1}{2\alpha_2} I_1.$$

Выделяя скалярную часть в (9) и учитывая формулу (10), граничные условия (2) и (3) находим

$$\nu_0^0 = \cos\left(\frac{1}{2} I_1 |\delta\bar{\omega}^0| \pm \frac{1}{2} I_2 |\bar{p}^0|\right),$$

отсюда следует, что

$$|\bar{p}^0| = \pm \frac{2 \arccos(\nu_0^0) - I_1 |\delta\bar{\omega}^0|}{I_2}. \quad (11)$$

Из первого уравнения (6) находим

$$|\bar{\varphi}^0| = 2\alpha_3[A|\delta\bar{\omega}^0| \pm B|\bar{p}^0|], \quad (12)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \frac{e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1} + e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1}}{e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1} - e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1}}, \quad B = \frac{e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1} + e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1} - 2}{4\alpha_2(e^{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1} - e^{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}t_1})}.$$

Для частного случая, когда программным движением является ориентированное положение в пространстве, а весовой коэффициент $\alpha_1 = 0$, найдено частное аналитическое решение в предположении, что вектор $\delta\bar{\omega}_\xi$ сонаправлен или противоположно направлен вектору \bar{p} на всем интервале времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 1, 2 // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 3–17; 2002. № 2. С. 3–17.
2. Бирюков А.Г., Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н. Задача оптимального управления угловым движением твердого тела // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып. 10. С. 105–108

УДК 533.6.011.539.5

В.М. Гурьянов, Л.В. Борисова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АДАПТИВНОГО МЕТОДА ВИБРАЦИОННОЙ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ ФЛЮИДО-НАСЫЩЕННЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

Предлагаемая математическая модель ориентирована на адаптивную вибросейсморазведку, поскольку позволяет определять форму регистрируемой отраженной волны в случае известных параметров флюидо-насыщенного резервуара или эти параметры подбирать экспериментально так, чтобы получить оптимальный результат наблюдений.

Имеем дифференциальное уравнение для диссипативно-дисперсной среды за счет использования коэффициентов диссипации τ_1 и дисперсности τ_2 [1].

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$(\lambda + 2\mu)u_{xx} + 4/3\mu(\tau_1 u_{xxt} + \tau_2^2 u_{xxtt}) = \rho u_{tt} = 0. \quad (1)$$

Здесь введен параметр τ_2 , учитывающий дисперсность среды. Применив к уравнению (1) метод разделения переменных ($u(x, t) = X(x)T(t)$), получим, как обычно, два уравнения:

$$X'' + k^2 X = 0, \quad (2)$$

$$\rho T'' + k^2((\lambda + 2\mu)T + 4/3\mu(\tau_1 T' + \tau_2^2 T'')) = 0. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение для функции $T(t)$ удобно записать в виде обычного уравнения затухающих колебаний:

$$T'' + 2nT' + a^2 T = 0 (n > 0, a > 0).$$

Здесь

$$n = \frac{\gamma\tau_1}{1 + 2\gamma\tau_2^2}, a^2 = \frac{k^2\nu_p^2}{1 + 2\gamma\tau_2^2}, a^2 = \frac{2}{3}k^2\nu_s^2, \\ \nu_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \nu_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \rho = (1 - k_{por})\rho_M, \quad (4)$$

где параметр k разделения переменных — волновое число, обратное длине волны; ν_p^2 , ν_s^2 — квадраты скоростей продольных и поперечных волн в твердом скелете среды; k_{por} — коэффициент пористости; ρ_M — плотность твердой монолитной среды до дилатансии.

Решение $u(x, t)$ уравнения (4) представляется в форме бегущих простых волн:

$$u = e^{-nt}(A_1 \cos(\omega t \mp kx) + A_2 \sin(\omega t \mp kx)). \quad (5)$$

В равенстве (5) $\omega = \sqrt{a^2 - n^2} = kV < ka$, V — скорость распространения волн в вязкоупругом слое, ω — угловая частота колебаний.

Заметим, что скорость V уменьшается не только за счет увеличения времени запаздывания τ_1 , но и за счет коэффициента дисперсности среды τ_2 . Вариацией их значений можно получить любую скорость $V < a$, вплоть до близкой к нулю, т.е. получить отсутствие волнового движения. С уменьшением скорости уменьшается частота колебаний. Это объясняет эффект сдвига частоты в сторону ее уменьшения, увеличения амплитуды отраженных от резервуара волн (феномен «яркого пятна»).

Рассмотрим в окрестностях границ $x = 0$ и $x = h$ флюидо-насыщенного слоя толщиной h , лежащего между упругими средами, явление отражения и преломления при нормальном падении на эти границы продольной упругой волны. Параметры упругой среды перед границей $x = 0$ в направлении движения падающей на границу волны будем обозначать нижним индексом «1», параметры флюидо-насыщенной среды, лежащей между границами $x = 0$ и $x = h$ – без индекса, и упругой среды после границы $x = h$ – индексом «2». Считаем известными следующие константы, характеризующие среды: упругую (перед границей $x = 0$) – ρ_1, ν_1 , флюидо-насыщенную – ρ_M, V, k_{por} , упругую (после границы $x = x_h$) – ρ_2, ν_2 . Во всех средах ω и n задаются одними и теми же. Полагаем $\lambda = \mu$ для всех сред (среда Пуассона).

Используя эти константы, вычисляем

$$k = \frac{\omega}{V}, \quad a^2 = V^2 + n^2, \quad \rho = (1 - k_{por})\rho_2$$

и, если это необходимо, коэффициенты τ_1 и τ_2 по формулам (4).

Основные константы подобраны так, чтобы можно было согласовать отдельные затухающие гармоники в контактирующих средах с тем, чтобы легче было разобраться в физической сущности изучаемого явления.

Известную падающую на границу $x = 0$ со стороны упругой среды волну (u_{por}) при условии, что $u_{por} \equiv 0$ постоянно перед фронтом волны $t - x/\nu_1 = 0$ (т.е. среда находится в покое), искомые отраженную (u_o) и преломленную (u_{pr}) волны представим так:

$$u_{por} = \{e^{-n(t-x/\nu_1)}\sin(\omega(t-x/\nu_1))$$

$$\forall t, x : (t - x/\nu_1 > 0), 0 \forall t, x : (t - x/\nu_1 \leq 0), \quad (6)$$

$$u_o = e^{-n(t+x/\nu_1)}\phi(\omega(t+x/\nu_1)), \quad (7)$$

$$u_{pr} = e^{-nt}(C_1\cos(\omega t - kx) + C_2\cos(\omega t - kx)). \quad (8)$$

Функции u_{por} и u_o , очевидно, являются решениями уравнения движения упругой среды, u_{pr} взята в соответствии с (5).

Следует отметить, что падающая волна — не импульс, а затухающая синусоида, определенная на координатной полуоси, поэтому она имеет большую протяженность во времени, что соответствует сигналу, генерируемому вибратором с последующим его затуханием.

Функция ϕ определяется из условия непрерывности смещений на границе $x = 0$:

$$u_{por} + u_o = u_{pr} \quad (9)$$

и имеет вид

$$\phi(\omega t) = C_1 \cos \omega t + (C_2 - 1) \cos \omega t. \quad (10)$$

Константы C_1 и C_2 определяются из условия непрерывности нормальных составляющих тензоров напряжений упругой и вязкоупругой сред:

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)(u_{por,x} + u_{o,x}) = -\frac{\rho}{k^2} u_{pr,tt}(x = 0). \quad (11)$$

Введя в рассмотрение акустические жесткости $z_1 = \rho_1 \nu_1$, $z = \rho \omega$, учитывая, что $u_{por,x} = \frac{-1}{\nu_1} u_{por,t}$, $u_{o,x} = \frac{1}{\nu_1} u_{o,t}$, и разрешая систему уравнений (9) и (11), получим выражения для констант C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{nz}{\omega(z + z_1)} C_2, C_2 = \frac{2z_1}{(z + z_1) - \frac{n^2 z^2}{\omega^2(z + z_1)}}. \quad (12)$$

Так как $\cos \alpha = -\sin(\alpha - \pi/2)$, то отраженная волна в окрестности границы отражения–преломления приобретает вид

$$u_o = e^{-nt} ((C_2 - 1) \sin \omega t - C_1 \sin(\omega t - \pi/2)) (C_1 > 0), \quad (13)$$

т.е. она состоит из двух волн: первой — основной и второй — запаздывающей по фазе на $\pi/2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.

УДК 533.6.011:532.529

Н.О. Евсеев, Е.А. Лунёв, Г.Д. Севостьянов

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ КОСОГО СКАЧКА ОТ СТЕНКИ

Приведены таблицы теоретических значений параметров течения газа при регулярном отражении косоугольного скачка от плоской стенки в виде косоугольного скачка (режим Крокко обеспечивает единственность решения, устойчивость угла отражения при небольшом искривлении отраженного скачка, отсутствие отрыва потока в точке отражения). Сравнение вычисленных параметров с экспериментальными удовлетворительно.

Следуя работе [1], проведен расчет параметров течения газа при регулярном отражении косоугольного скачка от плоской стенки (оси x).

Пусть косой скачок AO в однородном сверхзвуковом потоке (с числом Маха $M_\infty > 1$) под неизвестным углом падения ω отражается регулярно в точке O от плоской стенки в виде косого скачка OB (угол отражения ω' неизвестен). Величины до AO отметим знаком “ ∞ ”, между AO и OB — знаком “1”, за OB — знаком “ Q ”. Обозначим через θ , p , τ , M угол наклона вектора скорости \mathbf{v} к оси x , давление, переменную Чаплыгина, число Маха соответственно.

Уравнения Чаплыгина [2, §16 – 17] для плоского безвихревого установившегося течения идеального совершенного газа

$$\varphi_\theta = -\psi_\sigma, \quad \varphi_\sigma = K(\sigma)\psi_\theta, \quad (1)$$

где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока; K , σ — функции Чаплыгина, с помощью функций

$$\begin{aligned} u &= -c\sigma, & v &= c\theta, & k(u) &= -K(\sigma), \\ c &= (\gamma + 1) \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{3/(\gamma-1)}, & k(0) &= 0, & k'(0) &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

($\gamma > 1$ — отношение теплоемкостей для газа) приведены к нелинейной системе в дивергентной форме [1]:

$$(L(u))_\varphi = v_\psi, \quad v_\varphi = u_\psi, \quad k(u) = L'(u). \quad (3)$$

Тогда уравнение ударной поляры для скачка

$$[v]^2 = [L][u], \quad (4)$$

где $[f] = f_+ - f_-$ — разрыв функции f на скачке.

В (3) функции u и L имеют вид интегралов по $\tau = V^2 V_m^{-2} < 1$:

$$\begin{aligned} u &= c \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau} d\tau, & L &= c \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{-1 + (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{(\beta+1)}} d\tau \geq 0, \\ \tau_* &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} > 0, & 0 < \tau < 1, & \beta = \frac{1}{\gamma - 1} > 0, & k &= \frac{dL}{d\tau} / \frac{du}{d\tau} = -K. \end{aligned} \quad (5)$$

Если скачок уплотнения в однородном потоке криволинейный, то ударная поляра на плоскости vu будет “ежевидной” полярой, введенной Л. Крокко (L. Crocco) в 1937 г. (“иголки” на ней — образы линий тока в неоднородном потоке за скачком; их наклоны характеризуют кривизны линий тока на скачке). На плоской стенке ($dv = 0$) кривизна линии тока без отрыва потока в точке O равна нулю, тогда имеем точку Крокко Q на ударной поляре и условие на OB :

$$\frac{[L]}{[u]} + 3k_+ = 0, \quad u = u_Q < 0, \quad v = v_Q = 0. \quad (6)$$

Малая поляра вершиной лежит на большой и пересекает ее ось в своей точке Q .

Так как $\theta_\infty = \theta_Q = 0$, то из (4) на AO и OB имеем

$$v_1^2 = ([L][u])_{AO} = ([L][u])_{OB}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) численно находятся τ_1 и τ_Q .

Значения параметров течения для $\gamma = 7/5$.

M_∞	M_1	τ_∞	τ_1	τ_Q	$ \theta_1^\circ $	ω°	ω'°	ξ	ξ'
1,01	1,005	0,169	0,168	0,166	0,0	83,1	86,0	0,996	1,007
1,02	1,012	0,172	0,170	0,166	0,1	79,8	84,2	0,991	1,014
1,05	1,03	0,180	0,175	0,165	0,3	74,2	80,8	0,976	1,041
1,09	1,053	0,191	0,181	0,164	0,5	69,2	77,6	0,957	1,074
1,15	1,088	0,209	0,191	0,162	1,3	64,0	74,0	0,927	1,125
1,2	1,116	0,223	0,199	0,161	1,9	60,6	71,5	0,901	1,168
1,3	1,170	0,252	0,215	0,158	3,3	55,7	67,3	0,849	1,256
1,4	1,222	0,281	0,230	0,155	4,9	52,1	63,8	0,797	1,347
1,5	1,272	0,310	0,244	0,152	6,6	49,3	60,7	0,745	1,440
1,6	1,320	0,338	0,258	0,149	8,3	47,1	57,9	0,696	1,534
1,7	1,365	0,366	0,271	0,145	10,0	45,4	55,3	0,648	1,630
1,8	1,408	0,393	0,284	0,142	11,8	44,0	53,0	0,603	1,727
1,9	1,450	0,419	0,295	0,138	13,6	42,9	50,7	0,561	1,826
2,0	1,490	0,444	0,307	0,134	15,4	41,9	48,6	0,522	1,925
2,1	1,527	0,468	0,318	0,131	17,2	41,2	46,6	0,485	2,025
2,2	1,564	0,491	0,328	0,127	19,0	40,5	44,7	0,451	2,125
2,3	1,598	0,514	0,338	0,123	20,8	40,0	42,8	0,419	2,226
2,4	1,632	0,535	0,347	0,120	22,6	39,6	41,0	0,390	2,328
2,5	1,664	0,555	0,356	0,116	24,4	39,3	39,3	0,363	2,430
2,6	1,695	0,574	0,364	0,113	26,2	39,0	37,6	0,338	2,523
2,7	1,724	0,593	0,372	0,109	28,1	38,9	36,0	0,315	2,636
2,8	1,753	0,611	0,381	0,106	29,9	38,7	34,3	0,293	2,739
2,9	1,781	0,627	0,388	0,102	31,7	38,7	32,7	0,273	2,843
3,0	1,809	0,642	0,395	0,098	33,5	38,7	31,1	0,255	2,947

Если $\gamma = 1 + \frac{2}{m}$ (m — число степеней свободы молекулы газа без учета ее колебаний), то интегралы в (5) вычисляются аналитически.

Из интеграла Бернулли

$$(\gamma - 1)M^2 = \frac{2\tau}{1 - \tau}. \quad (8)$$

Интенсивности скачков $\xi = \frac{p_\infty}{p_1} < 1$, $\xi' = \frac{p_Q}{p_1} > 1$ находим из соотношений на косых скачках, углы ω и ω' — из геометрических построений [1].

В таблице приведены значения параметров течения (углы, интенсивности и др.) для двухатомного газа ($\gamma = 7/5$). Зависимости $\omega'(\omega)$ и $\omega(\xi)$ достаточно близки к экспериментальным [3, рис. 8.6; 4, фиг. 15 на с. 461; 5] в диапазоне числа Маха $M_\infty \in [1, 3]$.

В околосвуковом случае для слабых скачков ($M_\infty \rightarrow 1$) формулы упрощаются и непрерывно переходят в формулы околосвуковой теории [6]: $k(u) = u$, $L(u) = u^2/2$, $u_Q = -u_1/7$, $v_Q = 0$, $\frac{\pi}{2} - \omega' = 0.5687 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \geq 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г.Д. Метод расчета параметров регулярного отражения косоугольного скачка от стенки // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 140–143.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. 4-е изд. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
3. Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука, 1977.
4. Основы газовой динамики / под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
5. Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г., Лагутов Ю.П. и др. Нестационарные взаимодействия ударных и детонационных волн в газах. М.: Наука, 1986.
6. Севостьянов Г.Д. Регулярное отражение околосвукового скачка от стенки // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 181–184.

УДК 532.5:533.6.011.5

В.С. Кожанов

О ТРАЕКТОРИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ НА СТАДИИ ОТРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Изучение задачи о сходящейся ударной волне (УВ) предполагает определение течения как на стадии схождения, так и на стадии отражения. На второй стадии структура течения в области перед отраженной УВ обуславливается выбором значения показателя адиабаты γ . В статье разбираются два возможных варианта движения частиц в указанной области, соответствующие двум промежуткам: $1 < \gamma \leq \gamma_s$ и $\gamma_s < \gamma$. Значение γ_s зависит от типа симметрии течения и начального распределения плотности невозмущенной среды.

В окрестности центра фокусировки течение принимает автомодельный характер, и решение может быть построено в форме

$$u = -knr^{1-1/n}F(\eta), \quad c^2 = k^2n^2r^{2-2/n}G(\eta), \quad \rho = ar^\omega\mathcal{R}(\eta), \quad k, a = \text{const},$$

где n – показатель автомодельности; координата r – независимая размерная переменная; $F(\eta)$, $G(\eta)$, $\mathcal{R}(\eta)$ – автомодельные представители скорости частиц u , квадрата скорости звука c^2 и плотности ρ соответственно; $\eta = kt/r^{1/n}$ – независимая автомодельная переменная (t – время); ω – показатель в степенном законе распределения начальной плотности.

Рассмотрим картину течения на (r, t) -плоскости (рис. 1). Сплошными толстыми линиями изображены траектории сходящейся (УВ₁) и отраженной (УВ₂) УВ. Это кривые постоянства переменной η – обобщенные параболы вида $t = \eta_{sw}r^{1/n}/k$, $\eta_{sw} = \text{const}$. Для сходящейся УВ $\eta_{sw} = -1$ (традиционная нормировка), для отраженной УВ $\eta_{sw} = \eta_{sw2} \leq 0$. Кривые УВ₁, УВ₂ и линия $t = 0$ делят (r, t) -плоскость на четыре области: область I соответствует невозмущенной среде, область II – течению за сходящейся УВ, области III и IV – течениям перед и за отраженной УВ. Сплошными тонкими линиями показаны траектории движения частиц.

Возьмем одну частицу на расстоянии $r = r_p$ от центра симметрии и проследим ее траекторию для двух значений γ : γ_1 и γ_2 , $\gamma_1 < \gamma_s < \gamma_2$. В первом случае (рис. 1, *a*) в момент начала движения сходящейся УВ частица покоится и продолжает пребывать в таком состоянии до момента $t = t_1$. При $t = t_1$ УВ₁ приходит в точку $r = r_p$ и разгоняет частицу, заставляя ее двигаться к центру с уменьшением скорости. В момент $t = 0$ происходит фокусировка сходящейся УВ и возникает отраженная УВ, которая распространяется от центра симметрии. В момент $t = t_2$ УВ₂ встречается с частицей и меняет направление ее движения на противоположное. При $t > t_2$ частица удаляется от центра, теряя скорость. Таким образом, при $\gamma = \gamma_1$ все частицы в области III движутся к центру симметрии.

При $\gamma = \gamma_2$ (рис. 1, *b*) траектория частицы в областях I и II аналогична первому случаю. В области III при $t > 0$ частица сначала по-прежнему приближается к центру. Но при $t = t^*$ ($t^* < t_2$) ее скорость падает до нуля, она «разворачивается», а затем (при $t > t^*$) движется от центра с увеличением скорости. В момент $t = t_2$ частицу догоняет отраженная УВ. При $t > t_2$ частица удаляется от центра с уменьшением скорости.

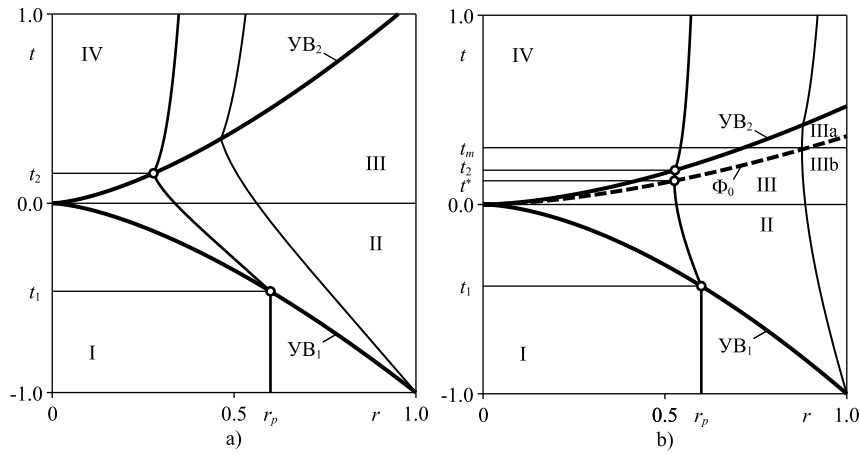


Рис. 1

Во втором случае в области III скорость частицы, находящейся в момент времени $t = t^*$ на некотором расстоянии от центра, равна нулю. Это означает, что в пространстве существует поверхность с нулевой скоростью частиц Φ_0 . Поверхность Φ_0 возникает в момент $t = 0$ вместе с отраженной УВ и расширяется по закону $t = \eta_0 r^{1/n} / k$, $\eta_0 < \eta_{sw2}$. На (r, t) -плоскости траектория поверхности Φ_0 изображена пунктирной линией. Кривая Φ_0 делит область III на две подобласти. В подобласти III_a, соответствующей течению между отраженной УВ и поверхностью Φ_0 , частицы движутся от центра, а в подобласти III_b, отвечающей течению перед поверхностью Φ_0 , — к центру. Таким образом, при $\gamma = \gamma_2$ в области III движение частиц двунаправлено. Схема течения для второго случая в некоторый фиксированный момент времени $t_m > t_2$ показана на рис. 2.

Движение частиц, наблюдаемое при $\gamma = \gamma_1$, характерно для значений $1 < \gamma \leq \gamma_s$, а наблюдаемое при $\gamma = \gamma_2$, — для значений $\gamma_s < \gamma$.

Так как $\eta_0 < \eta_{sw2}$, то скорость поверхности Φ_0 выше скорости отраженной УВ. Это значит, что область III_a, в которой частицы удаляются от центра, с течением времени расширяется.

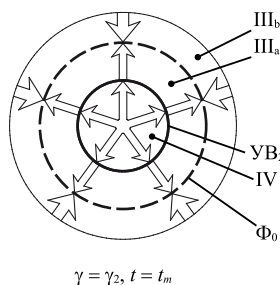


Рис. 2

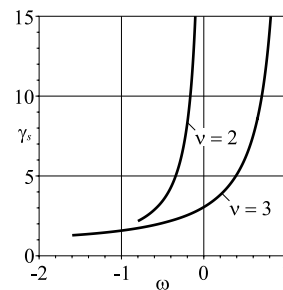


Рис. 3

Если $\gamma = \gamma_s$, реализуется граничный режим, когда отраженная УВ и поверхность с нулевой скоростью частиц совпадают, при этом $\eta_0 = \eta_{sw2}$. График зависимости значения γ_s от показателя ω для цилиндрической

($\nu = 2$) и сферической ($\nu = 3$) симметрий течения представлен на рис. 3. Если плотность невозмущенной среды постоянна ($\omega = 0$), то $\gamma_s = 73.1395$ для $\nu = 2$ и $\gamma_s = 3.05361$ для $\nu = 3$. В связи с этим можно отметить, что в сферическом случае при $\omega = 0$ экстраполяция результатов работы [1] дает значение γ_s , близкое к трем.

Целью статьи было указать на два возможных варианта развития течения в области перед отраженной УВ. Формальное решение задачи о сходящейся УВ может быть построено для любых наборов значений параметров ν , ω , γ [2]. Однако физическая сторона процесса, наблюдаемого в области III для значений $\gamma_s = \gamma_s(\nu, \omega) < \gamma$, не ясна и требует дополнительного исследования.

Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Валиев Х.Ф.* Отражение ударной волны от центра или оси симметрии при показателях адиабаты от 1.2 до 3 // ПММ. 2009. Вып. 73, №3. С. 397–407.
2. *Lazarus R.B.* Self-similar solutions for converging shocks and collapsing cavities // SIAM J. Numer. Anal. 1981. Vol. 18, is. 2. P. 316–371.

УДК 539.3

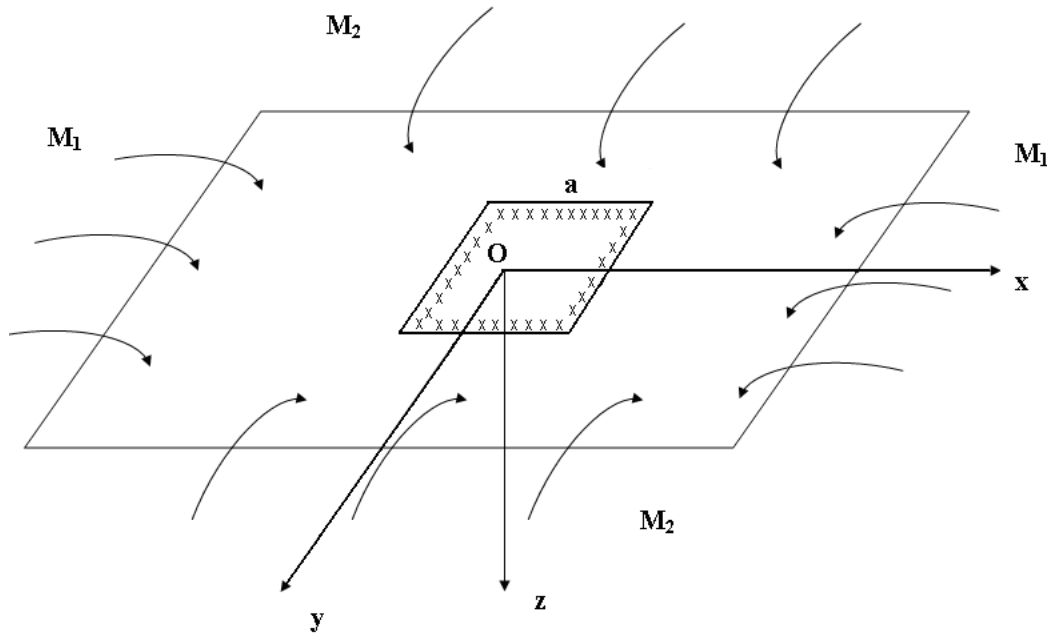
В.И. Копнина, М.В. Овчинникова

ИЗГИБ ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КВАДРАТНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Пусть имеется изотропная прямоугольная плита, ослабленная квадратным отверстием (со стороной a). Центр отверстия совпадает с началом системы координат, которая выбирается следующим образом: плоскость XOY совпадает со срединной плоскостью плиты, а ось OZ направлена вертикально вниз (рисунок). Пластинка находится под действием изгибающих моментов интенсивности M_1 на сторонах, параллельных оси OY , и интенсивности M_2 на сторонах, параллельных оси OX . Будем считать, что контур отверстия или жестко заделан, или свободен от действия изгибающих нагрузок.

Задача состоит в определении НДС такой плиты. Сделаем два предположения:

- 1) размеры отверстия малы по сравнению с размерами самой плиты;
- 2) отверстие находится достаточно далеко от краёв плиты (порядка двух-трех диаметров).



Математическая модель поставленной задачи сводится к интегрированию однородного бигармонического уравнения [1]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = 0 \quad (1)$$

относительно функции прогиба точек срединной плоскости плиты. Данное уравнение должно быть проинтегрировано с учетом граничных условий на контуре квадратного отверстия. Граничные условия имеют вид:

при жёсткой заделке

$$w = 0, \frac{dw}{dn} = 0; \quad (2)$$

при свободном от действия изгибающих нагрузок крае отверстия

$$M_n = 0, N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial S} = 0. \quad (3)$$

Здесь M_n — изгибающий момент, действующий на площадке с нормалью n (n — внешняя нормаль к контуру отверстия), $N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial S}$ — обобщенная перерезывающая сила, действующая на той же площадке[2]. Введя наряду с вещественными независимыми переменными x и y две независимые комплексные переменные:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy, \quad (4)$$

получим выражения для функции прогиба в следующем виде [3]:

$$w(z, \bar{z}) = Re[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] = \frac{1}{2}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + \overline{z\varphi(z)} + \overline{\chi(z)}], \quad (5)$$

где $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ есть аналитические в области плиты функции комплексных переменных, $\psi(z) = \chi'(z)$.

Граничные условия при жесткой заделке и свободном нагружении можно объединить, представив их в общем виде (см. [3]):

$$k_1\varphi(t) + k_2[\overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(z)}] = 0, \quad (6)$$

где $\begin{cases} k_1 = \frac{3+v}{1-v} \\ k_2 = -1 \end{cases}$ в случае свободного нагружения края плиты и

$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$ в случае жесткой заделки.

Задачу решаем методом наложения с использованием теории функций комплексного переменного. Этот метод состоит в представлении функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в следующем виде (см. [3]):

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z), \quad (7)$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ характеризуют НДС сплошной пластинки, а $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — влияние отверстия на НДС плиты.

Сначала получаем выражения для функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, затем, подставляя эти выражения в граничные условия (6) с учетом (7), получаем граничные условия для $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$. Так как отверстие имеет квадратную форму, то введем отображающую функцию вида (см. [3]):

$$z = \omega(\xi) = R\left(\xi + \frac{m}{\xi^3}\right), \quad (8)$$

которая отображает внешность единичного круга γ в плоскости ξ на внешность квадрата в плоскости z . Для определения вида функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будем использовать интегралы типа Коши. Умножая сначала граничное условие, а потом сопряженное граничное условие на ядро Коши $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma-z}$ ($|\xi| > 1$) и интегрируя по контуру единичной окружности γ , получаем выражения для $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$. В итоге получаем окончательные выражения для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$:

$$\varphi(z) = -\frac{M_1 + M_2}{4D(1+v)}z + \frac{A_1 R m}{\xi^3 k_1} + \frac{B_1 R}{k_1 - k_2 m} \frac{1}{\xi}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \frac{M_2 - M_1}{2D(1-v)}z + \frac{1}{k_2} \left(\frac{A_1 R}{\xi} + \frac{B_1 R m}{\xi^3} \right) - \\ & - \left(-\frac{\frac{1}{\xi} + m\xi^3}{1 - \frac{3m}{\xi^4}} \left(3\frac{A_1 R m}{\xi^4 k_1} - \frac{B_1 R}{k_1 - k_2 m} \frac{1}{\xi^2} \right) + a_1 m \xi \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$A_1 = \frac{M_1 + M_2}{4D(1 + \nu)}(k_1 + k_2), \quad B_1 = \frac{M_1 - M_2}{2D(1 - \nu)}k_2. \quad (11)$$

Численные расчеты НДС прямоугольной изотропной пластинки, ослабленной одним квадратным отверстием, были проведены для двух случаев:

- 1) край отверстия свободен от действия изгибающих нагрузок;
- 2) край отверстия жестко зашпемлен (таблица).

Свободное закрепление (M_Θ)	0°	30°	45°	60°	90°	135°	150°	180°
Общий случай	2,425	3,117	4,083	3,192	2,491	4,083	3,117	2,425
Чистый изгиб	1,639	2,103	2,722	2,103	1,639	2,722	2,103	1,639
Односторонний изгиб	0,853	1,089	1,361	1,014	0,786	1,361	1,089	0,853
Жесткая заделка (M_r)								
Общий случай	1,465	3,192	5,310	2,877	1,190	5,310	3,192	1,465
Чистый изгиб	0,885	2,023	3,540	2,023	0,885	3,540	2,023	0,885
Односторонний изгиб	0,305	0,854	1,770	1,169	0,580	1,770	0,854	0,305

Сравнивая результаты, полученные в первой и второй задачах, можно сделать следующие выводы:

- 1) свободное закрепление снижает концентрацию напряжений во всех рассмотренных случаях;
- 2) жесткое закрепление увеличивает концентрацию напряжений, разница между максимальным и минимальным значениями напряжений значительно больше, чем при свободном закреплении;
- 3) во всех рассмотренных случаях и при обоих способах закрепления максимальное значение изгибающего момента достигается в угловых точках квадрата.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Савин Г.Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951.
2. *Лешницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1957.
3. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

А.Г. Маркушин

МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИСТЕЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА С ТВЕРДЫМ ЗЕРНОМ

Сыпучее тело, отдельные зерна которого не испытывают пластических деформаций ни при каких обстоятельствах его переработки, будем называть твердозерненным сыпучим материалом или сыпучим телом с твердым зерном. Понятно, что предел текучести отдельных зерен подобного сыпучего тела должен быть во много раз большим предела пропорциональности самого сыпучего материала. К таким материалам относятся все каменные породы мелкой фракции, пески и т.д. В основу развиваемой в [1–3] и в настоящей статье теории истечения сыпучего материала положена теория пластического течения сплошной среды при переменных нагрузениях [4–7]. Составными элементами этой теории для осесимметричного случая, который здесь рассматривается, являются уравнения равновесия и соотношения теории упругости при осесимметричной деформации, условие пластичности, условие упрочнения при сжатии, ассоциированный закон пластического течения и закон сохранения массы элемента сыпучего тела. Центральным звеном предлагаемой теории движения сыпучей среды является диаграмма $\sigma - \varepsilon$ учета истории нагружения элемента сыпучего материала (см. [2]). В качестве метода приближенного решения задачи теории пластического течения взят метод дополнительных деформаций. Дискретизация краевой задачи для определяющих дифференциальных уравнений выполнена методом конечных разностей. При решении задачи теории пластического течения при переменных нагружениях, процесс истечения из бункера сыпучего материала разбивается на ряд малых этапов, в пределах которых дополнительные деформации предполагаются постоянными во времени (используется квазистатический подход) и определяются по напряженному состоянию в начале этапа. Разрешающие уравнения, необходимые для определения на каждом этапе осесимметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) сыпучего тела и его движения под действием собственного веса при истечении из бункера, получим, преобразуя уравнения движения теории упругости в напряжениях [8]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho g. \quad (1)$$

Плотность ρ в уравнениях (1) считаем переменной величиной, которую будем определять решением уравнения, получаемого из закона сохранения массы элемента сыпучего тела

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \frac{\partial w}{\partial t}) = 0. \quad (2)$$

При этом обоснование использования уравнения (2) для описания истечения сыпучего тела остается тем же самым (как и его вывод), каким оно является в механике жидкости с тем лишь отличием, что вместо термина «индивидуальная частица» вводится термин «элемент сыпучего тела», имеющий значение достаточно большой совокупности отдельных зерен сыпучего материала. Для реализации метода (см. [4, 5]) дополнительных деформаций все время, необходимое для разгрузки бункера, разделим на достаточно большое число малых интервалов Δt времени, каждый из которых будем называть этапом. Предположим, что на k -м этапе перемещения u^{k-1}, w^{k-1} получили приращения $\Delta u, \Delta w$ и стали равными:

$$u^k = u^{k-1} + \Delta u, w^k = w^{k-1} + \Delta w. \quad (3)$$

Подставив выражения (3) в соотношения, связывающие деформации и перемещения, получим

$$\varepsilon_r^k = \frac{\partial u^k}{\partial r} = \frac{\partial u^{k-1}}{\partial r} + \frac{\partial \Delta u}{\partial r} = \varepsilon_r^{k-1} + \Delta \varepsilon_r,$$

$$\varepsilon_\varphi^k = \frac{u^{k-1}}{r} + \frac{\Delta u}{r} = \varepsilon_\varphi^{k-1} + \Delta \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z^k = \varepsilon_z^{k-1} + \Delta \varepsilon_z,$$

$$\gamma_{zr}^k = \gamma_{zr}^{k-1} + \Delta \gamma_{zr}, \theta^k = \varepsilon_r^{k-1} + \varepsilon_\varphi^{k-1} + \varepsilon_z^{k-1} + \Delta \varepsilon_r + \Delta \varepsilon_\varphi + \Delta \varepsilon_z = \theta^{k-1} + \Delta \theta. \quad (4)$$

Подставив затем (4) в соотношения закона Гука, будем иметь

$$\sigma_{rr}^k = \lambda \theta^{k-1} + 2G \varepsilon_r^{k-1} + \lambda \Delta \theta + 2G \Delta \varepsilon_r, \sigma_{\varphi\varphi}^k = \lambda \theta^{k-1} + 2G \varepsilon_\varphi^{k-1} + \lambda \Delta \theta + 2G \Delta \varepsilon_\varphi,$$

$$\sigma_{zz}^k = \lambda \theta^{k-1} + 2G \varepsilon_z^{k-1} + \lambda \Delta \theta + 2G \Delta \varepsilon_z, \tau_{zr}^k = G \gamma_{zr}^{k-1} + G \Delta \gamma_{zr}, \quad (5)$$

где $\lambda = \mu E / ((1 + \mu)(1 - 2\mu))$, $G = 0.5E / (1 + \mu)$. Здесь и ранее $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \tau_{zr}$ – напряжения; $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \gamma_{zr}$ – деформации; w – перемещение точки (z, r) в направлении оси z ; u – перемещение в направлении радиуса (в тангенциальном направлении перемещение равно нулю); E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона. Понятно,

что приращения напряжений, происшедшие за время Δt , могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{rr} &= \lambda\Delta\theta + 2G\Delta\varepsilon_r, \Delta\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\Delta\theta + 2G\Delta\varepsilon_\varphi, \\ \Delta\sigma_{zz} &= \lambda\Delta\theta + 2G\Delta\varepsilon_z, \Delta\tau_{zr} = G\Delta\gamma_{zr},\end{aligned}\quad (6)$$

и соотношения (5) тогда можно записать следующим образом:

$$\sigma_r^k = \sigma_r^{k-1} + \Delta\sigma_r, \sigma_\varphi^k = \sigma_\varphi^{k-1} + \Delta\sigma_\varphi, \tau_{zr}^k = \tau_{zr}^{k-1} + \Delta\tau_{zr}. \quad (7)$$

В теории пластического течения, как известно, в случае осесимметричной деформации устанавливается связь между приращениями деформаций $d\varepsilon_r, d\varepsilon_\varphi, d\varepsilon_z, d\gamma_{zr}$, приращениями напряжений $d\sigma_{rr}, d\sigma_{\varphi\varphi}, d\sigma_{zz}, d\sigma_{zr}$ и напряжениями $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{zr}$. В основу теории пластического течения используемой здесь, положим следующие гипотезы.

1. Вследствие уплотнения сыпучего материала при его движении пределы текучести при сжатии σ_3^t и «растяжении» σ_4^t увеличиваются в сравнении с таковыми σ_1^t, σ_2^t для материала, уложенного насыпью, в зависимости от длины пройденного пути элементом сыпучего тела. Будем считать, что математически в первом приближении эта гипотеза о динамическом уплотнении выражается формулами

$$\sigma_3^t = \sigma_1^t + (\sigma_{3max}^t - \sigma_1^t)w/H, \sigma_4^t = \sigma_2^t + (\sigma_{4max}^t - \sigma_2^t)w/H,$$

где σ_3^t, σ_4^t – пределы текучести «идеально» уложенного материала, являющиеся принципиально недостижимыми, при истечении, H – высота засыпки сыпучего материала в бункере.

2. Компоненты тензора приращений пластических деформаций прямо пропорциональны компонентам тензора напряжений.

3. Интенсивность напряжений является функцией интеграла от интенсивности приращений пластических деформаций [9]. Предположим, далее, что упрочнение является изотропным, и приращения деформаций складываются из приращений упругих и пластических деформаций:

$$d\varepsilon_r = d\varepsilon_r^e + d\varepsilon_r^p, d\varepsilon_\varphi = d\varepsilon_\varphi^e + d\varepsilon_\varphi^p, d\varepsilon_z = d\varepsilon_z^e + d\varepsilon_z^p, d\gamma_{zr} = d\gamma_{zr}^e + d\gamma_{zr}^p. \quad (8)$$

Здесь индексами e и p обозначены упругие и пластические составляющие соответственно. Предположим, наконец, что приращения напряжений и упругих деформаций связаны между собой выражениями, аналогичными соотношениям закона Гука:

$$d\varepsilon_r^e = 1/[d\sigma_{rr} - \mu(d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{zz})], d\varepsilon_\varphi^e = 1/[d\sigma_{\varphi\varphi} - \mu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{rr})],$$

$$d\varepsilon_z^e = 1/[d\sigma_{zz} - \mu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{\varphi\varphi})], d\gamma_{zr}^e = 1/Gd\sigma_{zr}. \quad (9)$$

На роль условия пластичности примем энергетическое условие, по которому наступление пластического состояния определяется только вторым инвариантом девиатора напряжений (что принимается здесь как пробный вариант), т.е. $3|I_2(D)| - [\Phi(q)]^2 = \sigma_i^2 - [\Phi(q)]^2 = 0$. На роль параметра упрочения q выберем параметр Удквиста, тогда $\sigma_i = \Phi(q) = \Phi(\int de_i^p)$, т.е. интенсивность напряжений σ_i является функцией параметра Удквиста, не зависящей от вида напряженного состояния. Поэтому считаем, что функцию Φ легко определить из опытов на сжатие материала [9].

Приращения пластических деформаций в соответствие с теорией течения запишем в виде (см. [4, 5]):

$$d\varepsilon_r^p = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{rr} - \sigma)d\sigma_i, d\varepsilon_\varphi^p = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma)d\sigma_i, \\ d\varepsilon_z^p = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{zz} - \sigma)d\sigma_i, d\gamma_{zr}^p = F_\sigma(\sigma_i)\sigma_{zr}d\sigma_i, \quad (10)$$

$$\sigma_i = \text{sqrt}((\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6\sigma_{zr}^2)\sqrt{2}. \quad (11)$$

Значение функции $F_\sigma(\sigma_i)$ может быть найдено с помощью обычной кривой деформирования и определено по формуле (см. [4, 5]):

$$F_\sigma(\sigma_i) = \begin{cases} (1 - \mu)/((1 + \mu)\sigma_i)(1/E_k - (1 - 2\mu^2/(1 - \mu))/E), & \sigma_i > \sigma_i^1 \\ 0, & \sigma_i < \sigma_i^1, E_k = \frac{\partial\sigma_i(\varepsilon_i)}{\partial\varepsilon_i} \end{cases} \quad (12)$$

где σ_i^1 – интенсивность напряжений, соответствующая по кривой деформирования пластической деформации ε_{i1}^p , накопленной к началу рассматриваемого этапа нагружения $\varepsilon_{i1}^p = \int de^p$. Здесь интенсивность дифференциалов пластической деформации вычисляется по формуле

$$de_i^p = \text{sqrt}((d\varepsilon_r^p - d\varepsilon_\varphi^p)^2 + (d\varepsilon_\varphi^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_r^p)^2 + 6(d\gamma_{zr}^p)^2)\text{sqrt}(2)/3. \quad (13)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим уравнения состояния пластически деформируемой среды по теории течения:

$$d\varepsilon_r = 1/E[d\sigma_{rr} - \mu(d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{zz})] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{rr} - \sigma)d\sigma_i, \\ d\varepsilon_\varphi = 1/E[d\sigma_{\varphi\varphi} - \mu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{rr})] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma)d\sigma_i, \\ d\varepsilon_z = 1/E[d\sigma_{zz} - \mu(d\sigma_{\varphi\varphi} + d\sigma_{rr})] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_{zz} - \sigma)d\sigma_i, \\ d\gamma_{zr} = 1/Gd\sigma_{zr} + F_\sigma(\sigma_i)\sigma_{zr}d\sigma_i. \quad (14)$$

Согласно технике применения метода дополнительных деформаций выполним интегрирование соотношений (14) по времени для k -го этапа разгрузки бункера, в результате получим

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_r &= 1/E[\Delta\sigma_{rr} - \mu(\Delta\sigma_{\varphi\varphi} + \Delta\sigma_{zz})] + \Delta\varepsilon_r^p, \\ \Delta\varepsilon_\varphi &= 1/E[\Delta\sigma_{\varphi\varphi} - \mu(\Delta\sigma_{zz} + \Delta\sigma_{rr})] + \Delta\varepsilon_\varphi^p, \\ \Delta\varepsilon_z &= 1/E[\Delta\sigma_{zz} - \mu(\Delta\sigma_{\varphi\varphi} + \Delta\sigma_{rr})] + \Delta\varepsilon_z^p, \\ \Delta\gamma_{zr} &= 1/G\Delta\sigma_{zr} + \Delta\gamma_{zr}^p,\end{aligned}\quad (15)$$

где $\Delta\varepsilon_r^p = \langle\varepsilon_r^p\rangle d\sigma_i$, $\Delta\varepsilon_\varphi^p = \langle\varepsilon_\varphi^p\rangle d\sigma_i$, $\Delta\varepsilon_z^p = \langle\varepsilon_z^p\rangle d\sigma_i$, $\Delta\gamma_{zr}^p = \langle\gamma_{zr}^p\rangle d\sigma_i$, здесь под $\langle\varepsilon_r^p\rangle$, $\langle\varepsilon_\varphi^p\rangle$, $\langle\varepsilon_z^p\rangle$, $\langle\gamma_{zr}^p\rangle$ понимается среднее значение величин:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^k &= F_\sigma(\sigma_i)_k(\sigma_{rr} - \sigma)_k, \varepsilon_\varphi^k = F_\sigma(\sigma_i)_k(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma)_k, \\ \varepsilon_z^k &= F_\sigma(\sigma_i)_k(\sigma_{zz} - \sigma)_k, \gamma_{zr}^k = F_\sigma(\sigma_i)_k\sigma_{zr}^k.\end{aligned}\quad (16)$$

Разрешив соотношения (14) относительно приращений напряжений будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{rr} &= \lambda\Delta\theta^e + 2G\Delta\varepsilon_r - \lambda\Delta\theta^p - 2G\Delta\varepsilon_r^p, (\Delta\theta^p \neq 0) \\ \Delta\sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\Delta\theta^e + 2G\Delta\varepsilon_\varphi - \lambda\Delta\theta^p - 2G\Delta\varepsilon_\varphi^p, \\ \Delta\sigma_{zz} &= \lambda\Delta\theta^e + 2G\Delta\varepsilon_z - \lambda\Delta\theta^p - 2G\Delta\varepsilon_z^p, \\ \Delta\sigma_{zr} &= G\gamma_{zr} - G\Delta\gamma_{zr}^p.\end{aligned}\quad (17)$$

Подставив (см. [5]) далее соотношения (17) в уравнения (1), используя при этом соотношения, аналогичные соотношениям Коши,

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{\partial\Delta u}{\partial r}, \Delta\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta u}{r}, \Delta\varepsilon_z = \frac{\partial\Delta w}{\partial z}, \Delta\gamma_{zr} = \frac{\partial\Delta w}{\partial r} + \frac{\partial\Delta u}{\partial z}, \quad (18)$$

нетрудно получить систему разрешающих уравнений для приращений перемещений, для решения которой необходимо сформулировать краевые условия. Отметим здесь, что решению задачи истечения предшествует решение задачи определения НДС сыпучего тела при закрытом отверстии, что необходимо для правильной работы алгоритма учета истории нагружения элемента сыпучего материала при решении задачи истечения, который описан в работе [2]. Алгоритм решения поставленной задачи с использованием квазистатического подхода описан в статье [10].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Маркушин А.Г. К построению модели истечения сыпучего материала // Математика, механика и их приложения: материалы науч.-практ. конф. Саратов, 1998.
2. Маркушин А.Г. Алгоритм учета истории нагружения элемента сыпучего тела с твердым зерном в задаче истечения // Механика деформируемых сред: межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2002. Вып. 14.
3. Маркушин А.Г. Алгоритм решения задачи истечения сыпучего материала с твердым зерном // Математика. Механика. Саратов, 2009. Вып. 11.
4. Биргер И.А. Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение. 1964. № 1.
5. Маркушин А.Г. Об основных деталях построения теории истечения сыпучего тела с твердым зерном // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов, 2008. Вып. 10.
6. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. М., 1965.
7. Шевченко Ю.А. Термопластичность при переменных нагружениях. Киев, 1970.
8. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести М., 1968.
9. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М., 1969.
10. Маркушин А.Г. Квазистатический подход в решении задачи истечения сыпучего тела с твердым зерном // Проблемы прочности элементов конструкций под воздействием нагрузок и рабочих сред: межвуз. науч. сб. Саратов, 2004.

УДК 539.3

В.Ю. Ольшанский, Ю.Н. Нагар, А.В. Серебряков

ПОСТРОЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПЬЕЗОГИРОСКОПА

Развивается математическая модель пьезогироскопа, предназначенного для измерения угловой скорости вращения объекта. Чувствительный узел состоит из пьезокерамических пластин Π_1, Π_2 . Пластины поляризованы вдоль толщин. Одно из оснований каждой пластины закреплено, другое – контактирует с грузом массы M . Действие груза на пластины приводится к нормальному механическому усилию, распределенному по площади основания A [1].

На пластину Π_1 по толщине действует переменный электрический ток, возбуждающий за счет пьезоэффекта механические колебания с перемещениями $u_1(x_1, t)$ в направлении Ox_1 . Эти колебания передаются присоединенной массе. Если платформа с пьезогироскопом вращается с угловой скоростью Ω относительно инерциальной системы отсчета, то на массу M действует кориолисова сила $\mathbf{F}_c = -2M(\Omega \times \mathbf{v}_r)$. Наличие компонента Ω_3 , коллинеарного оси Ox_3 , приводит к давлению

присоединенной массы на пластину Π_2 . Колебания пластины Π_2 с перемещениями $u_2(x_2, t)$ в направлении x_2 возбуждают в ней за счет пьезоэффекта электрический ток. Присоединенная масса, совершая колебания в направлении x_2 , за счет кориолисовой силы создает переменное давление, действующее на пластину Π_1 . При этом пьезокерамические элементы в данной конструкции не испытывают деформаций изгиба. Величина электрического тока, снимаемого с пластины Π_2 , может быть использована для определения компонента Ω_3 угловой скорости объекта.

Так как период колебаний пластин весьма мал и за один период угловая скорость Ω изменяется незначительно, рассматривались установившиеся колебания при $\Omega_3 = \text{const}$. Приходим к связанной задаче электроупругости [2], представленной далее в безразмерных величинах. В краевую задачу входят уравнения механических колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, i = 1, 2, \quad (1)$$

граничные условия

$$u_i(0, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(\delta_1, t)}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \psi_1(\delta_1, t)}{\partial x_1} + m \left(-\frac{\partial^2 u_1(\delta_1, t)}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u_2(\delta_2, t)}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial u_2(\delta_2, t)}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \psi_2(\delta_2, t)}{\partial x_2} + m \left(-\frac{\partial^2 u_2(\delta_2, t)}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial u_1(\delta_1, t)}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

а также уравнения вынужденной электростатики

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i^2} = \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}, i = 1, 2, \quad (4)$$

для электрических потенциалов $\psi_i(x_i, t)$ и граничные условия

$$\psi_1(0, t) = -U(t)/2, \quad \psi_1(\delta_1, t) = U(t)/2, \quad \psi_2(0, t) = 0, \quad \psi_2(\delta_2, t) = 0. \quad (5)$$

Коэффициент α в (1) определяется резонансной частотой пластины и добротностью пьезокерамического материала. В формулах (3) обозначено $m = Ms_{33}c^2/Ah$, $\omega = \Omega_3 h/c$, где s_{33} – упругая податливость материала, c – скорость сопряженных продольных волн в пьезокерамике, h – характерный линейный размер (толщина пластины). При этом оказывается, что для реальных значений Ω_3 параметр $\omega \ll 1$. В уравнения (4) входит известный продольный

статический коэффициент электромеханической связи k_{33}^2 . Граничные условия для потенциала $\psi_1(x_1, t)$ содержат заданное напряжение $U(t)$. Граничные условия для потенциала $\psi_2(x_2, t)$ записаны для случая большой проводимости внешней цепи [2]. Интегрирование уравнений (4) при граничных условиях (5) позволяет выразить потенциалы $\psi_i(x_i, t)$ через перемещения $u_i(x_i, t)$. Это делает краевую задачу (1)–(3) замкнутой относительно перемещений.

Рассматривался случай, когда напряжение тока, приложенного к пластине Π_1 , изменяется по гармоническому закону $U(t) = U_0 \sin \beta t$. Перемещения в пластинах отыскивались в виде

$$u_i(x_i, t) = \xi_i(x_i) \cos \beta t + \eta_i(x_i) \sin \beta t, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Подстановка выражений (6) в уравнения (1) приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций ξ_i, η_i . Решение этих систем с учетом граничных условий (2), (3) приводит к представлениям вида

$$\xi_i(x_i) = 2 \cdot \text{Im}(jC_i \text{sh} \gamma x_i), \quad \eta_i(x_i) = 2 \cdot \text{Re}(jC_i \text{sh} \gamma x_i), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь $\gamma = \beta \sqrt{-1 + j\alpha/\beta}$. В формулах (7) обозначено:

$$C_1 = \frac{jP_2}{P_1P_2 - Q_1Q_2} \cdot \frac{(1 - k_{33}^2)U_0}{2\delta_1}, \quad C_2 = \frac{Q_1}{P_1P_2 - Q_1Q_2} \cdot \frac{(1 - k_{33}^2)U_0}{2\delta_1},$$

$$P_i = \gamma \text{ch} \gamma \delta_i - \left(\frac{k_{33}^2}{\delta_i} + m(1 - k_{33}^2)\beta^2 \right) \text{sh} \gamma \delta_i,$$

$$Q_i = 2\omega m(1 - k_{33}^2) \text{sh} \gamma \delta_i, \quad i = 1, 2.$$

После того, как найдены перемещения и электрические потенциалы, может быть рассчитана сила тока $I(t)$, генерируемого в пластине Π_2 . В случае одномерного электрического поля для пластин, у которых все основание покрыто электродом, для силы тока получено выражение

$$I(t) = \left(A \frac{c}{h} e_{33} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_2(\delta_2, t)}{\partial x_2} \right) - \left(A \frac{c}{h} \frac{\epsilon_{33}}{d_{33}} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_2(\delta_2, t)}{\partial x_2} \right). \quad (8)$$

В формулу (8) входят пьезомодуль e_{33} , диэлектрическая проницаемость ϵ_{33} и пьезоэлектрическая постоянная d_{33} . После подстановки в (8) выражений для $u_2(x_2, t)$ и $\psi_2(x_2, t)$ получаем

$$I(t) = \frac{(1 - k_{33}^2)U_0}{\delta_1\delta_2} A \frac{c}{h} \cdot \text{Re} \left(\frac{j\beta Q_1}{P_1P_2 - Q_1Q_2} \Phi(\gamma) \exp(j\beta t) \right). \quad (9)$$

Здесь $\Phi(\gamma)$ – определенная функция.

С использованием выражения (9) получены результаты для пластин, изготовленных из пьезокерамики марки ЦТС-19 с механической добротностью $Q = 90$. Расчеты проводились для $h = 6 \cdot 10^{-4}$ м при угловой скорости $\Omega_3 = 10$ рад/с. Наблюдалось возрастание амплитуды тока для значений β , близких к первой собственной частоте λ_1 свободных колебаний пластины без внутреннего трения.

В таблице представлены значения собственной частоты и нормированной безразмерной амплитуды тока при различных величинах присоединенной массы.

$M, \text{кг}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
λ_1	0,5077	0,4876	0,4698
$j_\omega \cdot 10^6$	1,20	1,44	1,68

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нагар Ю.Н., Ольшанский В.Ю., Панкратов В.М., Серебряков А.В. Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2. С. 71–74.

2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.

УДК 539.3

В.Ю.Ольшанский, Ю.Н.Нагар

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ОДНООСЕВОМ ПЬЕЗОГИРОСКОПЕ

Рассматривается модель устройства [1] для измерения угловых скоростей вращения подвижного объекта, состоящего из двух тонких взаимно перпендикулярных пьезокерамических пластин Π_1, Π_2 и груза массы M . У каждой из пластин одно из оснований закреплено, а другое постоянно контактирует с грузом, воспринимая лишь нормальное механическое усилие.

К пластине Π_1 прикреплены электроды, с помощью которых подается электрический сигнал. Пьезоматериал, из которого изготовлены пластины, предварительно поляризован в направлении вдоль их толщин. Порождаемые в пьезопластинке за счет продольного пьезоэффекта плоские упругие деформационные волны приводят в движение груз.

При вращении подвижной системы отсчета относительно инерциальной системы на груз действует кориолисова сила

$\mathbf{F}_c = -2M(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_r)$. Вследствие этого угловая скорость $\mathbf{\Omega}$ подвижной системы отсчета влияет на амплитуду и другие характеристики колебаний. Так как период колебаний пластин весьма мал и за один период угловая скорость изменяется незначительно, возможно рассматривать установившиеся колебания при $\Omega_3 = \text{const}$.

Обозначим $u_i(x_i, t)$ – перемещение плоского слоя с координатой x_i в пластине Π_1 . Воспользуемся волновым уравнением, описывающим распространение волны в длинной линии с затуханием без искажений [2]. Дополним его начальными условиями, а также граничными условиями, учитывающими уравнение обратного пьезоэффекта. Переходя к безразмерным величинам, получим следующую краевую задачу для определения перемещений в пластинах:

$$(u_i)''_{tt} + 2\alpha h(u_i)'_t + \alpha^2 h^2 u_i = (u_i)''_{x_i x_i}, i = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_i(x_i, 0) = 0, (u_i)'_t \Big|_{t=0} = 0, i = 1, 2, \quad (2)$$

$$u_i(0, t) = 0, i = 1, 2, \quad (3)$$

$$\left((u_i)'_{x_i} + m(u_i)''_{tt} \right) \Big|_{x_i=\delta_i} = h_i(t) + m(-1)^j \omega (u_j)'_t \Big|_{x_j=\delta_j}, j = 3 - i, i = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь α – коэффициент затухания, учитывающий рассеивание энергии на тепловые потери, c^E – скорость звука в пьезокерамической пластине при $E = \text{const}$, d_{33} – пьезомодуль при продольном пьезоэффекте, s_{33}^E – упругие податливости по осям $i = 1, 2$ при $E = \text{const}$, $h_1(t) = d_{33}E_1(t)$, $h_2(t) = 0$, $E_1(t)$ – напряженность электрического поля в первой пластине. В формулах (4) обозначено $m = Ms_{33}^E(c^E)^2/(Ah)$, $\omega = 2\Omega_3 h/c^E$, h – характерный линейный размер.

Представим решение в виде разложения $u_i(x_i, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{in}(x_i, t) \cdot \omega^n$, $i = 1, 2$, по малому параметру $\omega \ll 1$. Получим для функций $u_{i0}(x_i, t)$ и $u_{i1}(x_i, t)$ краевые задачи, включающие уравнения (1), условия (2), (3), а также граничные условия соответственно

$$\left((u_{i0})'_{x_i} + m(u_{i0})''_{tt} \right) \Big|_{x_i=\delta_i} = h_i(t),$$

$$\left((u_{i1})'_{x_i} + m(u_{i1})''_{tt} \right) \Big|_{x_i=\delta_i} = (-1)^j m (u_{j0})''_{tt} \Big|_{x_j=\delta_j}, j = 3 - i, i = 1, 2.$$

Ранее (см. [1]) был рассмотрен случай $\alpha = 0$ и рассчитаны собственные частоты пластин, используемые затем в случае учета внутреннего трения в пластинах. Поскольку найденные резонансные частоты велики

(> 2 МГц), возбуждение колебаний в пластине Π_1 с частотой, близкой к резонансной, может приводить к ее нагреву. Для уменьшения этого нежелательного эффекта, можно производить возбуждение колебаний лишь в течение периода времени, достаточного для их установления. В связи с этим представляет интерес изучение переходного процесса и возникает необходимость рассчитать время выхода на установившиеся колебания.

Рассмотрим задачу с учетом диссипации. Пусть $\delta_1 = \delta_2 = h$. Применяв к названным краевым задачам преобразование Лапласа по переменной t , имеем для изображений перемещений \tilde{u}_{in} ОДУ второго порядка с граничными условиями. Получив решение этих уравнений, затем восстанавливаем их оригиналы при $x_i = 1$ с использованием теоремы умножения и второй теоремы разложения [3] и полагая $h_1(t) = U_0 \sin \beta t$:

$$u_{10}(1, t) = 2U_0 \operatorname{Re} \sum_{p_n: \operatorname{Im} p_n > 0} \frac{\beta(e^{p_n t} - \cos \beta t) - p_n \sin \beta t}{(\beta^2 + p_n^2) f'(p_n)};$$

$$u_{21}(1, t) = -mU_0 \beta \sum_{p_n} \frac{1}{f'^2(p_n)} \left(\frac{f''(p_n)}{f'(p_n)} \cdot \frac{p_n(\cos \beta t - e^{p_n t}) - \beta \sin \beta t}{\beta^2 + p_n^2} + \right. \\ \left. + \frac{p_n t e^{p_n t}}{\beta^2 + p_n^2} + \frac{(p_n^2 - \beta^2)(\cos \beta t - 2\beta p_n \sin \beta t)}{(\beta^2 + p_n^2)^2} \right). \quad (5)$$

В равенствах (5) обозначено $f(p) = \gamma \operatorname{cth} \gamma + mp^2$, $p_n = \gamma_n - \alpha h$ – простые полюсы функции $\phi(p) = 1/f(p)$. Для действительной и мнимой частей γ_n была получена оценка

$$x_n = 2\beta/(m\pi^2 n^2), y_n = \pi n + 1/(m\pi n) \quad (n \gg 1),$$

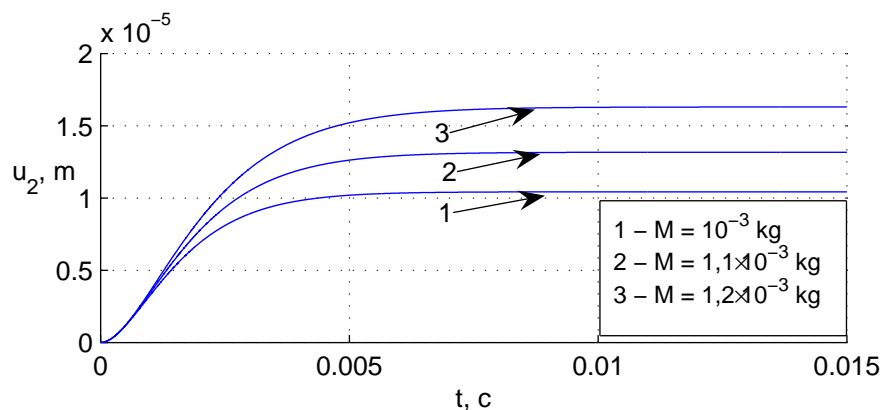
которая использовалась при итерационном уточнении нулей $f(p)$. При малых значениях n γ_n находились методом продолжения по параметру α , где в качестве начальных приближений для y_n брались значения собственных частот пластин, рассчитанные в [1], а для x_n – нулевые значения.

Пренебрегая слагаемыми более высокого порядка малости, размерное перемещение незакрепленной грани пластины Π_2 можно выразить следующим образом:

$$u_2(\delta_2, t) = h\omega u_{21}(1, t). \quad (6)$$

Для переходного процесса были проведены численные расчеты по формулам (5), (6) и построен график зависимости амплитудных

значений перемещения $u_2(\delta_2, t)$. На рисунке представлено сравнение амплитудных значений перемещения в переходном процессе для различных значений массы присоединенного груза, от которой зависит коэффициент α , рассчитанные при частотах внешнего воздействия, близких к резонансным (1 – 2,77998 МГц, 2 – 2,65951 МГц, 3 – 2,55344 МГц).



Определен промежуток времени, за который происходит выход на установившиеся колебания, например, при $M = 10^{-3}$ кг он составил $\Delta t \approx 0,007$ с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нагар Ю.Н., Ольшанский В.Ю., Панкратов В.М., Серебряков А.В.* Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2. С. 71–74.
2. *Афонин С.М.* Параметрическая структурная схема пьезопреобразователя // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 6. С. 101–107.
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

УДК 629

И.А. Панкратов, Я.Г. Сапунков, Ю.Н. Челноков

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В настоящей статье исследуется следующая задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА): необходимо определить ограниченное по модулю управление \mathbf{u} :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = |\mathbf{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$2d\mathbf{\Lambda}/dt = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \quad \mathbf{\Omega}_\xi = ur(\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2)/c,$$

$$d\varphi/dt = c/r^2, \quad c = \text{const}, \quad r = p/(1 + e \cos \varphi),$$

из заданного начального состояния

$$t = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}^0$$

в конечное состояние

$$t = t_1, \quad \varphi(t_1) = \varphi_1, \quad \text{vect}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}(t_1) \circ \mathbf{\Lambda}^*) = 0.$$

При этом необходимо минимизировать функционал $J_1 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt$ или функционал $J_2 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt$, $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0$.

При $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ имеем задачу быстрогодействия. Здесь $\mathbf{\Lambda}$ – кватернион ориентации орбиты КА, r – модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА, c – постоянная площадей, p и e – параметр и эксцентриситет орбиты, φ – истинная аномалия. Верхняя волна – символ сопряжения. Величины c , p , e , φ_0 , $\mathbf{\Lambda}^0$, $\mathbf{\Lambda}^*$ заданы; подлежат определению t_1 , φ_1 и оптимальный закон управления $u = u(t)$.

Поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Понтрягина. Были построены система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных, законы оптимального управления. Исходная задача сведена к краевой задаче 10-го порядка. Также была рассмотрена краевая задача в параметрах Эйлера λ_j , $j = \overline{0, 3}$ (см., например, [1]). Авторами предложен оригинальный алгоритм численного решения указанных дифференциальных краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА, являющийся комбинацией методов Рунге–Кутты 4-го порядка точности, Ньютона, градиентного спуска. Приводятся примеры расчетов. Построены графики оптимальных траекторий и управлений, функции переключения управления.

Начальные и конечные значения угловых элементов орбиты задавались равными:

$$\Omega_0 = 40.00^\circ, \quad I_0 = -70.57^\circ, \quad \omega_{\pi 0} = 84.98^\circ,$$

$$\Omega_1 = 72.00^\circ, \quad I_1 = 47.00^\circ, \quad \omega_{\pi 1} = 45.02^\circ.$$

Здесь Ω – долгота восходящего узла, I – наклонение орбиты, ω_π – угловое расстояние до перицентра.

Начальное и конечное положения орбиты КА рассчитаны по значениям декартовых координат и проекций скорости КА, приведенным в [2, с. 95].

Начальные и конечные значения кватерниона ориентации орбиты, соответствующие этим значениям угловых элементов, равны

$$\begin{aligned}\Lambda^0 &= (0.678275, -0.245862, -0.593909, -0.353860); \\ \Lambda^* &= (-0.440542, -0.522476, -0.125336, -0.719189).\end{aligned}$$

На рис. 1 приведены результаты решения в безразмерных переменных краевой задачи для функционала $\int_0^{t_1} (1 + 4.2u^2) dt \rightarrow \min (e = 0.25)$, на рис. 2 – для $\int_0^{t_1} |u| dt \rightarrow \min (e = 0.5)$, на рис. 3 – для случая быстрогодействия ($e = 0.0$). M_j и μ_j ($j = \overline{0, 3}$) – компоненты кватернионов \mathbf{M} и $\boldsymbol{\mu}$, сопряженных по отношению к фазовым кватернионам Λ и λ , соответственно. ν_j ($j = \overline{0, 3}$) – компоненты кватерниона $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\lambda} \circ \boldsymbol{\mu}$.

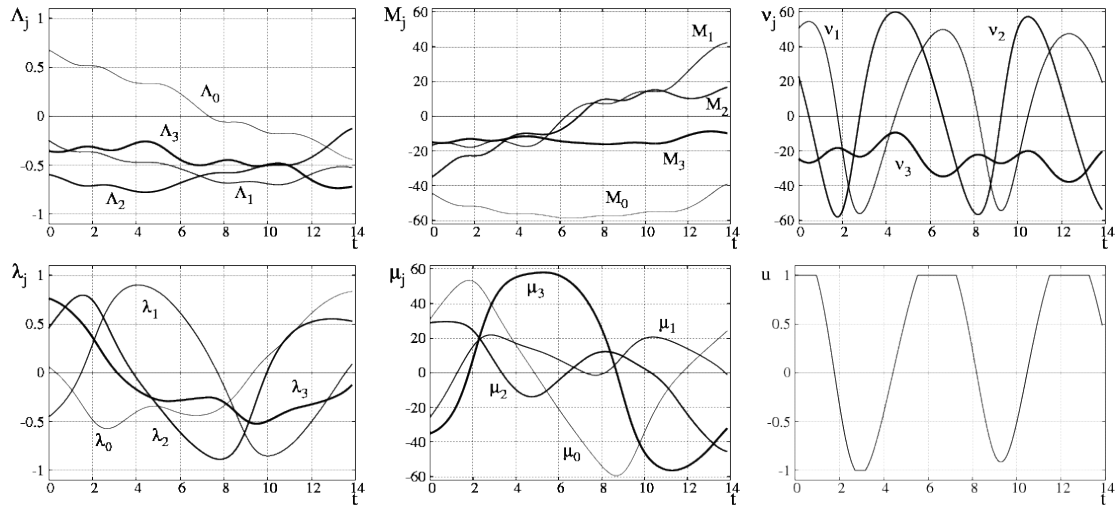


Рис. 1

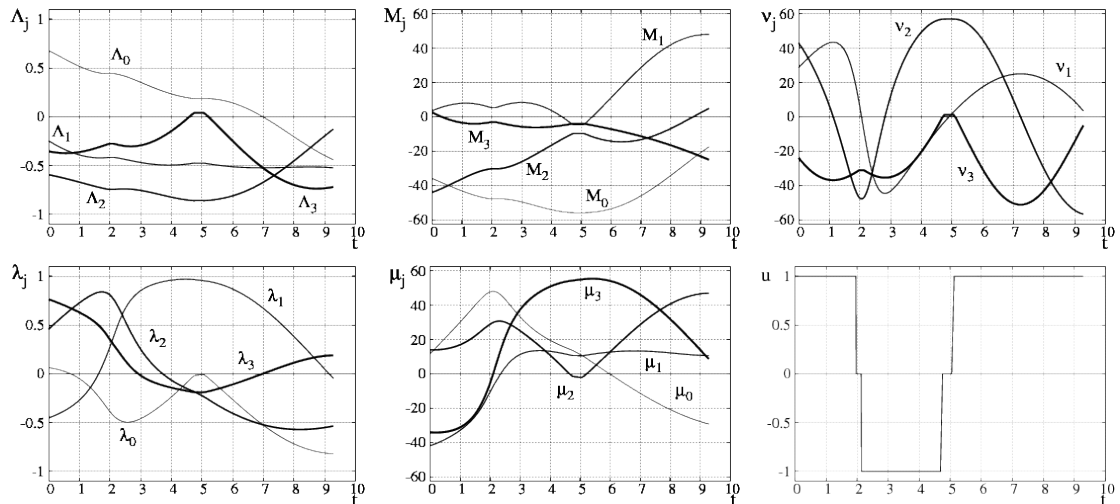


Рис. 2

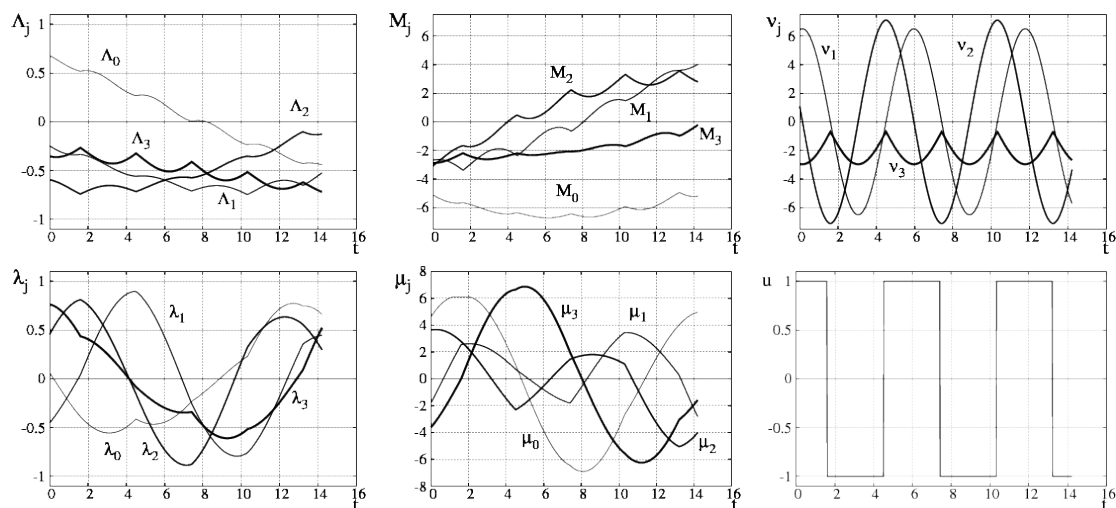


Рис. 3

Отметим, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях появляется характерный безразмерный параметр $N = u_{\max} p^3 / c^2$. При численном решении полагалось, что $N = 0.35$.

Отметим особенности полученных решений. При увеличении эксцентриситета орбиты от 0 до 0.5 уменьшается количество активных участков движения, их длительности и общее время переориентации (функционалы J_1 и J_2). При увеличении эксцентриситета орбиты от 0.5 до 0.7 и далее пропадают участки, на которых управление принимает свое максимальное по модулю значение (функционал J_1). Из анализа графиков видно, что диапазоны изменения переменных Λ_j , M_j меньше диапазонов изменения переменных λ_j , μ_j , т.е. переменные Λ_j , M_j являются мало изменяющимися переменными по сравнению с λ_j , μ_j . В случае малого отличия в ориентациях орбит время переориентации в несколько раз меньше, чем в случае, когда отличие в ориентациях орбит составляет десятки градусов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.
2. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1983. 136 с.

И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОТКЛОНЕНИЯХ

Рассматривается задача переориентации орбиты космического аппарата (КА), оптимальная в смысле минимума интегрального квадратичного функционала качества. Для решения задачи используются кватернионные модели ориентации орбиты в отклонениях и принцип максимума.

1. Постановка задачи. Необходимо определить ограниченное по модулю управление \mathbf{u} :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = |\mathbf{u}|, \quad (1)$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned} 2d\Delta\mathbf{\Lambda}/dt &= \Delta\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \quad \mathbf{\Omega}_\xi = ur(\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2)/c, \\ d\varphi/dt &= c/r^2, \quad c = \text{const}, \quad r = p/(1 + e \cos \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

из заданного начального состояния

$$t = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \Delta\mathbf{\Lambda}(0) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^0 \circ \mathbf{\Lambda}^* \quad (3)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t_1, \quad \varphi(t_1) = \varphi_1, \quad \text{vect}(\Delta\mathbf{\Lambda}(t_1)) = 0. \quad (4)$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$\int_0^{t_1} (\alpha_1[\Delta\Lambda_1^2 + \Delta\Lambda_2^2 + \Delta\Lambda_3^2] + \alpha_2 u^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}$ – кватернион ориентации орбиты КА, r – модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА, c – постоянная площадей, p и e – параметр и эксцентриситет орбиты, φ – истинная аномалия. Переменная $\Delta\mathbf{\Lambda}$ характеризует отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения, задаваемого кватернионом $\mathbf{\Lambda}^*$, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^* \circ \Delta\mathbf{\Lambda}$ [1]. Верхняя волна – символ сопряжения. Величины $c, p, e, \varphi_0, \mathbf{\Lambda}^0, \mathbf{\Lambda}^*$ заданы; подлежат определению t_1, φ_1 и оптимальный закон управления $u = u(t)$.

2. Законы оптимального управления. Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума. Для этого введем дополнительные переменные $\Delta \mathbf{M}$ и χ , сопряженные по отношению к фазовым переменным $\Delta \mathbf{\Lambda}$ и φ . Функция Гамильтона—Понтрягина имеет вид

$$H = -\sigma + \chi c/r^2 + 0.5ur(\Delta N_1 \cos \varphi + \Delta N_2 \sin \varphi)/c,$$

где $\Delta N_1, \Delta N_3$ – компоненты кватерниона $\Delta \mathbf{N} = \Delta \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \Delta \mathbf{M}$; $\sigma = \alpha_1[\Delta \Lambda_1^2 + \Delta \Lambda_2^2 + \Delta \Lambda_3^2] + \alpha_2 u^2$.

Система уравнений для сопряженных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} 2d\Delta \mathbf{M}/dt &= 4\alpha_1 \text{vect} \Delta \mathbf{\Lambda} + \Delta \mathbf{M} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \\ d\chi/dt &= 2(\chi/r)dr/dt + ur(\Delta N_1 \sin \varphi - \Delta N_2 \cos \varphi)/c - \\ &\quad - 0.5ur^2(\Delta N_1 \cos \varphi + \Delta N_2 \sin \varphi)/c^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Закон оптимального управления находится из условия максимума функции H по переменной u с учетом наложенного ограничения (1) и имеет вид

$$u^o = \begin{cases} 0.25rk/(c\alpha_2), & 0.25r|k|/(c\alpha_2) \leq u_{\max}, \\ u_{\max} \text{sign} k, & 0.25r|k|/(c\alpha_2) > u_{\max}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $k = \Delta N_1 \cos \varphi + \Delta N_2 \sin \varphi$.

3. Условия трансверсальности. Вводя неопределенные множители Лагранжа A_1, A_2, A_3 , получим условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (4), в следующем виде:

$$\text{при } t = t_1, \quad \Delta \mathbf{M} + \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A} = A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3, \quad \chi = 0. \quad (8)$$

Из (8) получаем следующие условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа:

$$\text{при } t = t_1, \quad \Delta M_0 = 0, \quad \chi = 0. \quad (9)$$

4. Анализ задачи. Таким образом, задача сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (6), (7) десятого порядка и восемью краевыми условиями (3), (4), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (9) и равенством $H^o|_{t_1} = H(\Delta \mathbf{\Lambda}, \Delta \mathbf{M}, \chi, u^o)|_{t_1} = 0$, имеющим место для оптимального управления u^o и оптимальной траектории.

5. Пример численного решения задачи. На рисунке приведены результаты численного решения краевой задачи оптимальной

переориентации эллиптической орбиты КА для интегрального квадратичного функционала качества (5). Безразмерные переменные r^b , t^b и управление u^b связаны с размерными переменными и управлением соотношениями $r = pr^b$, $t = Tt^b = \frac{p^2}{c}t^b$; $u = u_{\max}u^b$.

Начальные и конечные значения угловых элементов орбиты задавались равными:

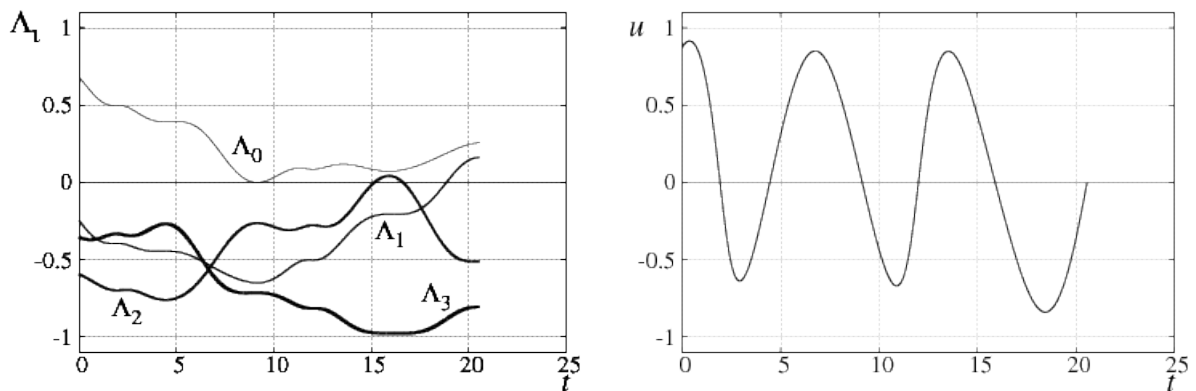
$$\begin{aligned} \Omega_u(0) = \Omega_u^0 = 40.0^\circ, \quad I(0) = I^0 = -70.57^\circ, \quad \omega_\pi(0) = \omega_\pi^0 = 84.98^\circ. \\ \Omega_u(t_1) = \Omega_u^* = 212.25^\circ, \quad I(t_1) = I^* = 64.8^\circ, \quad \omega_\pi(t_1) = \omega_\pi^* = 0.0^\circ. \end{aligned}$$

Здесь Ω_u – долгота восходящего узла, I – наклонение орбиты, ω_π – угловое расстояние до перицентра.

Конечные значения элементов орбиты отвечают ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Начальное положение орбиты КА рассчитано по начальным значениям декартовых координат и проекций скорости КА, приведенным в [2, с. 95]. Начальные и конечные значения кватерниона ориентации орбиты, соответствующие этим значениям угловых элементов, равны

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &= (0.678275, -0.245862, -0.593909, -0.353860); \\ \Lambda^* &= (-0.255650, -0.162241, 0.510674, 0.804694). \end{aligned}$$

Параметры задачи полагались следующими: $N = u_{\max}p^3/c^2 = 0.35$, $e = 0.5$, $\alpha_1 = \alpha_1^b = 1$, $\alpha_2^b = \alpha_2(u_{\max})^2 = 4.2$, $\varphi(0) = \varphi_0 = 3.940323$ рад.



Отметим некоторые особенности полученного решения. Переориентация орбиты совершается за 20.571204 единицы безразмерного времени, что составляет в дуговой мере 13.348487 рад. Управление изменяет свой знак пять раз. Конечное значение управления близко к нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения // Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
2. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1983. 136 с.

УДК 539.3

Я.А. Парфёнова

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКОСТИ УПРУГОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

Исследование процессов распространения гармонических волн в изотропных упругих волноводах продолжается более 125 лет. Можно считать, что к настоящему времени характеристики кругового (цилиндра) и плоского (слоя) волноводов получены и систематизированы исчерпывающим образом. Однако, практически отсутствуют работы, посвящённые исследованию волноводов с упругим закреплением границ. Введение условий упругого закрепления представляется целесообразным, так как позволяет моделировать влияние окружающей среды на волновые процессы без решения сложных контактных задач. Данная статья продолжает цикл статей [1, 2] и посвящена исследованию процесса распространения волн растяжения-сжатия в изотропном слое с упруго закреплёнными в касательном направлении границами.

Рассмотрим плоское напряжённое состояние бесконечного упругого изотропного слоя толщины $2h$, который свободен от внешних нагрузок ($|x_2| \leq h$, $|x_1| \leq \infty$, $|x_3| \leq \infty$). В качестве основных примем уравнения Ламе для случая плоского напряжённого состояния. Упругому закреплению границ слоя в касательном направлении соответствуют граничные условия

$$\tau_{21} + du_1 = 0, \quad \tau_{22} = 0, \quad \text{при } x_2 = \pm h, \quad (1)$$

где d – размерный параметр, характеризующий жесткость закрепления, при $d \rightarrow 0$ слой имеет свободные границы, а при $d \rightarrow \infty$ – жестко закреплённые. В силу зеркальной симметрии слоя относительно плоскости $x_2 = 0$ все возможные моды в нём можно разделить на антисимметричные (они были исследованы в [2]) и симметричные по нормальной координате, которые и изучаются в данной статье.

Будем искать решение поставленной краевой задачи в форме распространяющейся гармонической плоской волны

$$u_n(x_1, x_2, t) = U_n e^{kq_2 x_2} e^{ik(x_1 - vt)}, \quad n = 1, 2, \quad (2)$$

где k — волновое число в продольном направлении, v — фазовая скорость и ikq — волновое число в поперечном направлении, q выбирается таким образом, чтобы уравнения движения имели нетривиально решение. Соответствующее дисперсионное уравнение согласно [2] имеет вид

$$4q_1 q_2 \coth(\eta q_1) - (1 + q_1^2)^2 \coth(\eta q_2) - \frac{q_1(q_1^2 - 1)\delta}{\eta} \coth(\eta q_1) \coth(\eta q_2) = 0. \quad (3)$$

Здесь величины q_1, q_2 являются корнями характеристического уравнения и определяются соотношениями

$$q_1^2 = 1 - V^2, \quad q_2^2 = 1 - V^2 \kappa^2; \quad (4)$$

$V = v/c_2$ — безразмерная фазовая скорость; $\kappa^2 = c_2^2/c_1^2 = (1 - 2\nu)/2(1 - \nu)$ отношение фазовых скоростей волны сдвига и продольной волны; ν — коэффициент Пуассона; безразмерные величины $\delta = d/G$ — параметр, характеризующий жёсткость закрепления (G — модуль сдвига); $\eta = kh$ — волновое число. Единственным отличием уравнения (3) от классического уравнения Рэлея—Лэмба является наличие последнего слагаемого, которое через параметр δ отражает влияние степени упругого закрепления поверхностей.

Численное исследование дисперсионного уравнения (3) показало, что существуют два семейства симметричных мод, частоты запирания которых соответствуют либо частотам толщинного резонанса растяжения-сжатия, либо частотам сдвигового толщинного резонанса. С ростом δ симметричная фундаментальная мода трансформируется в первую гармонику для слоя со смешанными граничными условиями. Толщинные моды растяжения-сжатия сохраняют свои частоты $\kappa(n - 1/2)\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), меняя лишь форму, в то время, как сдвиговые моды перемещаются вверх вместе с ростом δ в диапазоне частот запирания $[n\pi, (n + 1/2)\pi]$ ($n = 1, 2, \dots$).

Проведём длинноволновый асимптотический анализ дисперсионного уравнения (3) для малых и больших δ , считая, что выполняется соотношение

$$\delta = \delta_0 \eta^{2m}, \quad \delta_0 = O(1). \quad (5)$$

Устремляя $\eta \rightarrow 0$, можно выделить два семейства частот запираия:

$$\omega_1 = \frac{\pi(2n-1)}{2\kappa}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \omega_2 \tan \omega_2 = \delta. \quad (6)$$

Первое семейство не зависит от δ и соответствует частотам толщинного резонанса растяжения-сжатия для слоя со свободными границами. Второе семейство частот запираия задаётся неявно, оно связано с частотами сдвигового толщинного резонанса и зависит от параметра жесткости.

В случае малых δ ($m = 1$) дисперсионное уравнение может быть асимптотически сбалансировано тремя различными способами:

$$\begin{aligned} \text{Баланс 1:} & \quad \tanh(\eta q_1) \sim \eta, & \tanh(\eta q_2) \sim \eta, & \quad V \sim 1, \\ \text{Баланс 2:} & \quad \tanh(\eta q_1) \sim \eta^2, & \tanh(\eta q_2) \sim 1, & \quad V \sim \eta^{-1}, \\ \text{Баланс 3:} & \quad \tanh(\eta q_1) \sim 1, & \tanh(\eta q_2) \sim \eta^{-2}, & \quad V \sim \eta^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Приведём асимптотики дисперсионного уравнения для каждого варианта. Фундаментальной моде при малых δ соответствует асимптотика:

$$\begin{aligned} \omega^2 = & (\delta_0 + 4(1 - \kappa^2)) \eta^2 - \\ & - \frac{1}{3} (4(1 - 5\kappa^2 + 8\kappa^4 - 4\kappa^6) + \delta_0(3 - 8\kappa^2 + 4\kappa^4) + \delta_0^2) \eta^4 + O(\eta^6). \end{aligned} \quad (8)$$

Второй вариант баланса дисперсионного уравнения соответствует гармоникам, связанным с частотами сдвигового толщинного резонанса $\Omega_1 = \pi n$, ($n = 1, 2, \dots$). Длинноволновая асимптотика для частоты имеет вид

$$\omega^2 = (\Omega_1)^2 + \left(1 + 2\delta_0 - \frac{8 \tan \kappa \Omega_1}{\Omega_1} \right) \eta^2 + O(\eta^4). \quad (9)$$

Последний вариант баланса дисперсионного уравнения связан с частотами толщинного резонанса растяжения-сжатия $\Omega_2 = \frac{(2n-1)\pi}{2\kappa}$, ($n = 1, 2, \dots$). Для частоты получено следующее приближение второго порядка:

$$\omega^2 = (\Omega_2)^2 + \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{8}{\Omega_2 \tan(\Omega_2)} \right) \eta^2 + O(\eta^4). \quad (10)$$

Большие значения δ ($m = -1$) соответствуют случаю жестко закрепленных лицевых плоскостей. При этом низкочастотные колебания невозможны, и фундаментальная мода вырождается в прямую линию, соответствующую бездисперсионному решению. Поэтому в данном режиме мы имеем лишь два варианта асимптотического баланса:

$$\begin{aligned} \text{Баланс 1:} & \quad \tanh(\eta q_1) \sim \eta^{-2}, & \tanh(\eta q_2) \sim 1, & \quad V \sim \eta^{-1}, \\ \text{Баланс 2:} & \quad \tanh(\eta q_1) \sim 1, & \tanh(\eta q_2) \sim \eta^{-4}, & \quad V \sim \eta^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответствующие асимптотики имеют вид

$$\omega^2 = (\Omega_3)^2 + \left(1 - \frac{2\Omega_3^2}{\delta_0}\right) \eta^2 + \frac{3}{\delta_0^2} (\Omega_3^2 + 2\delta_0) \eta^4 + O(\eta^6), \quad (12)$$

$$\Omega^2 = (\Omega_2)^2 + \frac{1}{\kappa^2} \eta^2 - \frac{8}{\delta_0} \eta^4 + O(\eta^6), \quad (13)$$

где $\Omega_3 = \pi(2n - 1)/2$ ($n = 1, 2, \dots$).

Сравнение асимптотик (8), (9), (10), (12) и (13) с соответствующими численными решениями показало высокую точность их совпадения. Случай конечных δ_0 будет рассмотрен отдельно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Moukhomodiarov R.R., Pichugin A.V., Rogerson G.A.* The Transition between Neumann and Dirichlet Boundary Conditions in Isotropic Elastic Plates // *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2009. Published online, doi:10.1177/1081286509103781.

2. *Коссович Л.Ю., Мухомодьяров Р.Р., Парфёнова Я.А.* Распространение волн в упруго-закрепленном изотропном слое // *Вестн. Самар. ун-та. Естественно-научная сер.:* Механика. 2008. № 8/2. С. 78–88.

УДК 629.78

Я.Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫВОД НА ОРБИТУ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С КОМБИНИРОВАННОЙ ТЯГОЙ

В статье с использованием кватернионных элементов орбиты с помощью принципа максимума Понтрягина решена пространственная задача об оптимальном выводе космического аппарата (КА) с комбинированной тягой на заданную круговую орбиту. Даны результаты численного решения.

1. В безразмерных кватернионных элементах орбиты $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ движение КА с комбинированной тягой описывается системой уравнений (t – время, φ – независимая вспомогательная переменная)

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -Q\mathbf{F}_1 \sin \varphi, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = Q\mathbf{F}_1 \cos \varphi, \quad \frac{dt}{d\varphi} = u^2 \sqrt{2Q},$$

$$Q = A^2 + B^2, \quad \mathbf{q} = P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon\mathbf{p}_2), \quad \mathbf{F}_1 = u^2\mathbf{q} + (\mathbf{w}, \mathbf{q})\mathbf{w}, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cos \varphi + \mathbf{B} \sin \varphi, \mathbf{w} = -\mathbf{A} \sin \varphi + \mathbf{B} \cos \varphi.$$

Радиус-вектор положения КА \mathbf{r} и вектор скорости \mathbf{v} связаны с кватернионными элементами орбиты соотношениями

$$P(\mathbf{u}) = \left\| \begin{array}{ccc} u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_0 \\ -u_3 & -u_0 & u_1 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{r} = P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{v} = \frac{2}{r(2Q)^{1/2}}P^T(\mathbf{u})\mathbf{w}.$$

Безразмерные управляющие векторные параметры, характеризующие тягу, удовлетворяют ограничениям $|\mathbf{p}_1| \leq p_{1\max}, |\mathbf{p}_2| \leq 1$.

Размерные масштабные множители для расстояния, скорости, времени и двух тяг КА определяются выражениями

$$R, (\gamma M/R)^{1/2}, R^{3/2}/(\gamma M)^{1/2}, \gamma M/R^2, \\ p_{2\max}^*, p_{1\max} = \frac{p_{1\max}^*}{\gamma M R^{-2}}, \frac{p_{2\max}^*}{\gamma M R^{-2}} = \varepsilon \ll 1.$$

Состояние КА в начальный момент времени

$$t = 0, \varphi = 0, \mathbf{A} = \mathbf{A}_H, \mathbf{B} = \mathbf{B}_H. \quad (2)$$

Круговая орбита, на которую необходимо перевести КА, характеризуется классическими элементами орбиты $a = a_k, e = 0, i = i_k, \Omega = \Omega_k$.

Критерий оптимальности процесса управления определяется функционалом с весовыми множителями $\alpha_i \geq 0, i = 0, 1, 2$:

$$I = \int_0^{t_k} (\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2 \alpha_2 p_2^2) dt = \int_0^{\varphi_k} (\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2 \alpha_2 p_2^2) u^2 (2Q)^{1/2} d\varphi,$$

который для оптимального процесса принимает минимальное значение.

2. Функция Гамильтона—Понтрягина выражается через сопряженные кватернионные переменные ψ_a, ψ_b , соответствующие кватернионным элементам A, B , по формуле

$$H = -(\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2 \alpha_2 p_2^2) u^2 Q^{1/2} + Q(\mathbf{F}_1, \mathbf{\Pi}), \mathbf{\Pi} = \psi_b \cos \varphi - \psi_a \sin \varphi.$$

Сопряженные переменные удовлетворяют сопряженной системе

$$\frac{d\psi_a}{d\varphi} = \mathbf{F}_2 \cos \varphi + \mathbf{F}_3 \sin \varphi + \mathbf{A}F_4, \quad \frac{d\psi_b}{d\varphi} = \mathbf{F}_2 \sin \varphi - \mathbf{F}_3 \cos \varphi + \mathbf{B}F_4. \quad (3)$$

Условия для фазовых координат на правом конце траектории имеют вид

$$\begin{aligned} A^2 - a_k = 0, B^2 - a_k = 0, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0, \\ l(\mathbf{B}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1) - a_k \sin i_k \sin \Omega_k = 0, l(\mathbf{B}, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_3) - a_k \cos i_k = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Условия трансверсальности на правом конце траектории

$$\begin{aligned} l(\psi_a, \mathbf{A}) + l(\psi_b, \mathbf{B}) = 0, l(\psi_a, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_1) + l(\psi_b, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1) = 0, \\ a_k [l(\psi_a, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_3) + l(\psi_b, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_3)] + \\ l(\mathbf{A}, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_2) [l(\psi_a, P(\mathbf{B})\mathbf{j}_1) - l(\psi_b, P(\mathbf{A})\mathbf{j}_1)] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Функция Гамильтона—Понтрягина удовлетворяет условию

$$H_{\text{opt}} = 0. \quad (6)$$

Оптимальное управление согласно условию максимума для функции Гамильтона—Понтрягина выражается через фазовые и сопряженные переменные по формулам

$$\mathbf{p}_{1\text{opt}} = \frac{P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi))}{|P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi))|} p_{1\text{max}},$$

если

$$|P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi))| \geq \frac{\alpha_1 u^2}{Q^{1/2}},$$

$$\mathbf{p}_{1\text{opt}} = 0, \text{ если } |P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi))| < \frac{\alpha_1 u^2}{Q^{1/2}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{p}_{2\text{opt}} = \frac{P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi))}{|P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi))|},$$

если

$$|P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi))| \geq \frac{2\varepsilon\alpha_2 u^2}{Q^{1/2}},$$

$$\mathbf{p}_{2\text{opt}} = \frac{Q^{1/2}}{2\varepsilon\alpha_2 u^2} P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi)),$$

если

$$\frac{Q^{1/2}}{2\varepsilon\alpha_2 u^2} |P^T(\mathbf{u})(u^2\Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi))| < 1. \quad (8)$$

Решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы уравнений (1), (3) с граничными условиями (2) в начальный момент времени и условиями (4), (5), (6) в конечный момент времени, при этом в каждый момент времени управляющие параметры определяются из соотношений (7), (8).

3. Пример расчета. Начальное состояние КА определяется координатами: $x_1 = 1.0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1.0$, $v_3 = 0$. Классические элементы конечной орбиты: $a_k = 1.52$, $e_k = 0.0$, $i_k = 5.0^\circ$, $\Omega_k = 30.0^\circ$. Весовые множители в функционале качества процесса: $\alpha_0 = 0.35$, $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 0.5$. Ограничения на управляющие параметры: $p_{1\max} = 1.0$, $\varepsilon = 0.2$. Режим работы первого управляющего параметра состоит из трех этапов. На первом этапе $0 \leq t < 0.1086$, $|\mathbf{p}_1| = 1.0$, на втором $0.1086 \leq t < 2.0529$, $|\mathbf{p}_1| = 0.0$, на третьем $2.0529 \leq t < 2.1733$, $|\mathbf{p}_1| = 1.0$. В конечный момент времени при $t = 2.1733$ при выходе на заданную орбиту состояние КА определяется координатами:

$$x_1 = -0.0797, x_2 = 1.5133, x_3 = 0.1181,$$

$$v_1 = -0.8092, v_2 = -0.0451, v_3 = 0.0320.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Штифель Е., Шейфиле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.

УДК 533.6.011

Я.Г. Сапунков, Р.В. Мосин

К ЗАДАЧЕ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье получено приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне, хорошо аппроксимирующее точное решение во всей области течения газа. Приводятся таблицы значений показателей автомодельности в зависимости от отношения теплоемкостей, полученных на основе приближенного решения, и их погрешности.

1. В работе [1] показано, что уравнения движения идеального совершенного газа в задаче о сходящейся ударной волне в безразмерных автомодельных переменных могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d \ln \lambda} &= - \left[(\nu + 1)V - \frac{2}{\gamma}(1 - \alpha) \right] + (V - \alpha) \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\ \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} &= - \frac{2(1 - \alpha)}{\gamma(V - \alpha)} - \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\ \frac{dZ}{d \ln \lambda} &= -Z \left\{ \frac{2}{V - \alpha} \left[V - \frac{1 + \alpha(\gamma - 1)}{\gamma} \right] + (\gamma - 1) \frac{\Delta_4}{\Delta_0} \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_4(V) &= \nu V^2 - \left[(\nu + 1)\alpha + \frac{2}{\gamma}(1 - \alpha) - 1 \right] V + 2\frac{\alpha}{\gamma}(1 - \alpha), \\ \Delta_0 &= (V - \alpha)^2 - Z. \end{aligned}$$

Здесь $\nu = 1$ соответствует цилиндрической симметрии, $\nu = 2$ – сферической симметрии, γ – отношение теплоемкостей, α – показатель автомодельности в законе движения ударной волны. Размерные переменные связаны с автомодельными переменными соотношениями

$$\lambda = \frac{r}{A(-t)^\alpha}, \quad v = \frac{r}{t}V, \quad \rho = \rho_0 R, \quad p = \frac{\rho_0 r^2}{\gamma t^2} Z R.$$

Закон движения сходящейся ударной волны $r = r_s(t) = A(-t)^\alpha$, $t < 0$. Начальная плотность газа $\rho_0 = \text{const}$. Граничные условия для автомодельных переменных на поверхности ударной волны

$$V(1) = V_s = \frac{2\alpha}{\gamma + 1}, \quad R(1) = R_s = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad Z(1) = Z_s = \frac{2\alpha^2 \gamma (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}. \quad (2)$$

2. Для упрощения системы (1) отношение Δ_4/Δ_0 в первом приближении в [1] полагалось постоянной величиной, во втором приближении – линейной функцией V [2], в настоящей статье это отношение представлено квадратичной функцией V :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_4}{\Delta_0} &= K + a(V - V_s) + a_1(V - V_s)^2, \\ K &= -\frac{2}{\alpha(\gamma - 1)} \left[\left(2 - \frac{1}{\gamma} \right) (1 - \alpha) - \nu \alpha \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right], \end{aligned}$$

$$a = \frac{1}{\Delta_{0s}} \left\{ 2\nu V - \left[(\nu + 1) \alpha + \frac{2}{\gamma} (1 - \alpha) \right] - K \left[2(V - \alpha) - \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \right] \right\}_s.$$

Величина a_1 выбрана из условия, что левая часть первого уравнения системы (1) при $V = 0$ обращалась в нуль. В этом случае правые части уравнений системы (1) хорошо аппроксимируют поведение правых частей в системе точных уравнений во всей области течения. Для величины a_1 получено следующее выражение:

$$a_1 = \left(\frac{2}{\alpha\gamma} - \frac{2}{\gamma} - K + aV_s \right) V_s^{-2}.$$

В результате, в частности, первое уравнение системы (1) принимает вид

$$\frac{dV}{d \ln \lambda} = a_1 V (V^2 + b_2 V + c_2), \quad b_2 = a a_1^{-1} - 2V_s - \alpha, \\ c_2 = [K - \nu - 1 - a(V_s + \alpha)] a_1^{-1} + V_s (V_s + 2\alpha).$$

Решение упрощенных уравнений с учетом условий (2) имеет вид

$$\lambda = \left[\frac{V^2 (V_s^2 + b_2 V_s + c_2)}{V_s^2 (V^2 + b_2 V + c_2)} \right]^{\frac{1}{2a_1 c_2}} \exp \left(-\frac{b_2}{2a_1 c_2} \Phi(V) \right), \\ Z = Z_s \left(\frac{V}{V_s} \right)^{D_1} \left(\frac{\alpha - V}{\alpha - V_s} \right)^{D_2} \left(\frac{V^2 + b_2 V + c_2}{V_s^2 + b_2 V_s + c_2} \right)^{0.5D_4} \exp((D_3 - 0.5b_2 D_4) \Phi(V)), \\ R = R_s \left(\frac{\alpha - V}{\alpha - V_s} \right)^{N_2} \left(\frac{V^2 + b_2 V + c_2}{V_s^2 + b_2 V_s + c_2} \right)^{0.5N_4} \exp((N_3 - 0.5b_2 N_4) \Phi(V)), \\ \Phi(V) = \frac{1}{\sqrt{c_2 - 0.25b_2^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{V + 0.5b_2}{\sqrt{c_2 - 0.25b_2^2}} - \operatorname{arctg} \frac{V_s + 0.5b_2}{\sqrt{c_2 - 0.25b_2^2}} \right), \\ a_2 = \alpha^2 + b_2 \alpha + c_2, a_3 = K - aV_s + a_1 (V_s^2 - a_2), a_4 = 2V_s + \alpha + b_2 - a a_1^{-1}, \\ D_4 = \frac{\gamma - 1}{a a_2} \left[2 \frac{b_2 + \alpha + c_2}{(\gamma - 1) c_2} + a_3 \right], D_3 = (\gamma - 1) a_4 + (\alpha + b_2) D_4 - \frac{2}{a_1 c_2}, \\ D_1 = -\frac{2}{\alpha a_1 c_2}, D_2 = 1 - \gamma - D_1 - D_4, \\ N_4 = \frac{a_3}{a_1 a_2}, N_2 = -1 - N_4, N_3 = a_4 + (\alpha + b_2) N_4. \quad (3)$$

Координаты особой точки B , соответствующей предельной характеристике, определяются из условия $\Delta_0 = 0$, $\Delta_4 = 0$.

Для определения α вместе с этими соотношениями служит уравнение

$$Z_B = Z_s \left(\frac{V_B}{V_s} \right)^{D_1} \left(\frac{V_B - \alpha}{V_s - \alpha} \right)^{D_2} \left(\frac{V_B^2 + b_2 V_B + c_2}{V_s^2 + b_2 V_s + c_2} \right)^{0.5 D_4} \times \exp((D_3 - 0.5 b_2 D_4) \Phi(V_B)). \quad (4)$$

Уравнение (4) решается численно методом Ньютона, в результате чего получены значения показателей автомодельности α в зависимости от отношения теплоемкостей для случаев цилиндрической (табл. 1) и сферической (табл. 2) симметрии.

Таблица 1

γ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.6
$\alpha_{\text{точн}}$	0.885225	0.861141	0.846203	0.835306	0.819688
$\alpha_{\text{прибл2}}$	0.885285	0.861171	0.846223	0.835321	0.819698
$\Delta\alpha\%$	0.0067	0.0035	0.0024	0.0018	0.0012
$\alpha_{\text{прибл3}}$	0.885298	0.861182	0.846231	0.835327	0.819700
$\Delta\alpha\%$	0.0082	0.0047	0.0033	0.0025	0.0015

Таблица 2

γ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.6
$\alpha_{\text{точн}}$	0.795933	0.757107	0.733745	0.717146	0.694156
$\alpha_{\text{прибл2}}$	0.796164	0.757206	0.733797	0.717179	0.694187
$\Delta\alpha\%$	0.03	0.01	0.007	0.005	0.005
$\alpha_{\text{прибл3}}$	0.796176	0.757221	0.733811	0.717190	0.694192
$\Delta\alpha\%$	0.03	0.01	0.009	0.006	0.005

В табл. 1, 2, кроме точных значений α , полученных на основе численного решения полных уравнений, представлены приближенные значения показателей автомодельности, полученные на основе аналитических решений второго приближения [2], и приближения, полученные в настоящей работе, погрешности приближенных значений. Из сравнения данных, представленных в таблицах, видно, что точность приближенного решения, полученного в настоящей статье, соответствует точности второго приближения [2], но полученное здесь приближение хорошо аппроксимирует точное решение во всей области течения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я.Г. Приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 145–147.
2. Сапунков Я.Г. Второе приближение решения задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 132–135.

Г.Д. Севостьянов

**РАВНОБЕДРЕННАЯ КОНФИГУРАЦИЯ
В ПЛОСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ
ТРЁХ ТЕЛ**

Показано, что два тела в углах основания равнобедренного треугольника плоской задачи трёх тел взаимно притягиваются центральной силой, состоящей из гравитационной и упругой сил.

Движение в системе трёх тел в барицентрической основной правой системе $G\xi\eta\zeta$ описывается уравнениями [1]

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_k}, U = f \left(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_2 m_0}{\Delta_{20}} \right), \sum_{k=0}^2 m_k \mathbf{r}_k = 0, \quad (1)$$

где m_k – масса тела M_k ($k = 0, 1, 2$), $\mathbf{r}_k = \overline{GM_k}(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ – вектор с началом в центре масс G , U – потенциальная силовая функция системы, $f > 0$ – гравитационная постоянная, $\Delta_{ij} = M_i M_j$.

Уравнения относительных движений ($\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = \Delta_{ij}$) запишем в виде

$$\ddot{\Delta}_{ij} = -\mu \frac{\mathbf{e}_{ij}}{\Delta_{ij}^2} + m_k \mathbf{F}_c, \mu = f(m_0 + m_1 + m_2),$$

$$\mathbf{F}_c = f \left(\frac{\mathbf{e}_{01}}{\Delta_{01}^2} + \frac{\mathbf{e}_{12}}{\Delta_{12}^2} + \frac{\mathbf{e}_{20}}{\Delta_{20}^2} \right) (k \neq i, j; i, j, k = 0, 1, 2). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{e}_{ij} = \Delta_{ij} / \Delta_{ij}$ – орт стороны $M_i M_j$ треугольника тел. $\mathbf{F}_c = 0$ для равносторонней конфигурации (Лагранж, 1772 г.), и неограниченная задача сводится к трём задачам одного тела [1, 2].

С плоскостью трёх тел свяжем правую систему $Gxyz$ (ось Gz перпендикулярна к этой плоскости, ось Gx параллельна прямой $M_0 M_1$ и направлена в сторону \mathbf{e}_{01}). GT – линия узлов. Для узлов Эйлера $J\Omega\Phi$ ($J = \angle \zeta Gz$ – наклонность, угол нутации; $\Omega = \angle \xi GT$ – долгота узла, угол прецессии; $\Phi = \angle TGx$ – угол собственного вращения) имеем кинематические уравнения Эйлера (см. [1]) в случае известных координат угловой скорости ω вращения этой плоскости около G (в связанной системе $Gxyz$). Уравнения Эйлера сводятся [3] к уравнению второго порядка для $J(t)$.

В случае плоской неограниченной задачи трёх тел ($\dot{J} = \dot{\Omega} \equiv 0, \omega = \dot{\Phi}$), разложив в (2) ускорения на радиальные и трансверсальные, придём к уравнениям Рауса (E.G. Routh, 1875) [4].

Обозначим через φ_k угол треугольника тел при вершине M_k , ($k = 0, 1, 2$), через α_k — угол между прямой GT и ортом $\mathbf{e}_{k,k+1}$.

Если тела при движении образуют *равнобедренный* треугольник с постоянными боковыми сторонами и переменными углами ($\Delta_{01} = \Delta_{20} = a, \varphi_1 = \varphi_2, \Delta_{12} = \Delta$), то из (2) вектор

$$\mathbf{F}_c = f\left(\frac{1}{\Delta^2} - \frac{\Delta}{a^3}\right)\mathbf{e}_{12} \quad (3)$$

параллелен основанию M_1M_2 треугольника тел. Тогда относительное движение M_2 около M_1 описывается уравнением с центральной притягивающей силой

$$m_2\ddot{\Delta}_{12} = -f\frac{m_1 + m_2}{\Delta^2}m_2\mathbf{e}_{12} - fm_0m_2\frac{\Delta}{a^3}\mathbf{e}_{12}, \quad (4)$$

которая состоит из гравитационной и упругой сил.

Отсюда имеем интеграл площадей и уравнение для $\Delta(t)$:

$$\dot{\alpha}_2\Delta^2 = c_2, \ddot{\Delta} = \frac{c_2^2}{\Delta^3} - f\left(\frac{m_1 + m_2}{\Delta^2} + \frac{m_0}{a^3}\Delta\right) = F(\Delta). \quad (5)$$

Тогда придём к квадратурам:

$$t = \int \frac{d\Delta}{H(\Delta)} + c_{**} = t(\Delta), \alpha_2 = c_2 \int \frac{dt}{\Delta^2(t)} + c_{***},$$

$$H^2(\Delta) = -\frac{c_2^2}{\Delta^2} + 2f\frac{m_1 + m_2}{\Delta} - f\frac{m_0}{a^3}\Delta^2 + c_*. \quad (6)$$

Интеграл $t(\Delta)$ — эллиптический, $\Delta(t)$ — эллиптическая функция. Углы треугольника тел:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \arccos \frac{\Delta}{2a}, \varphi_0 = \pi - 2\varphi_1. \quad (7)$$

Из (4) следует, что при $\Delta \gg \Delta_*$ упругая сила для тела M_2 преобладает над гравитационной, а при $\Delta \ll \Delta_*$ имеет место обратное преобладание, где

$$\Delta_* = a\left(\frac{m_1 + m_2}{m_0}\right)^{1/3}, \quad (8)$$

при этом в первом случае траектория M_2 относительно M_1 близка к эллипсу с центром в M_1 , во втором — тело M_1 близко к фокусу эллипса для M_2 , траектория в общем случае образует «розетку» ($\Delta < 2a$).

При $\Delta = a$ в (3) придём к случаю лагранжевского решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
2. Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребенников Е.А. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
3. Севостьянов Г.Д. О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195–198.
4. Ляпунов А.М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трёх телах // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд. АН СССР, 1954. Т.1. С. 327–401.

УДК 539.3

О.А. Торопова

ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО НЕФТЕПОДЪЕМНИКА

При выводе уравнений будем использовать следующие основные гипотезы и допущения, принимаемые в задачах механики морских трубопроводов [1, 2]. Будем считать, что материал стенок нефтеподъемника является несжимаемым, то есть значение коэффициента Пуассона принимается равным $\nu = 0.5$, диаграмма его деформирования описывается нелинейной зависимостью напряжений от деформаций. Далее, толщина стенки нефтеподъемника вдоль его образующей является в общем случае непрерывной функцией осевой координаты, либо кусочно-непрерывной (для многосекционного нефтеподъемника).

Введем правую декартову систему координат Ox_1x_2 , начало которой зафиксируем на морском дне, глубиной H от поверхности моря. Ось x_2 направим вертикально вверх, ось x_1 – горизонтально вправо. Свяжем с центром тяжести произвольного поперечного сечения деформированного трубопровода орты $\{\vec{e}_i\}$, направив вектор $\vec{e}_1 = \vec{\tau}$ по касательной к осевой линии, а $\vec{e}_2 = \vec{n}$ – по ее нормали. За начало отсчета эйлеровой дуговой координаты (s) выберем нижнее граничное сечение, находящееся в контакте с подводным технологическим оборудованием.

Здесь

$$\vec{e}_i = L\vec{e}_0, \quad L = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_0 = \begin{pmatrix} \vec{i}_2 \\ -\vec{i}_1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

причем

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{n} \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{\tau}. \quad (2)$$

$k = k(s)$ – кривизна деформированной осевой линии нефтеподъемника.

Вектор распределенных нагрузок, действующих на элемент трубопровода (\vec{q}), можно представить в виде

$$\vec{q} = \vec{q}_f + \vec{q}_w - mg\vec{e}_{10} = \vec{q}_f + \vec{q}_w - mg \cos \varphi \vec{\tau} + mg \sin \varphi \vec{n}, \quad (3)$$

где \vec{q}_f, \vec{q}_w – векторы сил взаимодействия с внутренним и внешними потоками жидкости, m – погонная масса трубопровода в воздухе. Пусть элемент потока гидросмеси движется со скоростью $\vec{v}_f = v_f \vec{\tau}$. Здесь $v_f = (d_0/d)^2 v_{f0}$, v_{f0} – скорость гидросмеси в нижнем сечении (здесь и в дальнейшем нижним индексом ноль будем обозначать характеристики нижнего сечения трубопровода $s = 0$).

Запишем уравнение Эйлера движения элемента потока гидросмеси [3]:

$$\frac{d}{dt}(m_f \vec{v}_f) = -\frac{\partial}{\partial s}(P_f \vec{\tau}) - \vec{q}_f - m_f g \vec{e}_{10}. \quad (4)$$

Здесь $m_f = 0.25 p_f \tau d^2$, $P_f = p_f F_f$, p_f – давление для каждой точки произвольной линии тока гидросмеси, $F_f = 0.25 \pi d^2$, ρ_f – плотность потока гидросмеси, d – внутренний диаметр нефтеподъемника. Любой вектор, в частности, \vec{q}_f можно представить по определению в виде (используя (4))

$$\begin{aligned} \vec{q}_f &= (\vec{q}_f, \vec{\tau}) \vec{\tau} + \tau(\vec{q}_f, \vec{\tau}) = -\frac{d}{dt}(m_f \vec{v}_f) - \frac{\partial}{\partial s}(P_f \vec{\tau}) - m_f g \vec{e}_{10} = \\ &= -\left(\frac{\partial P_f}{\partial s} + \left(\frac{d}{dt}(m_f \vec{v}_f), \vec{\tau} \right) + m_f g(\vec{e}_{10}, \vec{\tau}) \right) \vec{\tau} - \\ &\quad - k P_f \vec{n} - m_f g \vec{\tau}(\vec{e}_{10}, \vec{\tau}) - \vec{\tau} \left(\frac{d}{dt}(m_f \vec{v}_{af}) \vec{\tau} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Для идеальной жидкости $(\vec{q}_f, \vec{\tau}) = 0$, $\vec{q}_f \parallel \vec{n}$, поэтому

$$\frac{\partial P_f}{\partial s} + \left(\frac{d}{dt}(m_f \vec{v}_f), \vec{\tau} \right) + m_f g(\vec{e}_{10}, \vec{\tau}) = 0, \quad (6)$$

а оставшиеся в (5) компоненты вектора \vec{q}_f допускают следующую трактовку:

$$\begin{aligned} \vec{q}_f &= \vec{q}_{hf} + \vec{q}_{af}, \quad \vec{q}_{hf} = -k P_f \vec{n} - m_f g \vec{\tau}(\vec{e}_{10}, \vec{\tau}) = -(k P_f - m_f g \sin \varphi) \vec{n}, \\ \vec{q}_{af} &= -\tau \left(\frac{d}{dt}(m_f \vec{v}_{af}) \vec{\tau} \right) = -k m_f v_f^2 \vec{n}, \end{aligned} \quad (7)$$

где \vec{q}_{hf} – вектор нормальной силы гидродинамического давления на стенки нефтеподъемника, \vec{q}_{af} – вектор нормальной силы инерции присоединенной массы гидросмеси. Аналогичным образом определяются нормальные компоненты соответствующих составляющих вектора распределенной нагрузки со стороны внешнего потока подводных течений:

$$\vec{q}_w = \vec{q}_{hw} + \vec{q}_{aw} + \vec{q}_n, \quad (8)$$

где $q_n = 0.5c_n\rho_w Dv_{c2}|v_{c2}|\vec{n}$ – вектор силы нормального гидродинамического сопротивления, c_n – коэффициент нормального гидродинамического сопротивления, ρ_w – плотность потока морской воды, D – внешний диаметр нефтеподъемника. Получаем окончательно следующее представление вектора распределенных нагрузок, действующих на элемент нефтеподъемника [1]:

$$\begin{aligned} \vec{q} = \vec{q}_f + \vec{q}_w - mg\vec{e}_{10} = & -mg \cos \varphi \vec{\tau} + (mg \sin \varphi)\vec{n} + ((m_f - m_w)g \sin \varphi)\vec{n} - \\ & - (m_f v_f^2 + m_w v_{c1}^2)k\vec{n} + 0.5c_n\rho_w Dv_{c2}|v_{c2}|\vec{n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $m_w = \rho_w F_w$, $F_w = 0.25\pi D^2$, $v_{c1} = -v_c \sin \varphi$, $v_{c2} = -v_c \cos \varphi$, $v_c = v_c(x_2)$ – профиль скорости подводных течений.

В осях связанной системы координат скалярными уравнениями равновесия элемента нелинейно-упругого трубопровода, а также дополнительными геометрическими и физическими соотношениями являются:

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} - kN + (\vec{q}, \vec{\tau}) = 0, \\ \frac{dN}{ds} + kT + (\vec{q}, \vec{n}) = 0, \\ \frac{d\varphi}{ds} = k, \quad \frac{dx_2}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dM}{ds} = -N, \quad M = E_0 I_0 \Phi(J, k). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь T, N – продольное и перерезывающее усилия, M – изгибающий момент, являющийся нелинейным функционалом переменных $k = k(s)$ и $J = J(x) = I/I_0$ ($I = \pi(D^4 - d^4)/64$, $I_0 = \pi(D_0^4 - d_0^4)/64$ – моменты инерции произвольного и нижнего сечений):

$$M = 2\pi \int_{0.5d}^{0.5D} \sigma_b \rho^2 d\rho = E_0 I_0 \Phi(J, k) \quad (11)$$

($\sigma_b = \sigma_b(\varepsilon_b)$ – нелинейная диаграмма деформирования, $\varepsilon_b = k\rho$, $0.5d \leq \rho \leq 0.5D$). По механическому смыслу задачи он должен обладать следующими свойствами:

- 1) $\Phi = (J, 0) = 0$;

$$2) \Phi(J, -k) = -\Phi(J, k);$$

$$3) \partial\Phi/\partial k > 0 \text{ в области } G = \{(s, k) : 0 \leq s \leq l, 0 \leq |k(s)| < k_*\}, k_* = \min_s |k| : \frac{\partial\Phi}{\partial k} = 0.$$

После подстановки (11) в (10), учитывая (9), получаем следующую скалярную систему относительно компонент вектора основных неизвестных $Y = \{T, N, \varphi, x_2, k\}$:

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} = w \cos \varphi + kN, \\ \frac{dN}{ds} = -w_e \sin \varphi - kT + km_f v_f^2 + km_w v_c^2 \sin^2 \varphi + 0.5c_n \rho_w D \cos \varphi v_c |v_c \cos \varphi|, \\ \frac{d\varphi}{ds} = k, \\ \frac{dx_2}{ds} = \cos \varphi, \\ E_0 I_0 \frac{\partial k}{\partial s} = -N \Psi(k) - \frac{\partial \Phi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial s} \Psi(k) E_0 I_0, \end{cases} \quad (12)$$

где $w_e = m_e g$, $m_e = m + m_f - m_w$, $\Psi(k) = (\partial\Phi/\partial k)^{-1}$ в области G .

Граничные условия (соответствующие шарнирному закреплению верхнего сечения $s = l$ нефтеподъемника с плавсредством и нижнего сечения $s = 0$ с подводным технологическим оборудованием) для системы (12) можно сформулировать в виде

$$x_2(0) = k(0) = 0, \quad x_2(l) = H, \quad k(l) = 0, \quad T(l) = T_1, \quad (13)$$

(T_1 – коэффициент тягового усилия на плавсредстве).

Таким образом, в данной статье получены нелинейные уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние глубоководного нефтеподъемника, находящегося под действием внутреннего потока гидросмеси и внешнего потока окружающей жидкости. При этом материал стенок трубопровода считается нелинейно-упругим, а толщина стенки – переменной вдоль образующей. Задавая конкретные конструкционные особенности нефтеподъемника, можно определить формулировки различных конкретных прикладных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Торопова О.А.* Формулировка уравнений установившегося пространственного движения глубоководных трубопроводов морских гидротехнических комплексов // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 140–145.

2. *Петров В.В., Кузнецов В.В., Земеров В.Н.* Механика длинномерных элементов глубоководных комплексов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989. 188 с.

3. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1987. 222 с.

О.А. Торопова

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО НЕФТЕПОДЪЕМНИКА С ПЕРЕМЕННОЙ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ ТОЛЩИНОЙ СТЕНКИ

В [1] получены нелинейные уравнения, описывающие напряженно деформированное состояние глубоководного нефтеподъемника, находящегося под действием внутреннего потока гидросмеси и внешнего потока окружающей жидкости. При этом материал стенок трубопровода считался нелинейно-упругим, а толщина стенки – переменной вдоль образующей.

В настоящей статье обсуждаются возможные варианты следствий из предлагаемых в ней новых уравнений. Выбираем в качестве независимой переменной вертикальную координату $x_2 = x$ и введем для (12), (13) следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned}
 x^0 &= x/H, \quad T^0 = T/w_0H, \quad N^0 = N/\mu w_0H, \quad k^0 = kHJ, \quad \Phi^0 = \Phi H, \\
 u^0 &= u/H, \quad v_c^0 = v_c/v_0 \quad (v_0 = 1\text{м/с}), \quad v_{f0}^0 = v_{f0}/v_0, \quad \mu = (E_0I_0/w_0H^3)^{1/2}, \\
 \Theta_1 &= \Theta_1(x)D/D_0, \quad \Theta_2 = \Theta_2(x) = d/d_0, \quad c = D_0/d_0 > 1, \quad \gamma_1 = 1/(1 - c^{-2}), \\
 \gamma_2 &= 1/(c^2 - 1), \quad \gamma_3 = 1/(1 + c^{-2}), \quad \gamma_4 = 1/(1 + c^2), \quad \gamma_5 = \gamma_1(1 - \rho_w/\rho_t), \quad \gamma_6 = \gamma_2(1 - \rho_f/\rho_t), \\
 \gamma_7 &= (\rho_f v^2/\rho_t gH)\gamma_2, \quad \gamma_8 = (\rho_w v^2/\rho_t gH)\gamma_1, \quad \gamma_9 = (2c_n \rho_w v^2/g\rho_t \pi D_0)\gamma_1, \quad \gamma_{10} = 2\rho_t gH^2/E_0D_0, \\
 a_1 &= \gamma_1\Theta_1^2 - \gamma_2\Theta_2^2, \quad a_2 = 1/(\gamma_1\Theta_1^2 - \gamma_2\Theta_2^2)(\gamma_3\Theta_1^2 - \gamma_4\Theta_2^2), \quad a_3 = \gamma_5\Theta_1^2 - \gamma_6\Theta_2^2, \\
 a_4 &= \gamma_7 a_2/\Theta_2^2, \quad a_5 = \gamma_8\Theta_1^2 a_2, \quad a_6 = \gamma_9\Theta_1, \quad \sigma_0^0 = 2\sigma_0 H/E_0D_0, \\
 \rho^0 &= (2/D_0)\rho \quad (\Theta_2/c \leq \rho^0 \leq \Theta_1), \quad \sigma_i^0 = \sigma_t^0 + \sigma_b^0, \quad \sigma_t^0 = \gamma_{10}T^0/a_1, \quad \Psi(k^0) = (\partial\Phi^0/\partial k^0)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $w_0 = 0.25\pi\rho_t(D_0^2 - d_0^2)g$ – погонный вес трубопровода в нижнем граничном сечении ($\Theta_j(0) \equiv 1, j = 1, 2$), v_{f0} – скорость потока гидросмеси при $x^0 = 0$. После подстановки (1) в [1, (12) и (13)] и проведения необходимых преобразований (опуская здесь и в дальнейшем верхний индекс ноль в обозначениях безразмерных величин), рассматриваемая задача сформулируется окончательно в виде:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z; \mu), \quad \mu z' = p(x, y)q(z) + r(x, y, z, \mu), \\ \Gamma_0(Y(0)) = 0, \quad \Gamma_1(Y(1)) = 0, \quad Y = \{y, z\}^t, \end{cases} \tag{2}$$

где $y = \{T, \varphi, u\}^t$ ($\{\dots\}^t$ – операция транспонирования), $z = \{N, K\}^t$,

$$f = \{a_1 + \mu a_2 k N / \cos \varphi, \quad a_2 k / \cos \varphi, \quad -\text{tg } \varphi\}^t, \quad P = \{P_{ij}\} : P_{11} = -P_1,$$

$$\begin{aligned}
P_{22} &= -1, P_{12} = P_{21} = 0, P_1 = (a_2 T - a_4 v_{f0}^2 - a_5 v_c^2 \sin^2 \varphi) / \cos \varphi, \\
q(z) &= \{k, \Psi(k)N\}^t, r = \{r_1, r_2\}^t, r_1 = -a_3 \operatorname{tg} \varphi + a_6 v_c |v_c \cos \varphi|, \\
r_2 &= -\mu(\partial\Phi/\partial J)(\partial J/\partial x)(\Psi(k)/\cos \varphi); \\
\Gamma_0 : |R^5 &\rightarrow |R^2, \Gamma_1 : |R^5 \rightarrow |R^3, ()' = d()/dx.
\end{aligned}$$

Из системы (2) можно получить ряд нижеприведенных следствий. Уравнения нелинейно-упругого нефтеподъемника с постоянной толщиной стенки имеют вид

$$\begin{aligned}
\Theta_1(x) &= \Theta_2(x) \equiv 1, v_{f0} = v_f = \operatorname{const}, \\
a_i(x) &= \operatorname{const} (i = 1, \dots, 6), J(x) \equiv 1.
\end{aligned}$$

Пусть, например, диаграмма деформирования материала стенок нефтеподъемника аппроксимируется полиномом третьего порядка $\sigma_b = E_0 \varepsilon - E_1 \varepsilon^3$. После подстановки зависимости в выражение [1, (11)] для изгибающего момента и проведения необходимых преобразований, определяем

$$\Phi(k) = k - k^3/3k_*^2, \quad (3)$$

где $k_* = 2/3((3E_0/E_1)(H/D))^{1/2}$ – наименьшее значение $k = k(x)$, для которого $d\Phi/dk = 0$. Получаем искомое выражение для функции $\Psi(k)$, входящей в (2), в виде

$$\Psi(k) = 1/(1 - (k/k_*)^2), \quad k < k_*. \quad (4)$$

Аналогичным образом можно получить значения функции $\Psi(k)$ для любого другого аналитического типа зависимости $\sigma_b = \sigma_b(\varepsilon)$.

Считая известными параметры $D_0, d_0, c_n, \rho_t, \rho_f, \rho_w, T_1, H$, профиль скорости подводных течений $v_c = v_c(x)$, $0 \leq x \leq 1$, вид диаграммы деформирования, например, в форме кубической параболы (3) с известными значениями параметров E_0, E_1 , основной задачей является определение из решения (2) характеристик НДС нефтеподъемника, исходя из условия сохранения его прочности:

$$\sigma_* \leq \sigma_R, \quad (5)$$

где σ_R – известное расчетное сопротивление материала стенок нефтеподъемника, $\sigma_* = \max_{x,\rho} \sigma_i$. С этой целью для любого фиксированного сечения x необходимо определить значения:

$$\sigma_i = \sigma_i(\rho; x) = k\rho - (k^3/3k_*^2)\rho^3 + \gamma_{10}T(x), \quad \rho_1 \leq \rho \leq 1, \quad \rho_1 = d_0/D_0 \quad (6)$$

и найти $\sigma_* = \max_{\rho, x} \sigma(\rho; x)$.

Получим также уравнения линейно-упругого нефтеподъемника с переменной толщиной стенки:

$$\Phi(k) = k, \quad \Psi(k) = 1, \quad q(z) = z^* = \{k, N\}^t.$$

Уравнения линейно-упругого нефтеподъемника с постоянной толщиной стенки сформулируем следующим образом [2, 3]:

$$\Phi(k) = k, \quad \Psi(k) = 1, \quad q(z) = z^* = \{k, N\}^t, \quad \Theta_1(x) = \Theta_2(x) \equiv 1,$$

$$v_{f0} = v_f = \text{const}, \quad a_i(x) = \text{const}, \quad (i = 1, \dots, 6), \quad J(x) \equiv 1.$$

Отличительной особенностью системы (2) является наличие малого параметра μ при старшей производной от зависимой переменной, так как для глубоководных трубопроводов (то есть при $H \geq 1000$ м) значение $\mu \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$. Таким образом, сформулированные в этой статье модельные уравнения, описывающие статические характеристики глубоководного нефтеподъемника в вертикальной плоскости стационарного потока подводных течений, относятся к классу нелинейных сингулярно возмущенных дифференциальных систем. Тем самым возникает необходимость в асимптотическом анализе сформулированных выше уравнений, который позволит выявить особенности поведения искомого решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Торопова О.А.* Формулировка уравнений равновесия для нелинейно-упругого нефтеподъемника // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов, 2010. Вып. 12. С. 189–192.
2. *Торопова О.А.* Метод параметризации граничных условий в нелинейных краевых задачах прикладной механики // Математические методы в технике и технологиях ММТТ-20: сб. тр. XX Междунар. конф. Ярославль, 2007.
3. *Торопова О.А.* Применение метода пограничных функций в задачах расчета статических характеристик глубоководных нефтеподъемников // Актуальные проблемы теории управления и прикладного системного анализа: материалы Всерос. науч. конф. Саратов, 2006.

И.А. Чернов

КВАДРАТУРЫ В ОБОБЩЕННОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ

Задача о сильном точечном взрыве в автомодельной постановке была решена Л.И. Седовым и Тейлором. Ударная волна (УВ) возникает в результате выделения конечной энергии в точке (на линии, на плоскости). Эта энергия передается движущемуся газу и является характерной и постоянной величиной данного физического процесса, что дало возможность Л.И. Седову найти интеграл системы трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (ОДУ). Наличие такого интеграла позволяет в аналитической форме представить решение всей системы ОДУ, выполнив две квадратуры в общем виде.

Основные уравнения и решение Седова. Изучаются одномерные неустановившиеся адиабатические течения совершенного газа для трех случаев симметрии. Течение характеризуется скоростью $u = u(r, t)$, плотностью $\rho = \rho(r, t)$ и квадратом локальной скорости звука $c_2 = c_2(r, t)$, который с точностью до коэффициента совпадает с абсолютной температурой (далее $\nu = \{1, 2, 3\}$ для {плоской, цилиндрической, сферической} симметрий потока). Основные уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho + \rho \frac{\partial}{\partial r}u + \frac{(\nu - 1)\rho u}{r} = 0, \quad \gamma \frac{d}{dt}u + \frac{\partial}{\partial r}c_2 + c_2 \frac{\partial}{\partial r} \ln(\rho) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{c_2}{\rho^{\gamma-1}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагая изучение автомодельных задач, зададим искомые функции в форме [1]

$$\lambda = \frac{r}{b^{\frac{1}{m}} t^\delta}, \quad u = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = \frac{a}{r^{\kappa+3t^s}} R(\lambda), \quad c_2 = \left(\frac{r}{t} \right)^2 Z(\lambda). \quad (2)$$

Здесь a, b – две размерные величины с независимыми размерностями, входящие в формулировку конкретной задачи. Их размерности:

$$[a] = M \cdot L^\kappa \cdot T^s, \quad [b] = L^m \cdot T^{-m\delta},$$

где M – масса, L – длина, T – время.

Подстановка (2) в основную систему (1) дает одно ОДУ первого порядка для определения зависимости $Z = Z(V)$ (здесь введен параметр $\kappa = \frac{s+2+\delta \cdot (\kappa+1)}{\gamma}$ вместо s):

$$\begin{aligned} \frac{dZ(V)}{dV} = & (Z(V)[[2(V-1) + \nu(\gamma-1)V](V-\delta)^2 - \\ & - (\gamma-1)V(V-1)(V-\delta) - [2(V-1) + \kappa(\gamma-1)]Z(V)) \\ & / ((V-\delta)[V(V-1)(V-\delta) + (\kappa - \nu V)Z(V)]). \end{aligned} \quad (3)$$

Если функция $Z = Z(V)$ найдена, то следует выполнить две квадратуры для нахождения $\lambda = \lambda(V)$ и $R = R(V)$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \lambda(V)}{dV} = & \frac{Z(V) - (V-\delta)^2}{V(V-1)(V-\delta) + (\kappa - \nu V)Z(V)} \\ (V-\delta) \frac{d \ln R(V)}{d \ln \lambda(V)} = & [s + (\kappa - \nu + 3)V] - \\ & - \frac{V(V-1)(V-\delta) + (\kappa - \nu V)Z(V)}{Z(V) - (V-\delta)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (3), (4) содержит 4 величины $\gamma, \delta, s, \kappa$ (общий автомоделный случай).

Три зависимости $\{Z = Z(V), R = R(V), \lambda = \lambda(V)\}$ параметрически определяют три искомые функции $\{V = V(\lambda), R = R(\lambda), Z = Z(\lambda)\}$.

При $\kappa = \frac{\nu\delta}{\gamma}$ уравнение (3) имеет частное решение

$$Z(V) = -\frac{(\gamma-1)V^2(V-\delta)\gamma}{2(\gamma V - \delta)},$$

которое впервые было найдено Л.И. Седовым [1]. Оно описывает течение, происходящее при сильном взрыве при условии сохранения полной энергии всей массы газа.

Квадратуры. Вычисляя интеграл от правой части равенства (4), определим $\ln(\lambda(V))$, затем $\lambda(V)$. Постоянную интегрирования найдем из условия $\lambda = 1$ при $V = V_2 = 2\delta/(\gamma + 1)$ согласно методике, представленной в [1, 2].

В результате получим

$$\lambda(V) = \left(\frac{V}{V_2}\right)^{n_0} \left(\frac{2V-2+V\nu\gamma-V\nu}{V_2\gamma\nu+2V_2-V_2\nu-2}\right)^{n_1} \left(\frac{\gamma V-\delta}{V_2\gamma-\delta}\right)^{n_3},$$

где $n_0 = -\delta$, $n_3 = -\frac{\delta(\gamma - 1)}{2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \nu\delta}$,

$$n_1 = (2\gamma^2 + 2\gamma + 2\nu\delta - 4\delta - 2\gamma^2\nu\delta - 4\gamma\delta + \delta^2\nu^2\gamma^2 + 4\delta^2 - 4\delta^2\nu + \delta^2\nu^2 - 2\delta^2\nu^2\gamma + 4\delta^2\nu\gamma) / ((2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \nu\delta)(2 + \nu\gamma - \nu)).$$

Вычисляя вторую квадратуру с соответствующими преобразованиями, найдем

$$R(V) = \left(\frac{V}{V_2}\right)^{m_0} \left(\frac{2V - 2 + V\nu\gamma - V\nu}{V_2\gamma\nu + 2V_2 - V_2\nu - 2}\right)^{m_1} (V - \delta)^{m_2} \left(\frac{\gamma V - \delta}{V_2\gamma - \delta}\right)^{m_3},$$

где

$$\begin{aligned} m_0 &= -\delta + \nu\delta - k\delta - 2, \\ m_1 &= \left((2\gamma^2 + 2\gamma + 2\nu\delta - 4\delta - 2\gamma^2\nu\delta - 4\gamma\delta + \delta^2\nu^2\gamma^2 + 4\delta^2 - 4\delta^2\nu + \delta^2\nu^2 - 2\delta^2\nu^2\gamma + 4\delta^2\nu\gamma) (-\nu^2\gamma\delta + \nu\gamma\delta + \nu\gamma\delta k + 2\nu\gamma + \nu^2\delta - 3\nu\delta - \nu\delta k + 2k\delta + 2\delta - 2 - 2k) \right) / \left((-2 + 2\delta + \nu\gamma\delta - \nu\delta)(2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \nu\delta)(2 + \nu\gamma - \nu) \right), \\ m_2 &= -\frac{2\gamma\delta + \nu\gamma\delta - 2\gamma - 2 + 2\delta - \nu\delta}{-2 + 2\delta + \nu\gamma\delta - \nu\delta}, \\ m_3 &= -\frac{\gamma\delta k - \nu\gamma\delta + 2\gamma + \gamma\delta - 3\delta - k\delta + \nu\delta}{2\delta - 2\gamma + \nu\gamma\delta - \nu\delta}. \end{aligned}$$

Если в данных показателях положить

$$\kappa = -3 - \frac{1}{2}s\nu - s + \frac{1}{2}s\omega + \omega, \quad \delta = \frac{2}{\nu + 2 - \omega},$$

то получим решение о распространении сильной УВ по газу переменной начальной плотности, зависящей от расстояния до места взрыва в виде ($A = \text{const}$)

$$\rho = A \cdot r^{-\omega}.$$

Показатели степеней в выражении для $R(V)$ примут вид

$$\begin{aligned}
 n_{00} &= -\frac{2}{2 + \nu - \omega}, \\
 n_{11} &= \frac{(-8\nu + 4\nu^2 + 4\omega + 8\nu\gamma - 4\gamma + \nu^2\gamma^2 - 3\nu^2\gamma - 2\gamma\nu\omega - \\
 &\quad - 2\nu\omega - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \gamma\omega^2 + 4\gamma^2) / ((2 + \nu ga - \nu) \\
 &\quad (2 + \nu - \omega)(2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu))}{\gamma - 1}, \\
 n_{33} &= -\frac{\gamma - 1}{2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu}, \\
 m_{00} &= s, \\
 m_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{((-2\nu + \nu\gamma s - 2s\nu + 2\omega + s\omega)(8\nu\gamma - 4\gamma - 8\nu + \\
 &\quad + 4\gamma^2 + 4\nu^2 - 3\nu^2\gamma + \nu^2\gamma^2 - 2\gamma\nu\omega + 4\omega - 2\nu\omega - \\
 &\quad - 4\gamma^2\omega + \gamma^2\omega^2 + \gamma\omega^2)) / ((2 + \nu\gamma - \nu)(2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu) \\
 &\quad (-2\nu + \omega + \nu\gamma))}{\gamma\omega - 2\nu + \omega}, \\
 m_{22} &= -\frac{\gamma\omega - 2\nu + \omega}{-2\nu + \omega + \nu\gamma}, \\
 m_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\nu\gamma s + 2\gamma s - \gamma s\omega - s\nu - 2s + s\omega + 2\omega - 2\nu}{2 - 2\gamma + \gamma\omega - \nu}.
 \end{aligned}$$

Представленное автомодельное решение является обобщением известных результатов. В частности, Н.С. Мельникова изучала случай с $\nu = 3$, $s = 0$ (см. [1, 2]). Альтернативная физическая интерпретация этого решения предложена в статье [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. 5-е изд. М.: Наука, 1965. 386 с.
2. *Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В.* Теория точечного взрыва. М.: Наука, 1961. 332 с.
3. *Чернов И.А.* Трактовка решения Седова как серии промежуточных асимптотик в течении от сильного взрыва // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 18, № 4. 2010. С. 33–43.

УДК 517.984

Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

РЕФРАКЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА

Задачи рефракции ударных волн (УВ) на поверхности океана вызывают неизменный теоретический интерес исследователей [1–4] и представляют практический интерес для многочисленных приложений.

В статье объясняются механизмы гашения возмущений, свойственных многим природным явлениям типа цунами и др.

1. При падении УВ AM , BN (рис. 1, 2) относительной интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0^-$, $B_0^- = \rho_0^- c_0^{-2}$ под углом α к вертикали на свободную поверхность OA , разделяющую различные среды (ГАЗ/ГЖС): воздух и воду с газосодержащими γ^+ , γ^- , возникают различные режимы рефракции УВ. Режим *slow-fast* при падении УВ сверху с картиной течения (рис. 1, а) (интерферограммой [1]) и схемой течения при регулярной рефракции RR [3] (рис. 1, б) представлен на рис. 1, а режим *fast-slow* при падении УВ снизу с картиной течения (рис. 2, а) (интерферограммой [2]) и схемой течения при нерегулярной рефракции NR [4] (рис. 2, б) – на рис. 2.

Асимптотический анализ (теория коротких волн [3–5]) при относительно малой интенсивности падающей УВ ($\bar{\varepsilon} \ll 1$, $\bar{\varepsilon} = L_0(\gamma)\varepsilon_{10} = R_0(\gamma)P_{10}$, $\varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$), характерной для рассматриваемых случаев (снизу – ГЖС пузырькового типа), приводят [5] к установлению двух инвариантов. Условия совместности течений на свободной поверхности (в верхней и нижней областях) в точке A ($\eta_A^+ = \eta_A^- = 0$, $y_A/t = c_0\eta_A$, $x_A/t = c_0\xi_A$) приводят к I инварианту

$$c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^- \quad (1)$$

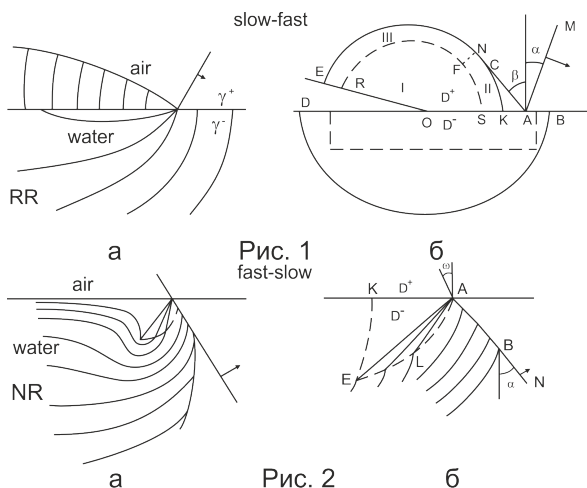


Рис. 1
fast-slow

Рис. 2

Условия на свободной поверхности OA ($\xi = \xi(\eta)$) в точке A (для давлений и скоростей $p^+ = p^-$, $u_n^+ = u_n^- = u_n$) приводит [5] к записи ($\eta^\pm = 0$, $\xi'_{OA} = -1/\text{tg } \delta$) $(V^\pm - c_0^\pm \eta_A^\pm)/(U^\pm - c_0^\pm \xi_A^\pm) = 1/\xi'_{OA}$. Для относительно слабых УВ (при $P_{10} \ll 1$, $|U^\pm| \ll c_0^\pm \xi_A^\pm$) это приводит ко II инварианту рефракции

$$V^+ = V^- \quad (2)$$

Инварианты I, II имеют место для всех режимов рефракции (регулярной RR ; нерегулярной NR ; регулярной с УВ, замыкающей волну разрежения RRW).

Анализ задач рефракции УВ в переменной теории коротких волн

(для областей больших градиентов параметров [3])

$$\begin{aligned}\xi &= 1 + \bar{\varepsilon}X, \eta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y; R/c_0t = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \Theta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y; \delta = X + \frac{1}{2}Y^2, \\ u &= P_{10}u^{(1)}, v = P_{10}^{\frac{3}{2}}R_0^{\frac{1}{2}}v^{(1)}; \frac{u}{c_0} = \bar{\varepsilon}^\mu/R_0, \frac{v}{c_0} = \bar{\varepsilon}^{\frac{3}{2}}v/R_0, \\ (p - p_0)/B_0 &= P_{10}P^{(1)}; (\rho - \rho_0)\rho_0 = P_{10}H^{(1)}\end{aligned}\quad (3)$$

приводит к построению решений для системы уравнений коротких волн

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_y + \mu = 0, \mu_y = v_\delta, \mu = P^{(1)} = H^{(1)}.\quad (4)$$

Для волны разрежения ALE (рис. 2, б) имеем решение

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, v = \frac{1}{3}z^3 - \mu Y + d, z = (X - X_A)/Y.\quad (5)$$

Условия на фронтах УВ ($X = X^*(Y)$, $\psi^v = dX^*/dY$; μ_1, v_1 – значения перед фронтом УВ) имеют вид

$$X - \psi^v Y = \frac{1}{2}(\psi^{v^2} + \mu + \mu_1), (\mu - \mu_1)(\psi^v + Y) = v_1 - v, P^{(1)} = \mu.\quad (6)$$

При постановке краевых задач для системы (4) к условиям (5), (6) на границах областей D^+ , D^- добавляются условия сращивания с решениями в областях I (линейного решения), III (квазиодномерного решения). Неизвестные участки УВ на границах областей определяются согласно (6) при решении краевых задач для системы (4) [3–5].

2. Slow-fast. При падении УВ сверху масштабы давлений ($B_0 = \rho_0 c_0^2$), учитывающие плотность и сжимаемость (через скорость звука c_0), $B_0^- \gg B_0^+$, тогда для инварианта II согласно (3) имеем $v^+ \ll v^-$, т.е. $v^+ = 0$ и $Y = 0$ ($tg\delta = -1/\xi' = 0$) и согласно (4) имеем

$$\mu_Y = 0, Y = 0.\quad (7)$$

Это условие на свободной поверхности в данном случае совпадает с условием на твердой стенке. Физически (7) приводит к тому, что в нижнюю область передается лишь малая часть энергии. Масштаб возмущений в нижней области мал ($P_{10}^\pm = (p_1 - p_0)/B_0^\pm$) $P_{10}^- \ll P_{10}^+$; параметр подобия (см. [5]) $\bar{L} = L_0^-/L_0^+$, учитывающий газосодержания областей ($L_0^-/L_0^+ \sim B_0^-/B_0^+$, $\bar{L} \ll 1$), также мал.

Краевая задача для верхней области D^+ решается [3] при условии (7) отдельно (в области D^-) для функции $\mu(\delta, Y)$ системы (4). Найденное

решение позволяет сформулировать условие на свободной поверхности для области D^- , которое в рамках асимптотической теории ($\bar{\varepsilon} \ll 1$) приводит к решению краевой задачи для уравнения Лапласа.

3. Fast-slow. При падении УВ снизу имеем случай жидкость/газ, который является частным для общей теории рефракции (ГЖС/ГЖС) [4, 5]. Решающую роль здесь играет волна разрежения (ALE), которая понижает давление q^- за падающим фронтом в точке А ($q^- = (p_A^- - p_0)/(p_1 - p_0)$, $q^- \leq 1.0$). В случае жидкость/газ параметры подобия [5]

$$\alpha^v = tg\alpha/\bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}; \bar{L} = L_0^-/L_0^+(\ll 1); C_\gamma = (c_0^- - c_0^+)/c_0^- \bar{\varepsilon} (\gg 1). \quad (8)$$

Анализ [3–5] показывает, что в рамках теории коротких волн (ТКВ) $\mu_A = q^+ = 0$ за задним фронтом волны разрежения, т.е. в верхней области течения D^+ возмущениями можно пренебречь.

В зависимости от α_A и $\bar{L}(\gamma^+, \gamma^-)$ реализуются различные режимы рефракции УВ [4, 5] (RR ; NR ; RRW).

Задача для нижней области течения решается методом последовательных приближений, который сводит исходную задачу для уравнений коротких волн с неизвестной границей (фронты УВ) к серии краевых задач с фиксированной границей.

4. На рис. 3 изображены картины течений (поля давлений), полученные при численном решении задач рефракции УВ в случаях slow-fast и fast-slow.

На рис. 3, а приведены результаты расчета поля давления при падении УВ сверху на поверхность океана ($P_{10} = 6.3 \cdot 10^{-3}$, $\alpha = 10^0$) при $\alpha^v = 1.0$. Этот случай соответствует переходу от нерегулярной (NR , $\alpha^v \leq 1.0$) к регулярной (RR , $\alpha^v \geq 1.0$) рефракции.

Обращает внимание в этом случае сгущение линий постоянных давлений в окрестности точки А. Сравнение расчетных данных с интерферограммами (см. [1]) (линии равных давлений и плотностей совпадают [4]) показывает их качественное соответствие.

На рис. 3, б приведены результаты расчета поля давлений при падении УВ снизу на поверхность океана при $\alpha^v = 0.5$. Этот случай

соответствует нерегулярному режиму рефракции *NR*. Обращает внимание в этом случае быстрое падение давления (возмущений) при подъеме с глубины к свободной поверхности. Результаты расчета полей давлений согласовываются с экспериментальными данными (см. [2]).

В случае падения ударной волны сверху на поверхность океана (рис. 3, *a*) давление быстро падает с увеличением глубины погружения.

В целом рассмотренные случаи рефракции УВ раскрывают механизмы гашения возмущений, которые природа использует для сохранения окружающей среды.

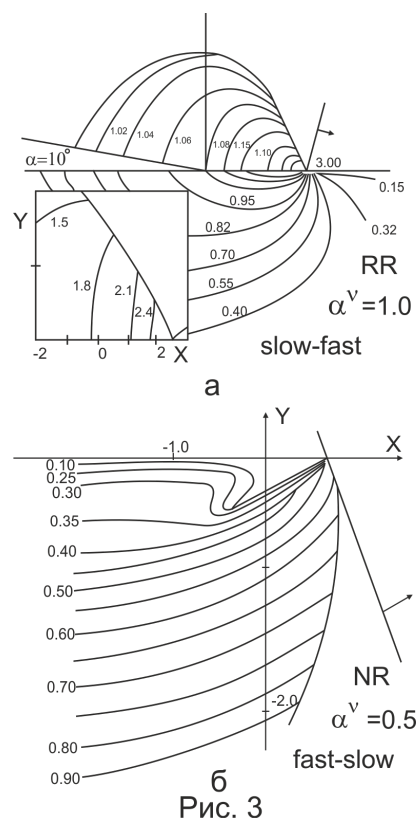


Рис. 3

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Henderson L.F., Ma J., Sakurai A., Takayama K.* Refraction of a shock wave at an air-water interface // *Fluid Dynamics Research*. 1990. №5. P. 337–350.
2. *Henderson L.F., Collela P., Puckett E.G.* On the refraction of shock wave at a slow-fast gas interface // *J. Fluid Mech.* 1991. Vol. 224. P. 1–27.
3. *Шиндяпин Г.П.* Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
4. *Шиндяпин Г.П., Матутин А.А.* О математических моделях и режимах рефракции ударных волн в газожидкостных пузырьковых средах // Струйные, отрывные и нестационарные течения: тр. XXI Всерос. семинара. Новосибирск: Параллель, 2007. С. 199–201.
5. *Шиндяпин Г.П., Матутин А.А.* О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // *Математика. Механика: сб. науч. тр.* Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.

УДК 533.6.011

Г.П. Шиндяпин, А.В. Сергачёв

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ПАРАДОКСА НЕЙМАНА

Проблема взаимодействия и отражения ударных волн (УВ) в газах и газожидкостных пузырьковых средах (ГЖС) представляет сложную

задачу современной механики. В статье проведено асимптотическое исследование для режимов взаимодействия и отражения относительно слабых УВ. Рассчитаны поля давлений с помощью численно аналитических методов.

1. Рассматривается взаимодействие двух УВ относительно малой интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)$, $P_{20} = (p_2 - p_0)$, где $B_0 = \rho_0 C_0^2$, под углом 2α в сжимаемой идеальной ГЖС пузырькового типа с плотностью ρ , скоростью звука C_0 , относительным массовым газосодержанием γ . Математически задача описывается системой уравнений Эйлера.

Неоднородные течения характеризуются падающими УВ, отраженными волнами $A_i B_i$, фронтами Маха и областями возмущения D -областями больших градиентов (рис. 1).

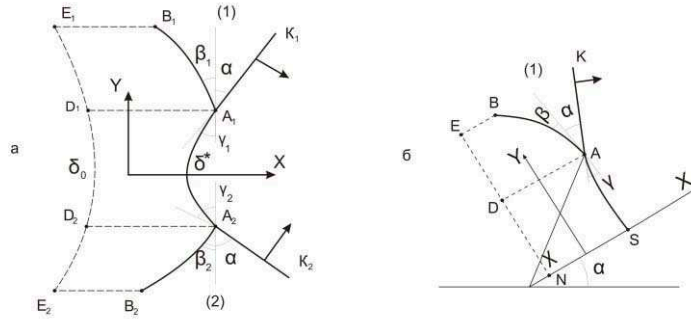


Рис. 1

Асимптотическая система течений в переменных:

$$\bar{\varepsilon} = R_0(\gamma)P_{10} = L_0(\gamma)\varepsilon_{10}; \varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0;$$

$$R/C_0 t = 1 + P_{10}R_0(\gamma)\delta; \theta = P_{10}^{\frac{1}{2}}R_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)Y; \delta = X + \frac{1}{2}Y^2; B_0 = \rho_0 C_0^2; \quad (1)$$

$$\frac{u}{C_0} = P_{10}\mu; \frac{\nu}{C_0} = P_{10}^{\frac{3}{2}}R_0^{\frac{1}{2}}(\gamma)\nu; \frac{P - P_0}{B_0} = P_{10}P^{*(1)}; \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = P_{10}H^{(1)}$$

сводится к решению системы уравнений коротких волн (УКВ):

$$[\mu(\mu - 2\delta)]_{\delta} + \nu_Y + 3\mu = 0, \mu_Y = \nu_{\delta}, \mu = P^{*(1)} = H^{(1)}. \quad (2)$$

На фронтах ударных волн $\delta = \delta^*$ выполняются условия ($q_n = 1$ на $A_1 B_1$, $q_n = 0$ на $A_1 A_2$, $q_n = \eta$ на $A_2 B_2$):

$$(d\delta^*/dY)^2 = 2\delta^* - \mu - \mu_1; (\mu - \mu_1)d\delta^*/dY = \nu_1 - \nu; \mu = P^{*(1)} = H^{(1)};$$

$$\mu_1 = q_n; \nu_1 = -q_n(Y \pm \alpha^{\nu}); \alpha^{\nu} = tg\alpha/\bar{\varepsilon}_{10}^{-\frac{1}{2}}; \eta = P_{20}/P_{10}. \quad (3)$$

Условия сращивания решений на границе с областью (I) имеют вид

$$\mu = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y + \alpha^\nu} + \frac{\eta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2\delta}}{Y - \alpha^\nu}; \delta \rightarrow -\infty, -\infty < Y < \infty, \quad (4)$$

для границ B_1E_1 (BE), B_2E_2 с областями (III) квазиодномерных решений:

$$\mu = q_n + K^2(Y) \left(1 \pm (1 - (\delta - q - n)K^{-2}(Y))^{\frac{1}{2}} \right);$$

$$K^2(Y) = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha^\nu + Y} + \frac{\eta}{\alpha^\nu - Y} \right)^2, \quad -\infty < \delta < \delta^*. \quad (5)$$

Параметр подобия α^ν зависит от ε_{10} , α и γ через $L_0(\gamma)$. При фиксированных значениях постановка краевых задач для газов и ГЖС формально совпадают. Основную трудность представляет нелинейность системы (3) и неизвестное положение ударных фронтов.

2. Исследуем схемы нерегулярного взаимодействия и отражения относительно слабых УВ в области параметров α^ν , η аналогично [1, 2], используя частное решение системы (2). Математические схемы будут характеризоваться набором параметров для верхней и нижней тройных точек (с индексом I и II соответственно). Условия динамической совместности (3) на фронтах A_nK_n , A_nB_n , A_1A_2 можно записать в виде (для верхней точки $n = 1$ и $q_n = 1$; для нижней точки $n = 2$, $q_n = \eta$):

$$A_n = \alpha^\nu \pm Y_n; \delta_n = \frac{1}{2}(q_n + A_n^2); \varepsilon = P_{10}R_0(\gamma); B_n = \beta_n^\nu \pm Y_n;$$

$$B_n = (A_n^2 - \mu_n)^{\frac{1}{2}}; \beta_n^\nu = \operatorname{tg} \beta / \varepsilon^{\frac{1}{2}}; C_n = \gamma_n^\nu \pm Y_n; C_n = (q_n + B_n^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\gamma_n^\nu = \gamma_n / \varepsilon^{\frac{1}{2}}; \nu_n^\pm = \mp q_n A_n \pm B_n (\mu_n - q_n); \nu_n^\mp = \mp C_n \mu_n. \quad (6)$$

Чтобы учесть влияние потока на характер течения за фронтом Маха, рассмотрим параметрическое решение системы (2) [1, 3], которое точно удовлетворяет условиям (3) на фронте Маха A_1A_2 :

$$\mu = \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q); \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q);$$

$$\nu = \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q). \quad (7)$$

Подстановка решений (7) в систему (2) и условия (3) приводит к системе девяти дифференциальных уравнений для нахождения функций $\varphi_0(q)$, $\chi_1(q)$ и системе начальных условий на фронте в предположении что фронту Маха соответствует $q = q_0 = \operatorname{const}$. В результате получим систему 18-ти уравнений для 21-го неизвестного. Система дополняется

тремя соотношениями. Первое следует из принципа притока массы (см. [1]):

$$(Y_1 - Y_2)(3\bar{\mu}^* - 2\bar{\mu}_c) = \nu_2^- - \nu_1^+; \bar{\mu}_c = (1 + \eta)/2. \quad (8)$$

Здесь $\bar{\mu}^*$ – среднее значение на границе с областью I, $\bar{\mu}_c$ – среднее значение на фронте Маха. Оставшиеся соотношения вытекают из принципа экстремального поворота для потока, прошедшего через отраженную волну в точках A_1A_2 :

$$\mu_1 = (1 + 2A_1^2)/3; \mu_2 = (\eta + 2A_2^2)/3. \quad (9)$$

Асимптотические решения системы (2) сводятся к установлению областей существования различных режимов взаимодействия и отражения УВ (рис. 2, *a* – общий случай, *б* – отражение). Границы режимов определяются из решения для областей C и C''' при различных условиях (например, при $Y_1 = Y_2$ для 1).

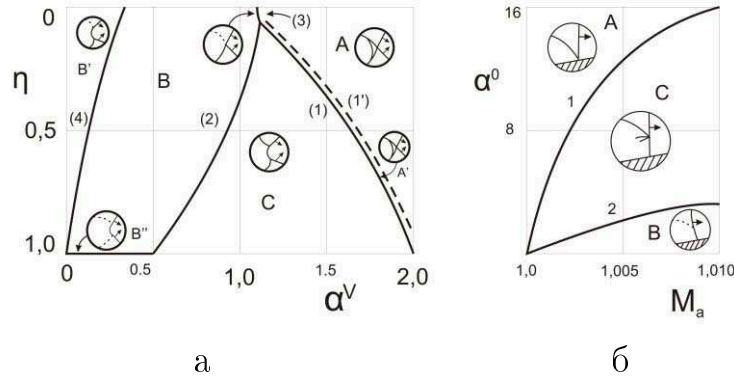


Рис. 2

3. Рассмотрим наиболее общие случаи C развитого нерегулярного взаимодействия. Все параметры выражаются через A_1, A_2 ($n = 1, 2; q_n = 1, \eta$):

$$\delta_n = (q_n + A_n^2)/2; \nu_n^m = m \frac{\mu_n}{\sqrt{3}} (2q_n + A_n^2)^{\frac{1}{2}}; \mu_n = (q_n + 2A_n^2)/3;$$

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{3}} (2q_n + A_n^2)^{\frac{1}{2}}; \gamma_n^\nu = mY_n + C_n; Y_n = \pm(A_n - \alpha^\nu);$$

$$\nu_n^\pm = mq_n A_n \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} (A_n^2 - q_n)^{\frac{3}{2}}, \beta_n^\nu = \pm Y_n + \frac{1}{\sqrt{3}} (A_n^2 - q_n)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Выражая μ^* согласно (7) при $q = q_0$ можно свести задачу к решению системы двух уравнений: симметрии (8) и притока массы (9).

$$3z_1^2 = A_1^2 + 2; 3z_2^2 = A_2^2 + 2\eta; A = A_1 + A_2 - 2\alpha^\nu; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& 3z_1^2 - 3z_2^2 - 1 + \eta = (z_1 - z_2)A; \\
& A[6z_1^2 - 4 - \eta + (z_1 + z_2 - A)(2z_1 - z_2)] = \\
& = \sqrt{3z_1^2 - 2 + \eta} \sqrt{3z_2^2 - 2\eta - 2[(z_1^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + (z_2^2 - \eta)^{\frac{3}{2}}]}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Модель C''' развитого нерегулярного отражения получим, исключая A из второго уравнения (12) при $\eta = 1$, $z_1 = z_2$. Решение задачи имеет аналитический вид (см. [1]).

4. Для построения полей давлений и скоростей при нерегулярных и регулярных взаимодействиях УВ выполним подстановку класса точных решений (7) в систему УКВ (2), что приводит к системе девяти ДУ:

$$\begin{aligned}
\varphi'_2 &= \frac{4q\varphi_2 - \varphi_2 - 3\psi_3}{2f_0}; \quad \varphi'_1 = \frac{2\varphi_2\chi_1 + 2q\varphi_1 - \varphi_1 - 2\psi_2}{2f_0}; \quad \varphi'_0 = \frac{\varphi_1\chi_1 - \varphi_0 - \psi_1}{2f_0}; \\
\chi'_1 &= \frac{4q\chi_1 - 2\chi_1 + 2\varphi_1}{2f_0}; \quad \chi'_0 = \frac{-2\chi_0 + \chi_1^2 + 2\varphi_0}{2f_0}; \\
\psi'_3 &= \frac{4\varphi_2^2 - 2q\varphi_2 + 6q\psi_3}{2f_0}; \quad \psi'_2 = \frac{3\psi_3\chi_1 - 3\varphi_2\chi_1 + 6\varphi_1\varphi_2 + 4q\psi_2}{2f_0}; \\
\psi'_1 &= \frac{-4\varphi_2\chi_0 - \varphi_1\chi_1 + 2\varphi_2\chi_1 + 4\varphi_0\varphi_2 + 2q\varphi_0 + 2\varphi_1^2 + 2q\psi_1}{2f_0}; \\
\psi'_0 &= \frac{-2\chi_0\varphi_1 + \chi_1\varphi_0 + \chi_1\psi_2 + 2\varphi_0\varphi_1}{2f_0}; \quad f_0(q) = \varphi_2(q) + 2q^2 - q. \quad (13)
\end{aligned}$$

Анализ системы (13) приводит к одному уравнению второго порядка для функции $\varphi_2(q)$:

$$\varphi_2''(\varphi_2(q) + 2q^2 - q) + \varphi_2^2 = (0.5 + q)\varphi_2' - \varphi_2 \quad (14)$$

с общим решением вида

$$\varphi_2(q) = A\sqrt{|q + b|} - 2Bq^2 - B, \quad A, B - \text{const.} \quad (15)$$

На рис. 3 представлены решения задачи за фронтами УВ при различных параметрах α^ν , η (A_1A_2 при $q = q_0$, A_1A_0 при $q = q_1$, A_2A_0 при $q = q_2$).

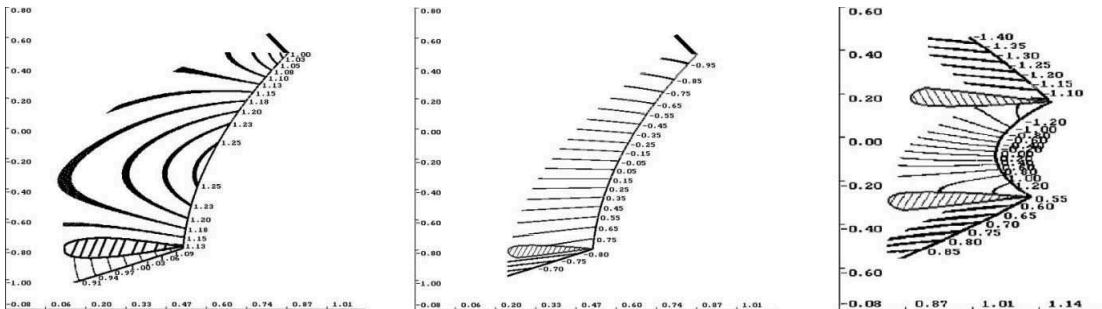


Рис. 3

Полученные результаты согласуются с известными численными и аналитическими решениями [4] и позволяют сделать вывод об адекватности развитого метода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шиндяпин Г.П.* Аналитическое исследование ударно-волновых структур и потоков при отражении и взаимодействии относительно слабых ударных волн //Аэродинамика. Ударно-волновые процессы: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 15(18). С. 31–44

2. *Шиндяпин Г.П.* Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.

3. *Шиндяпин Г.П., Гамаюнова Е.Н.* Аналитическое исследование общего случая нерегулярного взаимодействия и отражения ударных волн //Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 225–229

4. *Zakharian A.R., Brio M., Hunter J.K., Webb G.M.* The non Neumann paradox in weak shock reflection // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 402. P. 193–205.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

БОНДАРЕНКО Н.П. Локальная разрешимость обратной задачи для матричного уравнения Штурма—Лиувилля	3
БРЕДИХИН Д.А. О классах алгебр отношений с операциями цилиндрификации	6
БУКУШЕВА А.В., ГАЛАЕВ С.В. Условие интегрируемости метрики Бервальда—Моора	10
БУТЕРИН С.А. Восстановление дифференциального пучка второго порядка по неполной спектральной информации	13
ВЫГОДЧИКОВА И.Ю. О формировании портфеля ценных бумаг с равномерно распределённым риском	18
ГОРДИЕНКОВ Г. О седловой точке функционала $\mathbf{a}_3 - \alpha \mathbf{a}_2^2$ в классе \mathbf{S}^M	20
ДУДОВ С.И., СОРИНА Е.В. Сравнение задачи о внешней оценке сегментной функции полиномиальной полосой с задачей Бл. Сендова	23
ИГНАТЬЕВ М.Ю. О задаче рассеяния на простейшем некомпактном геометрическом графе с циклом	27
ИОФИНА Т.В. Сильная аппроксимация функций по мультипликативным системам в равномерной и гильбертовых метриках	30
КАЛМЫКОВ М.Ю. Теорема двойственности для задачи конического программирования специального вида	33
КАЛМЫКОВ М.Ю., СИДОРОВ С.П. Условия пустоты допустимого множества одной задачи конического программирования	36
КОРНЕВ В.В. О резольвенте оператора интегрирования	39
КОРОБЧЕНКО Е.В. Неподвижные точки толерантных отображений	41
КРЕЙС С.А. О некоторых свойствах оператора синтеза, ассоциированного с альтернативным дуальным фреймом	44
КУЗНЕЦОВА И.А. Иерархические игры с двузначным критерием эффективности	47
МОЛЧАНОВ В.А. Отношения Грина на полугруппах нестандартных слов	50
НОВИКОВ В.Е. Решётка концептов в однозначном контексте	53
ОРЕЛ А.А. Фантомные типы данных на основе отношения предпорядка	56
ПОПЛАВСКИЙ Д.В. О нелинейной эволюции матрицы Вейля согласно начально-краевой задаче на полуоси для векторного модифицированного уравнения КДФ	59
РАЗУМОВСКАЯ Е.В. Об однолистности одного отображения	62
РАЗУМОВСКАЯ Е.В., ТИМОФЕЕВ В.Г. Об одном классе субгармонических функций	63

РОЗЕН В.В. Условия единственности балансовой пары векторов	66
РОМАКИНА Л.Н. Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной кривизны	69
РЫХЛОВ В.С. О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов	72
САВИНА Т.Ф. Равновесные и допустимые исходы для коалиций в игре с отношениями предпочтения	74
СИДОРОВ С.П. Оценка линейного формосохраняющего поперечника одного класса дифференцируемых функций	78
ТИМОФЕЕВ В.Г. Точные неравенства Ландау для функций нескольких переменных	80
ТРЫНИН А.Ю., ПАНФИЛОВА И.С. Об одном признаке типа Дини—Липшица сходимости обобщённых интерполяционных процессов Уиттекера—Котельникова—Шеннона	83
ТРЫНИН А.Ю., ПАНФИЛОВА И.С. О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по узлам Якоби на множестве полной меры	87
ТУКТАМЫШЕВА К.А. Обобщенная абсолютная сходимость рядов Фабера—Шаудера	91
ТУРАШВИЛИ К.Б. Об интерполяционном аналоге интегрального признака Дини	94
ФЕДОСЕЕВ А.Е. Об одном интегральном операторе с разрывным пределом интегрирования	98
ХВОРОСТУХИНА Е.В. О проблемах разрешимости элементарных теорий универсальных гиперграфических автоматов	102
ХРОМОВ А.А. О скорости сходимости приближений непрерывных функций некоторым семейством разрывных	104
ХРОМОВ А.П. Об одном интегральном операторе с разрывной областью значений	106
ХРОМОВА Г.В. Интегральное уравнение первого рода с ядром Грина и метод Лаврентьева	109
ХРОМОВА Г.В., ШАТАЛИНА О.И. Решение задачи типа Колмогорова—Никольского для операторов тихоновской регуляризации	111
ЮРКОВ А.А. Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов на некомпактных пространственных сетях	112

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АБИТОВА И.Ф., ОЛЬШАНСКИЙ В.Ю. Об учете переносных сил инерции в одной модели пьезогироскопа	116
АНОФРИКОВА Н.С., СЕРГЕЕВА Н.В. Гармонические волны в наследственно-упругом слое: случай симметричного по нормальной координате напряженно-деформированного состояния	119
АНОФРИКОВА Н.С., ШЕВЦОВА Ю.В. Низкочастотные длинноволновые тангенциальные приближения трехмерных динамических уравнений теории вязкоупругости для случая двухслойных пластин	122
АНТОНЕНКО Э.В., ПРИВАЛОВА Н.А. Модели стандартной атмосферы	126
АРАНОВИЧ В.М., БАРЫШЕВ А.А. Анализ одномерной модели определения НДС тазобедренного сустава	129
АРИСТАМБЕКОВА А.В., РОМАКИНА О.М. Статическая и динамическая задачи изгиба квадратной изотропной пластинки	132

ВЕЛЬМИСОВА А.И. Распространение и отражение гармонических волн в плоском акустическом слое с гибкими стенками в случае разрыва упругих свойств на одной из стенок	136
БАРЫШЕВ А.А., НОМЕРОВСКАЯ Е.А. Анализ НДС и теплового поля вязкоупругой кольцевой пластинки	140
БИРЮКОВ А.Г., БИРЮКОВ В.Г., ЧЕЛНОКОВ Ю.Н. Задача оптимального вывода твердого тела на заданную программную траекторию	143
ГУРЬЯНОВ В.М. , БОРИСОВА Л.В. Математическая модель адаптивного метода вибрационной сейсморазведки флюидно-насыщенных резервуаров	146
ЕВСЕЕВ Н.О., ЛУНЁВ Е.А., СЕВОСТЬЯНОВ Г.Д. Расчет параметров при регулярном отражении косоугольного скачка от стенки	149
КОЖАНОВ В.С. О траекториях движения частиц на стадии отражения в задаче о сходящейся ударной волне	152
КОПНИНА В.И., ОВЧИННИКОВА М.В. Изгиб изотропной плиты, ослабленной квадратным отверстием	155
МАРКУШИН А.Г. Метод дополнительных деформаций в решении задачи истечения сыпучего материала с твердым зерном	159
ОЛЬШАНСКИЙ В.Ю., НАГАР Ю.Н., СЕРЕБРЯКОВ А.В. Построение амплитудно-частотной характеристики для одной модели пьезогироскопа	164
ОЛЬШАНСКИЙ В.Ю., НАГАР Ю.Н. Характеристики переходного процесса в одноосевом пьезогироскопе	167
ПАНКРАТОВ И.А., САПУНКОВ Я.Г., ЧЕЛНОКОВ Ю.Н. Численное исследование задачи управления ориентацией орбиты космического аппарата	170
ПАНКРАТОВ И.А., ЧЕЛНОКОВ Ю.Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата в отклонениях	174
ПАРФЁНОВА Я.А. Анализ влияния жесткости упругого закрепления на распространение волн в упругом изотропном слое	177
САПУНКОВ Я.Г. Оптимальный вывод на орбиту космического аппарата с комбинированной тягой	180
САПУНКОВ Я.Г., МОСИН Р.В. К задаче о сходящейся ударной волне	183
СЕВОСТЬЯНОВ Г.Д. Равнобедренная конфигурация в плоской неограниченной задаче трёх тел	187
ТОРОПОВА О.А. Формулировка уравнений равновесия для нелинейно-упругого нефтеподъемника	189
ТОРОПОВА О.А. Уравнения нелинейно-упругого нефтеподъемника с переменной вдоль образующей толщиной стенки	193
ЧЕРНОВ И.А. Квадратуры в обобщенной автотомодельной задаче о сильном взрыве	196
ШИНДЯПИН Г.П., МАТУТИН А.А. Рефракция ударной волны на поверхности океана	199
ШИНДЯПИН Г.П., СЕРГАЧЁВ А.В. Математическое моделирование нелинейного взаимодействия ударных волн в условиях парадокса Неймана	203