

УДК 517.984

Н.П. Бондаренко

**НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ
РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ
ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ**

Рассмотрим краевую задачу $L(Q(x), h, H)$ для матричного уравнения Штурма — Лиувилля:

$$lY := -Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \quad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0.$$

Здесь $Y = [y_k]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, λ — спектральный параметр и $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$, причем $Q_{jk}(x) \in L_2(0, \pi)$ — комплекснозначные функции. Матрицу $Q(x)$ в дальнейшем будем называть *потенциалом*. Краевые условия задаются матрицами $h = [h_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, $H = [H_{jk}]_{j,k=\overline{1,m}}$, где h_{jk} и H_{jk} — комплексные числа.

Изучается обратная спектральная задача восстановления потенциала и коэффициентов краевых условий по спектральным данным, которая представляет собой обобщение известной обратной задачи в скалярном случае, при $m = 1$ [1]. В работах [2, 3] доказана единственность решения обратной задачи для матричного уравнения Штурма — Лиувилля и получена конструктивная процедура восстановления. Результатом данной статьи являются необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи в самосопряженном случае, то есть при $Q(x) = Q^*(x)$, $h = h^*$, $H = H^*$. Отметим, что ранее необходимые и достаточные условия были получены в статье [4] для случая с существенным ограничением, заключающимся в асимптотической простоте спектра, которое не требуется в данной статье.

Основным методом исследования является метод спектральных отображений [1].

Пусть $\varphi(x, \lambda) = [\varphi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ является решением уравнения (1) при начальных условиях $\varphi(0, \lambda) = I_m$, $\varphi'(0, \lambda) = h$, где I_m — единичная матрица $m \times m$. Функция $\Delta(\lambda) := \det[V(\varphi)]$ называется *характеристической функцией* краевой задачи L . Она является целой по λ и имеет не

более чем счетное множество нулей, причем все нули вещественные. Нули характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи L с учетом кратностей.

Пусть $\omega = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi Q(x) dx$. Без ограничения общности будем считать, что $\omega = \text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$. Выполнения этого условия можно добиться применением унитарного преобразования, приводящего самосопряженную матрицу ω к диагональному виду. Тогда справедлива

Лемма 1. *Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\Lambda = \{\lambda_{nq}\}_{n \geq 0, q=1,\overline{m}}$. При этом*

$$\rho_{nq} = \sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n}, \quad \{\varkappa_{nq}\}_{n \geq 0} \in l_2, q = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Пусть $\Phi(x, \lambda) = [\Phi_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — решение уравнения (1) при условиях $U(\Phi) = I_m$, $V(\Phi) = 0_m$ (0_m — нулевая матрица $m \times m$). Положим $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$. Матрица $M(\lambda) = [M_{jk}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,m}}$ называется *матрицей Вейля* задачи L . Матрица-функция $M(\lambda)$ мероморфна по λ и имеет простые полюса в точках $\{\lambda_{nq}\}$.

Положим

$$\alpha_{nq} := \underset{\lambda=\lambda_{nq}}{\text{Res}} M(\lambda).$$

Величины $\Lambda^0 := \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geq 0, q=\overline{1,m}}$ называются *спектральными данными* задачи L .

Считаем, что $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$ может выполняться только при $n = k$, когда $\{\lambda_{nq_j}\}_{j=\overline{1,r_n}}$, где $1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_{r_n} \leq m$, $r_n \leq m$, — все различные собственные значения из $\{\lambda_{nq}\}_{q=\overline{1,m}}$. Обозначим

$$\alpha'_{nq_j} := \alpha_{nq_j}, j = \overline{1, r_n}, \quad \alpha'_{nq} = 0_m, 1 \leq q \leq m, q \notin \{q_{nj}\}_{j=\overline{1,r_n}}.$$

Пусть $\{\omega_{m_s}\}_{s=\overline{1,p}}$ — все различные числа из набора $\{\omega_q\}_{q=\overline{1,m}}$. Введем обозначение $\alpha_n^{(s)} = \sum_{\omega_q=\omega_{m_s}} \alpha'_{nq}, s = \overline{1, p}$.

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \frac{\varkappa_n^{(s)}}{n}, \quad \{\varkappa_n^{(s)}\}_{n \geq 0} \in l_2, s = \overline{1, p}, \quad (3)$$

∂e

$$I^{(s)} = [I_{jk}^{(s)}]_{j,k=\overline{1,m}}, \quad I_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 1, & j = k, \omega_j = \omega_{m_s}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. По заданным спектральным данным Λ^0 построить Q , h и H .

Сформулируем необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 1.

Теорема 1. Для того чтобы величины $\{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geq 0, q=1, m}$ были спектральными данными самосопряженной краевой задачи $L(Q, h, H)$ с потенциалом $Q(x) = [Q_{jk}(x)]_{j,k=1, m}$, $Q_{jk}(x) \in L_2(0, \pi)$ и такой, что $h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi Q(x) dx$ является диагональной матрицей, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) $\lambda_{nq} \neq \lambda_{kl}$ при $n \neq k$. Если $\lambda_{nq} = \lambda_{nl}$, то $\alpha_{nq} = \alpha_{nl}$;
- 2) верны асимптотические формулы (2) и (3);
- 3) все λ_{nq} вещественные. Ранги матриц α_{nq} равны кратностям λ_{nq} и $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^*$, $\alpha_{nq} \geq 0$ при всех $n \geq 0$, $q = 1, m$;
- 4) для любого вектора-строки $\gamma(\lambda)$, который является целой функцией и имеет асимптотику $\gamma(\lambda) = O(\exp(|Im \sqrt{\lambda}| \pi))$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, из выполнения условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ при всех $n \geq 0$, $q = 1, m$ следует, что $\gamma(\lambda) \equiv 0$.

Данная теорема является обобщением известного результата для скалярного случая (см. [1, с. 72]). Однако отметим, что в матричном случае вводится дополнительное условие 4. Нетрудно показать, что в скалярном случае оно вытекает из условий 1 – 3.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
2. Yurko V.A. Inverse problems for matrix Sturm – Liouville operators // Russian J. of Mathematical Physics. 2006. Vol. 13, №1. P. 111–118.
3. Yurko V.A. Inverse problems for the matrix Sturm – Liouville equation on a finite interval // Inverse Problems. 2006. Vol. 22. P. 1139–1149.
4. Chelkak D., Korotyaev E. Weyl-Titchmarsh functions of vector-valued Sturm – Liouville operators on the unit interval // J. of Functional Analysis. 2009. Vol. 257, iss. 5. P. 1546–1588.

УДК 519.4

Д.А. Бредихин

О ПОЛУГРУППАХ ОТНОШЕНИЙ С УНАРНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Множество бинарных отношений Φ , замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена

как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения \subset . Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр) отношений с операциями из Ω . Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А.Тарского [1]. Им были рассмотрены алгебры отношений со следующими операциями: булевы операции объединения \cup , пересечения \cap и дополнения \neg ; операции произведения \circ и обращения $^{-1}$ отношений; нульевые операции \emptyset (пустое множество), I (тождественное отношение), U (универсальное отношение). Существует ряд других важных операций над отношениями [2 — 6]. Как правило, такие операции могут быть выражены через операции алгебр отношений Тарского. Алгебра отношений с указанным типом операций называются *редуктами алгебр отношений Тарского*.

Одной из основных проблем при рассмотрении классов алгебр отношений является проблема нахождения базиса тождеств порожденных ими многообразий, а также выяснения вопроса об их конечной базируемости. Мы сосредоточимся на рассмотрении операций произведения \circ , объединения \cup отношений, а также двух унарных операций Δ и ∇ , определяемых формулами

$$\Delta(\rho) = \{(x, x) : (\exists y, z)(y, z) \in \rho\}, \quad \nabla(\rho) = \{(x, x) : (\exists y)(y, y) \in \rho\}.$$

Согласно определению $\Delta(\rho) = I$ ($\nabla(\rho) = I$), если $\rho \neq \emptyset$ (отношение ρ содержит неподвижную точку $(y, y) \in \rho$), следовательно, операция Δ может быть рассмотрена как индикатор непустоты отношения, а операция ∇ — как индикатор того, что отношение содержит неподвижную точку.

Заметим также, что операции Δ и ∇ могут быть выражены через операции алгебр отношений Тарского следующим образом: $\Delta(\rho) = (U \circ \rho \circ U) \cap I$ и $\nabla(\rho) = (U \circ (\rho \cap I) \circ U) \cap I$.

Общеизвестно, что класс $R\{\circ\}$ совпадает с классом всех полугрупп, поэтому алгебры отношений, в сигнатуру которых входит операция умножения отношений, могут быть рассмотрены как полугруппы отношений с дополнительными операциями [4].

Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах. Их доказательство существенным образом использует описание эвклидовых теорий алгебр отношений с позитивными и примитивно позитивными операциями, полученное автором в работах [7 — 10].

Теорема 1. *Алгебра $(A, \cdot, *)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообра-*

зию $Var\{\circ, \Delta\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам

$$(xy)z = x(yz) \quad (1), \quad (x^*)^* = x^* \quad (2), \quad xy^* = y^*x \quad (3),$$

$$(xy^*)^* = x^*y^* \quad (4), \quad xx^* = x \quad (5).$$

Теорема 2. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, ^*, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \Delta, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам $(1) - (5)$ и тождеству $xy^* \leq x$ (6) .

Теорема 3. Алгебра (A, \cdot, \bullet) типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству (1) и тождествам:

$$(x^*)^2 = x^* \quad (7), \quad xy\bullet = y\bullet x \quad (8),$$

$$(xy)\bullet = (yx)\bullet \quad (9), \quad (xy\bullet)\bullet = x\bullet y\bullet \quad (10),$$

$$x\bullet(x^p)\bullet = x\bullet \quad (11) \text{ для любого простого } p.$$

Теорема 4. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, \bullet, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам $(1) - (7)$ и тождеству $xy\bullet \leq x$ (12) .

Теорема 5. Алгебра $(A, \cdot, ^*, \bullet)$ типа $(2, 1, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \Delta, \nabla\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам $(1) - (5)$, $(7) - (11)$ и тождествам

$$(x^*)\bullet = x^* \quad (13), \quad (x\bullet)^* = x\bullet \quad (14).$$

Теорема 6. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, ^*, \bullet, \leq)$ типа $(2, 1, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \Delta, \nabla, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам $(1) - (14)$.

Теорема 7. Алгебра $(A, \cdot, +, ^*)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \cup, \Delta\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам $(1) - (5)$ и тождествам

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad (15), \quad x + x = x \quad (16), \quad x + y = y + x \quad (17),$$

$$(x + y)z = xz + yz \quad (18), \quad x(y + z) = xy + xz \quad (19),$$

$$(x + y)^* = x^* + y^* \quad (20), \quad x + xy^* = x \quad (21).$$

Теорема 8. Алгебра $(A, \cdot, +, \bullet)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \cup, \nabla\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1) , $(7) - (11)$, $(15) - (19)$ и тождествам

$$(x + y)\bullet = x\bullet + y\bullet \quad (22), \quad x + xy\bullet = x \quad (23).$$

Теорема 9. Алгебра $(A, \cdot, +, ^*, \bullet)$ типа $(2, 2, 1, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \cup, \Delta, \nabla\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам $(1) - (5)$, $(7) - (11)$, $(13) - (23)$.

Теорема 10. Многообразия $Var\{\circ, \nabla\}$, $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$, $Var\{\circ, \Delta, \nabla\}$, $Var\{\circ, \cup, \nabla\}$ и $Var\{\circ, \cup, \Delta, \nabla\}$ не являются конечно базируемыми.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 6. P. 73–89.
2. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–197.
3. *Henkin L., Monk J.D., Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, part I, II, 1971, 1985.
4. *Schein B.M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. Vol. 1. P. 1–62.
5. Böner F, Pöschel F.R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
6. *Bredikhin D.A.* On varieties of semi-groups of relations with operations of cylindrofication // Contributions to General Algebra. 2005.
7. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. математика. 1993. № 3. С. 23–30.
8. *Бредихин Д.А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. Мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
9. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
10. *Andreka H., Bredikhin D.A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. Vol. 33. P. 12–25.

УДК 517.984

С.А. Бутерин

О КОНСТРУКТИВНОМ РЕШЕНИИ НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ — спектр краевой задачи Штурма—Лиувилля $L = L(q(x), h, H)$:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $q(x) \in L(0, \pi)$ — комплекснозначная функция, а h, H — комплексные числа.

В статье исследуется одна неполная обратная спектральная задача для L . Обратные задачи заключаются в восстановлении операторов по некоторым их спектральным характеристикам [1]. Известно, что коэффициенты L однозначно восстанавливаются по функции Вейля, что равносильно, например, заданию спектров двух краевых задач для уравнения (1) с одним общим краевым условием. В неполных обратных задачах требуется восстановить оператор по части спектральных данных при наличии о нем априорной информации. Рассмотрим следующую неполную обратную задачу.

Задача 1. По спектру $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ найти потенциал $q(x)$ на интервале $(\pi/2, \pi)$ и коэффициент H в предположении, что $q(x)$ на $(0, \pi/2)$ и h известны априори.

Различные аспекты задачи 1 в самосопряженном случае исследовались в [2, 3] и других работах (см. список лит-ры в [3]). В частности, известна теорема единственности. В [3] получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи 1 в классе вещественных потенциалов из $W_2^{-1}[0, \pi]$, причем доказательство конструктивно и основано на методе оператора преобразования. В настоящей статье получен алгоритм решения задачи 1, использующий интерполяцию, и параллельно доказана следующая теорема единственности для несамосопряженного случая.

Теорема 1. Задание спектра $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ однозначно определяет коэффициенты L в предположении, что $q(x)$ на $(0, \pi/2)$ и h известны априори.

2. Пусть функции $S(x, \lambda)$, $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$, $\Phi(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) при условиях

$$S'(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) = \psi(\pi, \lambda) = U(\Phi) = 1,$$

$$S(0, \lambda) = U(\varphi) = V(\psi) = V(\Phi) = 0.$$

Собственные значения λ_n , $n \geq 0$, краевой задачи (1), (2) совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\lambda) := \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle$, где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$. Очевидно, что $\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi)$. Кроме того, известно (см., напр., [1]), что функция $\Delta(\lambda)$ определяется своими нулями однозначно по формуле

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda_0 - \lambda) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \quad (3)$$

Функции $\Phi(x, \lambda)$ и $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$ называются *решением Вейля* и *функцией Вейля* для L соответственно. Имеем

$$\Phi(x, \lambda) = S(x, \lambda) + M(\lambda)\varphi(x, \lambda) = -\frac{\psi(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad M(\lambda) = -\frac{\Delta^0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (4)$$

где $\Delta^0(\lambda) = \psi(0, \lambda)$ — характеристическая функция краевой задачи для уравнения (1) с краевыми условиями $y(0) = V(y) = 0$. Пусть $\{\lambda_n^0\}_{n \geq 0}$ — спектр последней. Очевидно, что $\{\lambda_n\}_{n \geq 0} \cap \{\lambda_n^0\}_{n \geq 0} = \emptyset$. При $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика (см., напр., [1])

$$\lambda_n = n^2 + \omega + o(1), \quad \lambda_n^0 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^0 + o(1), \quad \omega, \omega^0 - \text{const.}$$

Формулы (4) дают

$$\psi(x, \lambda) = \Delta^0(\lambda)\varphi(x, \lambda) - \Delta(\lambda)S(x, \lambda). \quad (5)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\Delta_1(\lambda) &:= -\psi'(\pi/2, \lambda), \quad \Delta_1^0(\lambda) := \psi(\pi/2, \lambda), \\ \Theta(\lambda) &:= \varphi(\pi/2, \lambda), \quad \Xi(\lambda) := \varphi'(\pi/2, \lambda).\end{aligned}\quad (6)$$

Заметим, что $\Delta_1(\lambda)$ — характеристическая функция краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \pi/2 < x < \pi, \quad y'(\pi/2) = V(y) = 0, \quad (7)$$

а функция

$$M_1(\lambda) := -\frac{\Delta_1^0(\lambda)}{\Delta_1(\lambda)} \quad (8)$$

является функцией Вейля для (7). Функции $\Xi(\lambda)$ и $\Theta(\lambda)$, в свою очередь, являются характеристическими функциями краевых задач для уравнения (1) на интервале $(0, \pi/2)$ с краевыми условиями Неймана и Дирихле в точке $\pi/2$ и общим краевым условием $U(y) = 0$ в точке 0 соответственно. Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ и $\{\theta_n\}_{n \geq 0}$ — последовательности нулей функций $\Xi(\lambda)$ и $\Theta(\lambda)$ соответственно, тогда

$$\xi_n = (2n)^2 + \omega_1 + o(1), \quad \theta_n = (2n+1)^2 + \omega_1^0 + o(1). \quad (9)$$

Пусть m_n и m_n^0 — кратности нулей ξ_n и θ_n соответственно ($\xi_n = \xi_{n+1} = \dots = \xi_{n+m_n-1}$, $\theta_n = \theta_{n+1} = \dots = \theta_{n+m_n^0-1}$). Положим

$$\mathbb{S} := \{n : n \in \mathbb{N}, \xi_{n-1} \neq \xi_n\} \cup \{0\}, \quad \mathbb{S}_0 := \{n : n \in \mathbb{N}, \theta_{n-1} \neq \theta_n\} \cup \{0\}.$$

Далее, согласно (5) будем иметь

$$\left. \begin{aligned}\Delta_1^0(\lambda) &= \Delta^0(\lambda)\Theta(\lambda) - \Delta(\lambda)S(\pi/2, \lambda), \\ -\Delta_1(\lambda) &= \Delta^0(\lambda)\Xi(\lambda) - \Delta(\lambda)S'(\pi/2, \lambda).\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Согласно асимптотике функций $\psi(x, \lambda)$, $\psi'(x, \lambda)$ [1] при $|\lambda| \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\left. \begin{aligned}d(\lambda) &:= \Delta_1(\lambda) + \rho \sin \frac{\rho\pi}{2} = O\left(\exp\left(\frac{|Im\rho|\pi}{2}\right)\right), \\ d_0(\lambda) &:= \Delta_1^0(\lambda) - \cos \frac{\rho\pi}{2} = O\left(\frac{1}{\rho} \exp\left(\frac{|Im\rho|\pi}{2}\right)\right),\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где $\rho^2 = \lambda$. Кроме того, при достаточно больших $|\lambda|$ справедливы оценки

$$|\Theta(\lambda)| \geq C_\delta \exp\left(\frac{|Im\rho|\pi}{2}\right), \quad \lambda \in G_\delta^1, \quad |\Xi(\lambda)| \geq C_\delta |\rho| \exp\left(\frac{|Im\rho|\pi}{2}\right), \quad \lambda \in G_\delta^0, \quad (12)$$

где $G_\delta^a = \{\lambda = \rho^2 : |\rho - 2n - a| \geq \delta, n \in \mathbb{Z}\}$.

Следующее утверждение следует из теоремы об интерполяции целых функций [4], а также может быть доказано непосредственно, исходя из (9), (11), (12).

Лемма 1. *Задание чисел*

$$\{d^{(\nu)}(\xi_n)\}_{\nu=\overline{0,m_n-1}, n \in \mathbb{S}}, \quad \{d_0^{(\nu)}(\theta_n)\}_{\nu=\overline{0,m_n^0-1}, n \in \mathbb{S}_0} \quad (13)$$

однозначно определяет функции $\Delta_1(\lambda)$, $\Delta_1^0(\lambda)$. При этом

$$\Delta_1(\lambda) = -\rho \sin \frac{\rho\pi}{2} + d(\lambda), \quad \Delta_1^0(\lambda) = \cos \frac{\rho\pi}{2} + d_0(\lambda), \quad (14)$$

тогда

$$d(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} d(\theta_n) \frac{\Xi(\lambda)}{(\lambda - \xi_n) \Xi'(\xi_n)}, \quad d_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} d_0(\theta_n) \frac{\Theta(\lambda)}{(\lambda - \theta_n) \Theta'(\theta_n)}, \quad (15)$$

если все нули функций $\Theta(\lambda)$, $\Xi(\lambda)$ простые, то есть $m_n = m_n^0 = 1$ для всех n (случай кратных нулей внесет незначительные изменения).

Приходим к следующему алгоритму решения задачи 1 и утверждению теоремы 1.

Алгоритм 1. Пусть задан спектр $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, число h и функция $q(x)$ на $(0, \pi/2)$.

- 1) вычисляем функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле (3);
- 2) строим функции $\Theta(\lambda)$, $\Xi(\lambda)$ по формулам (6) и находим их нули θ_n , ξ_n , $n \geq 0$;
- 3) находим числа (13) с помощью формул (10), (11);
- 4) строим функции $\Delta_1(\lambda)$, $\Delta_1^0(\lambda)$ по формулам (14), (15);
- 5) вычисляем функцию Вейля $M_1(\lambda)$ краевой задачи (7) по формуле (8) и находим функцию $q(x)$ на $(\pi/2, \pi)$ и коэффициент H , используя алгоритм 1 из [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а), гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1) и гранта Национального исследовательского фонда Катара (проект NPRP 08-345-1-067).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
2. Hochschildt H., Liebermann B. An inverse Sturm — Liouville problem with mixed given data // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34. P. 676–680.
3. Hrynniv R.O., Mykytyuk Y.V. Half-inverse spectral problems for Sturm — Liouville operators with singular potentials // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 1423–1444.

4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956.

5. Buterin S.A. On inverse spectral problem for non-selfadjoint Sturm — Liouville operator on a finite interval // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 335, iss. 1. P. 739–749.

УДК 517.518.82

И.Ю. Выгодчикова

**НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ
АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ
ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ**

Рассматривается дискретная задача наилучшего равномерного приближения сегментной функции алгебраическим полиномом при наличии ограничений на значения полинома сверху и снизу. Получен критерий оптимальности в форме, сравнимой с известным в теории приближений альтернансом П.Л. Чебышева.

1. Постановка задачи. Пусть n, N – целые числа, $n \geq 0$, $N \geq n + 1$, $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$, $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$. На сетке T заданы сегментные функции $\Phi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$: $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $\Psi(t_k) = [\nu_{1,k}; \nu_{2,k}]$, $\nu_{2,k} \geq \nu_{1,k}$, $k = \overline{0, N}$. Обозначим через $f(A, t_k) = \max\{p_n(A, t_k) - y_{1,k}, y_{2,k} - p_n(A, t_k)\}$, $g(A, t_k) = \max\{\nu_{1,k} - p_n(A, t_k), p_n(A, t_k) - \nu_{2,k}\}$, $h(A) = \max_{k=\overline{0, N}} g(A, t_k)$.

Рассмотрим задачу:

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0, N}} f(A, t_k) \longrightarrow \min_{A \in D = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : h(A) \leq 0\}} . \quad (1)$$

2. Существование решения. Обозначим

$$\rho^{**} = \min_{A \in D} \rho(A), \quad \Re(\nu) = \{A \in D : \rho(A) = \rho^{**}\}.$$

Рассмотрим задачу о псевдовнутренней оценке [1]:

$$\delta(A) := \min_{k=\overline{0, N}} \min\{p_n(A, t_k) - \nu_{1,k}; \nu_{2,k} - p_n(A, t_k)\} \longrightarrow \max_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} . \quad (2)$$

Обозначим множество решений задачи (2) через

$$\Omega = \{A \in R^{n+1} : \delta(A) = \delta^*\},$$

где $\delta^* = \max_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \delta(A)$.

Теорема 1. $\delta^* \geq 0 \iff D \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $A^* \in \Omega$. Неравенство $\delta(A^*) \geq 0$ можно записать в виде $p_n(A^*, t_k) - \nu_{1,k} \geq 0, \nu_{2,k} - p_n(A^*, t_k) \geq 0, \forall k = \overline{0, N}$. Последнее означает, что $A^* \in D$.

Для задачи без ограничений (см., напр., [2]):

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0, N}} f(A, t_k) \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}, \quad (3)$$

положим $\rho^* = \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \rho(A)$, $\mathfrak{R} = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\}$.

Следствием из [1, 3] является

Теорема 2. Для того чтобы $|D| = 1$, необходимо и достаточно, чтобы задача (2) имела единственное решение и $\delta^* = 0$.

Далее считаем, что $|D| > 1$.

3. Критерий решения. Обозначим через $\partial z(A)$ субдифференциал функции $z(A)$. Следствием из [3, с. 258] является

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{R} \cap D = \emptyset$. Для того чтобы вектор A^* был решением задачи (1), необходимо выполнение включения:

$$0_{n+1} \subset co \{\partial \rho(A^*), \partial h(A^*)\}.$$

Приведем вспомогательный факт из [2, 4].

Определим на подмножестве TT сетки T многозначное отображение $\xi(\cdot) : TT \Rightarrow 2^{\mathbb{R}}$, образами которого являются некоторые подмножества $\xi(t)$ из \mathbb{R} .

Лемма 2. Для того чтобы

$$0_{n+1} \in co \{\xi(t)(1, t, \dots, t^n) : t \in TT\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

1) существует точка $t_l \in T$, в которой $0 \in \xi(t_l)$;

2) существует селектор $\eta(t) \in \xi(t)$ и набор упорядоченных чисел $t_{j_1} < t_{j_2} < \dots < t_{j_{n+2}}$ из множества TT таких, что $\eta(t_{j_i}) \neq 0$ и $sign \eta(t_{j_i}) = -sign \eta(t_{j_{i+1}})$, $i = \overline{1, n+1}$.

Определим следующие подмножества сетки T :

$$R_1^\rho(A) := \{t_k \in T : \rho(A) = p_n(A, t_k) - y_{1,k} > y_{2,k} - p_n(A, t_k)\},$$

$$R_2^\rho(A) := \{t_k \in T : \rho(A) = p_n(A, t_k) - y_{1,k} < y_{2,k} - p_n(A, t_k)\},$$

$$R_1^h(A) := \{t_k \in T : h(A) = p_n(A, t_k) - \nu_{1,k} > \nu_{2,k} - p_n(A, t_k)\},$$

$$R_2^h(A) := \{t_k \in T : h(A) = p_n(A, t_k) - \nu_{2,k} < \nu_{1,k} - p_n(A, t_k)\},$$

$$RR(A) = R_1^\rho(A) \cup R_2^\rho(A),$$

$$R_3^\rho(A) := \{t_k \in T : \rho(A) = p_n(A, t_k) - y_{1,k} = y_{2,k} - p_n(A, t_k)\},$$

$$R_3^h(A) := \{t_k \in T : h(A) = p_n(A, t_k) - \nu_{2,k} = \nu_{1,k} - p_n(A, t_k)\}.$$

Обозначим через

$$R_1(A) = R_2^h(A) \cup R_1^\rho(A),$$

$$R_2(A) = R_1^h(A) \cup R_2^\rho(A).$$

Теорема 3. Критерий решения задачи (1). Пусть $|D| > 1$. Вектор A^* является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда либо $A^* \in \mathfrak{R} \cap D$, либо

$$h(A^*) = 0 \quad (4)$$

и выполняется хотя бы одно из условий:

- (I) $R_3^h(A^*) \neq \emptyset$, $RR(A^*) \cap R_3^h(A^*) \neq \emptyset$,
- (II) $\exists n+2$ точки $\{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$ такие, что если $t_k \in R_1(A^*) (R_2(A^*))$, то $t_{k+1} \in R_2(A^*) (R_1(A^*))$ для $k = \overline{0, n+1}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R} \cap D = \emptyset$, $A^* \in \mathfrak{R}(\nu)$. Тогда выполняется (4). В соответствии с субдифференциальным исчислением имеем

$$\partial_A f(A^*, t) = \begin{cases} (1, t, \dots, t^n), & \text{если } t \in R_1^\rho(A^*), \\ -(1, t, \dots, t^n), & \text{если } t \in R_2^\rho(A^*). \end{cases} \quad (5)$$

$$\partial_A g(A^*, t) = \begin{cases} (1, t, \dots, t^n), & \text{если } t \in R_2^h(A^*), \\ -(1, t, \dots, t^n), & \text{если } t \in R_1^h(A^*), \\ [-1, 1](1, t, \dots, t^n), & \text{если } t \in R_3^h(A^*). \end{cases} \quad (6)$$

Теперь утверждение необходимости теоремы вытекает из лемм 1, 2 и формул (5), (6). Достаточность получается из свойств полинома и рассуждений, аналогичных [1].

Из теоремы 3 и [3] вытекает

Теорема 4. Критерий единственности решения задачи (1).

При $\mathfrak{R} \cap D = \emptyset$ для единственности решения задачи (1) необходимо и достаточно выполнения либо условия (II) теоремы 3, либо условия (I) при наличии во множестве $R_3^h(A^*)$ не менее чем $(n+1)$ точек.

Пример 1. Пусть $T = \{0 < 1 < 2 < 3\}$, $\Phi(0) = [1; 2]$, $\Phi(1) = [1; 1]$, $\Phi(2) = [2; 3]$, $\Phi(3) = [0; 0]$, $\Psi(0) = [0; 5]$, $\Psi(1) = [1; 5]$, $\Psi(2) = [0; 5]$,

$\Psi(3) = [0; 5]$, $n = 1$, $\nu = 1$. Решение задачи (1): $p_1(t) = 2/3 + 1/3t$. Решением безусловной задачи является полином $p_1(t) = 7/3 - 1/3t$.

Пример 2. Изменим условие предыдущего примера, лишь положив $\Psi(0) = [5; 5]$. Задача (1) имеет бесконечно много решений $p_1(t) = 5 + \alpha t$, $\alpha \in [-2; -1/3]$, $t_s = 0$. При этом заметим, что, например, для полинома $p_1(t) \equiv 5$ выполняется условие $R_3^h(A^*) \neq \emptyset$, но решением задачи он не является.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Выгодчикова И.Ю. О сведении задачи о псевдовнутренней оценке многозначного отображения полиномом к задаче о внешней оценке // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронеж. Зимней мат. шк. Воронеж, 2005. С. 62–63.
2. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М., 1990.
3. Выгодчикова И.Ю. О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2006. Т. 6. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 11–19.
4. Дудов С.И. О двух вспомогательных фактах для исследования задач полиномиального приближения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2007. Вып. 9. С. 22–26.

УДК 514.764

С.В. Галаев, А.В. Гохман

ВНУТРЕННИЕ НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗНОСТИ, СОВМЕСТИМЫЕ С ДОПУСТИМОЙ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

В статье находятся необходимые и достаточные условия существования внутренних неголономных связностей, совместимых с допустимой почти симплектической структурой.

Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, заданное вместе со своим оснащением D^\perp , на гладком многообразии X размерности n и класса C^∞ . Следуя В.В. Вагнеру, такое распределение будем называть *неголономным многообразием размерности $n-1$ и коразмерности 1*. Заметим, что с некоторыми уточнениями излагаемые в настоящей статье результаты можно обобщить на неголономные многообразия произвольной коразмерности. С точки зрения механики неголономное многообразие интерпретирует линейные неголономные связи, накладываемые на механическую систему [1].

Развивая геометрию неголономных многообразий, В.В. Вагнер вводит понятие внутренней геометрии неголономного многообразия как совокупности тех свойств объектов, заданных в неголономном многообразии, которые зависят только от самого неголономного многообразия и от его оснащения [2]. Параллельный перенос внутри неголономного многообразия осуществляется с помощью связности ∇ , которую, следуя терминологии В.В. Вагнера, уместно называть *внутренней*. Таким образом, под внутренней аффинной связностью понимается отображение

$$\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \rightarrow \Gamma D,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 \vec{u}_1 + f_2 \vec{u}_2} = f_1 \nabla_{\vec{u}_1} + f_2 \nabla_{\vec{u}_2}$;
- 2) $\nabla_{\vec{u}} f \vec{v} = f \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} f) \vec{v}$.

Внутреннюю связность следует отличать от так называемой *усечённой связности*. Под последней разные авторы понимают разные способы задания параллельного переноса. Помимо усечённой и внутренней связностей в ряде работ рассматриваются связности, осуществляющие параллельный перенос векторов, лежащих в распределении вдоль произвольных кривых многообразия X . Такие связности называются *связностями в векторном расслоении, определяемом неголономным многообразием*. Так, в частности, определяя кривизну внутренней связности ∇ , В.В. Вагнер специальным образом строит связность в распределении D как в векторном расслоении.

Наряду с внутренней связностью, В.В. Вагнер рассматривает структуры, задаваемые в неголономном многообразии как сечения векторных расслоений вида

$$D \otimes \cdots \otimes D \otimes D^* \otimes \cdots \otimes D^*,$$

где D^* — сопряжённое к D распределение.

Такие структуры будем называть *внутренними тензорными структурами*. В частности, В.В. Вагнером рассматривается риманова допустимая структура, совместимая с внутренней связностью:

$$\nabla g = 0.$$

Наличие оснащения D^\perp позволяет перейти от внутренней тензорной структуры к соответствующей допустимой тензорной структуре. Именно, всякое внутреннее векторное поле будем называть *одновременно допустимым векторным полем*. Всякой внутренней 1-форме λ поставим в соответствие допустимую 1-форму $\tilde{\lambda}$, полагая

$$\tilde{\lambda}|_D = \lambda, \quad \tilde{\lambda}|_{D^\perp} = 0.$$

Рассуждая по аналогии, каждой внутренней тензорной структуре типа (p, q) при необходимости мы можем поставить в соответствие допустимую тензорную структуру типа (p, q) и обратно.

Рассмотрим допустимую почти симплектическую структуру, т.е. внешнюю, вообще говоря, не замкнутую 2-форму ω , такую что:

- 1) $\text{rk } \omega = n - 1$;
- 2) $\omega|_{D^\perp} = 0$.

Важный пример такой структуры даёт контактная структура.

В работе [3] В.В. Вагнер строит систему дифференциальных инвариантов допустимой метрической формы g , используя внутреннюю связность, совместимую с g . Результаты, полученные В.В. Вагнером, аналогичны соответствующим результатам в голономном случае. Мы ставим перед собой задачу нахождения внутренних связностей, совместимых с допустимой почти симплектической структурой. В голономном случае подобная задача решалась многими авторами (см. [4 — 6]). Классический результат сводится к тому, что существование связности с нулевым кручением, совместимой с почти симплектической структурой ω , эквивалентно замкнутости ω .

Как показывает приводимый ниже пример, в случае неголономного многообразия не интегрируемая симплектическая структура может допускать внутреннюю связность с нулевым кручением.

Пусть X — гладкое многообразие, определяемое условием

$$X = \left\{ \left(x^1, x^2, x^3 \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \neq 0, x^3 \neq 0 \right\}.$$

Распределение D такое, что $D = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, не интегрируемо и может быть снабжено допустимой симплектической структурой $\omega = x^3 dx^1 \wedge dx^2$.

С одной стороны, $d\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \neq 0$, с другой стороны, $\nabla\omega = 0$, где $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \frac{b_3}{x^3}$, $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = -\frac{x^2}{2x^3} - \frac{b_2}{x^3}$, а b_2 , b_3 — произвольные функции, заданные на многообразии X .

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Допустимая симплектическая структура ω совместима с внутренней связностью ∇ нулевого кручения тогда и только тогда, когда*

$$(d\omega)|_D = 0.$$

Доказательство. Необходимое условие доказано в [7]. Для доказательства достаточности воспользуемся приемом, используемым в работе [6]. Определим в неголономном многообразии D внутреннюю связность ∇ , задавая в специальных координатах [7, 8] ее коэффициенты с помощью равенств

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{3}\omega^{ad}\left(\vec{e}_c\omega_{db} - \vec{e}_b\omega_{cd} + \gamma_{bcd}\right),$$

где γ_{bcd} – объект, симметричный по любой паре индексов и изменяющийся при преобразовании координат таким образом, чтобы функции Γ_{bc}^a определяли объект связности.

Очевидно, что полученная связность симметрична. С помощью очевидных вычислений можно убедиться в том, что она совместима с формой ω тогда и только тогда, когда $(d\omega)|_D = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вершик А.М., Фаддеев Л.Д. Дифференциальная геометрия и лагранжева механика со связями // ДАН СССР. 1972. Т. 202. № 3. С. 555–557.
2. Вагнер В.В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. VIII Междунар. конкурс на соискание премии им. Н.И. Лобачевского (1937). Отчёт. Казань: Казан. физ.-мат. общ-во, 1940. 327 с.
3. Вагнер В.В. Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
4. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1995. 448 с.
5. Левин Ю.И. Об аффинных связностях, присоединённых к кососимметрическому тензору // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 4. С. 668–671.
6. Лемлейн В.Г. Тензор кривизны и некоторые типы пространств симметричной почти симплектической связности // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 4. С. 655–658.
7. Галаев С.В., Гохман А.В. Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 28–31.
8. Галаев С.В., Гохман А.В. Неголономные почти симплектические многообразия с присоединённой связностью // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 31–33.

Е.В. Гудошникова

**ПОРЯДОК ПРИБЛИЖЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ
КЛАССОМ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ**

Данная статья является продолжением работ [1, 2], в которых рассматривалась последовательность операторов

$$L_n(f; x) = \frac{1}{g(z(x))^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \alpha_{k,n} \left[\frac{z(x)}{\psi(z(x))} \right]^k,$$

где $g(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические в круге $|z| < a$, принимающие положительные значения на $[0; a]$, такие что на $[0; a]$ $x\psi'(x) < \psi(x)$ и числа

$$\alpha_{0,n} = g(0)^n \text{ и } \alpha_{k,n} = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(g(z)^n)' \psi(z)^k \right]_{z=0}, \quad k = \overline{1, \infty},$$

неотрицательны, а $z(x)$ – функция, обратная к функции

$$x(z) = \frac{z\psi(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

В работе [1] было показано, что $x(z)$ монотонна на $[0; a]$, $x'(z) > 0$, и $x'(z) > 0$.

Обозначим $v(x) = \frac{xg(x)}{z'(x)g'(x)}$.

В работе [2] была доказана теорема, несложное уточнение которой может быть сформулировано следующим образом

Теорема 1.

Для $f \in C[0; x(a)]$ $|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right)$.

Для $f \in C^1[0; x(a)]$ $|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2\sqrt{\frac{v(x)}{n}} \cdot \omega\left(f'; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right)$.

Для $f \in C^2[0; x(a)]$ $|L_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{v(x)}{2n} \left[\omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right) + \|f''\| \right]$
 и $|L_n(f; x) - f(x) - \frac{v(x)}{2n}| \leq \frac{v(x)}{n} \cdot \omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right)$.

Из теоремы 1 видно, что порядок приближения операторами L_n улучшается при переходе от класса непрерывных функций к дифференцируемым и от дифференцируемых к дважды дифференцируемым, но не дальше, и порядок приближения r раз дифференцируемых функций при $r \geq 2$ есть $1/n$.

Следуя идее Бернштейна, рассмотрим последовательность операторов

$$M_n(f; x) = L_n(f; x) - \frac{1}{2}L_n((t-x)^2; x)L_n(f''; x).$$

Теорема 2. Для $f \in C^2[0; x(a)]$

$$|M_n(f; x) - f(x)| \leq 2 \frac{v(x)}{n} \omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right).$$

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + R_n(x, t), \quad (1)$$

где $R_n(x, t) = \frac{1}{2}[f''(\xi) - f''(x)](t-x)^2$, ξ – точка между x и t .

Применим к равенству (1) оператор L_n :

$$\begin{aligned} L_n(f(t); x) &= f(x)L_n(1; x) + f'(x)L_n((t-x); x) + \frac{1}{2}f''(x)L_n((t-x)^2; x) + \\ &\quad + L_n(R_n(x, t); x). \end{aligned}$$

Как было показано в работе [2],

$$\begin{aligned} L_n(1; x) &= 1, \quad L_n(t-x; x) = 0, \quad L_n((t-x)^2; x) = \frac{v(x)}{n} \Rightarrow \\ \Rightarrow L_n((f(t); x)) &= f(x) + \frac{1}{2}f''(x)\frac{v(x)}{n} + L_n(R_n(x, t); x) \Rightarrow \\ \Rightarrow M_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{2}[f''(x) - L_n(f''(t); x)]\frac{v(x)}{n} + L_n(R_n(t, x); x). \end{aligned}$$

Во-первых, по теореме 1

$$|L_n(f''; x) - f''(x)| \leq 2\omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right).$$

Во-вторых, для любого $\delta > 0$

$$|f''(\xi) - f''(x)| \leq \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \omega(f''; \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_n(R_n(t, x); x) \leq \frac{1}{2} \omega(f''; \delta) \left[L_n((t-x)^2; x) + \frac{1}{\delta^2} L_n((t-x)^4; x) \right].$$

Нетрудно получить, что $L_n((t-x)^4; x) = \frac{v(x)v'^2(x) + v^2(x)v''(x)}{n^3}$, поэтому, взяв $\delta = \frac{v(x)}{n}$, получаем

$$L_n(R_n(t, x); x) \leq \frac{1}{2} \omega \left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}} \right) \frac{v(x)}{n} \left[1 + \frac{v'^2(x)}{v(x)n} + \frac{v''(x)}{n} \right].$$

Следовательно,

$$|M_n(f; x) - f(x)| \leq 2 \frac{v(x)}{n} \omega \left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}} \right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гудошникова Е.В. Конструкция линейных положительных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 20–22.
2. Гудошникова Е.В. Конструкции ЛПО и их аппроксимативные свойства // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 18–20.

УДК 517.927.25

А.П. Гуревич

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В спектральной теории линейных дифференциальных и интегральных операторов важную роль играет существование у рассматриваемых уравнений линейно независимой системы решений, которая имеет асимптотику по спектральному параметру, такую что ее главный член совпадает с решением некоторого канонического уравнения и при этом имеет простое представление. Использование асимптотических представлений решений позволяет получить информацию о расположении спектра оператора, изучить поведение его резольвенты, сделать вывод о свойствах ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям [1]. В случае, когда собственные значения оператора находятся в полосе, содержащей вещественную

ось, например, при рассмотрении дифференциального оператора с распадающимися краевыми условиями [2], полезно знать фундаментальную систему решений уравнения, которая имеет асимптотику не на отрезке прямой, а в некотором выпуклом многоугольнике. В данной статье для случая дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами доказано существование фундаментальной системы решений, которая является обобщением результатов из [1].

Пусть \overline{Q}_m – замкнутый выпуклый m -угольник, \overline{P} – полуполоса в комплексной плоскости $\{\rho \mid \operatorname{Re} \rho \geq \rho_0 > 0; |\operatorname{Im} \rho| \leq h\}$, где ρ_0, h – фиксированные положительные числа. Обозначим через S множество функций $f(z)$, непрерывных в \overline{Q}_m и аналитических в Q_m , $\{A_k\}_{k=1}^m$ – вершины многоугольника \overline{P} .

Теорема 1. *Пусть дана система интегральных уравнений*

$$\vartheta_\nu(z, \rho) = a_\nu + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \int_{A(j)}^z Q_{kj}(z, \xi, \rho) \vartheta_k(\xi, \rho) d\xi, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $a_\nu = \text{const}$, $A(j)$ – вершины \overline{Q}_m (не обязательно различные), функции $Q_{kj}(z, \xi, \rho)$ как функции z или ξ принадлежат S , а при фиксированных z и ξ являются аналитическими в P и непрерывными в \overline{P} , причем $Q_{kj}(z, \xi, \rho) = O(\frac{1}{\rho})$ равномерно по z, ξ при $z \in \overline{Q}_m, \xi \in [A(j), z]$, где $[A(j), z]$ – отрезок прямой, соединяющий точки $A(j)$ и z . Тогда при достаточно большом R_0 и $|\rho| > R_0$, $\rho \in \overline{P}$, система (1) имеет единственное решение $\{\vartheta_\nu(z, \rho)\}_{\nu=1}^n$, причем $\vartheta_\nu(z, \rho)$ как функции z принадлежат S и являются аналитическими функциями по ρ при $|\rho| > R_0$ и $\rho \in P$ и непрерывными при $\rho \in \overline{P}$ ($|\rho| > R_0$), при этом справедливы асимптотические представления

$$\vartheta_\nu(z, \rho) = a_\nu + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$U^{(n)} + p_2(z)U^{(n-2)} + \dots + p_n(z)U + \rho^n U = 0, \quad (3)$$

где $p_k(z)$ ($k = 2, 3, \dots, n$) – заданные функции, принадлежащие множеству S .

Теорема 2. *Уравнение (3) имеет фундаментальную систему решений $\{U_k(z, \rho)\}_{k=1}^n$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) при фиксированном $\rho \in \overline{P}$ и $|\rho|$ достаточно большом $U_k(z, \rho) \in \overline{Q}_m$;

- 2) при фиксированном $z \in \overline{Q}_m$ функции $U_k(z, \rho)$ аналитичны в P и непрерывны в \overline{P} при $|\rho|$ достаточно большом;
- 3) справедливы асимптотические представления

$$U_k^{(j)}(z, \rho) = (\rho \omega_k)^j (\exp \rho \omega_k z) \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (4)$$

Доказательство. Применяя метод вариации произвольных постоянных, приходим к выводу, что уравнение (3) равносильно следующему интегральному уравнению:

$$U = \sum_{j=1}^n C_j(\rho) e^{\rho \omega_j z} + \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{n \rho^{n-1}} \int_{A_j}^Z e^{\rho \omega_j (z-\xi)} m(u) d\xi, \quad (5)$$

где в качестве нижних пределов интегрирования можно взять произвольные точки многоугольника \overline{Q}_m , а интегрирование ведется по прямолинейным отрезкам, соединяющим точки A_j и z ; $m(U) = \sum_{k=2}^n p_k(z) U^{(n-k)}$.

Изучим решение уравнения (5) при $C_j = 0, j \neq k; C_k = 1$, где k – фиксированное натуральное число, не превосходящее n . Обозначим решение этого уравнения через $U_k(z, \rho)$.

Имеем

$$U_k = e^{\rho \omega_k z} + \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{n \rho^{n-1}} \int_{A_j(k)}^z e^{\rho \omega_j (z-\xi)} m(U_k) d\xi. \quad (6)$$

Убедимся, что точки $A_j(k)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) можно выбрать так, что при $z \in \overline{Q}_m$ и ξ изменяющейся на отрезке $[A_j(k), z]$ выполняются неравенства: $\operatorname{Re} \omega_j(z - \xi) \leq \operatorname{Re} \omega_k(z - \xi)$, то есть

$$\operatorname{Re}(\omega_j - \omega_k)(z - \xi) \leq 0. \quad (7)$$

Пусть сектор, образуемый сторонами многоугольника \overline{Q}_m , исходящими из вершины A_s , определяется условием $\alpha_s \leq \arg(z - A_s) \leq \beta_s$, $s = 1, 2, \dots, n$. Тогда если в качестве нижнего предела интегрирования взять A_s , то неравенство (7) будет выполняться для тех значений j , для которых имеет место $\frac{\pi}{2} - \alpha_j \leq \arg(\omega_j - \omega_k) \leq \frac{3\pi}{2} - \beta_j$.

Рассмотрим сектор D_s , определяемый условием $\frac{\pi}{2} - \alpha_s \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \beta_s$. Докажем, что $\bigcup_{s=1}^m D_s$ совпадает со всей плоскостью. С этой целью преобразуем последнее неравенство к виду $\beta_s - \pi \leq \frac{\pi}{2} - \arg z \leq \alpha_s$.

Остается заметить, что объединение получившихся секторов совпадает со всей плоскостью.

Будем в дальнейшем считать, что точки $A_j(k)$ в уравнении (6) выбраны так, что на отрезках интегрирования выполняются неравенства (7). Но тогда при $\rho \in \overline{P}$ справедливы оценки $\operatorname{Re} \rho(\omega_j - \omega_k)(z - \xi) = O(1)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Для получения асимптотических формул (4) остается свести уравнение (6) к системе интегральных уравнений (см. [1, с. 58]) и воспользоваться теоремой 1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. Хромов А.П. Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. 1966. Т. 70(112), № 3. С. 310–329.

УДК 519.583.3

С.И. Дудов, Е.А. Мещерякова

ОБ АСФЕРИЧНОСТИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

1. Задачей об асферичности выпуклого компакта D из конечномерного пространства \mathbb{R}^p с непустой внутренностью: $\operatorname{int} D \neq \emptyset$ называют

$$\varphi(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \longrightarrow \min_{x \in D}, \quad (1)$$

где функции

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y), \quad \rho(x) = \min_{y \in \Omega} n(x - y)$$

выражают соответственно расстояния от точки x до самой удаленной точки компакта D и самой близкой точки множества $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$ в заданной норме $n(\cdot)$. Функция $R(x)$ является выпуклой на \mathbb{R}^p , а $\rho(x)$ — вогнутой на D , известны соответствующие формулы субдифференциала $\underline{\partial} R(x)$ и супердифференциала $\overline{\partial} \rho(x)$ этих функций [1, 2]. Показатель асферичности $\varphi^* = \min\{\varphi(x) : x \in D\}$ используется (обычно для случая евклидовой нормы) при описании свойств выпуклого тела и построении методов его приближения, в частности, при полиэдральной аппроксимации (см., напр., [3]). Однако авторам не удалось обнаружить какие-либо результаты по исследованию задачи (1). В данной статье получен критерий решения задачи (1), а также приводится достаточное условие единственности решения.

2. Приведем несколько вспомогательных фактов, которые далее в п. 3 будут использованы при доказательстве основных результатов.

Лемма 1 [2]. *Функции $R(x)$ и $\rho(x)$ являются глобально липшицевыми на \mathbb{R}^p , причем для любых x_1 и x_2 из \mathbb{R}^p выполняются неравенства*

$$|R(x_1) - R(x_2)| \leq n(x_1 - x_2), \quad (2)$$

$$|\rho(x_1) - \rho(x_2)| \leq n(x_1 - x_2). \quad (3)$$

Функция $R(x)$, являясь выпуклой и конечной на \mathbb{R}^p , дифференцируема по всем направлениям в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$. Поэтому из (2) вытекает

Следствие. *Для любого направления $g \in \mathbb{R}^p$ справедливо неравенство*

$$R'(x, g) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [R(x + \alpha g) - R(x)] \leq n(g), \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

Лемма 2 [2]. *Если D – строгое выпуклое множество и точки $x_1, x_2 \in D$ удовлетворяют неравенству*

$$\rho(x_1) \leq \rho(x_2) < \rho(x_1) + n(x_1 - x_2),$$

то для любого $\alpha \in (0, 1)$ выполняется строгое неравенство

$$\rho(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha\rho(x_1) + (1 - \alpha)\rho(x_2).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$f(x, \beta) \equiv R(x) - \beta\rho(x) \longrightarrow \min_{x \in D} \quad (4)$$

при некотором фиксированном значении $\beta > 0$.

Лемма 3. *Для того чтобы точка x^* была решением задачи (4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$[\partial R(x^*) - \beta \overline{\partial \rho}(x^*)] \bigcap K^+(x^*, D) \neq \emptyset, \quad (5)$$

где $K^+(x^*, D)$ – сопряженный конус к конусу возможных направлений множества D в точке x^* .

Доказательство. Поскольку функция $R(x)$ выпукла, а $\rho(x)$ – вогнута на D , то функция $f(x, \beta)$ выпукла по x на D . Поэтому, как известно [1], критерием того, что точка $x^* \in D$ будет решением задачи (4), является выполнение в ней соотношения

$$\partial_x f(x^*, \beta) \bigcap K^+(x^*, D) \neq \emptyset,$$

где $\partial_x f(x^*, \beta)$ – субдифференциал функции $f(x, \beta)$ по x в точке x^* . Осталось заметить, что применяя теорему Моро–Рокафеллара [1] мы имеем для $x \in D$

$$\partial_x f(x, \beta) = \underline{\partial}R(x) - \beta \overline{\partial}\rho(x).$$

Лемма доказана.

3. Критерий для центра асферичности дает

Теорема 1. Для того чтобы точка $x^* \in \text{int } D$ была решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho(x^*) \underline{\partial}R(x^*) \cap R(x^*) \overline{\partial}\rho(x^*) \neq \emptyset. \quad (6)$$

Доказательство. В [4] было показано, что функция является субдифференцируемой (в смысле определения Демьянова–Рубинова [5]) и на этой основе доказана необходимость соотношения (6). Докажем его достаточность. Предположим, точка $x^* \in \text{int } D$ удовлетворяет соотношению (6), однако существует точка $y^* \in \text{int } D$, для которой

$$\varphi(y^*) < \varphi(x^*). \quad (7)$$

Очевидно соотношение (6) эквивалентно включению

$$o_p \in \underline{\partial}R(x^*) - \varphi(x^*) \overline{\partial}\rho(x^*).$$

Поскольку для точки $x^* \in \text{int } D$ конус $K^+(x^*, D) = \{o_p\}$, из него следует справедливость соотношения (5). Поэтому в соответствии с леммой 3 имеем

$$f(x^*, \varphi(x^*)) = \min_{x \in D} f(x, \varphi(x^*)). \quad (8)$$

Из (8) получаем

$$R(y^*) - \varphi(x^*)\rho(y^*) \geq R(x^*) - \varphi(x^*)\rho(x^*) = 0. \quad (9)$$

А с другой стороны, в силу неравенства (7) выполняется

$$R(y^*) - \varphi(x^*)\rho(y^*) < R(y^*) - \varphi(y^*)\rho(y^*) = 0,$$

что противоречит (9). Теорема доказана.

Теорема 2. Если D – строго выпуклый компакт, то задача (1) имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi^*$, а следовательно,

$$R(x_1) - \varphi^*\rho(x_1) = R(x_2) - \varphi^*\rho(x_2) = 0.$$

Отсюда вытекает

$$R(x) - \varphi^* \rho(x) \equiv 0, x \in [x_1, x_2], \quad (10)$$

поскольку противное означало бы для выпуклой по x функции $f(x, \varphi^*)$ существование точки $x_0 \in (x_1, x_2)$, в которой $R(x_0) - \varphi^* \rho(x_0) < 0$, а значит, $\varphi(x_0) < \varphi^*$, что является противоречием. Легко видеть, что аффинное поведение (10) функции $f(x, \varphi^*)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ означает, что и функции $R(x)$ и $\rho(x)$ также обязаны вести себя на этом отрезке как аффинные функции. Тогда поведение функции $R(x)$ можно выразить в виде

$$R(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) = R(x_1) + \alpha R'(x_1, x_2 - x_1), \alpha \in [0, 1]. \quad (11)$$

С другой стороны, аффинность поведения функции $\rho(x)$ в силу леммы 2 влечет равенство $\rho(x_2) = \rho(x_1) + n(x_1 - x_2)$, а следовательно, и

$$\rho(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) = \rho(x_1) + \alpha n(x_1 - x_2), \alpha \in [0, 1]. \quad (12)$$

Из (10) – (12) получаем

$$f(x_1 + \alpha(x_2 - x_1), \varphi^*) = R(x_1) - \varphi^* \rho(x_1) + \alpha(R'(x_1, x_2 - x_1) - \varphi^* n(x_1 - x_2)) = 0,$$

откуда, учитывая (10), вытекает $R'(x_1, x_2 - x_1) = \varphi^* n(x_1 - x_2)$. Но это противоречит следствию леммы 1, поскольку $\varphi^* > 1$. Теорема доказана.

Простые примеры показывают, что решение задачи может быть не единственным. Кроме того, условие строгой выпуклости компакта D , являясь достаточным, не является необходимым для единственности решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
2. Dudov S.I., Zlatorunskaya I.V. Best approximation of a compact convex set by a ball in an arbitrary norm // Advances in Math.Research. Nova Science Publishers, Inc., 2003. Vol. 2. P. 81–114.
3. Каменев Г.К. Скорость сходимости адаптивных методов полиэдромной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе // ЖВМ и МФ 2008. Т. 48, №5. С. 763–778.
4. Мещерякова Е.А. О двух задачах по оценке выпуклого компакта шаром // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 48–50.
5. Дем'яннов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциального исчисления. М.: Наука, 1990.

О РАССЛОЕНИЯХ СО СТРУКТУРНЫМ ГРУППОИДОМ МАТРИЧНЫХ ПОДАЛГЕБР

Введение. Напомним основные определения и результаты из [1]. Через $\text{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}), M_{kl}(\mathbb{C}))$ обозначим пространство всех унитальных *-гомоморфизмов из $M_k(\mathbb{C})$ в $M_{kl}(\mathbb{C})$. Оно является однородным пространством

$$\text{PU}(kl)/(E_k \otimes \text{PU}(l))$$

группы $\text{PU}(kl)$. Пусть $A_k \rightarrow X$ — локально тривиальное $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение (таким образом, его структурная группа есть $\text{PGL}_k(\mathbb{C})$ или ее деформационный ретракт $\text{PU}(k)$). $\text{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}), M_{kl}(\mathbb{C}))$ -расслоение, полученное из $A_k \rightarrow X$ послойным применением функтора $\text{Hom}_{alg}(\dots, M_{kl}(\mathbb{C}))$, обозначим через $\text{H}_{k,l}(A_k) \rightarrow X$.

Группоид $\mathfrak{G}_{k,l}$ определяется следующим образом: множество объектов $\mathfrak{G}_{k,l}^0$ состоит из унитальных *-подалгебр, изоморфных $M_k(\mathbb{C})$, в фиксированной алгебре $M_{kl}(\mathbb{C})$ (называемых в дальнейшем “ k -подалгебрами”), а множество морфизмов (собственно $\mathfrak{G}_{k,l}$) — из всех унитальных *-гомоморфизмов между соответствующими k -подалгебрами. Топология на объектах и морфизмах определяется естественным образом: $\mathfrak{G}_{k,l}^0$ можно отождествить с однородным пространством $\text{Gr}_{k,l} := \text{PU}(kl)/(\text{PU}(k) \otimes \text{PU}(l))$ — “матричным грассманом”, параметризующим k -подалгебры в $M_{kl}(\mathbb{C})$, а $\mathfrak{G}_{k,l}$ — с пространством $\text{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l})$, где

$$\mathcal{A}_{k,l} \rightarrow \text{Gr}_{k,l} \tag{1}$$

— тавтологическое $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение над $\text{Gr}_{k,l}$ (его слой над $x \in \text{Gr}_{k,l}$ есть подалгебра в $M_{kl}(\mathbb{C})$, соответствующая этой точке).

Будучи группоидом, $\mathfrak{G}_{k,l}$ задано вместе со структурными морфизмами: «source» и «target» $s, t: \mathfrak{G}_{k,l} \rightrightarrows \mathfrak{G}_{k,l}^0$, композицией $m: \mathfrak{G}_{k,l} \times_{s \mathfrak{G}_{k,l}^0} {}^t \mathfrak{G}_{k,l} \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$, единицей $e: \mathfrak{G}_{k,l}^0 \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$ и обращением $i: \mathfrak{G}_{k,l} \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$, которые удовлетворяют известным соотношениям [2].

По причинам, которые обсуждались в [3], нас будет интересовать случай, когда $(k, l) = 1$.

Понятия действия группы и главного расслоения со структурной группой G очевидным образом могут быть обобщены на (топологический) группоид \mathfrak{G} [2, 4]. Точнее (левое), действие \mathfrak{G} на пространстве Y , снабженном отображением (“моментом”) $\tau: Y \rightarrow \mathfrak{G}^0$ — это непрерывное отображение $\mathfrak{G} \times {}_{s \mathfrak{G}^0 \tau} Y \rightarrow Y$, удовлетворяющее некоторым естественным условиям.

Главное (левое) \mathfrak{G} -расслоение с базой X — это такое \mathfrak{G} -пространство P с моментом $\tau: P \rightarrow \mathfrak{G}^0$ и \mathfrak{G} -инвариантной проекцией $\pi: P \rightarrow X$, что отображение

$$\mathfrak{G} \times_{s \mathfrak{G}^0 \tau} P \rightarrow P \times_{\pi X \pi} P, ((g, p), s(g)) \mapsto (gp, p)$$

является гомеоморфизмом. В частном случае, когда $\mathfrak{G} = G$, мы возвращаемся к обычным определениям, поскольку группу можно рассматривать как группоид с одноточечным пространством объектов.

Легко видеть, что расслоение вида $\pi: H_{k,l}(A_k) \rightarrow X$ имеет естественную структуру главного $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоения (момент определяется как

$$h \mapsto h((A_k)_x) \subset M_{kl}(\mathbb{C}), h \in H_{k,l}(A_k), \pi(h) = x,$$

а действие задается с помощью композиции гомоморфизмов алгебр).

Пусть $A_k^{univ} \rightarrow \text{BPU}(k)$ — универсальное $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение. В [1] показано, что $H_{k,l}(A_k^{univ}) \rightarrow \text{BPU}(k)$ — универсальное главное $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоение. В частности, отсюда следует, что всякое главное $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоение имеет вид $H_{k,l}(A_k) \rightarrow X$ для некоторого (определенного однозначно с точностью до изоморфизма) $M_k(\mathbb{C})$ -расслоения A_k .

Хорошо известно (см., напр., [5]), что для топологической группы G любое главное G -расслоение может быть склеено из локальных тривиализаций с помощью некоторого 1-коцикла Чеха со значениями в G (более того, определена естественная эквивалентность между классами изоморфизма G -расслоений и классами когомологий таких коциклов). Дадим соответствующее описание для главных $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоений.

Локальное описание $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоений. Тривиальное $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоение над X — расслоение, индуцированное из

$$H_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l}) \rightarrow \text{Gr}_{k,l} \tag{2}$$

(см. (1)), с помощью некоторого отображения $X \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$. Обоснованием этого является очевидный факт, что (2) имеет каноническое сечение $x \mapsto \text{Id}_{M_{k,x}}$, где $M_{k,x}$ — k -подалгебра, отвечающая точке $x \in \text{Gr}_{k,l}$ (напомним, что для группы G главное G -расслоение тривиально \Leftrightarrow оно имеет сечение, причем последнее определяет тривиализацию, и наоборот). В частности, в случае группоидов существуют неизоморфные тривиальные главные расслоения [2].

Таким образом, задать тривиализацию $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоения $H_{k,l}(A_k) \rightarrow X$ — то же самое, что задать отображение $f: X \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$, такое что $A_k = f^*\mathcal{A}_{k,l}$, или, что то же самое, тройку $(A_k, \mu, X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$, где $\mu: A_k \rightarrow$

$\rightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ — отображение расслоений над X , являющееся на каждом слое унитальным $*$ -гомоморфизмом матричных алгебр.

Напомним, что автоморфизмы тривиального главного G -расслоения над X можно отождествить с непрерывными отображениями $X \rightarrow G$. В случае группоида $\mathfrak{G}_{k,l}$ отображение $\nu: X \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$ определяет композиции $f := s \circ \nu, f' := t \circ \nu: X \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$, отвечающие некоторым тройкам (тривиализациям рассматриваемого $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоения) $(A_k, \mu, X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$ и $(A'_k, \mu', X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$, причем ν задает изоморфизм между подрасслоениями $\mu(A_k)$ и $\mu'(A'_k)$ в $X \times M_{kl}(\mathbb{C})$. В [1] последние назывались *частичными изоморфизмами* между тройками, поскольку не всегда такой изоморфизм может быть продолжен до автоморфизма всего тривиального расслоения.

Теперь, зная что такое тривиальное расслоение и его автоморфизмы, мы можем перейти к склеиванию глобального расслоения из локальных тривиализаций с помощью 1-коцикла. Итак, пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — его открытое покрытие.

Определение. 1-коцикл $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ со значениями в $\mathfrak{G}_{k,l}$ (или просто $\mathfrak{G}_{k,l}$ -коцикл) — набор таких непрерывных отображений $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$ что

- 1) $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\beta\gamma}$ компонуемы на $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, т.е. $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ $t(g_{\alpha\beta}(x)) = s(g_{\beta\gamma}(x))$, где s и t — отображения «source» и «target» для группоида $\mathfrak{G}_{k,l}$;
- 2) $g_{\beta\gamma}g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}$ на $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ (в частности, $g_{\alpha\alpha}(x) \in \text{Im}(e)$, $g_{\beta\alpha} = i(g_{\alpha\beta})$, где e и i — единица и обращение для группоида $\mathfrak{G}_{k,l}$.

На множестве $\mathfrak{G}_{k,l}$ -коциклов очевидным образом определяется отношение эквивалентности (когомологичности), обобщающее соответствующее понятие для групповых 1-коциклов [4].

Теперь склеивание глобального $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоения из локальных тривиализаций может быть описано следующим образом. Тривиализация над U_α — тройка $(A_{k,\alpha}, \mu_\alpha, U_\alpha \times M_{kl}(\mathbb{C}))$ или просто отображение $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$. Рассмотрим $\mathfrak{G}_{k,l}$ -коцикл $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$, такой что $s(g_{\alpha\beta}) \equiv f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ и $t(g_{\alpha\beta}) \equiv f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \forall \alpha, \beta \in A$. Коцикл $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ определяет частичные изоморфизмы из $(A_{k,\alpha}, \mu_\alpha, U_\alpha \times M_{kl}(\mathbb{C}))|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ в $(A_{k,\beta}, \mu_\beta, U_\beta \times M_{kl}(\mathbb{C}))|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in A$, которые согласуются на тройных пересечениях. Таким образом, различные тривиализации, возникающие над двойными пересечениями, склеиваются с помощью частичных изоморфизмов.

Напомним, что всякое $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоение над X имеет вид $H_{k,l}(A_k)$ для некоторого $M_k(\mathbb{C})$ -расслоения $A_k \rightarrow X$. Как восстановить A_k по полученному локальному описанию? Ответ довольно очевиден: A_k получается

склейкой локальных расслоений $A_{k,\alpha} \rightarrow U_\alpha$ по изоморфизмам над пересечениями $U_\alpha \cap U_\beta$, определяемыми частичными изоморфизмами. Заметим, что вложения μ_α при этом не склеиваются ни в какой глобальный объект как и локальные тривиализации для расслоений со структурной группой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00046-а, 07-01-91555-ННИО-а и 08-01-00034-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ершов А.В. Препятствия к вложению расслоений матричных алгебр в тривиальное расслоение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 27–33.
2. Rossi C.A. The division map of principal bundles with groupoid structure and generalized gauge transformations // arXiv:math/0401182v2 [math.DG]
3. Ershov A.V. Homotopic theory of bundles whose fibers are matrix algebras // J. Math. Sci. 2004. Vol. 123, №4. P. 4198–4220.
4. Rossi C.A. Principal bundles with groupoid structure: local vs. global theory and nonabelian Čech cohomology // arXiv:math/0404449v1 [math.DG]
5. Каруби М. К-теория. Введение. М.: Мир, 1981. 360 с.

УДК 517.984

М.Ю. Игнатьев

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Пусть $\Omega = \{\lambda_n\}_{n=1,\infty}$ — подмножество спектра краевой задачи:

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad b - \pi < x < b, \quad (1)$$

$$y(b - \pi) = y(b) = 0, \quad (2)$$

где $b < \pi/2$.

Задача 1. По заданному множеству Ω и значениям потенциала $q(x)$ на $[b - \pi, 0]$ восстановить потенциал на всем отрезке $[b - \pi, b]$.

Задача 1 относится к так называемым "неполным" (или "полуобратным") задачам, в которых недостаток спектральной информации компенсируется некоторой априорной информацией об искомом потенциале. Вопросам единственности решения таких задач (и, в частности, задачи 1) посвящено большое число работ различных авторов (см., напр., [1 – 3]). В настоящей статье предлагается конструктивная процедура решения задачи 1.

Обозначим

$$c(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x, \quad s(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}.$$

Всюду далее будем считать, что множество Ω удовлетворяет следующему условию.

Условие А. Система функций $\{s(x, \lambda_n)\}_{n=1, \infty}$ полна в $L_2[0, 2b]$.

Пусть $S(x, \lambda)$, $S_0(x, \lambda)$, $C_0(x, \lambda)$ — решения задач Коши для уравнения (1) с начальными условиями $S(b - T, \lambda) = S_0(0, \lambda) = C_0'(0, \lambda) = 0$, $S'(b - T, \lambda) = S_0'(0, \lambda) = C_0(0, \lambda) = 1$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x, \lambda) := S(0, \lambda)c(x, \lambda) + S'(0, \lambda)s(x, \lambda). \quad (3)$$

Поскольку потенциал $q(x)$ известен априори для $x \in [b - \pi, 0]$, величины $S(0, \lambda)$ и $S'(0, \lambda)$ также известны априори (для всех λ). Следовательно, функции $\varphi(x, \lambda)$ можно считать известными для всех λ и $x \in [b - \pi, b]$.

Лемма 1. Рассмотрим краевую задачу:

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad A < x < B, \quad y(A) = y(B) = 0. \quad (4)$$

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1, \infty}$ — подмножество спектра задачи (4) такое, что система функций $\{s(x, \lambda_n)\}_{n=1, \infty}$ полна в $L_2[0, a]$ $a \leq B - A$. Пусть $S_A(x, \lambda)$ — решение задачи Коши $\ell y = \lambda y$, $y(A) = 0$, $y'(A) = 1$. Тогда система функций $\{S_A(x, \lambda_n)\}_{n=1, \infty}$ полна в каждом из пространств $L_2[A, A+a]$ и $L_2[B-a, B]$.

Доказательство. Очевидно, без ограничения общности можно считать, что $A = 0$. Тогда полнота рассматриваемой системы следует из представления $S_A(x, \lambda) = (E + G)s(x, \lambda)$ [4] и полноты системы $\{s(x, \lambda_n)\}_{n=1, \infty}$. Таким образом, первая часть утверждения доказана.

Рассмотрим задачу Коши $-y'' + q^*(x)y = \lambda y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, где $q^*(x) := q(B-x)$. Обозначим ее решение через $S^*(x, \lambda)$. Нетрудно видеть, что $S^*(x, \lambda) = S_B(B-x, \lambda)$, где $S_B(x, \lambda)$ — решение задачи Коши $\ell y = \lambda y$, $y(B) = 0$, $y'(B) = -1$. Ясно, что спектр задачи Дирихле с потенциалом $q^*(x)$ совпадает со спектром задачи (4). В силу доказанной ранее первой части утверждения леммы система $\{S^*(x, \lambda_n)\}_{n=1, \infty}$ полна в $L_2[0, a]$. Но это означает, что система $\{S_B(x, \lambda_n)\}_{n=1, \infty}$ полна в $L_2[B-a, B]$. Далее, поскольку все λ_n — собственные значения задачи (4), имеем $S_B(x, \lambda_n) = \beta_n S_A(x, \lambda_n)$. Лемма доказана.

Лемма 2. При выполнении условия А система функций $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n=1, \infty}$ полна в $L_2[-b, b]$.

Доказательство. Воспользуемся оператором преобразования [4] для $S(x, \lambda)$, что с учетом (3) дает

$$S(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_{-x}^x K(x, t)\varphi(t, \lambda) dt, \quad x \in [-b, b]. \quad (5)$$

Из леммы 1 следует, что при выполнении условия А система $\{S(x, \lambda_n)\}_{n=\overline{1,\infty}}$ полна в $L_2[-b, b]$. А так как в силу (5) имеем $\varphi(x, \lambda_n) = (E + K)^{-1}S(x, \lambda_n)$, то и система $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n=\overline{1,\infty}}$ полна в $L_2[-b, b]$.

Лемма доказана.

Теперь перейдем непосредственно к решению задачи 1. Для этого снова воспользуемся представлением (5), положив в нем $x = b$ и $\lambda = \lambda_n, n = \overline{1, \infty}$. Поскольку λ_n — собственные значения задачи (1), (2), имеем $S(b, \lambda_n) = 0$ и (5) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\int_{-b}^b f(t)\varphi(t, \lambda_n) dt = -\varphi(b, \lambda_n), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (6)$$

где $f(t) = K(b, t)$. В силу полноты системы $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n=\overline{1,\infty}}$ равенством (6) функция $f(t)$ однозначно определяется через входные данные задачи 1.

Далее, зная функцию $f(t), t \in [-b, b]$ мы можем свести задачу 1 к классической обратной задаче Штурма — Лиувилля на отрезке $[0, b]$ в той или иной постановке. Покажем, как, используя $f(t), t \in [-b, b]$, найти функцию Вейля [5]:

$$M(\lambda) = -\frac{C_0(b, \lambda)}{S_0(b, \lambda)}. \quad (7)$$

Величины $C_0(b, \lambda)$ и $S_0(b, \lambda)$ могут быть определены с использованием оператора преобразования. С учетом $K(b, t) = f(t)$ это дает:

$$S_0(b, \lambda) = s(b, \lambda) + \int_{-b}^b f(t)s(t, \lambda) dt, \quad (8)$$

$$C_0(b, \lambda) = c(b, \lambda) + \int_{-b}^b f(t)c(t, \lambda) dt. \quad (9)$$

Таким образом, зная функцию $f(t)$, мы можем, используя (7) — (9), найти $M(\lambda)$. Восстановление по функции Вейля $M(\lambda)$ потенциала $q(x)$, в свою очередь, представляет собой хорошо известную обратную задачу, решение которой может быть найдено с помощью классических методов [5].

Окончательно приходим к следующей процедуре решения задачи 1.

Алгоритм 1. *Даны $q(x), x \in [b - T, 0], \Omega = \{\lambda_n\}_{n=\overline{1,\infty}}$.*

1) вычисляем $S(x, \lambda)$ для $x \in [b - T, 0], \lambda \in \Omega$;

2) строим функцию $\varphi(x, \lambda)$ (3), $x \in [-b, b], \lambda \in \Omega$;

- 3) находим $f(t), t \in [-b, b]$, из (6);
 4) вычисляем $S_0(b, \lambda), C_0(b, \lambda), M(\lambda)$, используя последовательно соотношения (8), (9), и (7);
 5) по $M(\lambda)$ восстанавливаем $q(x), x \in [0, b]$ [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Hochstadt H., Lieberman B. An inverse Sturm — Liouville problem with mixed given data // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34. P. 676–680.
2. Gesztesy F., Simon B. Inverse spectral analysis with partial information on the potential, II. The case of discrete spectrum // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 352. P. 2765–2787.
3. Horvath M. Inverse spectral problems and closed exponential systems // Ann. of Math. 2005. Vol. 162. P. 885–918.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.
5. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

УДК 517.9

В.М. Конюшков

ОБЩИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Общий алгоритм решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения известен и применяется для нахождения приближенного решения.

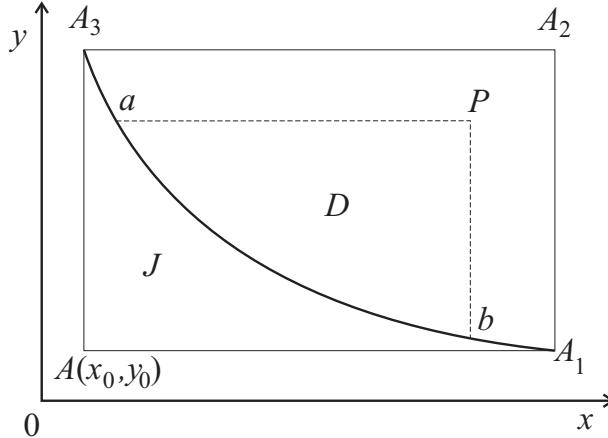
В данной статье общий алгоритм переносится на уравнения в частных производных, обосновывается его применение при нахождении приближенных решений задачи Коши для уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x, y, u, p, q), \\ u|_l = 0, \quad p|_l = 0, \quad q|_l = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u = u(x, y)$, $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$, l — гладкая кривая на плоскости Oxy , обладающая тем свойством, что каждая характеристика пересекает ее только лишь в одной точке и не касается ее. Функция $f(x, y, u, p, q)$ определена

и непрерывна в области (рисунок), проекцией которой на Oxy является прямоугольник $J = \{x_0 \leq x \leq x_0 + a, y_0 \leq y \leq y_0 + b\}$ и удовлетворяет условию Липшица по переменным u, p, q .



Решение (1) находится последовательными приближениями $u_n(x, y)$, где $\{u_n(x, y)\}_1^\infty$ — решения следующих задач Коши:

$$\begin{cases} u_{xy} = f_n(x, y, u, p, q), \\ u|_l = 0, \quad p|_l = 0, \quad q|_l = 0, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

а функции $f_n(x, y, u, p, q)$ удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши (1) и

$$f_n(x, y, u_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y)) \equiv f(x, y, u_n(x, y), p_n(x, y), q_n(x, y)), \quad (2)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Рассматриваемый в статье метод решения задачи Коши называется *алгоритмом Z*. Функциональная последовательность $f_n(x, y, u, p, q)$ называется *последовательностью, определяющей алгоритм Z*.

Пусть $f_n(x, y, u, p, q) = \alpha_n(u - u_n) + \beta_n(p - p_n) + \gamma_n(q - q_n) + f(x, y, u_n, p_n, q_n)$, где $\{\alpha_n\}_1^\infty, \{\beta_n\}_1^\infty, \{\gamma_n\}_1^\infty$ — ограниченные числовые последовательности, т.е. существуют положительные постоянные C_1, C_2, C_3 такие, что $|\alpha_n| \leq C_1, |\beta_n| \leq C_2, |\gamma_n| \leq C_3$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$

Теорема. Последовательность $\{u_n(x, y)\}_1^\infty$ сходится к решению задачи Коши (1) на прямоугольнике J .

Доказательство теоремы проводится следующим образом. При выбранном способе построения определяющей последовательности $\{f_n(x, y, u, p, q)\}$ соответствующая задача Коши становится задачей для линейного уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа, которая решается методом Римана. Сходимость построенных приближений доказывается методом, изложенным в теореме существования и единственности решения задачи Коши для гиперболических уравнений [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

УДК 517.51+517.98

С.А. Крейс

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ДУАЛЬНЫЕ ФРЕЙМЫ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В данной статье рассматриваются фреймы в банаховых пространствах. Для альтернативных дуальных фреймов доказывается аналог утверждения, ранее полученного в [1] для фреймов в гильбертовых пространствах.

Определение 1. *Фреймом в гильбертовом пространстве H называется система векторов $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset H \setminus \{0\}$, для которой существуют такие положительные вещественные константы A и B , что выполняются рамочные неравенства:*

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leq B \|f\|^2$$

для любого элемента $f \in H$.

Константы A и B из данного определения называют *фреймовыми константами*. При этом A называется *нижней фреймовой константой*, а B – *верхней фреймовой константой*. Последовательность векторов пространства H называют *бесселевой последовательностью* в H , если для нее существует конечная верхняя фреймовая константа.

Определение 2. Фрейм (y_n) гильбертова пространства H называется *альтернативным дуальным фреймом* для фрейма (x_n) , если для любого $x \in H$ справедлива формула восстановления:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n) x_n.$$

Следующая теорема получена в работе [1].

Теорема 1. *Если (x_n) и (y_n) – бесселевые последовательности в гильбертовом пространстве H , для любого $x \in H$ удовлетворяющие равенствам*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n) x_n,$$

тогда (x_n) и (y_n) – альтернативные дуальные фреймы.

После того как Грошениг [2] впервые обобщил фреймы на банаховы пространства и назвал их *атомарными разложениями*, в этой области наблюдалась очень большая активность. Существует несколько различных подходов к определению фрейма в банаховом пространстве. Например, в работе [1, опр. 3.3] фрейм определяется как проекция безусловного базиса объемлющего банахова пространства.

Пусть X — банахово пространство и X^* — сопряженное к нему. Далее, пусть задано банахово пространство X_d , состоящее из числовых последовательностей $a = (a_n)$ и удовлетворяющее следующему условию: система канонических ортов (ε_n) образует базис в X_d . Кроме того, сопряженная система (ε_n^*) образует базис в X_d^* . Тогда сопряженное пространство X_d^* мы можем рассматривать снова как пространство последовательностей.

Определение 3. Пусть заданы системы $(x_n) \subset X$ и $(y_k) \subset X^*$. Предположим, что существуют положительные постоянные $A, \tilde{A}, B, \tilde{B}$ такие, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$A \|x\|_X \leq \|(x, y_n)\|_{X_d} \leq B \|x\|_X \quad (1)$$

и любого $y \in X^*$ выполняется неравенство

$$\tilde{A} \|y\|_{X^*} \leq \|(x_n, y)\|_{X_d^*} \leq \tilde{B} \|y\|_{X^*}. \quad (2)$$

Если при этом справедлива формула восстановления

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n) x_n, \quad (3)$$

то будем говорить, что пара систем (x_n) и (y_n) образует *фрейминг*.

Замечание. Фрейминг по сути является аналогом альтернативных дуальных фреймов в гильбертовых пространствах. Действительно, если рассматривать формулы (1) и (2) в случае, когда X — гильбертово пространство, то системы $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ являются фреймами в X в смысле определения 1, а из равенств (3) следует, что они удовлетворяют определению 2, то есть образуют пару альтернативных дуальных фреймов.

Сформулируем утверждение, аналогичное теореме 1, для фрейминга в банаховом пространстве.

Теорема 2. Пусть $(x_n) \subset X$, $(y_n) \subset X^*$ и существует константа $B > 0$, что при всех y из X^*

$$\|(x_n, y)\|_{X_d^*} \leq B \|y\|_{X^*}.$$

Предположим, что при любом $x \in X$:

$$\left((x, y_n) \right) \in X_d$$

и справедлива формула восстановления

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n) x_n.$$

Тогда пара систем (x_n) и (y_n) образует фрейминг.

Доказательство данного утверждения удобно разбить на несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть (ε_n) — система канонических ортов, образующая базис в X_d . Определим оператор $L : X_d \mapsto X$, действующий по формуле $L\varepsilon_n = x_n$ при всех $n \in N$. Тогда сопряженный оператор L^* имеет следующий вид:

$$L^*y = ((x_n, y))$$

при любом $y \in X^*$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда оператор L^* инъективен, то есть для любого $y \in X^*$ выполняется нижнее неравенство в (2).

Лемма 3. Пусть последовательности (x_n) и (y_n) удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда для последовательности (y_n) также справедлива формула восстановления:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y) y_n$$

при любом выборе $y \in X^*$.

Схема доказательства теоремы 2. Объединяя результаты леммы 1 и леммы 2, получаем, что выполнение верхнего неравенства в (1) для (x_n) равносильно ограниченности оператора L , определенного в лемме 1. Из формулы восстановления следует, что L сюръективен, и тем самым сопряженный оператор L^* инъективен. А из последнего вытекает существование нижней константы в (2) для системы (x_n) . Неравенства (1) для системы (y_n) следуют из леммы 3 с учетом принципа равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза и двойственности операторных инъекций и сюръекций. Таким образом, системы (x_n) и (y_n) удовлетворяют неравенствам (1) и (2) соответственно. Кроме того, для них верна формула восстановления (3). Следовательно, они образуют фрейминг.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Casazza P., Han D., Larson D. Frames for Banach spaces // Contemp. Math. 1999. Vol. 247. P. 149–182.
2. Grochenig K. Describing functions: atomic decompositions versus frames // Monat. Math. 1991. Vol. 112. P. 1–41.

О СТРОЕНИИ ГОМОМОРФИЗМОВ ПОЛУГРУПП ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Одной из основных задач алгебраической теории автоматов [1] является изучение взаимосвязи морфизмов категории автоматов и категорий их компонент – множеств состояний, полугрупп входных символов и множеств выходных символов автоматов. Так как полугруппы входных символов автоматов естественно представляются полугруппами вектор-функций, то определенный интерес представляет описание морфизмов таких полугрупп на языке алгебры отношений [2].

Целью настоящей статьи является описание строения сюръективных гомоморфизмов полугрупп вектор-функций, являющихся эпиморфизмами категории полугрупп.

Пусть X, Y – некоторые непустые множества. Обозначим $T(X)$ как множество всех преобразований множества X , $F(X, Y)$ – множество всех отображений множества X в множество Y . Отображения множества X множество $X \times Y$ обозначаются $f : x \rightarrow X \times Y$ и называются вектор-функциями на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$. Множество всех таких вектор-функций обозначим символом $S(X, Y)$.

Каждая вектор-функция $f : x \rightarrow X \times Y$ определяет упорядоченную пару (f_1, f_2) отображений $f_1 : X \rightarrow X$, $f_2 : X \rightarrow Y$ по формуле $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, где $x \in X$. Такие отображения f_1, f_2 называются соответственно *первой* и *второй компонентами вектор-функции* f . С другой стороны, для любой пары отображений $f_1 : X \rightarrow X$, $f_2 : X \rightarrow Y$ полу-прямое произведение [2] отображений f_1, f_2 является вектор-функцией $f : x \rightarrow X \times Y$ с компонентами f_1, f_2 . Таким образом, вектор-функции можно отождествлять с упорядоченными парами их компонент и множество $S(X, Y)$ можно отождествлять с декартовым произведением $X \times F(X, Y)$ множеств $X, F(X, Y)$.

Для вектор-функций f, g из множества $S(X, Y)$ естественно определяется операция умножения по формуле $f \cdot g = (f_1g_1, f_1g_2)$, где f_1g_1, f_1g_2 – обычные композиции отображений. Известно [2], что такое умножение вектор-функций ассоциативно. Значит, множество $S(X, Y)$ с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу, которая называется *симметрической полугруппой вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$* . Подполугруппы полугруппы $S(X, Y)$ называются *полугруппами вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$* .

Актуальность изучения полугрупп вектор-функций определяется их приложениями к теории автоматов.

Следуя [1], под автоматом будем понимать алгебраическую систему вида $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X , полугруппы входных символов S , множества выходных символов Y , функции переходов $\delta : X \rightarrow X$ и выходной функции $\lambda : X \rightarrow Y$, которые при любых $x \in X, s, t \in S$ удовлетворяют условиям: $\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t)$ и $\lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t)$. Каждый символ $s \in S$ определяет пару отображений $\delta_s : X \rightarrow X, \lambda_s : X \rightarrow Y$, которые каждое состояние автомата $x \in X$ переводят в новое состояние $\delta_s(x) = \delta(x, s)$ и в выходной символ $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$. Следовательно, символ $s \in S$ определяет на множестве X вектор-функцию $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ со значениями в множестве $X \times Y$. По определению автомата последовательное действие входных символов $s, t \in S$ на состояние $x \in X$ приводит к следующему результату:

$$f_t(f_s(x)) = (\delta(\delta(x, s), t), \lambda(\delta(x, s), t)) = (\delta(x, st), \lambda(x, st)) = f_{st}(x).$$

Это означает, что соответствие $s \mapsto f_s$ ($s \in S$) является гомоморфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу вектор-функций $S(X, Y)$. Очевидно, что это соответствие взаимно однозначно в том и только том случае, если для различных $s, t \in S$ найдется такой $x \in X$, что $\delta_s(x) \neq \delta_t(x)$ или $\lambda_s(x) \neq \lambda_t(x)$. Такие автоматы называются автоматами без равнодействующих сигналов.

Лемма 1. *Полугруппа входных символов автомата без равнодействующих сигналов $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ изоморфна полугруппе его вектор-функций $\{f_s : s \in S\}$.*

Полугруппа S вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$ называется *приемлемой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) для любого элемента a из множества X (соответственно Y) найдутся такие $x \in X, f \in S$, что $f_1(x) = a$ (соответственно $f_2(x) = a$);
- 2) найдутся $f, g \in S$ с постоянным отображением f_1 и тождественным преобразованием g_1 .

Лемма 2. *Для любой приемлемой полугруппы S вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$ справедливы следующие утверждения:*

- 1) элемент $f \in S$ в том и только том случае является правым нулем полугруппы S , если $f = (c_x, c_y)$ для некоторых $x \in X, y \in Y$;

- 2) элемент $f \in S$ в том и только том случае является левой единицей полугруппы S , если $f = (\Delta_X, \psi)$ для тождественного преобразования Δ_X множества X и некоторого $\psi : X \rightarrow Y$;
- 3) элементы $f, g \in S$ в том и только том случае имеют одинаковые первые компоненты $f_1 = g_1$, если $f \cdot e = g \cdot e$ для некоторой левой единицы e полугруппы S .

Теорема 1. Пусть S – приемлемая полугруппа вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$, S_1 – приемлемая полугруппа вектор-функций на множестве X_1 со значениями в множестве $X_1 \times Y_1$ и $\pi : S \rightarrow S_1$ – гомоморфизмом полугруппы S на полугруппу S_1 . Тогда найдутся такие сюръекции $\varphi : X \rightarrow X_1$ и $\psi_x : Y \rightarrow Y_1$ ($x \in X$), что для любого $f \in S$ выполняется равенство: $\pi(f) = (\varphi^2(f_1), f_2^{f_1})$, где $\varphi^2(f_1) = \varphi^{-1}(f_1)\varphi$ и $f_2^{f_1}(\varphi(a)) = \psi_{f_1(a)}(f_2(a))$ для всех $a \in X$.

Следствие 1. Пусть S – приемлемая полугруппа вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$, S_1 – приемлемая полугруппа вектор-функций на множестве X_1 со значениями в множестве $X_1 \times Y_1$. Тогда отображение $\pi : S \rightarrow S_1$ в том и только том случае является изоморфизмом полугруппы S на полугруппу S_1 , если найдутся такие биекции $\varphi : X \rightarrow X_1$ и $\psi_x : Y \rightarrow Y_1$ ($x \in X$), что для любого $f \in S$ выполняется равенство: $\pi(f) = (\varphi^2(f_1), f_2^{f_1})$, где $f_2^{f_1}(\varphi(a)) = \psi_{f_1(a)}(f_2(a))$ для всех $a \in X$.

Следствие 2. Группа автоморфизмов $\text{Aut}S(X, Y)$ полугруппы $S(X, Y)$ всех вектор-функций на множестве X со значениями в множестве $X \times Y$ изоморфна сплетению $P(Y) \wr P(X)$ групп $P(Y), P(X)$ перестановок множеств Y и X соответственно.

Полученные результаты могут использоваться в изучении эпиморфизмов категории автоматов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б.И., Гринглас Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994. 192 с.
2. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3–178.

СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЁТКАМИ КОНТЕКСТОВ С БИНАРНЫМ И n -АРНЫМ ОТНОШЕНИЯМИ

В работах немецких математиков Р. Вилле [1] и Б. Гантера [2] был основан формальный концептуальный анализ (ФКА) и показаны его приложения, связанные с базами данных [3]. Основная идея ФКА состоит в построении контекста с бинарным отношением и его решётки концептов, которая рассматривается как источник дополнительных знаний в классификации объектов, описанных в базе данных. Предположим, мы имеем базу данных (табл. 1), в которой да_{*i*} означает, что объекту присущ a_i -й атрибут, нет_{*i*} означает «не присущ».

Тогда по традиционному ФКА мы получаем контекст (G, M, I) , с бинарным отношением I (табл. 2) и соответствующую ему решётку концептов L_1 (рис. 1), где $\{a_1\}' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{a_2\}' = \{2, 3, 5, 6\}$, $\{a_3\}' = \{3, 4, 6, 7\}$, $\{a_2\}' \cap \{a_3\}' = \{3, 6\}$.

Таблица 1

Объекты <i>G</i>	Атрибуты		
	a_1	a_2	a_3
1	да ₁	нет ₂	нет ₃
2	да ₁	да ₂	нет ₃
3	да ₁	да ₂	да ₃
4	да ₁	нет ₂	да ₃
5	да ₁	да ₂	нет ₃
6	да ₁	да ₂	да ₃
7	да ₁	нет ₂	да ₃
8	да ₁	нет ₂	нет ₃

Таблица 2

<i>G</i>	<i>M</i>		
	a_1	a_2	a_3
1	×		
2	×	×	
3	×	×	×
4	×		×
5	×	×	
6	×	×	×
7	×		×
8	×		

В работах [4, 5] был рассмотрен контекст с n -арным отношением, что позволяет не трансформировать базу данных в бинарное отношение, а прямо на её основе строить решётку концептов по выбранным объектам. В частности, табл. 1 описывает 4-арное отношение. Используя его для соответствующего контекста, мы получаем $\widehat{\rho}_1(\{\text{да}_1\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\widehat{\rho}_1(\{\text{да}_2\}) = \{2, 3, 5, 6\}$, $\widehat{\rho}_1(\{\text{нет}_2\}) = \{1, 4, 7, 8\}$, $\widehat{\rho}_1(\{\text{да}_3\}) = \{3, 4, 6, 7\}$, $\widehat{\rho}_1(\{\text{нет}_3\}) = \{1, 2, 5, 8\}$, $\widehat{\rho}_1(\{\text{да}_2\}) \cap \widehat{\rho}_1(\{\text{да}_3\}) = \{3, 6\}$, $\widehat{\rho}_1(\{\text{да}_2\}) \cap \widehat{\rho}_1(\{\text{нет}_3\}) = \{2, 5\}$, $\widehat{\rho}_1(\{\text{нет}_2\}) \cap \widehat{\rho}_1(\{\text{да}_3\}) = \{4, 7\}$, $\widehat{\rho}_1(\{\text{нет}_2\}) \cap \widehat{\rho}_1(\{\text{нет}_3\}) = \{1, 8\}$. Соответствующая решётка концептов L_2 показана на рис. 2. Таким образом, при трансформации

базы данных по традиционному ФКА мы теряем заметную часть информации. В частности, такая потеря нарушает естественные представления классической логики. Если по какому-либо атрибуту мы можем выделить один подвид (как непустое и собственное подмножество некоторого вида), то вместе с ним непременно выделяется ещё не менее одного подвида, либо тот, который этим атрибутом не обладает, либо те, которые имеют другие его значения. Значит, в нашей решётке каждый неатомный элемент должен покрывать не менее двух элементов. Решётка L_2 (рис. 2) обладает этим свойством, а решётка L_1 (рис. 1) — нет и является подрешёткой решётки L_2 .

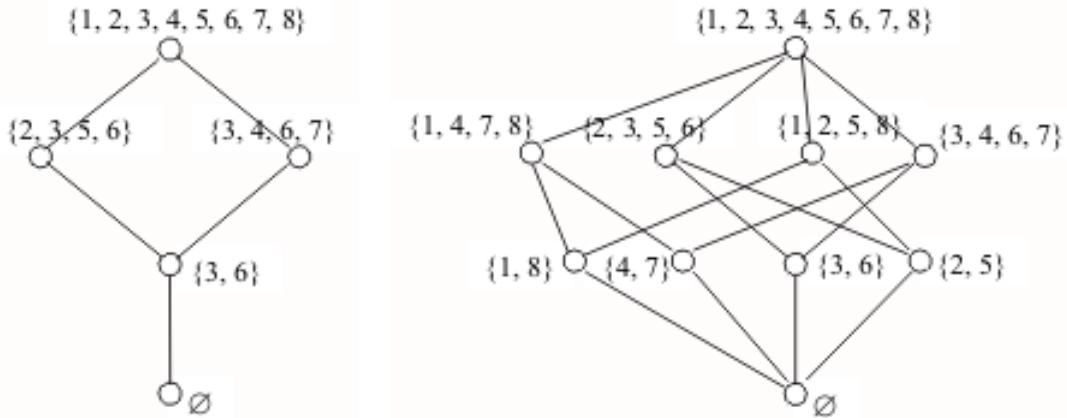


Рис. 1

Рис. 2

В традиционном ФКА рассматривается также многозначный контекст как четвёрка (G, M, W, I) , где G , M и W — множества объектов, многозначных атрибутов и значений атрибутов соответственно, а $I \subseteq G \times M \times W$ — тернарное отношение, удовлетворяющее условию

$$(g, m, v) \in I, (g, m, w) \in I \Rightarrow v = w.$$

Если $(g, m, w) \in I$, то w — значение атрибута m для объекта g и выполняется условие, что существует точно одно значение для каждой пары объект — атрибут. Последнее условие означает, что исходное отношение не только однозначное относительно множества объектов, но и полное относительно всех атрибутов.

Существует стандартный метод трансформации (называемый *простым шкалированием*) многозначного контекста (G, M, W, I) в однозначный: для каждого $m \in M$, рассматриваем однозначный контекст $S_m := (G_m, M_m, I_m)$, где $m(G) \subseteq G_m$. Тогда контекст (G, N, J) , определённый условиями

- 1) $N := \bigcup_{m \in M} \{m\} \times M_m;$
- 2) $(g, (m, n)) \in J \Leftrightarrow (g, m, w) \in I \wedge (w, n) \in I_m,$

является *преемственным контекстом*.

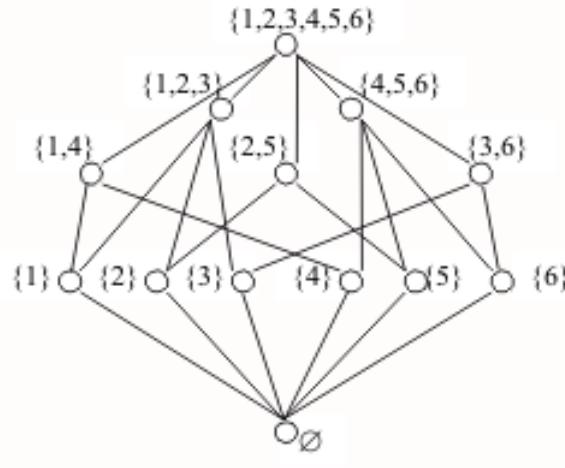
Допустим, многозначный контекст определяется базой данных, заданной табл. 3, где $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{m_1, m_2\}$. Тогда $M_{m_1} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $M_{m_2} = \{b_1, b_2\}$ (табл. 4) и описанный метод даст контекст, задаваемый табл. 4. При этом $\widehat{\rho}_1(\{a_1\}) = \{a_1\}' = \{1, 4\}$, $\widehat{\rho}_1(\{a_2\}) = \{a_2\}' = \{2, 5\}$, $\widehat{\rho}_1(\{a_3\}) = \{a_3\}' = \{3, 6\}$, $\widehat{\rho}_1(\{b_1\}) = \{b_1\}' = \{1, 2, 3\}$, $\widehat{\rho}_1(\{b_2\}) = \{b_2\}' = \{4, 5, 6\}$. Откуда $\{a_1\}' \cap \{b_1\}' = \{1\}$, $\{a_2\}' \cap \{b_1\}' = \{2\}$, $\{a_3\}' \cap \{b_1\}' = \{3\}$, $\{a_1\}' \cap \{b_2\}' = \{4\}$, $\{a_2\}' \cap \{b_2\}' = \{5\}$, $\{a_3\}' \cap \{b_2\}' = \{6\}$.

Таблица 3

G	m_1	m_2
1	a_1	b_1
2	a_2	b_1
3	a_3	b_1
4	a_1	b_2
5	a_2	b_2
6	a_3	b_2

Таблица 4

G	m_1			m_2	
	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2
1	×				×
2		×			×
3			×	×	
4	×				×
5		×			×
6			×		×



Следовательно, концептуальные решётки контекста с тернарным отношением и контекста с бинарным отношением совпадают (см. рис. 3), что, прежде всего, обуславливается указанным выше требованием однозначности и полноты исходного отношения (на практике не всякая база данных обладает этим свойством).

Рис. 3

К тому же в случае анализа на контексте с тернарным отношением нет никакой необходимости осуществлять какую-либо дополнительную трансформацию исходного отношения, приводящую к непродуктивному увеличению таблицы, а достаточно воспользоваться известными операторами баз данных.

Теорема 1. Пусть $\mathbb{K}_1 = (G, G \times M_1 \times M_2 \times \dots \times M_{n-1}, \rho \subseteq G \times M_1 \times M_2 \times \dots \times M_{n-1})$ некоторый контекст с n -арным отношением и L_1 его концептуальная решётка. Пусть $\mathbb{K}_1 = (G, M, I)$ – контекст с бинарным отношением, полученным из \mathbb{K}_1 одним из методов трансформации

традиционного ФКА, и L_2 – соответствующая концептуальная решётка. Тогда L_2 является подрешёткой решётки L_1 с тем же наибольшим и наименьшим элементом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Wille R. Bedeutungen von Begriffsverbanden // B. Ganter, R. Wille, K.E. Wolff и др. Beitrage zur Begriffssanalyse. Mannheim: Wissenschaftsverlag, 1987. B.I. P. 161–211.
2. Ganter B., Wille R. Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations. Berlin: Springer, 1998.
3. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.
4. Новиков В.Е. Концепты и функциональные зависимости // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9.
5. Новиков В.Е. Функциональные зависимости в формальном контексте // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 53-55

УДК 519.95:681.31

А.А. Орел

ШАБЛОНЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ СЕТЕЙ ПЕТРИ

В работе [1] была рассмотрена технология проектирования бизнес-процессов, состоящая из двух этапов. На начальном этапе применялась методология структурного проектирования SADT и создавалась функциональная модель, а затем на ее основе строилась имитационная модель с использованием сетей Петри.

В работе [2] была рассмотрена обратная задача построения функциональной SADT-модели на основе сети Петри.

В работе [3] было предложено выделить полезные, часто используемые, конструкции управления в схемах потоков работ. Такие конструкции названы *шаблонами* по аналогии с часто используемыми шаблонами разработки программного обеспечения.

В данной статье предложены шаблоны сетей Петри, при помощи которых реализуются некоторые полезные конструкции SADT-моделей.

Пусть имеются процессы РА, РВ и РС, связанные между собой одним из двух способов, представленных на рис. 1, 2.

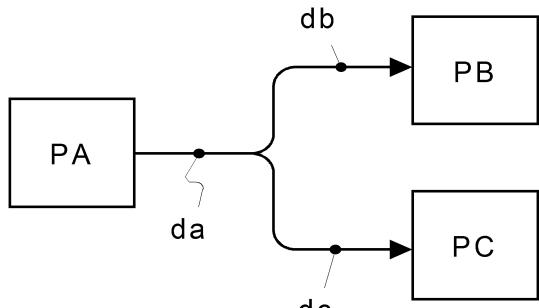


Рис.1

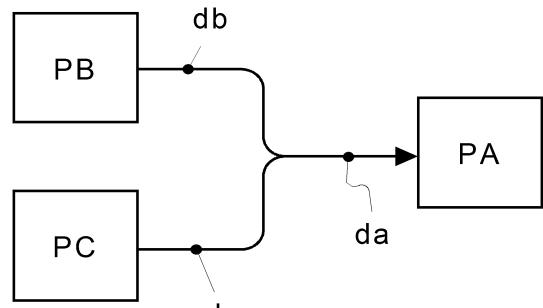


Рис.2

Для простоты на SADT-диаграммах будем изображать только входные и выходные дуги. На рис. 1 da — выходные данные процесса PA, а db и dc — входные данные процессов PB и PC соответственно. На рис. 2 db и dc — выходные данные процессов PB и PC соответственно, а da — входные данные процесса PA. Будем считать da, db и dc множествами, удовлетворяющими соотношению $da = db \cup dc$. Множества данных db и dc могут иметь общую часть.

Рассмотрим случай, когда процессы PB и PC являются альтернативными. В случае, представленном на рис. 1, после завершения процесса PA может выполняться либо только PB, либо только PC, а в случае, представленном на рис. 2, процессу PA может предшествовать либо только PB, либо только PC. Для моделирования на сетях Петри данных процессов предлагаются шаблоны, представленные на рис. 3, 4, где овалами изображены позиции, а прямоугольниками — переходы.

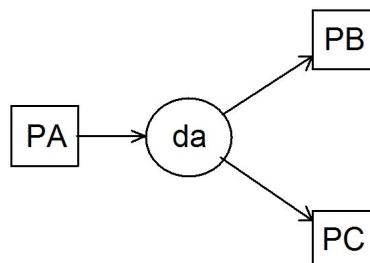


Рис.3

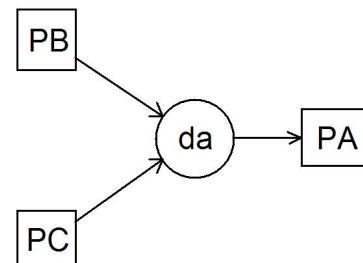


Рис.4

Пусть процессы PB и PC выполняются после процесса PA (рис. 1) или перед процессом PA (рис. 2). В этих случаях предлагаются два варианта шаблонов сетей Петри. Наиболее простые шаблоны соответствуют случаю, когда множества данных db и dc не пересекаются. Они изображены на рис. 5, 6.

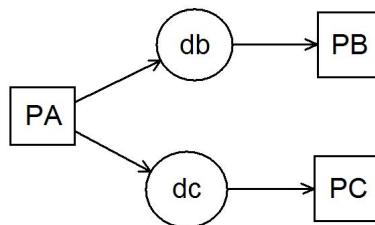


Рис.5

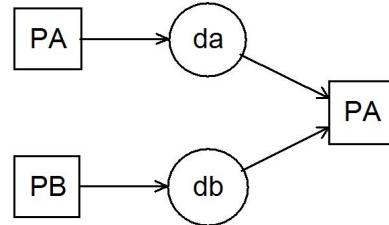


Рис.6

В более сложном случае, когда множества db и dc имеют общую часть, шаблоны представлены на рис. 7, 8.

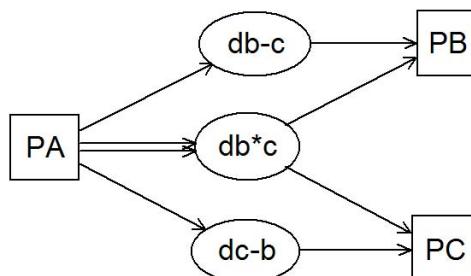


Рис.7

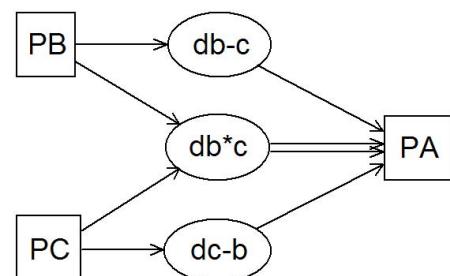


Рис.8

Здесь использованы обозначения: $db-c = db - dc$, $dc-b = dc - db$, $db^*c = db \cap dc$.

Рассмотрим циклический процесс P, который может повторяться в зависимости от результата завершения процесса C (рис. 9, 10). Если процесс C завершается с выходными данными O, то процесс P не выполняется, а если в результате завершения процесса C вырабатываются данные dc, то процесс P выполняется. Результатом завершения процесса P являются данные dp, которые поступают на вход процесса C. Инициируются процессы входными данными I (вариант dpi для цикла с предусловием (см. рис. 9) или вариант dci для цикла с постусловием (см. рис. 10)).

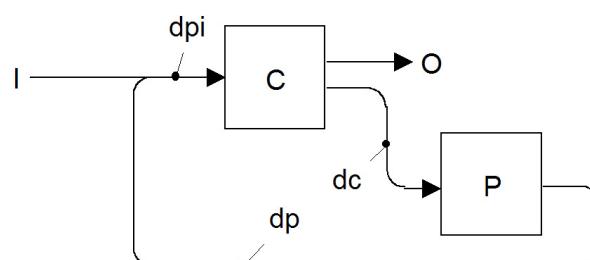


Рис.9

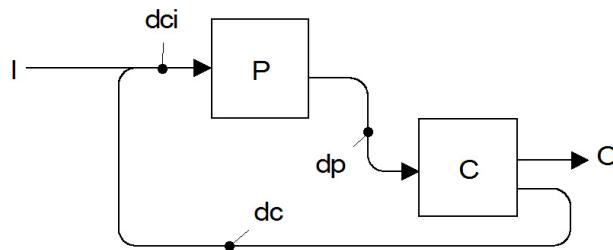


Рис.10

Соответствующие шаблоны сетей Петри для рассмотренных процессов представлены на рис. 11, 12.

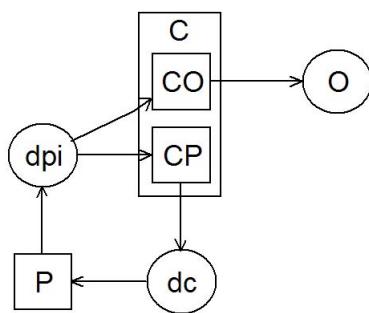


Рис.11

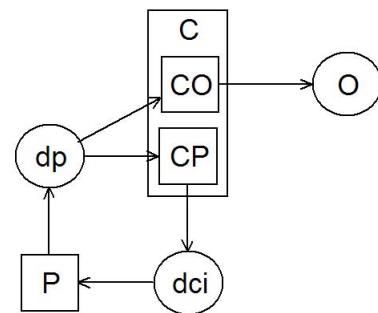


Рис.12

Здесь процесс С изображен в виде блока, включающего два альтернативных процесса СО и СР. Процесс СО завершает цикл и формирует выходные данные О, а СР продолжает цикл, формируя входные данные dc для процесса Р. Рис. 11, 12 показывают, что рассматриваемые процессы имеют структурное сходство. Они различаются только начальной разметкой. Процессы, представленные на рис. 11, инициируются фишкой в позиции dpi, а процессы, представленные на рис. 12, — фишкой в позиции dci. Таким образом, можно изменять вид циклического процесса (цикл с предусловием или цикл с постусловием) посредством выбора стартовой позиции и использовать в обоих случаях единый шаблон.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Орел А.А. Моделирование бизнес-процессов с помощью сетей Петри // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 89–93.
2. Орел А.А. О преобразовании моделей бизнес-процессов, основанных на сетях Петри // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 55–59.
3. B.W.M.P. van der Aalst, A.H.M. ter Hofstede, Kiepuszewski B., Barros A.P. Workflow Patterns // Series, WP 47, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 2000.

О СОХРАНЕНИИ РАВЕНСТВА ЕДИНИЦЕ ПОЛУПЕРМАНЕНТОВ БУЛЕВЫХ $\{0, 1\}$ -МАТРИЦ

Задача сохранения матричных свойств при преобразовании матриц с элементами из некоторого полукольца является одной из самых широко представленных работ по этой теме в современной математической литературе (см., напр., обзор [1]). В этой статье изучаются свойства множества квадратных матриц \mathbf{M} над булевой $\{0, 1\}$ -алгеброй с полуперманентами, равными 1, которые для матрицы $A = (a_j^i)$ определяются формулами

$$\nabla^+ A = \bigcup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P^+} \cap_{k=1}^n a_k^{\lambda_k}, \quad \bar{\nabla} A = \bigcup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \bar{P}} \cap_{k=1}^n a_k^{\lambda_k}.$$

Здесь P^+ и \bar{P} обозначают множества всех четных и нечетных n -подстановок ($n \geq 2$). Доказывается утверждение, что произвольный матричный многочлен с аргументами из \mathbf{M} и коэффициентами из булевой $\{0, 1\}$ -алгебры сохраняет равенство полуперманентов. Таким образом, мы даем примеры нелинейных преобразований, сохраняющих линейные инварианты бинарных отношений на конечном множестве, каковыми являются полуперманенты $\{0, 1\}$ -матриц, соответствующих этим бинарным отношениям на конечном множестве. В качестве следствий получаем, что множество \mathbf{M} , дополненное нулевой матрицей, является одновременно полукольцом и полумодулем над булевой $\{0, 1\}$ -алгеброй.

Теорема. Произвольный матричный многочлен

$$f(A, B, C, \dots) = \bigcup_{i=0}^{r_i} \bigcup_{j=0}^{r_j} \bigcup_{k=0}^{r_k} \dots (\lambda_{ijk\dots} \cap A^{m_i} B^{n_j} C^{p_k} \dots)$$

с аргументами из множества \mathbf{M} булевых квадратных $\{0, 1\}$ -матриц одинаковых размеров с полуперманентами, равными 1, и коэффициентами $\lambda_{ijk\dots}$ из булевой $\{0, 1\}$ -алгебры сохраняет равенство полуперманентов. Причем, если не все коэффициенты $\lambda_{ijk\dots}$ равны нулю, то и $\nabla^+ f(A, B, C, \dots) = \bar{\nabla} f(A, B, C, \dots) = 1$.

Доказательство. Следует показать, во-первых, что произведение $A \sqcap B$ матриц A, B с полуперманентами, равными 1, есть матрица с полуперманентами, равными 1. Во-вторых, объединение $A \cup B$ матриц A, B из \mathbf{M} есть матрица из \mathbf{M} .

Для доказательства первого воспользуемся известными формулами для полуперманентов (см., напр., [2, 3] или [4, §19]):

$$(\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \sqcap B)$$

и

$$(\overset{-}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{-}{\nabla} B) \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \sqcap B).$$

Следовательно, из $\overset{\pm}{\nabla} A = \overset{\pm}{\nabla} B = 1$ получаем $\overset{\pm}{\nabla} (A \sqcap B) = 1$.

Показать, что объединение матриц $A \cup B$ с полуперманентами, равными 1, есть матрица с полуперманентами, равными 1, можно таким же образом, если учитывать неравенства

$$\overset{+}{\nabla} A \cup \overset{+}{\nabla} B \subseteq \overset{+}{\nabla} (A \cup B)$$

и

$$\overset{-}{\nabla} A \cup \overset{-}{\nabla} B \subseteq \overset{-}{\nabla} (A \cup B),$$

которые несложно проверить.

То, что пересечение $\lambda \cap A$ матрицы A с равными полуперманентами с булевым коэффициентом λ есть матрица с равными полуперманентами, является совершенно очевидным.

Таким образом, произвольный матричный многочлен с аргументами из \mathbf{M} и коэффициентами из булевой $\{0, 1\}$ -алгебры сохраняет равенство полуперманентов. \square

Пример. Нетрудно увидеть, что множество матриц размера 2×2 с равными 1 полуперманентами состоит из одной матрицы вида $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матрицами размера 3×3 из \mathbf{M} являются матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и любые матрицы, которые содержат указанные матрицы A , B или C .

Следствие 1. Множество $\mathbf{M} \cup \{O\}$ булевых квадратных $\{0, 1\}$ – матриц одинаковых размеров с полуперманентами, равными 1, дополненное нулевой матрицей O , является полукольцом с аддитивной операцией \cup и мультипликативной операцией произведения булевых матриц.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение законов дистрибутивности:

$$(A \cup B) \cdot C = A \cdot C \cup B \cdot C, \quad A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C.$$

Действительно, для элемента $((A \cup B) \cdot C)_j^i$, стоящего в строке i и столбце j матрицы $(A \cup B) \cdot C$, получаем

$$((A \cup B) \cdot C)_j^i = \bigcup_k ((A_k^i \cup B_k^i) \cap C_j^k) = \bigcup_k (A_k^i \cap C_j^k) \cup \bigcup_k (B_k^i \cap C_j^k) = (A \cdot C \cup B \cdot C)_j^i.$$

Вторая формула доказывается аналогично. \square

Следствие 2. Множество $\mathbf{M} \cup \{O\}$ булевых квадратных $\{0, 1\}$ -матриц одинаковых размеров с полуперманентами, равными 1, пополненное нулевой матрицей O , является полумодулем с аддитивной операцией объединения матриц над полукольцом скаляров, которым является булева $\{0, 1\}$ -алгебра.

Доказательство. То, что любая линейная комбинация матриц из $\mathbf{M} \cup \{O\}$ является матрицей из $\mathbf{M} \cup \{O\}$, очевидно, является следствием доказанной выше теоремы. Таким образом, $\mathbf{M} \cup \{O\}$ образует полумодуль, то есть непустое множество с двумя операциями, объединением матриц $A \cup B = (a_j^i \cup b_j^i) \in \mathbf{B}_{m \times n}$ (заменяющим сложение) и пересечением матрицы с элементом из булевой алгебры $\lambda \cap A = (\lambda \cap a_j^i) \in \mathbf{B}_{m \times n}$ (заменяющим умножение на скаляр), которые удовлетворяют для любых матриц и булевых скаляров следующим аксиомам:

- 1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$
- 2) $A \cup B = B \cup A;$
- 3) $A \cup O = A;$
- 4) $1 \cap A = A;$
- 5) $(\alpha \cap \beta) \cap A = \alpha \cap (\beta \cap A);$
- 6) $(\alpha \cup \beta) \cap A = (\alpha \cap A) \cup (\beta \cap A);$
- 7) $\alpha \cap (A \cup B) = (\alpha \cap A) \cup (\alpha \cap B).$

\square

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гутерман А.Э., Михалев А.В. Общая алгебра и линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты //Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9, №1. С. 83–101.
2. Поплавский В.Б. Ориентированные определители произведения булевых матриц //Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 111–114.
3. Golan J.S. Semirings and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
4. Reutenauer C., Straubing H. Inversion of matrices over a commutative semiring // J. of Algebra. 1984. Vol. 88. P. 350–360.

Е.В. Разумовская

**ОБ ОДНОМ КОЭФФИЦИЕНТНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ
В ПОДКЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ
«ТИПИЧНО» ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

Пусть C — класс Каратеодори функций $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$, аналитических в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$, $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$. Выделим его подкласс $C(\alpha, \gamma)$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{1-\alpha}$, функций $h(z)$: $h(z) = 1 + h_1z + h_2z^2 + \dots$ таких, что $h(z) = \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)p(z)+\alpha} + \gamma$, $p(z) \in C$. Через S обозначим класс всех аналитических и однолистных в круге E функций $f(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ и рассмотрим его подклассы: $S^M = \{f(z) \in S, |f(z)| < M \quad \forall z \in E, 1 < M < \infty\}$ — класс однолистных ограниченных функций и $S^M(\alpha, \gamma)$, который вводится по аналогии с S^M [1, 2]: если обозначить $C_t(\alpha, \gamma)$ подкласс $C(\alpha, \gamma)$ функций $h(z, t)$, определенных на $E \times [0, \log M]$ и удовлетворяющих условию: $h(\cdot, t) \in C(\alpha, \gamma)$ для почти всех $t \in [0, \log M]$; $h(w, \cdot)$ измерима на $[0, \log M] \quad \forall w \in E$, то будем говорить, что функция $f(z) \in S^M(\alpha, \gamma)$. Она представима в виде

$$f(z) = M f(z, \log M, h), \quad (1)$$

где $f(z, t, h)$ — решение дифференциального уравнения Лёвнера — Куфарева

$$\frac{dw}{dt} = -wh(w, t), \quad t \in [0, \log M], \quad h \in C_t(\alpha, \gamma)$$

с начальным условием $w|_{t=0} = z$, $z \in E$. А также будем говорить, что $f(z) \in S_R^M(\alpha, \gamma)$, если $f(z) \in S^M(\alpha, \gamma)$ и удовлетворяет в E : $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

Экстремальные задачи о начальных коэффициентах класса S и его подклассов, восходящие к знаменитой гипотезе Бибербаха, рассматривались в работах многих математиков. В частности, взаимное изменение второго и третьего коэффициента тейлоровского разложения функций класса $S^M(\alpha, \gamma)$ и $S_R^M(\alpha, \gamma)$ было изучено в работах А.Ю. Васильева [2, 3]. В настоящей статье исследуется множество значений функционала

(a_2, a_2a_3) в классе $S_R^M(\alpha, \gamma)$. Обозначим

$$\begin{aligned}\Phi_1(\xi) &= \xi^3 \log^3 M + \frac{\alpha \xi^3 \log^2 M}{(1-\alpha)(1-\gamma)} + (1-\alpha)(1-\gamma) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \xi \log M, \\ \Phi_2(\xi) &= \xi^3 \log^3 M - \frac{\xi^3 \log^2 M}{1-\gamma} + (1-\alpha)(1-\gamma) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \xi \log M, \\ \Phi_3 &= 2(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2 \left(\frac{1}{M} - 1 \right)^2 \times \\ &\quad \times \left(4(1-\alpha)(1-\gamma) \left(\frac{1}{M} - 1 \right) + \left(\frac{1}{M} + 1 \right) (1-2\alpha) \right).\end{aligned}$$

Теорема. Граница системы функционалов (a_2, a_2a_3) в классе $S_R^M(\alpha, \gamma)$ определяется в параметрическом виде следующими условиями:

при $0 \leq \gamma \leq 1$,
если $0 \leq |\xi| \leq \frac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{M}$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, то $a_2 = \xi \log M$, $|a_2a_3| \leq \Phi_1(|\xi|)$, а
при $1/2 \leq \alpha < 1$, получаем $a_2 = \xi \log M$, $|a_2a_3| \leq \Phi_2(|\xi|)$;

при $1 \leq \gamma \leq \frac{1}{1-\alpha}$,
если $0 \leq |\xi| \leq \frac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{M}$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, то $a_2 = \xi \log M$, $|a_2a_3| \leq \Phi_2(|\xi|)$, а
при $1/2 \leq \alpha < 1$, получаем $a_2 = \xi \log M$, $|a_2a_3| \leq \Phi_1(|\xi|)$;
если $\frac{2(1-\alpha)(1-\gamma)}{M} \leq |\xi| \leq 2(1-\alpha)(1-\gamma)$, то $a_2 = \pm 2(1-\alpha)(1-\gamma) \left(\frac{1}{M} - 1 \right)$,
 $|a_2a_3| \leq \Phi_3$.

Каждая точка границы этого множества значений доставляется единственной функцией, представимой в виде (1), где

$$\begin{aligned}h(z, t) &= \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)p(z, t) + \alpha} + \gamma, \\ p(z, t) &= \frac{\left(1 + \frac{p_1(t)}{2}\right)(1+z)^{\frac{1\pm z}{1\mp z}} + \left(1 - \frac{p_1(t)}{2}\right)(1-z)^{\frac{1\mp z}{1\pm z}}}{\left(1 + \frac{p_1(t)}{2}\right)(1-z)^{\frac{1\mp z}{1\pm z}} + \left(1 - \frac{p_1(t)}{2}\right)(1+z)^{\frac{1\pm z}{1\mp z}}}, \\ p_1(t) &= [-\xi e^t]_{-2(1-\alpha)|1-\gamma|}^{2(1-\alpha)|1-\gamma|}.\end{aligned}$$

Доказательство. В работе [2] описаны границы множества G — взаимного изменения коэффициентов h_1 и h_2 в классе $C_R(\alpha, \gamma)$. Будем решать задачу об экстремуме a_2a_3 при фиксированном a_2 как задачу оптимального управления, задав вектор фазовых координат $(x_1(t), x_2(t)) = (a_2(t), a_3(t))$ и вектор управлений $(u_1(t), u_2(t)) = (h_1(t), h_2(t))$,

$(u_1, u_2) \in G$. Из уравнения Лёвнера – Куфарева получаем динамическую систему [2] и рассматриваем задачу о минимизации функционала:

$$a_2 a_3 = - \int_0^{\log M} [x_2(t)u_1(t)e^{-t} + 2x_1^2(t)u_1(t)e^{-t} + x_1(t)u_2(t)e^{-2t}] dt.$$

Составляя функцию Гамильтона и применяя принцип максимума Понтрягина, имеем, что оптимальное управление, доставляющее максимум функции Гамильтона при почти всех $t \in [0, \log M]$, принадлежит границе области G . Исследуя глобальный максимум на G функции Гамильтона при различных значениях параметров α и γ , получаем условия выбора оптимального управления с учётом выхода на границу изменения управления $u_1(t)$. Учитывая, что $t \leq \log M$ и подставляя $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в уравнения динамической системы, получаем утверждения теоремы. Справедливость теоремы при $\alpha = 0$ следует из возможности перехода к пределу при $\alpha \rightarrow 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
2. Васильев А.Ю. Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных функций // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 1. С. 56–65.
3. Васильев А.Ю. Взаимное изменение начальных коэффициентов в подклассах однолистных функций // Вычислительные методы и программирование. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. С. 55–64.

УДК 519.83

В.В. Розен

ДОПУСТИМЫЕ ИСХОДЫ ДЛЯ ВЕЕРНЫХ СТРУКТУР КОАЛИЦИЙ

1. Рассматриваются игры с квазиупорядоченными исходами вида

$$G = \langle (X_i)_{i \in I}, A, (\omega_i)_{i \in I}, F \rangle, \quad (1)$$

где X_i — множество стратегий игрока $i \in I$, $I = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, A — множество исходов, ω_i — отношение квазипорядка на A , выражающее предпочтения игрока i , $F : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow A$ — функция реализации.

Никаких ограничений на множества A, X_i ($i \in I$) a priori не накладывается. Под *коалицией* в игре G понимается любое непустое подмножество

$S \subseteq I$. Множество стратегий коалиции S определяется как $X_S = \prod_{i \in S} X_i$, а отношение предпочтения коалиции S задаётся в виде $\omega_S = \bigcap_{i \in S} \omega_i$.

Определение. Стратегия $x_S \in X_S$ называется *возражением коалиции* S на исход $a \in A$, если при любой стратегии дополнительной коалиции $y_{I \setminus S} \in \prod_{i \in I \setminus S} X_i$ выполнено $F(x_S, y_S) \stackrel{\omega_S}{>} a$.

Исход a называется *допустимым для коалиции* S , если у неё не существует возражений на этот исход.

Исход a называется *допустимым для семейства коалиций* $K \subseteq 2^I$ (короче — K -допустимым), если он допустим для всех коалиций этого семейства.

В статье найдены условия, накладываемые как на компоненты игры G вида (1), так и на структуру коалиций K , обеспечивающие существование в игре G K -допустимых исходов. Статья является продолжением исследований, начатых в [1].

2. Будем говорить, что семейство коалиций K образует *веерную структуру*, если любые две коалиции из K либо не пересекаются, либо одна из них содержится в другой.

Основная теорема. Пусть в игре G все квазиупорядоченные множества $\langle A, \omega_i \rangle (i \in I)$ удовлетворяют условию обрыва возрастающих цепей (ОВЦ). Тогда для любой веерной структуры коалиций K существует K -допустимый исход.

Доказательство разбивается на ряд лемм.

Лемма 1. Из условия ОВЦ для всех $\langle A, \omega_i \rangle (i \in I)$ следует условие ОВЦ для любого квазиупорядоченного множества $\langle A, \omega_S \rangle$, где $S \subseteq A$.

Действительно, предположим, что существует бесконечно возрастающая последовательность

$$a_1 \stackrel{\omega_S}{<} \dots \stackrel{\omega_S}{<} a_k \stackrel{\omega_S}{<} a_{k+1} \stackrel{\omega_S}{<} \dots$$

Для каждой пары вида $a_k \stackrel{\omega_S}{<} a_{k+1}$ найдётся индекс $i_k = 1, \dots, m$, где $m = |S|$, при котором $a_k \stackrel{\omega_{i_k}}{<} a_{k+1}$. Получаем бесконечную последовательность

$$a_1 \stackrel{\omega_{i_1}}{<} a_2 \stackrel{\omega_{i_2}}{<} \dots a_k \stackrel{\omega_{i_k}}{<} a_{k+1} \stackrel{\omega_{i_{k+1}}}{<} \dots \quad (2)$$

Так как индексы i_1, \dots, i_k, \dots принимают лишь конечное число значений, хотя бы один из них (например i_p) встречается в последовательности (2) бесконечное число раз. В итоге получаем бесконечно возрастаю-

щую последовательность по отношению ω_{ip} , что противоречит условию ОВЦ в квазиупорядоченном множестве $\langle A, \omega_{ip} \rangle$.

Для формулировки следующего результата введём

Определение. Пусть K — семейство коалиций. Назовём коалицию $S \in K$ *существенной*, если существует такой исход $a \in A$, который допустим для всех коалиций из K , строго содержащихся в S , но не допустим для коалиции S . В противном случае коалиция S называется *несущественной*.

Лемма 2. *Исход, допустимый для всех существенных коалиций, принадлежащих K , является допустимым для всех коалиций из K .*

Доказательство. Определим по индукции высоту $h(S)$ коалиций $S \in K$ условием:

$$\begin{cases} h(S) = 0, & \text{если } S \text{ является минимальной в } K \text{ (по включению);} \\ h(S) = \max_{T \subset S, T \in K} h(T) + 1. & \end{cases}$$

Пусть a — исход, допустимый для всех существенных коалиций из K . Предположим, что a недопустим для некоторой коалиции из K . Обозначим через S_0 принадлежащую K коалицию наименьшей высоты, для которой исход a является недопустимым. Тогда по предположению коалиция S_0 несущественная. Так как условие $T \subset S$ влечёт $h(T) < h(S)$, то для всех коалиций $T \subset S_0$, где $T \in K$, исход a является допустимым; получаем, что коалиция S_0 является существенной, что ведёт к противоречию.

Перейдём к доказательству теоремы. Пусть K — веерная структура коалиций. В силу леммы 2 можно считать, что K содержит только существенные коалиции. Для произвольной коалиции $S \in K$ обозначим через K_S множество тех коалиций из K , которые строго содержатся в S .

Пусть $D(K_S)$ — множество исходов, допустимых для всех коалиций из K_S , а $\overline{D}(S)$ — множество исходов, недопустимых для коалиции S . Положим $\Delta(S) = D(K_S) \cap \overline{D}(S)$; из определения существенной коалиции следует, что $\Delta(S) \neq \emptyset$. В силу леммы 1 непустое множество $\Delta(S)$ имеет максимальной элемент $a_S \in \Delta(S)$ относительно квазипорядка ω_S . Так как $a_S \in \overline{D}(S)$, то существует выражение x_S коалиции S на исход a_S . Пусть K^* — множество всех максимальных по включению коалиций из K . Для каждой коалиции $S \in K^*$ зафиксирует выражение x_S коалиции S на исход a_S . В силу условия веерности, максимальные коалиции из K^* попарно не пересекаются, поэтому существует такая стратегия x_{S^*} коалиции $S^* = \bigcup_{S \in K^*} S$, для которой её проекция на S совпадает с x_S при любой $S \in K^*$. Ввиду этого при каждой стратегии $y_{I \setminus S^*}$ дополнительной коалиции $I \setminus S^*$ для $S \in K^*$ выполнено

$$F(x_{S^*}, y_{I \setminus S^*}) \stackrel{\omega_S}{>} a_S. \quad (3)$$

Покажем, что всякий исход вида $a^* = F(x_{S^*}, y_{I \setminus S^*})$ является допустимым для всех коалиций из K . Проверим вначале это утверждение для максимальной коалиции $S \in K^*$. Убедимся, что a^* допустим для любой коалиции $T \in K_S$. Действительно, по предположению $a_S \in \Delta(S) \subseteq D(K_S)$, т.е. a_S допустим для коалиции T ; так как $a^* \stackrel{\omega_S}{>} a_S$ и $\omega_S \subseteq \omega_T$, то $a^* \stackrel{\omega_T}{>} a_S$, следовательно, исход a^* тем более допустим для коалиции T . Показали, что $a^* \in D(K_S)$ для $S \in K^*$. Предположим, что a^* недопустим для коалиции S . Тогда $a^* \in \overline{D}(S)$, значит, $a^* \in D(K_S) \cap \overline{D}(S) = \Delta(S)$, что вместе с условием (3) приводит к противоречию со свойством максимальности элемента a_S в $\Delta(S)$. Итак, исход a^* указанного вида допустим для всякой максимальной коалиции $S \in K^*$, а также для всех содержащихся в ней коалиций семейства K . Учитывая, что всякая коалиция из K либо сама является максимальной, либо строго содержится в некоторой максимальной, получаем окончательно, что исход a^* допустим для всех коалиций семейства K .

Отметим ряд следствий доказанной теоремы.

Следствие 1. *Пусть G — игра с квазиупорядоченными исходами, в которой квазиупорядоченные множества $\langle A, \omega_i \rangle$ ($i \in I$) удовлетворяют условиям ОВЦ. Тогда*

- a) для любого семейства K попарно не пересекающихся коалиций существует K -допустимый исход;
- b) для любой цепи коалиций K существует K -допустимый исход;
- c) существует исход, обладающий свойствами индивидуальной и коллективной рациональности (т.е. допустимый для каждого игрока $i \in I$ и коалиции I всех игроков).

Следствие 2. *В игре G двух игроков, в которой выполнены условия ОВЦ, существует исход, допустимый для всех коалиций.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В.В. Кооперативные игры с квазиупорядоченными исходами // Кибернетика. 1988. № 6. С. 77–82.

ИНВАРИАНТ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ ЭКВИДИСТАНТЫ РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Введено особое гиперболическое расстояние Ω между точками изотропных прямых расширенной гиперболической плоскости H^2 . Выделена подгруппа G^h группы движений плоскости H^2 , относительно которой инвариантно расстояние Ω . Показано, что подгруппа G^h является группой симметрий эквидистанты плоскости H^2 .

Пусть абсолют расширенной гиперболической плоскости H^2 в каноническом репере R задан уравнением

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0, \quad (1)$$

тогда матрица преобразований фундаментальной группы G плоскости H^2 в репере R имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b & 2\varepsilon\sqrt{ab} \\ c & d & 2\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{cd} \\ \varepsilon_1\sqrt{ac} & \varepsilon_2\sqrt{bd} & \varepsilon\varepsilon_1\sqrt{bc} + \varepsilon\varepsilon_2\sqrt{ad} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\Delta = \varepsilon\varepsilon_2\sqrt{ad} - \varepsilon\varepsilon_1\sqrt{bc} \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, a, b, c, d – неотрицательные действительные числа.

Каждой паре точек A и B плоскости H^2 , заданных в репере R вещественными координатами $A(a_i)$, $B(b_i)$, $i = 1, 2, 3$, где $a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_3 < 0$, поставим в соответствие тройку чисел:

$$\left(\left| \frac{b_1}{\sqrt{b_3^2 - b_1b_2}} - \frac{a_1}{\sqrt{a_3^2 - a_1a_2}} \right|; \left| \frac{b_2}{\sqrt{b_3^2 - b_1b_2}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_3^2 - a_1a_2}} \right|; \left| \frac{b_3}{\sqrt{b_3^2 - b_1b_2}} - \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 - a_1a_2}} \right| \right), \quad (3)$$

которую назовем *координатами пары* A, B в репере R .

Лемма. *Пара точек A, B плоскости H^2 определяет изотропную прямую тогда и только тогда, когда в каждом каноническом репере ее координаты $(x; y; z)$ (3) удовлетворяют условию: $xy = z^2$.*

Применяя лемму, найдем значение Ψ_{AB} тангенциальной метрической квадратичной формы $\Psi(X) = 4X_1X_2 - X_3^2$ плоскости H^2 , соответствующей заданию абсолюта (1), от координат (3) пары точек A, B изотропной прямой:

$$\Psi_{AB} = \frac{3 \left(b_3\sqrt{a_3^2 - a_1a_2} - a_3\sqrt{b_3^2 - b_1b_2} \right)^2}{(a_3^2 - a_1a_2)(b_3^2 - b_1b_2)}. \quad (4)$$

Число $\Omega_{AB} = \sqrt{\frac{1}{3}\Psi_{AB}}$ назовем *особым гиперболическим расстоянием* между точками A и B изотропной прямой плоскости H^2 . Согласно равенству (4)

$$\Omega_{AB} = \left| \frac{b_3}{\sqrt{b_3^2 - b_1 b_2}} - \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 - a_1 a_2}} \right|. \quad (5)$$

С учетом формулы (5.6) [1, с. 287] в репере $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ равенство (5) можно записать в виде

$$\Omega_{AB} = |f_c(BA_3) - f_c(AA_3)|, \quad (6)$$

где f_c — соответственно типу прямой $AA_3(BA_3)$ эллиптический или гиперболический косинус расстояния $AA_3(BA_3)$.

Теорема. *Преобразование H из фундаментальной группы G плоскости H^2 сохраняет без изменения особое гиперболическое расстояние Ω между точками изотропных прямых тогда и только тогда, когда коэффициенты матрицы (2) преобразования H удовлетворяют условиям: $b = c = 0$ или $a = d = 0$.*

Все преобразования группы G , относительно которых инвариантно особое гиперболическое расстояние Ω между точками изотропных прямых, образуют группу (обозначим ее G^h). Согласно теореме в репере R каждое преобразование группы G^h может быть задано одной из следующих матриц:

$$C_1 : \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\sqrt{ad} \end{pmatrix}, C_2 : \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\sqrt{bc} \end{pmatrix}, ad \neq 0, bc \neq 0, \varepsilon = \pm 1. \quad (7)$$

Матрица C_1 в соответствии с терминологией [2] определяет на плоскости H^2 отражение от прямой ($a = d, \varepsilon = -1$), сдвиг вдоль прямой ($a \neq d, \varepsilon = 1$) и скользящее отражение ($a \neq d, \varepsilon = -1$). Матрица C_2 — отражение от прямой ($\varepsilon = 1$) и поворот вокруг внутренней относительно абсолюта точки ($\varepsilon = -1$).

В каждом преобразовании группы G^h инвариантна гиперболическая прямая (A_1A_2) плоскости H^2 и ее полюс ($A_3(0 : 0 : 1)$) относительно абсолютной квадрики (1). И, обратно, каждое преобразование группы G , относительно которого инвариантна прямая A_1A_2 , задано одной из матриц (7). Прямая A_1A_2 однозначно определяет пучок эквидистантных конических сечений с базой A_1A_2 ($x_3^2 - kx_1x_2 = 0, k < 1$), ивариантных относительно преобразований группы G^h . Таким образом, группа G^h является группой симметрий эквидистанты плоскости H^2 .

Группа G^h как подгруппа группы проективных преобразований проективной плоскости P^2 определяет геометрию плоскости $P^2 \setminus T_3$ с вырожденным кубическим абсолютом T_3 , состоящим из овальной линии и пересекающей ее действительной прямой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розенфельд Б.А., Замаховский М.П. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. М.: МЦНМО, 2003. 560 с.

2. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит. 1955. 744 с.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов

О ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными полураспадающимися краевыми условиями специальной структуры:

$$\begin{aligned} U_i(y, \lambda) &:= \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \\ U_i(y, \lambda) &:= \sum_{s+k \leq \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k \leq \varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $n-l \leq l < n$.

Пусть корни $\{\omega_j\}_1^n$ характеристического уравнения

$$\sum_{s+k=n} p_{sk} \omega^k = 0$$

различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n. \quad (3)$$

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует m -кратная ($1 \leq m \leq n$) полнота

системы корневых (собственных и присоединенных) функций этого пучка в пространстве $L_2[0, 1]$.

Основополагающей по указанной проблеме является работа [1], в которой была сформулирована теорема об n -кратной полноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением со специальной главной частью

$$\ell(y, \lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в работе [2] в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения и в работе [3] в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в [4]. Случай произвольной главной части дифференциального выражения был рассмотрен в работах [5, 6]. В работах [7, 8], относящихся к общему виду пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n -кратной полноты в $L_2[0, 1]$ системы корневых функций в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка на некоторых лучах. Детальное исследование вопроса об n - и m -кратной полноте и неполноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, проведено в работе [9].

Для рассматриваемого пучка (1), (2) с условием (3) не выполняется основное предположение [9], а именно, что существует прямая d , проходящая через начало, не содержащая ω -корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше $n - l$.

Для формулировки основного результата введем обозначения:

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk} \omega_j^k, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk} \omega_j^k, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}, \quad i = \overline{l+1, n}; \quad [n]_+ = \begin{cases} n, & \text{если } n \geq 0, \\ 0, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если выполняется условие (3) и*

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^l \neq 0, \quad \det(a_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0, \quad \det(b_{ij})_{i,j=l+1}^n \neq 0,$$

то система корневых функций пучка (1), (2) m -кратно полна в $L_2[0, 1]$ при $m \leq n - l$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum_{i=l+1}^n [m - 1 - \varkappa_i]_+$.

Теорема точна в следующем смысле. При $l = n - 1$ и $m = n - l + 1 (= 2)$ в $[10, 11]$ получены достаточные условия на корни $\{\omega_j\}_1^n$, при которых системы корневых функций пучков вида (1), (2) 2-кратно неполны в $L_2[0, 1]$ и имеют бесконечный дефект.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
2. Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Дис. ... дра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.
3. Шкаликов А.А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.
4. Хромов А.П. О порождающих функциях вольтерровых операторов // Мат. сб. 1977. Т. 102(144), № 3. С. 457–472.
5. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschen // Math. Z. 1984. Vol. 188, № 1. P. 55–68.
6. Тихомиров С.А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1987. 126 с.
7. Gasymov M.G., Magerramov A.M. О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов // Докл. АН Азерб. ССР. 1974. Т. 30, № 12. С. 9–12.
8. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.
9. Вагабов А.И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
10. Рыхлов В.С. О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 114–117.
11. Рыхлов В.С. О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // Докл. РАН. Саратов, 2004. № 4. С. 72–79.

Т.Ф. Савина

ГОМОМОРФИЗМЫ И КОНГРУЭНТНОСТИ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Игра двух игроков с отношениями предпочтения определяется как система объектов

$$G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F \rangle,$$

где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, A — множество исходов, ρ_i — отношение предпочтения игрока i , $i = 1, 2$, заданное на A , F — отображение множества ситуаций $X \times Y$ в множество исходов A .

Пусть теперь, кроме игры G , задана еще одна игра с отношениями предпочтения тех же игроков $\Gamma = \langle U, V, B, \sigma_1, \sigma_2, \Phi \rangle$.

Определение 1. Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1: X \rightarrow U$, $\varphi_2: Y \rightarrow V$, $\psi: A \rightarrow B$, называется *гомоморфизмом игры* G в *игру* Γ , если для $i = 1, 2$ выполняются следующие условия:

$$a_1 \stackrel{\rho_i}{\lesssim} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \stackrel{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2), \quad (i = 1, 2), \quad (H1)$$

$$\psi \circ F = \Phi \circ (\varphi_1 \square \varphi_2). \quad (H2)$$

Определение 2. Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1: X \rightarrow U$, $\varphi_2: Y \rightarrow V$, $\psi: A \rightarrow B$, называется *строгим гомоморфизмом игры* G в *игру* Γ , если выполняются следующие условия (здесь ρ_i^* есть строгая часть, а ρ_i^s — симметричная часть отношения ρ_i):

$$a_1 \stackrel{\rho_i^*}{\lessdot} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \stackrel{\sigma_i^*}{\lessdot} \psi(a_2), \quad (i = 1, 2), \quad (H1a)$$

$$a_1 \stackrel{\rho_i^s}{\sim} a_2 \Rightarrow \psi(a_1) \stackrel{\sigma_i^s}{\sim} \psi(a_2) \quad (i = 1, 2) \quad (H1b)$$

и условие (H2).

Ясно, что строгий гомоморфизм является гомоморфизмом, но обратное неверно.

Если φ_1 — отображение X на U , φ_2 — отображение Y на V (т.е. эти отображения являются сюръекциями), то гомоморфизм $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ называется сюръективным или гомоморфизмом игры G на игру Γ . Если же отображения φ_1 , φ_2 и ψ являются биекциями и выполняется условие

$$a_1 \stackrel{\rho_i}{\lesssim} a_2 \Leftrightarrow \psi(a_1) \stackrel{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

то гомоморфизм $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ называется *изоморфизмом игры* G на игру Γ . Две игры с отношениями предпочтения называются *изоморфными*, если существует изоморфизм одной из них на другую. Если отображения φ_1, φ_2 и ψ инъективны и в условии (1) вместо \Leftrightarrow выполнена импликация \Rightarrow , то будем говорить, что *первая игра изоморфно вкладывается во вторую*.

Теорема 1. Пусть $G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F \rangle$ — игра с отношениями предпочтения. Пусть на множествах стратегий игроков и множестве исходов заданы отношения эквивалентности $\varepsilon_1 \subseteq X^2, \varepsilon_2 \subseteq Y^2, \varepsilon_3 \subseteq A^2$ и для тройки эквивалентностей $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ выполняется следующее условие согласованности:

$$\left. \begin{array}{l} x' \stackrel{\varepsilon_1}{\equiv} x \\ y' \stackrel{\varepsilon_2}{\equiv} y \end{array} \right\} \Rightarrow F(x', y') \stackrel{\varepsilon_3}{\equiv} F(x, y). \quad (2)$$

Тогда определена фактор-игра

$$G/\varepsilon = \langle X/\varepsilon_1, Y/\varepsilon_2, A/\varepsilon_3, \rho_1/\varepsilon_3, \rho_2/\varepsilon_3, F_\varepsilon \rangle$$

с отношениями предпочтения, и тройка канонических отображений $\varphi = (\varphi_{\varepsilon_1}, \varphi_{\varepsilon_2}, \varphi_{\varepsilon_3})$ является сюръективным гомоморфизмом G на G/ε .

Доказательство.

Определим функцию реализации F_ε игры G/ε условием: $F_\varepsilon([x]_{\varepsilon_1}, [y]_{\varepsilon_2}) \stackrel{df}{=} [F(x, y)]_{\varepsilon_3}$.

Покажем, что определение отображения F_ε корректно, т.е. не зависит от выбора представителей из классов эквивалентностей. Действительно, возьмем других представителей этих классов $x' \in [x]_{\varepsilon_1}, y' \in [y]_{\varepsilon_2}$. Тогда $x' \stackrel{\varepsilon_1}{\equiv} x, y' \stackrel{\varepsilon_2}{\equiv} y$, отсюда по условию согласованности $F(x', y') \stackrel{\varepsilon_3}{\equiv} F(x, y)$, т.е. $[F(x', y')]_{\varepsilon_3} = [F(x, y)]_{\varepsilon_3}$. Таким образом, корректность определения отображения F_ε сводится к выполнению условия согласованности.

Определение функции реализации F_ε может быть записано в виде $F_\varepsilon(\varphi_{\varepsilon_1}(x), \varphi_{\varepsilon_2}(y)) = \varphi_{\varepsilon_3}(F(x, y))$. Таким образом, здесь выполнено условие (H2) гомоморфизма, причем $\psi = \varphi_{\varepsilon_3}, \Phi = F_\varepsilon, \varphi_1 = \varphi_{\varepsilon_1}, \varphi_2 = \varphi_{\varepsilon_2}$. Условие (H1) гомоморфизма выполняется по определению фактор-отношения.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть G, Γ — две игры с отношениями предпочтения и тройка отображений $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — гомоморфизм G на Γ .

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) тройка отношений эквивалентности $\varepsilon_\varphi = (\varepsilon_{\varphi_1}, \varepsilon_{\varphi_2}, \varepsilon_{\varphi_3})$, каждое из которых представляет собой ядро соответствующего отображения,

удовлетворяет условию согласованности (2), следовательно, можно построить фактор-игру G/ε_φ ;

2) существует тройка отображений $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ из игры G/ε_φ в Γ , которая является изоморфным вложением G/ε_φ в Γ .

Доказательство.

1. По определению выполняются равносильности:

$$x' \stackrel{\varepsilon_{\varphi_1}}{\equiv} x \Leftrightarrow \varphi_1(x') = \varphi_1(x);$$

$$y' \stackrel{\varepsilon_{\varphi_2}}{\equiv} y \Leftrightarrow \varphi_2(y') = \varphi_2(y);$$

$$a' \stackrel{\varepsilon_{\varphi_3}}{\equiv} a \Leftrightarrow \varphi_3(a') = \varphi_3(a).$$

Каждое из отношений $(\varepsilon_{\varphi_1}, \varepsilon_{\varphi_2}, \varepsilon_{\varphi_3})$ является отношением эквивалентности. Проверим условие согласованности, которое сводится здесь к выполнению равенства $\varphi_{\varepsilon_3}(F(x', y')) = \varphi_{\varepsilon_3}(F(x, y))$. Так как $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — гомоморфизм, то доказываемое равенство принимает вид $\Phi(\varphi_1(x'), \varphi_2(y')) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$, а так как $\varphi_1(x') = \varphi_1(x)$, $\varphi_2(y') = \varphi_2(y)$, то доказываемое равенство очевидно. По теореме 1 можно построить фактор-игру G/ε_φ , причем тройка канонических отображений будет сюръективным гомоморфизмом G на G/ε_φ .

2. Строим изоморфное вложение игры G/ε_φ в игру Γ по правилу: $\theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}) = \varphi_1(x)$, $\theta_2([y]_{\varepsilon_{\varphi_2}}) = \varphi_2(y)$, $\theta_3([a]_{\varepsilon_{\varphi_3}}) = \varphi_3(a)$. Убедимся, что определения отображений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ корректны, т.е. каждое из указанных отображений не зависит от выбора представителя из соответствующего класса эквивалентности. Пусть x' и x находятся в одном и том же классе, тогда $x' \stackrel{\varepsilon_{\varphi_1}}{\equiv} x$, откуда $\varphi_1(x') = \varphi_1(x)$. Аналогично убеждаемся в корректности определений θ_2, θ_3 .

Докажем инъективность отображений $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (например, для θ_1). Инъективность следует из цепочки равносильностей

$$\theta_1([x']_{\varepsilon_{\varphi_1}}) = \theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}) \Leftrightarrow \varphi_1(x') = \varphi_1(x) \Leftrightarrow x' \stackrel{\varepsilon_{\varphi_1}}{\equiv} x \Leftrightarrow [x']_{\varepsilon_{\varphi_1}} = [x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}.$$

Проверим, что тройка отображений $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ является гомоморфизмом из игры G/ε_φ в Γ .

Убедимся, что выполняется условие (H1). Пусть $([a_1]_{\varepsilon_{\varphi_3}}, [a_2]_{\varepsilon_{\varphi_3}}) \in \rho_i/\varepsilon_{\varphi_3}$. Тогда $\exists a'_1 \stackrel{\varepsilon_{\varphi_3}}{\equiv} a_1, a'_2 \stackrel{\varepsilon_{\varphi_3}}{\equiv} a_2$ (т.е. $\varphi_3(a'_1) = \varphi_3(a_1), \varphi_3(a'_2) = \varphi_3(a_2)$) ($a'_1, a'_2 \in \rho_i$; так как φ — гомоморфизм, то $(\varphi_3(a'_1), \varphi_3(a'_2)) \in \sigma_i$). Используя написанные выше равенства, получаем $(\varphi_3(a_1), \varphi_3(a_2)) \in \sigma_i$. Согласно определению θ_3 получаем $(\theta_3([a_1]_{\varepsilon_{\varphi_3}}), \theta_3([a_2]_{\varepsilon_{\varphi_3}})) \in \sigma_i$.

Условие (H2) принимает вид

$$\theta_3(F_\varepsilon([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}, [y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})) = \Phi(\theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}), \theta_2([y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})).$$

Запишем цепочку равенств:

$$\theta_3(F_\varepsilon([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}, [y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})) = \theta_3([F(x, y)]_{\varepsilon_{\varphi_3}}) = \varphi_3(F(x, y));$$

так как φ — гомоморфизм, то

$$\varphi_3(F(x, y)) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) = \Phi(\theta_1([x]_{\varepsilon_{\varphi_1}}), \theta_2([y]_{\varepsilon_{\varphi_2}})).$$

Обратная импликация в (1) может не выполняться. Таким образом, тройка отображений $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ является изоморфным вложением факторигры G/ε_φ в игру Γ .

Теорема доказана.

УДК 517.518.85

С.П. Сидоров

ОШИБКА ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ АЛГОРИТМАМИ

Пусть W есть замкнутое уравновешенное выпуклое подмножество линейного пространства X . Рассмотрим проблему оптимального восстановления линейного функционала L на основе множества значений линейных функционалов l_1, \dots, l_n . Для $f \in W$ положим

$$If := (l_1 f, \dots, l_n f).$$

Оператор $I : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *информационным*.

Задачи оптимального восстановления функционалов возникают во многих приложениях теории приближения функций и привлекают повышенное внимание. Подробное изложение предмета можно найти в статье [1] и книге [2].

Пусть V — некоторый конус в \mathbb{R}^n . Пусть $\Phi(V)$ означает класс всех линейных алгоритмов $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, использующих информацию I , таких, что $A(v) \geq 0$ для всех $v \in V$.

Величина

$$e(L, W, I, V) := \inf_{A \in \Phi(V)} \sup_{f \in W} |Lf - A(If)|$$

есть ошибка задачи оптимального линейного восстановления линейного функционала L на W на основе информации If , $f \in W$, с ограничением V .

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма. Пусть W есть замкнутое уравновешенное выпуклое подмножество линейного пространства X и V есть некоторый конус в \mathbb{R}^n . Тогда

$$e(L, W, I, V) \geq \sup_{f \in W, -If \in V} Lf.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} e(L, W, I, V) &\geq \inf_{A \in \Phi(V)} \sup_{f \in W} (Lf - A(If)) \geq \\ &\geq \inf_{A \in \Phi(V)} \sup_{f \in W, -If \in V} (Lf + A(-If)) \geq \\ &\geq \inf_{A \in \Phi(V)} \sup_{f \in W, -If \in V} Lf = \sup_{f \in W, -If \in V} Lf. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим конус $V_+ := \{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0\}$.

Пусть $n = p^r$, $p \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $p, r \geq 2$, $D = [0, 1]^r$, $X = C(D)$ есть пространство непрерывных на множестве D функций, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_r) \in D$. Обозначим

$$A = \{(x_1^{[i_1]}, \dots, x_r^{[i_r]} : 0 \leq i_j \leq p\} \subset D$$

множество точек, координаты которых лежат в узлах многомерной сетки

$$0 \leq x_i^{[1]} < \dots < x_i^{[p]} \leq 1, \quad i = 1, \dots, r.$$

Множество A содержит n точек, перенумеруем их и обозначим $a^{[i]}$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $L = \delta_\zeta$, $I = (\delta_{a_1}, \dots, \delta_{a_n})$, т.е. $Lf = f(\zeta)$ и $If = (f(a^{[1]}), \dots, f(a^{[n]}))$.

Обозначим P_m множество всех алгебраических многочленов степени порядка не выше m , заданных на множестве D , и

$$P_m^* := \left\{ p = p(x_1, \dots, x_r) \in P_m : \left| \frac{\partial^m p}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \right| \leq 1, \quad 1 \leq i_j \leq r, \quad j = 1, \dots, r \right\}.$$

Пусть $\zeta \in D$ и $x_i^{[k_i]} \leq \zeta_i < x_i^{[k_i+1]}$, $i = 1, \dots, r$. Обозначим

$$p(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \left(x_i - \frac{x_i^{[k_i+1]} + x_i^{[k_i]}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i^{[k_i+1]} - x_i^{[k_i]}}{2} \right)^2.$$

Теорема. Имеет место следующая оценка ошибки оптимальной интерполяции на множестве P_m^* на основе информации I с ограничением V_+ :

$$e(\delta_\zeta, P_2^*, I, V_+) = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \\ p(\zeta_1, \dots, \zeta_r), & m = 2. \end{cases}$$

Доказательство. Если $m = 0$ или $m = 1$, то утверждение легко следует из леммы. Рассмотрим случай $m = 2$. Очевидно, $p \in P_2$ и $-Ip \in V_+$. Из леммы следует, что

$$e(\delta_\zeta, P_2, I, V_+) \geq \sup_{f \in P_2, -If \in V_+} f(\zeta) > p(\zeta).$$

Линейный алгоритм, дающий верхнюю оценку, может быть успешно построен [3]. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Micchelli C.A., Rivlin T.J. Optimal estimation in approximation theory // A survey of optimal recovery. N. Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
2. Трауб Дж., Вожняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
3. Васильев Р.К. О порядке приближения функций многих переменных линейными положительными операторами конечного ранга // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 1. С. 3–15.

УДК 513.6

М.Н. Сусин

ТОЛЕРАНТНЫЕ ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВА ТОЛЕРАНТНЫХ ПЕТЕЛЬ

В статье с помощью свойств толерантного расслоения путей и точной гомотопической последовательности толерантного расслоения доказываются классические свойства толерантных гомотопических групп пространства толерантных петель.

Толерантное пространство [1] — это пара (X, τ) , где $\tau \in X \times X$ — отношение толерантности на множестве X , т.е. рефлексивное и симметричное бинарное отношение. Отношения толерантности являются наиболее общей математической моделью понятия схожести и заменяют непрерывность в различных областях математики и ее приложений.

Отображение $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \theta)$ толерантных пространств называется *толерантным*, если из толерантности $x_1 \tau x_2$ следует $f(x_1) \theta f(x_2)$.

В теории толерантной гомотопии [2] роль единичного отрезка параметров гомотопии играют толерантные пространства (I_n, ι_n) , где $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \left\{ \frac{k}{n} \mid k = \overline{0, n} \right\}$, $\frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \Leftrightarrow |k - l| \leq 1$.

Определение 1. Два толерантных отображения $f_0, f_1 : (X, \tau) \rightarrow (Y, \theta)$ называются *толерантно гомотопными* и записываются $f_0 \sim f_1$, если существует $n \in \mathbb{N}$ и толерантное отображение $F : (X \times I_n, \tau \times \iota_n) \rightarrow (Y, \theta)$ такое, что

$$1) (\forall x \in X) F(x, 0) = f_0(x), 2) (\forall x \in X) F(x, 1) = f_1(x).$$

Если в определении 1 взять $n = 1$, то толерантную гомотопность называют *простой* и записывают $f_0 \approx f_1$.

Определение толерантного расслоения [3] формально повторяет свой алгебро-топологический аналог и означает, что любая толерантная гомотопия в базе расслоения поднимается по начальным условиям в пространство расслоения.

Определение 2. Толерантным путем длины n в (X, τ) называется толерантное отображение $\omega_n : (I_n, \iota_n) \rightarrow (X, \tau)$. Точки $\omega_n(0)$ и $\omega_n(1)$ называются началом и концом пути ω_n . Если $\omega_n(0) = \omega_n(1) = x_0$, то ω_n называется толерантной петлей в точке x_0 .

Обозначим через $P(X, x_0)$ — множество толерантных путей пространства (X, τ) с началом в точке $x_0 \in X$ и определим подмножества толерантных петель

$$\Omega(X, x_0) = \{\omega_n \in P(X, x_0) \mid \omega_n(1) = x_0\},$$

подмножества толерантных путей ограниченной длины

$$P_M(X, x_0) = \{\omega_n \in P(X, x_0) \mid n \leq M\}, \quad M \in \mathbb{N},$$

постоянных толерантных путей

$$CP(X, x_0) = \left\{ \varepsilon_n \in P(X, x_0) \mid (\forall k = \overline{0, n}) \varepsilon_n \left(\frac{k}{n} \right) \equiv x_0 \right\}.$$

Пусть $\omega_n : (I_n, \iota_n) \rightarrow (X, \tau)$ — толерантный путь в (X, τ) . Элементарным замедлением пути ω_n в точке $k = \overline{0, n}$ назовем толерантный путь $\mu(k)(\omega_n)$ длины $n + 1$ такой, что

$$\mu(k)(\omega_n) \left(\frac{l}{n+1} \right) = \begin{cases} \omega_n \left(\frac{l}{n} \right), & l = \overline{0, k}; \\ \omega_n \left(\frac{l-1}{n} \right), & k = \overline{k+1, n+1}; \end{cases}$$

Определение 3. Пути ω_n и ω'_m из $P(X, x_0)$ назовем \varkappa -толерантными, если выполняется одно из условий:

- 1) $n = m$ и $\omega_n \approx \omega'_m$,
 - 2) $n = m + 1$ и $\omega_n \approx \mu(\bar{k})(\omega'_m)$,
- $$\bar{k} = \max \left\{ k \mid (\forall l = \overline{0, k}) \omega_n\left(\frac{l}{n}\right) = \omega'_m\left(\frac{l}{m}\right) \right\},$$
- 3) $m = n + 1$ и $\mu(\bar{k})(\omega_n) \approx \omega'_m$,
- $$\bar{k} = \max \left\{ k \mid (\forall l = \overline{0, k}) \omega_n\left(\frac{l}{n}\right) = \omega'_m\left(\frac{l}{m}\right) \right\}.$$

Теорема 1. Для каждого $M \in \mathbb{N}$ пространство $(P_M(X, x_0), \kappa)$ является толерантно стягивааемым и

$$P_M(X, x_0) \subset P_{M+1}(X, x_0), \quad P(X, x_0) = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} P_M(X, x_0).$$

Доказательство. Рассмотрим два толерантных отображения

$$F : P_M(X, x_0) \times I_M \rightarrow P_M(X, x_0),$$

$$F\left(\omega_n, \frac{l}{M}\right)\left(\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \omega_n\left(\frac{k}{n}\right), & k = \overline{0, M-l}; \\ \omega_n\left(\frac{M-l}{n}\right), & k = \overline{M-l, n}; \end{cases}$$

$$G : CP_M(X, x_0) \times I_{M-1} \rightarrow CP_M(X, x_0),$$

$$G\left(\varepsilon_n, \frac{l}{M-1}\right) = \begin{cases} \varepsilon_n, & n \leq M-l; \\ \varepsilon_{M-l}, & n \geq M-l. \end{cases}$$

Легко проверить, что эти отображения осуществляют толерантные гомотопии

$$F : 1_{P_M(X, x_0)} \sim \Phi, \quad G : 1_{CP_M(X, x_0)} \sim \text{const}_{\varepsilon_1},$$

где $\Phi : P_M(X, x_0) \rightarrow CP_M(X, x_0)$ такое, что $\Phi(\omega_n) = \varepsilon_n$, а отображение $\text{const}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_n) \equiv \varepsilon_1$. Отсюда следует, что толерантное отображение

$$F * G : P_M(X, x_0) \times I_{2M-1} \rightarrow P_M(X, x_0),$$

$$F * G\left(\omega_n, \frac{l}{2M-1}\right) = \begin{cases} F\left(\omega_n, \frac{l}{M}\right), & l = \overline{0, M}; \\ G\left(\varepsilon_n, \frac{l-M}{M-1}\right), & l = \overline{M, 2M-1}; \end{cases}$$

осуществляет толерантную гомотопию

$$F * G : 1_{P_M(X, x_0)} \sim \text{const}_{\varepsilon_1}, \quad \text{const}_{\varepsilon_1}(\omega_n) \equiv \varepsilon_1. \quad \square$$

Как следствие теоремы 1, получаем

Предложение 1. Для произвольного толерантного пространства (X, τ) пространство $(P(X, x_0), \kappa)$ имеет триivialные толерантные гомотопические группы, т.е. $(\forall m \geq 1) \pi_m(P(X, x_0)) = 0$.

По аналогии с доказательством теоремы в работе [3] доказывается

Теорема 2. Толерантное отображение $\rho : (P(X, x_0), \kappa) \rightarrow (X, \tau)$ такое, что

$$\rho(\omega_n) = \omega(1),$$

является толерантным расслоением со слоем $\rho^{-1}(x_0) = (\Omega(X, x_0), \kappa)$.

Теорема 3. Пространство толерантных петель $(\Omega(X, x_0), \kappa)$ линейно связного толерантного пространства (X, τ) имеет следующие толерантные гомотопические группы:

$$(\forall m \geq 1) \pi_m(\Omega(X, x_0)) \cong \pi_{m+1}(X). \quad (1)$$

Доказательство. Используя теорему 9 из работы [4], напишем точную гомотопическую последовательность толерантного расслоения из теоремы 2:

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow \pi_m(\Omega(X, x_0)) \rightarrow \pi_m(P(X, x_0)) \rightarrow \\ &\rightarrow \pi(X) \rightarrow \pi_{m-1}(\Omega(X, x_0)) \rightarrow \pi_{m-1}(P(X, x_0)) \rightarrow \dots . \end{aligned}$$

Из точности этой последовательности и предложения 1 следует (1). \square

Следствие 1. Все толерантные гомотопические группы $\pi_m(\Omega(X, x_0))$, $m \geq 1$, пространства толерантных петель $(\Omega(X, x_0), \kappa)$ коммутативны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Небалуев С.И., Кляева И.А. Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3. С. 93–106.
2. Небалуев С.И. Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
3. Сусин М.Н. Слабая толерантность в пространстве толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 121–131.
4. Небалуев С.И. Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. V, вып. 3(11). С. 64–97.

УДК 517.51

В.Г. Тимофеев

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КРУГЕ

Пусть K – круг с центром O радиуса h и границей Γ , $C = C(K)$ – множество непрерывных на K функций с нормой $\|u\|_C = \sup\{|u(x)| : x \in K\}$, $L_\infty = L_\infty(K)$ – множество измеримых существенно ограниченных на K функций с нормой $\|u\|_\infty = \text{essup}\{|u(x)| : x \in K\}$, $D = D(K)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций, сосредоточенных строго внутри K . Обозначим через U класс функций из C ,

для которых значение оператора Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ принадлежит пространству $L_\infty(K)$. При этом Δu понимается в смысле Соболева [1, с. 44]: относительно пары функций $u \in C, v \in L_\infty$ считаем, что $u \in U, v = \Delta u$, если для любой функции $\varphi \in D$ выполняется равенство $\int_K v\varphi dx = \int_K u\Delta\varphi dx$.

В данной статье для класса U функций, заданных на круге, решена задача Дирихле и выведена априорная оценка нормальной производной решения.

1. Интегральное представление производной

Сформулируем несколько вспомогательных утверждений, необходимых в дальнейшем. В частности, получим специальное интегральное представление производной $\frac{\partial u}{\partial \rho_0}$ функций $u \in U$.

Пусть $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ — фиксированная точка K , $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ — точка, сопряжённая с M_0 относительно окружности Γ , $P(r, \psi)$ — переменная точка такая, что $P \in \overline{K}$, $\frac{\partial}{\partial n_p}$ — производная по внешней нормали в точке P . Положим $r_0 = |\overline{M_0 P}|$, $r_1 = |\overline{M_1 P}|$, $\rho_0 = |\overline{O M_0}|$, $\rho_1 = |\overline{O M_1}|$. Рассмотрим функцию

$$G(M_0, P) = \ln \frac{r_0 h}{\rho_0 r_1}. \quad (1)$$

Теорема 1. *Функция $G(M_0, P)$ является функцией Грина круга K , и для производной любой функции $u \in U$ имеет место следующее интегральное представление:*

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(M_0, P) \frac{\partial^2 G(M_0, P)}{\partial \rho_0 \partial n_p} d\psi + \frac{1}{2\pi} \iint_K \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial \rho_0} \Delta u(P) r dr d\psi. \quad (2)$$

Доказательство. Простой проверкой устанавливаем, что функция (1) является функцией Грина круга K , т.е.

- 1) $G(M_0, P) = G(P, M_0)$;
- 2) $G(M_0, P)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta G = 0$ по P на множестве $K \setminus \{M_0\}$;
- 3) $G(M_0, P)$ на Γ обращается в ноль;
- 4) $G(M_0, P) = \ln r_0 + v(M_0, P)$, где $v = v(M_0, P)$ — гармоническая функция всюду в K по каждому из аргументов.

Отметим ещё ряд важных свойств функции (1) и её производных.

1. Функции $G(M_0, P)$ и $\frac{\partial G(M_0, P)}{\partial \rho_0}$ имеют интегрируемую особенность при $P = M_0$.
2. Функции $\frac{\partial G(M_0, P)}{\partial \rho_0}, \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial n_p}, \frac{\partial^2 G(M_0, P)}{\partial \rho_0 \partial n_p}$ являются гармоническими всюду в K , за исключением точки $P = M_0$.

Перечисленные свойства функции (1) позволяют получить [2, с. 69–71], [3, с. 319–320] следующее интегральное представление:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(P) \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial n_p} d\psi + \frac{1}{2\pi} \iint_K G(M_0, P) \Delta u(P) r dr d\psi \quad (3)$$

для любой функции u , определённой, непрерывной и ограниченной вместе со своими производными до второго порядка включительно на K .

Покажем, что (3) верно и для всякой функции $u \in U$. Пусть $\varphi \in D$, $\int_K \varphi dx = 1$. Для всякого $\varepsilon > 0$ положим $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ и определим функции $u_\varepsilon(x)$ и $\Delta u_\varepsilon(x)$, следуя [4, с. 679–680]. Для функции $u_\varepsilon(x)$ справедливо интегральное представление (3). Нормы $\|u_\varepsilon\|_C$ и $\|\Delta u_\varepsilon\|_C$ равномерно по ε ограничены. При $\varepsilon \rightarrow 0$ функции u_ε сходятся всюду в K к функции u , а Δu_ε почти всюду к Δu [5, с. 20–21, теорема 125]. По теореме Лебега о мажорантной сходимости в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем (3) для $u \in U$. В силу свойств функции (1) оба интеграла в (3) можно дифференцировать по ρ_0 . Заметим, что для $u \in U$ производная $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \rho_0}$ существует и в классическом смысле, при этом имеет место (2).

2. Неравенство для производной

Без ограничения общности положим $\varphi_0 = 0$.

Теорема 2. Для функций класса U справедлива следующая априорная оценка нормальной производной:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \right\| \leq A \|u\|_C + B \|\Delta u\|_\infty, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{4h}{\pi} \frac{\rho_0}{h^2 - \rho_0^2},$$

$$B = \frac{3h^2 \rho_0 - \rho_0^2}{12(h^2 - \rho_0^2)} + \frac{h^4 - \rho_0^4}{4\rho_0^2} + \frac{(h^4 - \rho_0^4)^2(h^4 - \rho_0^2)}{4\pi \rho_0^2 (h^8 + \rho_0^6)(\rho_0^2 + 1)} - \\ - \frac{(h^2 + \rho_0^2)^2}{4\pi \rho_0^3} \operatorname{arctg} \frac{h^4 - \rho_0^2}{\rho_0(h^4 + \rho_0^2)}.$$

Доказательство. Из (2) получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |u(M_0, P)| \left| \frac{\partial^2 G(M_0, P)}{\partial \rho_0 \partial n_p} \right| d\psi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \iint_K \left| \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial \rho_0} \right| |\Delta u(P)| r dr d\psi, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho_0} \right| &\leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2 G(M_0, P)}{\partial \rho_0 \partial n_p} \right| d\psi \right\} \|u\|_C + \\ &+ \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_K \left| \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial \rho_0} \right| r dr d\psi \right\} \|\Delta u\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Определяя знаки производных функции (1), находим константы A и B , а затем устанавливаем (4).

Следствие. Для класса гармонических на круге K функций справедлива следующая априорная оценка:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_0} = O \left(\frac{\rho_0}{h^2 - \rho_0^2} \right).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
2. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
4. Тимофеев В.Г. Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, вып. 5. С. 676–689.
5. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

УДК 517.51

А.Ю. Трынин

ПРИМЕР СИСТЕМЫ ЧЕБЫШЕВА С ПОЧТИ ВСЮДУ СХОДЯЩЕЙСЯ К НУЛЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В настоящей статье продолжаются исследования свойств функций и констант Лебега интерполяционных процессов по системам Чебышева, начатые в работе [1]. А именно верна

Теорема 1. Существует система Чебышева непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, для которой последовательность функций Лебега интерполяционного процесса по этой системе п.в. на $[0, 1]$ сходится к нулю.

Доказательство. Пусть $x_{k,n} = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n}$, $n \in \mathbf{N}$, и последовательность чисел, удовлетворяющая соотношению [1, см. (1)], есть $d_n = \frac{1}{2^{2(n+1)}}$.

В работе [1] показано, что система функций $\{l_{k,n}\}_{k=0}^n$, $n \in \mathbf{N}$, построенных с помощью [1, см. (2)], представляет собой систему Чебышева [2, 3]. Обозначим через k_0 номер ближайшего к x узла интерполяции $x_{k_0,n} = \frac{k_0}{n}$ (если таких узла два, то — номер левого из ближайших). Тогда для любых $n \in \mathbf{N}$ и $x \in [0, 1] \setminus [x_{k_0,n} - \frac{\sqrt{d_n}}{n}, x_{k_0,n} + \frac{\sqrt{d_n}}{n}]$

$$|l_{k_0,n}(x)| = |y(x, n)| \left| \frac{(-1)^{k_0} 2d_n}{\pi n(x - x_{k_0,n})} \right| \leq \frac{2\sqrt{d_n}}{\pi} = \frac{1}{\pi 2^n}.$$

Отсюда и [1, см. (4)] (см. также предпоследнюю формулу работы [1]) следует, что для $n \geq 3$ для функций Лебега $L_n(x) = \sum_{k=0}^n |l_{k,n}(x)|$ справедливо неравенство

$$L_n(x) \leq \frac{1}{\pi 2^n} + \frac{16 \ln(2n)}{\pi 2^{2(n+1)}}, \quad (1)$$

если

$$x \in E_n = \{x : x \in [0, 1], |x - x_{k,n}| \geq \frac{\sqrt{d_n}}{n}; k = \overline{0, n}\}. \quad (2)$$

Рассмотрим множество $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} E_j$. В силу определения множества E_n (смотрите (2)), $\text{mes } E_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. Поэтому

$$\text{mes}(\bigcap_{j=n}^{\infty} E_j) \geq 1 - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Теперь в силу [4, теорема 11, гл. 3, § 4], так как $E \subset [0, 1]$,

$$\text{mes } E = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(\bigcap_{j=n}^{\infty} E_j) = 1.$$

А из (1) вытекает справедливость соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = 0, \quad x \in E.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Интерполяционные полиномы по этой системе для любой $f \in C[0, \pi]$ п.в. на $[0, \pi]$ сходятся к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f, x) = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трынин А.Ю. Существование систем Чебышева с ограниченными константами Лебега интерполяционных процессов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2008. Вып. 10. С. 79–81.
2. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1977.
3. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

УДК 517.51

Р.Н. Фадеев

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СИСТЕМЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, так что $2 \leq p_j \leq N$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и пусть $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. Если $m_0 = 1$ и $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$, то каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j, \quad (1)$$

(при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, берем разложение с конечным числом $x_j \neq 0$). Если число $k \in \mathbb{Z}_+$ представимо единственным образом в виде $k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z}_j$, то по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right)\right)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0, 1]$. Коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L[0, 1]$ и частичная сумма Фурье по этой системе задаются формулами

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_n(t)} dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $x, y \in [0, 1)$ представлены в виде (1), то по определению $x \oplus y := z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j \in \mathbb{Z}_j$, $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Пусть $D_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \chi_j(x)$ — ядро Дирихле для данной системы,

тогда $S_n(f)(x) = f * D_n(x) := \int_0^1 f(x \ominus t)D_n(t) dt$. Известно, что при $k < m_n$ функции $\chi_k(x)$ постоянны на $[i/m_n, (i+1)/m_n]$, $i = 0, \dots, m_n - 1$, а $D_{m_n}(t)$ равно m_n на $[0, 1/m_n]$ и нулю на $[1/m_n, 1]$. Все эти факты можно найти в работе [1, §1.5].

Пусть $osc(f, [a, b]) = \sup_{x, y \in [a, b]} |f(x) - f(y)|$, а $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=0}^\infty$ — положительная возрастающая последовательность, причем $\lambda_0 = 1$. По определению

$$Fl_{p, \lambda}(f, I_0^n) = \sup_{j \geq n} \left(\sum_{i=0}^{m_j/m_n} \left(\frac{osc(f, I_i^j)}{\lambda_i} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Лемма [2, гл. 4, §3]. *Пусть $n = \sum_{j=1}^s n_j m_{j-1}$, $n_j \in \mathbb{Z}_j$, $j = 1, \dots, s$.*

Tozda

$$\begin{aligned} D_n(t) &= D_{m_{s-1}}(t) \sum_{l=0}^{n_s-1} \chi_{m_{s-1}}^l(t) + \\ &+ \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) D_{m_{s-2}}(t) \sum_{l=0}^{n_{s-1}-1} \chi_{m_{s-2}}^l(t) + \dots + \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) \dots \chi_{m_1}^{n_2}(t) D_{m_0}(t) \sum_{l=0}^{n_1-1} \chi_{m_0}^l(t). \end{aligned}$$

Теорема. *Пусть $n = \sum_{j=1}^s n_j m_{j-1}$, $n_j \in \mathbb{Z}_j$, $j = 1, \dots, s$, $n_s \neq 0$, $g_x(t) = f(x) - f(x \ominus t)$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Tozda*

$$|f(x) - S_n(f)(x)| \leq n_s Fl_{p, \lambda}(g_x, I_0^{s-1}) + 2p_s \sum_{k=0}^{s-2} \left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} \lambda_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \frac{m_k n_{k+1}}{m_s} Fl_{p, \lambda}(g_x, I_0^k).$$

Доказательство. Так как $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$, то $f(x) - S_n(f, x) = \int_0^1 D_n(t) g_x(t) dt$. Поскольку $g_x(0) = 0$, следуя лемме, оценим сначала

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 D_{m_{s-1}}(t) \left(\sum_{l=0}^{n_s-1} \chi_{m_{s-1}}^l(t) \right) g_x(t) dt \right| &= \left| m_{s-1} \int_0^{\frac{1}{m_{s-1}}} \left(\sum_{l=0}^{n_s-1} \chi_{m_{s-1}}^l(t) \right) g_x(t) dt \right| \leq \\ &\leq m_{s-1} \int_0^{\frac{1}{m_{s-1}}} \left| \sum_{l=0}^{n_s-1} \chi_{m_{s-1}}^l(t) \right| |g_x(t) - g_x(0)| dt \leq \end{aligned}$$

$$\leq n_s m_{s-1} \int_0^{\frac{1}{m_{s-1}}} osc(g_x, I_0^{s-1}) dt \leq n_s Fl_{p,\lambda}(g_x, I_0^{s-1}). \quad (2)$$

Пусть $J_k = \left| \int_0^1 D_{m_k}(t) \left(\sum_{l=0}^{n_{k+1}-1} \chi_{m_k}^l(t) \right) \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) \dots \chi_{m_{k+1}}^{n_{k+2}}(t) g_x(t) dt \right|$.

Так как функции $\chi_{m_j}(x)$ при $j < s - 1$ постоянны на всех I_i^{s-1} и $[0, \frac{1}{m_k}] = \bigcup_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} I_i^{s-1}$, то обозначая значение $\chi_{m_{s-2}}^{n_{s-1}}(x) \dots \chi_{m_{k+1}}^{n_{k+2}}(x)$ на I_i^{s-1} через A_i ($|A_i| = 1$), получаем

$$\begin{aligned} J_k &= m_k \left| \sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} \int_{I_i^{s-1}} A_i \left(\sum_{l=0}^{n_{k+1}-1} \chi_{m_k}^l(t) \right) \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) g_x(t) dt \right| \leq \\ &\leq m_k n_{k+1} \sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} \left| \int_{I_i^{s-1}} \chi_{m_{s-1}}^{n_s}(t) g_x(t) dt \right| =: M_k. \end{aligned}$$

Поскольку $I_i^{s-1} = \bigcup_{j=0}^{p_s-1} I_{j+ip_s}^s$ и $\chi_{m_{s-1}}$ постоянна на всех I_i^s , то, произведя замену переменной, имеем

$$\begin{aligned} M_k &\leq m_k n_{k+1} \sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} \left| \sum_{j=0}^{p_s-1} \int_{I_{ip_s}^s} \chi_{m_{s-1}}^{n_s} \left(t \oplus \frac{j}{m_s} \right) g_x \left(t \oplus \frac{j}{m_s} \right) dt \right| \leq \\ &\leq m_k n_{k+1} \sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k-1} \left| \int_{I_{ip_s}^s} \sum_{j=0}^{p_s-1} \chi_{m_{s-1}}^{n_s} \left(\frac{j}{m_s} \right) g_x \left(\frac{j}{m_s} \oplus t \right) dt \right|. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\sum_{j=0}^{p_s-1} \chi_{m_{s-1}} \left(\frac{j}{m_s} \right) = \sum_{j=0}^{p_s-1} \exp \left(\frac{2\pi i j n_s}{p_s} \right) = 0$, так как $n_s \neq 0$. Введем величины $r_1 = \sum_{j=0}^{p_s-1} (\Re \exp(2\pi i j n_s / p_s))^+$ и $r_2 = \sum_{j=0}^{p_s-1} (\Im \exp(2\pi i j n_s / p_s))^+$. Рассуждая аналогично [3], находим, что

$$\left| \sum_{j=0}^{p_s-1} \exp \left(\frac{2\pi i j n_s}{p_s} \right) g_x \left(t \oplus \frac{j}{m_s} \right) \right| \leq (r_1 + r_2) osc(g_x(t), I_i^{s-1}),$$

откуда

$$\begin{aligned}
 M_k &\leq m_k n_{k+1} (r_1 + r_2) \frac{1}{m_s} \sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k - 1} osc(g_x(t), I_i^{s-1}) \leq \\
 &\leq \frac{2m_k n_{k+1} p_s}{m_s} \left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k - 1} \lambda_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k - 1} \left(\frac{osc(g_x(t), I_i^{s-1})}{\lambda_i} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
 &\leq \frac{2m_k n_{k+1} p_s}{m_s} \left(\sum_{i=0}^{m_{s-1}/m_k - 1} \lambda_i^q \right)^{\frac{1}{q}} Fl_{p,\lambda}(g_x(t), I_0^k). \tag{3}
 \end{aligned}$$

Из (2) и (3) вытекает результат теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультиплексивные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
3. Onneweer C.W., Waterman D. Uniform convergence of Fourier series on groups.I // Michigan Math. J. 1971. Vol. 18, №2. P. 265–273.

УДК 517.984

А.Е. Федосеев

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, РАЗРЫВНЫМ НА ЛУЧАХ

В данной статье изучается равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и в ряды по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, ядро которого терпит разрывы первого рода на лучах, выходящих из центра единичного квадрата.

Рассмотрим в пространстве $L[0, 1]$ интегральный оператор

$$Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

где ядро $A(x, t)$ принимает постоянные значения: α_1 при $0 \leq t \leq x \leq \frac{1}{2}$, α_2 при $0 \leq x \leq t \leq \frac{1}{2}$, α_3 при $0 \leq x \leq 1 - t \leq \frac{1}{2}$, α_4 при $0 \leq 1 - t \leq x \leq \frac{1}{2}$,

α_5 при $\frac{1}{2} \leq x \leq t \leq 1$, α_6 при $\frac{1}{2} \leq t \leq x \leq 1$, α_7 при $\frac{1}{2} \leq 1-t \leq x \leq 1$,
 α_8 при $\frac{1}{2} \leq x \leq 1-t \leq 1$.

Оператор (1) является частным случаем интегрального оператора, рассмотренного в работе [1]. В данной статье для операторов вида (1) выделен класс операторов, для которых можно явно выписать условия, при которых имеет место равносходимость разложений в ряд по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора A и тригонометрических рядов Фурье, а также найдены условия обратимости оператора (1) и получены формулы для обратного оператора.

Следующая теорема дает вид обратного оператора.

Теорема 1. *Оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $l = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_6 - \alpha_5) - (\alpha_7 - \alpha_8)(\alpha_4 - \alpha_3) \neq 0$ и имеет вид*

$$A^{-1}y = \frac{1}{l} \left((\alpha_6 - \alpha_5)y'(x) + (\alpha_3 - \alpha_4)y'(1-x) \right), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2} \right],$$

$$A^{-1}y = \frac{1}{l} \left((\alpha_1 - \alpha_2)y'(x) + (\alpha_8 - \alpha_7)y'(1-x) \right), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right],$$

где $y(x) \in D_{A^{-1}}$ — множество, состоящее из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условиям

$$\left[1 + \frac{1}{l}(\alpha_2(\alpha_6 - \alpha_5) + \alpha_3(\alpha_8 - \alpha_7)) \right] y(0) + \frac{1}{l} \left[\alpha_3\alpha_1 - \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2(\alpha_6 - \alpha_5) - \alpha_3(\alpha_8 - \alpha_7) \right] y\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{l}(\alpha_3\alpha_1 - \alpha_2\alpha_4)y(1) = 0,$$

$$\frac{1}{l}(\alpha_8\alpha_6 - \alpha_5\alpha_7)y(0) + \left[1 + \frac{1}{l} \left(\alpha_8(\alpha_3 - \alpha_4) + \alpha_5(\alpha_1 - \alpha_2) - \alpha_8\alpha_6 + \alpha_5\alpha_7 \right) \right] y\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{l} \left(\alpha_8(\alpha_3 - \alpha_4) + \alpha_5(\alpha_1 - \alpha_2) \right) y(1) = 0.$$

Исследование сходимости разложений по с.п.ф. оператора A проводится методом, основанным на свойствах и оценках резольвенты Фредгольма $R_\lambda(A)f = (I - \lambda A)^{-1}Af$, где I — единичный оператор, λ — спектральный параметр.

Введем краевую задачу

$$v'(x) = \lambda Dv(x) + Dm(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2} \right], \quad (2)$$

$$P_0v(0) + P_1v\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (3)$$

где $v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x))^T$, $f(1-x))^T$, $D = (a_{ij})_{i,j=1}^4$,
 $a_{11} = -a_{33} = \alpha_1 - \alpha_2$, $a_{14} = -a_{32} = \alpha_4 - \alpha_3$,
 $a_{22} = -a_{44} = \alpha_6 - \alpha_5$, $a_{23} = -a_{41} = \alpha_7 - \alpha_8$,
 $a_{ij} = a_{ji} = 0$, $i = 1, 4$, $j = 2, 3$, $m(x) = (f(x), f(\frac{1}{2}+x), f(\frac{1}{2}-x))$,
 $P_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = -M$, $Q_1 = E + M$,
 $M = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} \alpha_2(\alpha_6 - \alpha_5) + \alpha_3(\alpha_8 - \alpha_7) & \alpha_3\alpha_1 - \alpha_2\alpha_4 \\ \alpha_8\alpha_6 - \alpha_5\alpha_7 & \alpha_8(\alpha_3 - \alpha_4) + \alpha_5(\alpha_1 - \alpha_2) \end{pmatrix}$,
 E – единичная матрица.

Теорема 2. Если $v(x)$ является решением краевой задачи (2), (3), а соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A)$ существует и $R_\lambda(A)f = v_1(x)$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $R_\lambda(A)f = v_2(x - \frac{1}{2})$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Рассмотрим класс операторов, для которых

$$\alpha_3 = \alpha_4, \alpha_7 = \alpha_8, \alpha_2 = \alpha_5 = 0. \quad (4)$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$\alpha_1\alpha_6 \neq 0, \alpha_1 \neq \pm\alpha_6. \quad (5)$$

В этом случае существует неособая матрица Γ , диагонализирующая D , то есть $\Gamma^{-1}D\Gamma = D_1 = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, ω_i , $i = \overline{1, 4}$ – собственные значения матрицы D . Тогда краевая задача (2), (3) перейдет в

$$h'(x) = \lambda D_1 h(x) + m_1(x), \\ U(h) = P_0 \Gamma h(0) + P_1 \Gamma h\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

где $h = \Gamma^{-1}v$, $m_1(x) = \Gamma^{-1}Dm(x)$.

Обозначим $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda\omega_1 x}, \dots, e^{\lambda\omega_4 x})$, $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$,

$$S_\delta = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_m| \geq \delta > 0, \lambda_m \text{- нули } \Delta(\lambda), \right. \\ \left. |\lambda - i \frac{4\pi k}{\omega_j}| \geq \delta, j = \overline{1, 4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

На основе результатов работы [1] получается

Теорема 3 (равносходимости). Если выполняются условия (4), (5), а также $\alpha_3\alpha_8 \neq 0$ и $\alpha_3\alpha_8 \neq \alpha_6\alpha_1$, то для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$

имеют место соотношения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sum_{j=1}^2 \gamma_{1j} \frac{1}{\omega_j} \sigma_{r|\omega_j|} (m_{1j}, x) \right\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sum_{j=3}^4 \gamma_{2j} \frac{1}{\omega_j} \sigma_{r|\omega_j|} \left(m_{1j}, x - \frac{1}{2} \right) \right\|_{[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$, $S_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$; γ_{kj} – компоненты матрицы Γ : $\Gamma^{-1}D\Gamma = D_1 = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_4)$; $\sigma_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье по системе $\{e^{i4\pi kx}\}$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, при таких $k \in \mathbb{Z}$, что $|k| < \frac{r}{4\pi}$; m_{1j} – компоненты $m_1(x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, №11. С. 115–142.

УДК 519.53, 519.713

Е.В. Хворостухина

ОБ ЭПИМОРФИЗМАХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

В настоящей статье рассматриваются так называемые гиперграфические автоматы без выходных сигналов, т.е. автоматы, у которых множества состояний наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как многообразие таких алгебраических систем охватывает, в частности, автоматы, у которых множества состояний являются плоскостями (например, проективными или аффинными).

Напомним [1], что *гиперграфом* называется система вида $H = (X, L)$, где X – непустое множество и L – семейство произвольных подмножеств X . Элементы множества X называются *вершинами*, а элементы множества L называются *ребрами гиперграфа*. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются *смежными*. Гиперграф $H = (X, L)$ называется *эффективным*, если любая его вершина принадлежит некоторому его ребру.

Пусть p – произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть *гиперграфом с p-определенными ребрами*, если в каждом ребре этого

гиперграфа найдется, по крайней мере, $p + 1$ вершина и, к тому же, любые p его вершин принадлежат не более чем одному его ребру.

Например, эффективный гиперграф с 1-определенными ребрами — гиперграф, ребра которого образуют нетривиальное разбиение множества вершин без одноэлементных классов. С другой стороны, как проективная плоскость, так и аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определенными ребрами, вершинами которых являются точки этих плоскостей, а ребрами — соответствующие прямые (см., напр., [2]).

Гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ в гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$ называется отображение φ множества X в множество X_1 , которое смежные в гиперграфе H вершины переводят в смежные вершины гиперграфа H_1 , т.е. выполняется свойство

$$(\forall r \in L)(\exists r' \in L_1)(\varphi(r) \subset r').$$

Гомоморфизм $f : H \rightarrow H_1$ называется *сюръективным*, если образом множества вершин X гиперграфа H является все множество вершин X_1 гиперграфа H_1 , т.е. $f(X) = X_1$.

Гомоморфизм гиперграфа H в себя называется *эндоморфизмом* H . Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\text{End}H$.

Гиперграфы $H = (X, L)$ и $H_1 = (X_1, L_1)$ называются *изоморфными*, если найдется такая биекция f множества X на множество X_1 , которая сохраняет ребра этих гиперграфов, т.е. выполняется

$$(\forall Y \subset X)(Y \in L \iff f(Y) \in L_1).$$

Изоморфизм гиперграфа H на себя называется *автоморфизмом* H . Множество всех автоморфизмов с операцией композиции и тождественным отображением в качестве нейтрального элемента образуют группу $\text{Aut}H$.

Для отображения $f : X \rightarrow Y$ обозначим f^2 отображение X^2 в Y^2 , которое для $(a, b) \in X^2$ определяется по формуле: $f^2(a, b) = (f(a), f(b))$. Тогда для любого преобразования $\varphi : X \rightarrow X$ выполняется $f^2(\varphi) = \varphi f$.

В настоящей статье под *гиперграфическим автоматом* понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов [3] $A = (X, S, \delta)$, множество состояний которого X наделено такой структурой гиперграфа $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов δ_s является эндоморфизмом H . Например, для любого гиперграфа H

алгебраическая система $A = (H, \text{End}H, \delta)$ с функцией $\delta(\varphi, x) = \varphi(x)$, где $(\varphi, x) \in \text{End}H \times X$, является гиперграфическим автоматом, который обозначается $\text{Atm}H$ и называется *универсальным гиперграфическим автоматом*.

Эндоморфизмом гиперграфического автомата $A = (H, S, \delta)$ называется пара отображений $\pi = (f, g)$, где f – эндоморфизм гиперграфа H , g – эндоморфизм полугруппы $\text{End}H$ и для любых $x \in X, s \in S$ выполняется равенство $f(\delta(x, s)) = \delta(f(x), g(s))$. Эндоморфизм $\pi : A \rightarrow A$ называется *автоморфизмом автомата A на автомат A*, если $f : H \rightarrow H$, $g : S \rightarrow S$ – автоморфизмы.

Теорема 1. Пусть $H = (X, L)$ – эффективный гиперграф с p -определенными ребрами. Для универсального гиперграфического автомата $\text{Atm}H = (H, \text{End}H, \delta)$ и эндоморфизма $\pi = (f, g)$ автомата $\text{Atm}H$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $\pi = (f, g)$ – сюръективный эндоморфизм $\text{Atm}H$;
- 2) g – сюръективный эндоморфизм $\text{End}H$, $g = f^2$;
- 3) g – автоморфизм $\text{End}H$, $g = f^2$;
- 4) π – автоморфизм автомата $\text{Atm}H$;
- 5) f – автоморфизм H , $g = f^2$.

Следствие. Полугруппа сюръективных эндоморфизмов автомата $\text{Atm}H$ совпадает с группой автоморфизмов $\text{Aut}(\text{Atm}H)$, которая изоморфна декартову произведению группы автоморфизмов $\text{Aut}H$ и группы автоморфизмов $\text{Aut}(\text{End}H)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зыков А.А. Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29, №6. С. 89–154.
2. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970.
3. Плоткин Б.И., Гринглас Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Выш. шк., 1994.

УДК 517.51

А.А. Хромов

АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СТЕПЕНЯМИ РЕЗОЛЬВЕНТ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Получен метод нахождения приближений к гладким решениям интегрального уравнения, имеющего структуру уравнения второго рода и вырожденное ядро в ситуации, когда обратный оператор неограничен.

В данной статье продолжено исследование приближающих свойств резольвенты оператора дифференцирования [1].

Рассмотрим операторы:

$$\Omega_r^{(k)} = \begin{cases} \Omega_{2r}^{(k)}, & x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r}^{(k)}, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где

$$\Omega_{2r}u = r \int_x^1 e^{r(x-t)} u(t) dt.$$

Лемма 1. Операторы Ω_{ir}^k , $i = 1, 2$, имеют вид

$$\Omega_{1r}^k = r^k \int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-r(x-t)} u(t) dt, \quad (1)$$

$$\Omega_{2r}^k = r^k \int_x^1 \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{r(x-t)} u(t) dt. \quad (2)$$

Доказательство. Для $k = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{1r}^2 u &= r^2 \int_0^x e^{-r(x-t)} dt \int_0^t e^{-r(t-\tau)} u(\tau) d\tau = \\ &= r^2 e^{-rx} \int_0^x dt \int_0^t e^{r\tau} u(\tau) d\tau = r^2 e^{-rx} \int_0^x e^{r\tau} u(\tau) d\tau \int_\tau^x dt = \\ &= r^2 e^{-rx} \int_0^x (x-\tau) e^{r\tau} u(\tau) d\tau = r^2 \int_0^x (x-\tau) e^{-r(x-\tau)} u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Заменив обозначение τ на t , получим (1) при $k = 2$.

Методом математической индукции получим формулу (1) для любого k .

Аналогично получается формула (2) для $\Omega_{2r}^k u$.

Лемма 2. Если $u \in C^1[0, 1]$, то операторы Ω_{ir}^k , $i = 1, 2$, имеют представление

$$\Omega_{1r}^k u = -\frac{r^{k-1} x^{k-1} e^{-rx}}{(k-1)!} u(0) + \Omega_{1r}^{k-1} u - \frac{1}{r} \Omega_{1r}^k u', \quad (3)$$

$$\Omega_{2r}^k u = -\frac{r^{k-1}(1-x)^{k-1}e^{-r(1-x)}}{(k-1)!}u(1) + \Omega_{2r}^{k-1}u + \frac{1}{r}\Omega_{2r}^k u', \quad (4)$$

$\partial e k \geq 2$.

Доказательство. Пусть $k = 2$. Тогда из (1) получаем

$$\Omega_{1r}^2 u = r^2 \int_0^x (x-t)e^{-r(x-t)}u(t)dt.$$

Интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \Omega_{1r}^2 u &= r^2 \left\{ \frac{1}{r}[e^{-r(x-t)}(x-t)u(t)] \Big|_0^x - \frac{1}{r} \int_0^x e^{-r(x-t)}[-u(t) + ((x-t)u(t))'_t]dt \right\} = \\ &= r \left[-xe^{-rx}u(0) + \int_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt - \int_0^x e^{-r(x-t)}(x-t)u'(t)dt \right] = \\ &= -rxe^{-rx}u(0) + \Omega_{1r}u - \frac{1}{r}\Omega_{1r}^2 u'. \end{aligned}$$

Методом математической индукции доказываем формулу (3).

И точно также получается формула (4).

Лемма 3. Для $u(x) \in C[0, 1]$ справедливы соотношения:

$$\|\Omega_{1r}^k u - u\|_{C[\varepsilon, 1]} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (5)$$

$$\|\Omega_{2r}^k u - u\|_{C[0, 1-\varepsilon]} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Доказательство. Для $k = 1$ соотношение (5) доказано в лемме 1 из работы [3]. Пусть $k \geq 2$, а $u(x) \in C^k[0, 1]$ Обозначим $\varphi_l(r, x) = -\frac{r^l x^l e^{-rx}}{l!}$.

Из (3) имеем

$$\begin{aligned} \|\Omega_{1r}^k u - u\|_{C[\varepsilon, 1]} &\leq \|\varphi_{k-1}(r, x)u(0)\|_{C[\varepsilon, 1]} + \|\Omega_{1r}^{k-1}u - u\|_{C[\varepsilon, 1]} + \\ &+ \left\| \frac{1}{r}\Omega_{1r}^k u' \right\|_{C[\varepsilon, 1]} \leq \|\varphi_{k-1}(r, x)u(0)\|_{C[\varepsilon, 1]} + \|\varphi_{k-2}(r, x)u(0)\|_{C[\varepsilon, 1]} + \\ &+ \cdots + \|\varphi_1(r, x)u(0)\|_{C[\varepsilon, 1]} + \|\Omega_{1r}u - u\|_{C[\varepsilon, 1]} + \left\| \frac{1}{r}\Omega_{1r}^2 u' \right\|_{C[\varepsilon, 1]} + \end{aligned}$$

$$+ \left\| \frac{1}{r} \Omega_{1r}^3 u' \right\|_{C[\varepsilon, 1]} + \cdots + \left\| \frac{1}{r} \Omega_{1r}^k u' \right\|_{C[\varepsilon, 1]}.$$

Далее, поскольку $\varphi_l(r, x) \leq r^l e^{-r\varepsilon}$ на отрезке $[\varepsilon, 1]$, то сумма слагаемых, содержащих функции $\varphi_l(r, x)$, $l = 1, \dots, k-1$, имеет оценку $O(r^{k-1} e^{-r\varepsilon} \|u\|_{C[0,1]})$. Далее, $\|\Omega_{1r} u - u\|_{C[\varepsilon, 1]} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ для любой $u(x) \in C[0, 1]$.

Осталось показать, что слагаемые, содержащие $u'(x)$, могут быть как угодно малыми при $r \rightarrow \infty$, если $u(x) \in C^k[0, 1]$, т.е. что $\left\| \frac{1}{r} \Omega_{1r}^l u' \right\|_{C[\varepsilon, 1]} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ для $l = 2, \dots, k$.

Пусть $l = 2$. Тогда из (1.16) с заменой u на u' получим

$$\frac{1}{r} \Omega_{1r}^2 u' = -xe^{-rx} u'(0) + \frac{1}{r} \Omega_{1r} u' - \frac{1}{r^2} \Omega_{1r}^2 u''.$$

Легко убедиться, что $\frac{1}{r} \Omega_{1r} u'$ и $\frac{1}{r^2} \Omega_{1r}^2 u''$ имеют оценку $O\left(\frac{1}{r}\right)$.

Для произвольного r из (3) получаем

$$\frac{1}{r} \Omega_{1r}^l u' = \frac{1}{r} \varphi_{l-1}(r, x) u'(0) + \frac{1}{r} \Omega_{1r}^{l-1} u' - \frac{1}{r^2} \Omega_{1r}^l u''. \quad (7)$$

Из (1) имеем

$$\frac{1}{r} \Omega_{1r}^{l-1} u' = r^{l-2} \int_0^x e^{-r(x-t)} \frac{(x-t)^{l-2}}{(l-2)!} u'(t) dt, \quad (8)$$

$$\frac{1}{r^2} \Omega_{1r}^l u'' = r^{l-2} \int_0^x e^{-r(x-t)} \frac{(x-t)^{l-1}}{(l-1)!} u''(t) dt. \quad (9)$$

Берем интегралы в правых частях (8) и (9) по частям, каждый раз "перебрасывая" производную на функцию $u'(t)$ в (8) и функцию $u''(t)$ в (9) до тех пор, пока перед интегралами не исчезнут степени r , т.е. интегрируем $l-2$ раза. Тогда в (8) мы придем к интегралу $\int_0^x e^{-r(x-t)} u^{(l-1)}(t) dt$,

а в (9) – к интегралу $\int_0^x e^{-r(x-t)} (x-t) u^{(l)}(t) dt$, которые имеют оценки $O\left(\frac{1}{r} \|u^{(l-1)}\|_{C[0,1]}\right)$ и $O\left(\frac{1}{r} \|u^{(l)}\|_{C[0,1]}\right)$ соответственно.

Подстановки, которые получаются при интегрировании, будут состоять из функций $\varphi_m(r, x)$, $m = 1, \dots, l-3$ в формуле (8); $m = 1, \dots, l-2$ в формуле (9), умноженных на значения производных функции $u(x)$ в нуле до $(l-2)$ -го порядка включительно в формуле (8); до $(l-1)$ -го порядка включительно в формуле (9). Общая сумма этих подстановок и первого

слагаемого, стоящего в правой части выражения (7), будет иметь порядок $r^{l-1}e^{-r\varepsilon}$ на отрезке $[\varepsilon, 1]$.

Из вышесказанного следует, что соотношения (5) выполняются для любой $u(x) \in C^k[0, 1]$. Но множество функций, k раз непрерывно дифференцируемых, всюду плотно в пространстве $C[0, 1]$ по теореме Вейерштрасса.

Далее, нормы операторов Ω_{1r}^k , рассматриваемых как операторы из $C[0, 1]$ в $C[\varepsilon, 1]$, ограничены константами, не зависящими от r , поскольку

$$\|\Omega_{1r}^k u\|_{C[\varepsilon, 1]} = \|\Omega_{1r}(\Omega_{1r}^{k-1})u\|_{C[\varepsilon, 1]} = \|\Omega_{1r}\Omega_{1r} \dots (\Omega_{1r}u)\|_{C[\varepsilon, 1]} \leq \|u\|_{C[0, 1]}.$$

По теореме Банаха — Штейнгауза соотношение (5) справедливо для любой $u \in C[0, 1]$.

Аналогично доказывается сходимость (6).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.А. Решение интегральных уравнений с помощью резольвент простейших дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 52–58.

УДК 517.984

А.П. Хромов

ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Обозначим через L оператор: $Ly = p(x)y'(x)$, $x \in [0, 1]$, $p(x) = a$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $p(x) = b$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $a > 0$, $b > 0$, с краевым условием: $y(0) = y(1)$.

В настоящей статье получена теорема равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье и аналог теоремы Жордана – Дирихле.

В случае знакопеременной $p(x)$ оператор L изучался в работе [1]. А для самосопряженного оператора Штурма – Лиувилля с разрывной весовой функцией В.А. Ильин [2] получил теорему равносходимости в точке разрыва, а Н.П. Купцов [3, с. 201–205] получил аналог теоремы Дирихле.

Пусть $y = R_\lambda f = (L - \lambda E)^{-1}f$, где λ — спектральный параметр, E — единичный оператор. Тогда

$$p(x)y'(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad (1)$$

$$y(0) = y(1). \quad (2)$$

Перейдем от (1), (2) к следующей системе:

$$ay'_1(x) - \lambda y_1(x) = f_1(x), \quad (3)$$

$$by'_2(x) - \lambda y_2(x) = f_2(x), \quad (4)$$

$$y_1(0) = y_2(1/2), \quad y_1(1/2) = y_2(0), \quad (5)$$

где $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(\frac{1}{2} + x)$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(\frac{1}{2} + x)$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Пусть $\tilde{R}_\lambda F = ((\tilde{R}_\lambda F)_1, (\tilde{R}_\lambda F)_2)^T$ (T — знак транспонирования) и $F(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$.

Лемма 1. *Если λ таково, что система (3) – (5) при $f_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, 2$) имеет только нулевое решение, то справедлива формула*

$$\tilde{R}_\lambda \Phi = g_\lambda \Phi + V(x, \lambda) \Delta^{-1}(\lambda) U(g_\lambda \Phi), \quad (6)$$

$$e^{\partial_x} \Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x))^T = \left(\frac{f_1(x)}{a}, \frac{f_2(x)}{b} \right)^T,$$

$$g_\lambda \Phi = \left(- \int_x^{1/2} e^{\mu_1(x-t)} \Phi_1(t) dt, - \int_x^{1/2} e^{\mu_2(x-t)} \Phi_2(t) dt \right)^T \quad \text{npu } \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

$$g_\lambda \Phi = \left(\int_0^x e^{\mu_1(x-t)} \Phi_1(t) dt, \int_0^x e^{\mu_2(x-t)} \Phi_2(t) dt \right)^T \quad \text{npu } \operatorname{Re} \lambda < 0,$$

$$V(x, \lambda) = \operatorname{diag}(e^{\mu_1 x}, e^{\mu_2 x}), \quad \mu_1 = \lambda a^{-1}, \quad \mu_2 = \lambda b^{-1}, \quad \Delta(\lambda) = U(V(x, \lambda)) = M_0 V(0, \lambda) + M_1 V(\frac{1}{2}, \lambda), \quad M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\delta(\lambda) = \det \Delta(\lambda) = 1 - e^{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)}$. Ясно, что нули $\delta(\lambda)$ являются собственными значениями системы (3) – (5). Обозначим через S_δ область, получающуюся из λ -плоскости удалением всех нулей $\delta(\lambda)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ . Тогда имеют место оценки:

$$|\delta(\lambda)| \geq C |e^{\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)}|, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \quad (7)$$

$$|\delta(\lambda)| \geq C, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \quad (8)$$

где $C > 0$ и не зависит от λ , $\lambda \in S_\delta$.

Лемма 2. *Имеют место формулы:*

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{1}{2}\mu_2} \\ e^{\frac{1}{2}\mu_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

где $x_{11} = x_{22} = \frac{1}{\delta(\lambda)}$, $x_{12} = \frac{1}{\delta(\lambda)}e^{\frac{1}{2}\mu_2}$, $x_{21} = \frac{1}{\delta(\lambda)}e^{\frac{1}{2}\mu_1}$.

Лемма 3. Пусть $\Omega(x, \lambda; f) = (\Omega_1, \Omega_2)^T = V(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(g_\lambda\Phi)$. Тогда в S_δ справедливы оценки:

$$\Omega_i(x, \lambda; f) = O(e^{-\mu_i(\frac{1}{2}-x)}\|f\|_1), \quad \text{если } \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

$$\Omega_i(x, \lambda; f) = O(e^{\mu_i x}\|f\|_1), \quad \text{если } \operatorname{Re} \lambda < 0.$$

$$Здесь \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Утверждение леммы следует из (7), (8) и леммы 2.

Обозначим через $\tilde{R}_\lambda^0 F$ решение системы (3), (4) с краевыми условиями $y_i(0) = y_i(1/2)$ ($i = 1, 2$).

Тогда, используя леммы 1 и 3, получаем

Лемма 4. Если $f(x) \in L[0, 1]$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [\tilde{R}_\lambda F - \tilde{R}_\lambda^0 F] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\|\cdot\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]}$ — норма $C[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]$ в пространстве вектор-функций размерности 2.

Обозначим через $S_r(f, x)$ частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L для собственных значений λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$. Тогда

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\tilde{R}_\lambda F)_j \left(x - \frac{1}{2}(j-1) \right) d\lambda, \quad (9)$$

$$x \in [\frac{1}{2}(j-1), \frac{1}{2}j] \quad (j = 1, 2).$$

Из леммы 4 получаем

Теорема 1. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - p^{-1}(x)\sigma_{j, rp^{-1}(x)}(f, x)\|_{C[\Omega_\varepsilon]} = 0,$$

где $\sigma_{j,r}(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{e^{4k\pi ix}\}_{-\infty}^{+\infty}$, рассматриваемой на отрезке $[\frac{1}{2}(j-1), \frac{1}{2}j]$ ($j = 1, 2$), для тех k , для которых $|4k\pi| < r$; $\Omega_\varepsilon = [\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon] \cup [\frac{1}{2}-\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Приступаем к получению аналога теоремы Жордана — Дирихле. Используя леммы 1 и 2, получаем

Лемма 5. Если $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$, то справедливы формулы:

$$(\tilde{R}_\lambda F)_1 = -\frac{1}{\lambda}f_1(x) - \frac{1}{\lambda} \int_x^{1/2} e^{\mu_1(x-t)} df_1(t) + \frac{x_{11}}{\lambda} \int_0^{1/2} e^{\mu_1(x-t)} df_1(t) + \\ + \frac{x_{12}}{\lambda} \int_0^{1/2} e^{\mu_1 x} e^{-\mu_2 t} df_2(t),$$

$$(\tilde{R}_\lambda F)_2 = -\frac{1}{\lambda}f_2(x) - \frac{1}{\lambda} \int_x^{1/2} e^{\mu_2(x-t)} df_2(t) + \frac{x_{21}}{\lambda} \int_0^{1/2} e^{\mu_2 x} e^{-\mu_1 t} df_1(t) + \\ + \frac{x_{22}}{\lambda} \int_0^{1/2} e^{\mu_2(x-t)} df_2(t).$$

Теорема 2. Если $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - S_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0.$$

Утверждение теоремы следует из представления (9), лемм 2, 5 и оценок (7), (8).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гуревич А.П., Хромов А.П. Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 4. С. 3–15.
2. Ильин В.А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 679–698.
3. Купцов Н.П. Об аналоге теоремы Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М.: Физматгиз, 1961.

Г.В. Хромова

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА

В данной статье получены условия согласования параметра регуляризации с погрешностью исходных данных, обеспечивающие сходимость приближенных решений уравнения первого рода с произвольным линейным ограниченным оператором при применении метода М.М. Лаврентьева.

Рассматривается уравнение первого рода

$$Au = f, \quad (1)$$

где A — линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве, A^{-1} существует, но неограничен, правая часть задана приближенно: $\|f_\delta - f\| \leq \delta$; семейство операторов

$$T_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}, \quad (2)$$

соответствующих методу М.М. Лаврентьева [1].

В классической постановке этого метода предполагается, что $A = A^* > 0$, и доказывается, что тогда семейство T_α является регуляризирующим [2] для уравнения (1).

Пусть теперь A — произвольный линейный ограниченный оператор. В работе [3] даны условия на оператор A и точное решение u , необходимые и достаточные для сходимости:

$$\|T_\alpha f - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0. \quad (3)$$

Предположим, что эти условия выполняются, т.е. $u \in \overline{M(A)}$ (замыкание области значений оператора A), $\|\alpha T_\alpha Av\| \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, для $u = Av$ и $\|T_\alpha A\| \leq K$, где K не зависит от α .

Применим операторы T_α к f_δ и выясним вопрос о сходимости

$$\|T_\alpha f_\delta - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, T_\alpha, u) = \sup \{\|T_\alpha f_\delta - u\| : \|f_\delta - f\| \leq \delta\}.$$

Теорема. Для того чтобы

$$\Delta(\delta, T_\alpha, u) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (4)$$

необходимо и достаточно выполнения соглашения $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям:

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta/\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1 из [4], которая остается справедливой, если вместо уравнения (8) из [4] мы рассмотрим уравнение $\alpha u + Au = f$, соответствующее методу М.М. Лаврентьева. Согласно этой теореме, для сходимости (4) при $\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ необходимо и достаточно, чтобы

- a) $\Delta_1(T_\alpha, u) = \|T_\alpha f - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0,$
- б) $\Delta_2(T_\alpha, \delta) \equiv \sup \{\|T_\alpha f_\delta - T_\alpha f\| : \|f_\delta - f\| \leq \delta\} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$

Условие а) выполняется по нашему предположению.

Поскольку $\Delta_2(T_\alpha, \delta) = \|T_\alpha\| \delta$, то условие б) эквивалентно условию $\|T_\alpha\| \delta \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$, которое приводит к соглашению $\alpha = \alpha(\delta)$ такому, чтобы $\|T_{\alpha(\delta)}\| \delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Выразим норму $\|T_\alpha\|$ через норму $\|T_\alpha A\|$.

Имеем:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= (\alpha E + A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \left[(E + \frac{1}{\alpha} A)^{-1} \mp E \right] = \frac{1}{\alpha} \left[E + (E + \frac{1}{\alpha} A)^{-1} - E \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[E + (E + \frac{1}{\alpha} A)^{-1} (E - (E + \frac{1}{\alpha} A)) \right] = \frac{1}{\alpha} \left[E - \frac{1}{\alpha} (E + \frac{1}{\alpha} A)^{-1} A \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} (E - T_\alpha A). \end{aligned}$$

Из последнего представления вытекает двусторонняя оценка:

$$\frac{1}{\alpha} |1 - K| \leq \|T_\alpha\| \leq \frac{1}{\alpha} (1 + K).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 92 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. Хромова Г.В. О сходимости методов регуляризации // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы Восьмой Междунар. Казан. летн. науч. шк.-конф. Казань, 27 июня – 4 июля 2007 г. (Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского.) Казань: Изд-во Казан. мат. общ-ва, 2007. Т. 35. С. 264–265.

4. Иванов В.К. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 3. С. 410–421.

УДК 519.642.8

О.И. Шаталина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Данная статья представляет собой развитие методов, предложенных в работе [1] для восстановления периодических функций на случай непрерывных функций, заданных на отрезке.

Пусть некоторая непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ функция $f(x)$ задана её приближением $f_\delta(x)$ в пространстве $L_2[-1, 1] : \|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2[-1,1]} \leq \delta$.

Требуется по $f_\delta(x)$ и δ построить приближение к $f(x)$ в метрике пространства $C[-1, 1]$. Это так называемая задача восстановления функции из L_2 в C .

Для решения поставленной задачи используем частичные суммы Фурье по полиномам Лежандра.

Пусть $P_n(x)_{n=0}^\infty$ — система ортонормированных полиномов Лежандра [2].

Обозначим через S_n оператор частичных сумм Фурье функции $f(x)$ по полиномам Лежандра:

$$S_n f = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x).$$

Для большого класса непрерывных функций выполняется сходимость:

$$\|S_n f - f\|_{C[-1,1]} \rightarrow 0, \quad (1)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Будем предполагать, что для функции $f(x)$ выполняется сходимость (1).

Применим оператор S_n к функции $f_\delta(x)$ и рассмотрим норму

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[-1,1]}.$$

Справедлива очевидная оценка:

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[-1,1]} \leq \|S_n\|_{L_2 \rightarrow C} \delta + \|S_n f - f\|_C. \quad (2)$$

Из (2) следует, что для сходимости

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[-1,1]} \rightarrow 0 \quad (3)$$

при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, достаточно согласовать n с δ так, чтобы

$$\delta \|S_{n(\delta)}\|_{L_2 \rightarrow C} \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$.

Найдем это согласование.

Теорема 1. Для того чтобы имела место сходимость (3), достаточно выполнения соглашения $n = n(\delta)$, удовлетворяющего условиям: $n(\delta) \rightarrow \infty$, $\delta n(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. Рассмотрим норму $\|S_n\|_{L_2 \rightarrow C}$. Используем известную формулу для нормы интегрального оператора:

$$\|S_n f\|_{L_2 \rightarrow C} = \max_x \left(\int_{-1}^1 K_n^2(x, t) dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$K_n(x, t) = \sum_{k=0}^n P_k(x) P_k(t)$$

— ядро интегрального оператора. В силу ортонормируемости и основных свойств полиномов Лежандра, получаем

$$\|S_n\|_{L_2 \rightarrow C} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(n+1). \quad (4)$$

Подбирая особым образом конкретную функцию и точку, из представления (4) находится оценка снизу $\|S_n\|_{L_2 \rightarrow C}$, которая совпадает с верхней. Отсюда заключаем, что

$$\|S_n\|_{L_2 \rightarrow C} = \frac{1}{\sqrt{2}}(n+1). \quad (5)$$

Из (2) и (5) следует утверждение теоремы.

Если на функцию $f(x)$ наложены дополнительные условия, позволяющие получить оценку нормы $\|S_n f - f\|_C$ в (2), то для согласования $n = n(\delta)$ можно указать конкретные формулы и получить оценки погрешности для $\|S_{n(\delta)} f_\delta - f\|_C$.

Теорема 2. Если $f(x) \in Lip\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$, то справедлива оценка:

$$\|S_{n(\delta)} f_\delta - f\|_{C[-1,1]} \leq K \delta^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}}, \quad (6)$$

$$\varepsilon \partial e n(\delta) = [|C_1(\alpha)\delta^{-\frac{2}{2\alpha+1}}|],$$

$$\delta \leq \delta_0 = (\frac{C_1(\alpha)}{2})^{\alpha+\frac{1}{2}},$$

$$C_1(\alpha) = (\sqrt{2}C(\alpha)(\alpha - \frac{1}{2})^{\frac{2}{2\alpha+1}},$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}C_1(\alpha) + C(\alpha)C_2,$$

$C(\alpha)$ – константа, зависящая только от выбора α ,

$$C_2(\alpha) = (C_1(\alpha) - 2\delta_0^{\frac{2}{2\alpha+1}}).$$

Доказательство. Известно [2], что для $f(x) \in Lip\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$, выполняется оценка:

$$\|S_n f - f\|_C \leq \frac{C(\alpha)}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}. \quad (7)$$

Подставляем (6) и (5) в (2):

$$\|S_n f_\delta - f\|_C \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(n+1)\delta + \frac{C(\alpha)}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}. \quad (8)$$

Выберем $n = n(\delta)$ из условия минимума правой части (7) и возьмем целую часть от полученного выражения. Эту целую часть будем считать найденным согласованием $n(\delta)$, причем получаем:

$$n(\delta) = [C_1(\alpha)\delta^{\frac{1}{2\alpha+1}}], \quad (9)$$

где $C_1(\alpha)$ определено в условии теоремы.

Подставляя (7) в (8) и сделав необходимые преобразования каждого слагаемого, окончательно имеем

$$\|S_{n(\delta)} f_\delta - f\|_{C[-1,1]} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}C_1(\alpha)\delta^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}} + C(\alpha)\delta^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}}(C_1(\alpha) - 2\delta_0^{\frac{2}{2\alpha+1}})^{\frac{1}{2}-\alpha},$$

т.е. получили утверждение теоремы.

Аналогичная теорема справедлива для дифференцируемой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $f^{(p)} \in Lip\alpha$, $p + \alpha > \frac{1}{2}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М., 1979.
2. Хромова Г.В. О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // ЖКВМ и МФ. 1977. Т.7, №5. С. 1161–1171.

В.И. Шевцов

О РЯДАХ ЭКСПОНЕНТ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Ряды экспонент имеют большое значение как в анализе, так и в теории чисел. Представления целых функций рядами экспонент изучались многими математиками. Фундаментальные исследования по теории представления функций рядами экспонент и их обобщениям проведены А.Ф. Леонтьевым [1, 2] и его учениками.

Пусть $L_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ — целая функция уточненного порядка $\rho_1(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \rho_1$ и типа σ_1 . По определению $\rho(r)$ называется уточненным порядком, если существует $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$, $\lim_{r \rightarrow \infty} r\rho'(r) \ln r = 0$. Предположим, что все нули функции $L_1(\lambda)$ простые, обозначим их через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Обозначим далее через B — класс целых функций таких, что любая функция из этого класса целая уточненного порядка $\rho_2(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_2(r) = \rho_2$ и типа $\sigma_2 < \gamma$ при этом уточненном порядке и выполняются следующие условия:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{\rho - 1}, \quad (\gamma \rho_2)^{1/\rho_2} (2\sigma_1 \rho_1)^{1/\rho_1} = 1. \quad (1)$$

В теории представления целых функций рядами экспонент важную роль играет интерполирующая функция, которая определяется следующим образом:

$$\omega_{L_1}(\mu, F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[F^{(k-1)}(0) + \mu F^{(k-2)}(0) + \cdots + \mu^{k-1} F(0) \right].$$

Эта функция в классе B является целой функцией комплексного переменного μ , так как выполнены условия (1). Интерполирующая функция была введена и исследована в работах А.Ф. Леонтьева и применялась в дальнейшем при рассмотрении рядов экспонент как в работах А.Ф. Леонтьева, так и в работах других математиков [3, 4]. В дальнейшем будем использовать следующую лемму.

Лемма. Пусть $L(\lambda) = L_1(\lambda)L_2(\lambda)$, где $L_1(\lambda)$ — целая функция уточненного порядка $\rho_1(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \rho_1$ ($\rho_1 > 1$) и типа σ_1 , $L_2(\lambda)$ — целая функция уточненного порядка $\tilde{\rho}_1(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_1(r) = \rho_1$ ($\rho_1 > 1$) и типа σ_1 . Если $f \in B$, то

$$\omega_L(\mu, f) = L_1(\mu)\omega_{L_2}(\mu, f) + \omega_{L_1}(\mu, \Phi), \quad \Phi(z) = M_{L_2}(f),$$

$$e \partial e M_{L_2}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k f^{(k)}(z), L_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k.$$

Доказательство данной леммы проводится в основном так же, как доказательство соответствующего утверждения, приведенного в работе [2, с. 225] для целых функций обычных порядков.

Целой функции $f(z)$, $f \in B$, приведем в соответствие следующий ряд экспонент:

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, A_k = \frac{\omega_{L_1}(\lambda_k, f)}{L'_1(\lambda_k)}. \quad (2)$$

Отметим, что справедливо следующее свойство единственности: если все коэффициенты ряда (2) равны нулю, то $f(z) \equiv 0$. Поэтому функцию $f(z)$ можно восстановить по коэффициентам A_k [4]. В данной статье рассмотрен случай, когда

$$L_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}, \lambda_k > 0. \quad (3)$$

Множество точек $A = \{\lambda_k\}$ имеет плотность $\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{\rho_1(r)}$ при уточненном порядке $\rho_1(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \rho_1$, $1 < \rho_1 < 2$ и $\lambda_{k+1} - \lambda_k > d \lambda_k^{1-\rho_1(\lambda_k)}$, $k > k_0$, $d > 0$. Функция $L_1(\lambda)$ – целая функция уточненного порядка $\rho_1(r)$ и типа $\sigma = -\frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho_1}$.

Пусть B^* – подкласс целых функций из B таких, что любая функция $f(z)$, принадлежащая B^* , удовлетворяет следующему уравнению бесконечного порядка:

$$M_{L_1}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(z) = 0,$$

где $L_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(z) \in B^*$ ограничена на вещественной оси, то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как $f(z) \in B^*$, то применяя лемму, сформулированную выше, и (3), получаем

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, \quad (4)$$

$$|A_k| < B e^{-h \alpha_k}, \alpha_k = \lambda_k^{\rho_1}, h > -\pi \Delta \operatorname{tg} \frac{\pi \rho_1}{2}, B = \text{const}. \quad (5)$$

Следовательно, целая функция $f(z)$ представляется абсолютно сходящимся во всей плоскости рядом экспонент (4), коэффициенты которого

имеют оценку (5). Поэтому в силу теоремы Гашимова [5], так как функция $f(z)$ ограничена на вещественной оси, $f(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Заметим, что в доказанной теореме требование принадлежности функции $f(z)$ классу B^* является существенным. Для целой функции, принадлежащей классу B , ряд экспонент (2) может расходиться, а также сходиться не к функции $f(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М., 1976.
2. Леонтьев А.Ф. Обобщения рядов экспонент. М., 1981.
3. Шевцов В.И. К вопросу о восстановлении функции по известным коэффициентам соответствующего ей ряда по некоторой системе аналитических функций // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. науч. сб. Саратов, 1974. Вып. 4. С. 18–29.
4. Шевцов В.И. Представление целых функций уточненных порядков обобщенными рядами экспонент // Математика. Механика.: Сб. науч. тр. Саратов, 2006. Вып. 8. С. 157–160.
5. Гашимов Г.М. Теорема единственности для рядов Дирихле // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, №4. С. 722–725.

УДК 517.984

В.А. Юрко

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ С КОРНЕВЫМ ЦИКЛОМ

1. Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма — Лиувилля на графе с корневым циклом. Доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура решения обратной задачи. Отметим, что обратные задачи восстановления операторов Штурма — Лиувилля на дереве (т.е. на графике без циклов) исследовались в работе [1].

Рассмотрим компактный график G в \mathbf{R}^m с вершинами $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и ребрами $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где e_0 — цикл, $v_0 \in e_0$. Граф имеет вид $G = e_0 \cup T$, где T — дерево с корнем v_0 , вершинами $\{v_0, \dots, v_r\}$ и ребрами $\{e_1, \dots, e_r\}$, причем $T \cap e_0 = v_0$ и v_0 — граничная вершина для T . Если $e = [v, w]$ — ребро (см. [1]), то v — его начальная точка, а w — его конечная точка; говорят, что e выходит из v и заканчивается в w . Для каждой внутренней вершины v обозначим через $R(v) := \{e \in \mathcal{E} : e = [v, w], w \in V\}$ множество ребер, выходящих из v . Для $v \in V$ положим $|v|$ — число ребер между v_0 и v ; число $|v|$ называется *порядком вершины* v . *Порядком ребра* $e \in \mathcal{E}$ называется порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=1,r} |v_j|$ называется *высотой дерева* T . Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$ — множество вершин порядка μ , а $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in \mathcal{E} : e = [v, w], v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$,

$\mu = \overline{1, \sigma}$ – множество ребер порядка μ . Занумеруем вершины v_j так, что $\Gamma := \{v_1, \dots, v_p\}$ – граничные вершины G , $v_{p+1} \in V^{(1)}$, а v_j , $j > p + 1$, занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра: $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \dots, e_p\}$ – граничные ребра, $e_{p+1} = [v_0, v_{p+1}]$. Ребро e_{p+1} , выходящее из v_0 , называется *корневым ребром для T* .

Пусть d_j – длина ребра e_j , $j = \overline{0, r}$. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, d_j]$, причем для $j = \overline{1, r}$ конечная вершина v_j соответствует $x_j = 0$, а начальная вершина v_{j_k} соответствует $x_j = d_j$; для цикла e_0 оба конца $x_0 = +0$ и $x_0 = d_0 - 0$ соответствуют v_0 . Интегрируемая функция Y на G имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0, r}}$, где $y_j(x_j)$ определены на e_j . Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0, r}}$ – интегрируемая вещественная функция на G , которая называется *потенциалом*. Рассмотрим уравнение Штурма – Лиувилля на G :

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in [0, d_j], \quad j = \overline{0, r}, \quad (1)$$

где $y_j(x_j)$, $y'_j(x_j) \in AC[0, d_j]$ удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренних вершинах v_0 и v_k , $k = \overline{p+1, r}$:

$$y_j(d_j) = y_k(0) \text{ при всех } e_j \in R(v_k), \quad \sum_{e_j \in R(v_k)} y'_j(d_j) = y'_k(0), \quad k = \overline{p+1, r}, \quad (2)$$

$$y_{p+1}(d_{p+1}) = y_0(d_0) = y_0(0), \quad y'_{p+1}(d_{p+1}) + y'_0(d_0) = y'_0(0). \quad (3)$$

Рассмотрим краевую задачу $L_0(G)$ для уравнения (1) с краевыми условиями $y_j(0) = 0$, $j = \overline{1, p}$. Кроме того, рассмотрим краевые задачи $L_k(G)$, $k = \overline{1, p}$, для (1) с краевыми условиями $y'_k(0) = 0$, $y_j(0) = 0$, $j = \overline{1, p} \setminus k$. Пусть $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n \geq 1}$ – спектр $L_k(G)$, $k = \overline{0, p}$ (с учетом кратностей). Пусть $S_j(x_j, \lambda)$, $C_j(x_j, \lambda)$, $j = \overline{0, r}$, – решения (1) на ребре e_j с начальными условиями $S_j(0, \lambda) = C'_j(0, \lambda) = 0$, $S'_j(0, \lambda) = C_j(0, \lambda) = 1$. Положим $h(\lambda) := S_0(d_0, \lambda)$, $h(\lambda) := S_0(d_0, \lambda)$, $H(\lambda) := C_0(d_0, \lambda) - S'_0(d_0, \lambda)$. Пусть $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ – нули целой функции $h(\lambda)$, $\omega_n := \operatorname{sign} H(\nu_n)$, $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$.

Обратная задача 1. По данным Λ_k , $k = \overline{0, p}$, и Ω построить потенциал q на G .

2. Фиксируем $k = \overline{p+1, r}$ и обозначим $Q_k := \{z \in T : v_k < z\}$, $G_k := G \setminus Q_k$. Тогда $Q_k = \bigcup_{e_i \in R(v_k)} T_{ki}$, где T_{ki} – дерево с корнем v_k и корневым ребром e_i . Ясно, что $G_k = e_0 \cup T_k$, где $T_k = \overline{T \setminus Q_k}$.

Условимся, что если D – граф, то $L_0(D)$ – краевая задача для (1) на D с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах. Пусть $\{Y\}_D := \{y_j\}_{e_j \in D}$. Если v_j – граничная вершина D , то $L_j(D)$ обозначает краевую задачу для (1) на D с условием Неймана $Y'_{|v_j} = 0$ в v_j .

и с условиями Дирихле во всех остальных граничных вершинах. Также рассмотрим краевую задачу $L^1(T)$ для (1) на T с краевыми условиями $Y'_{|v_0} = 0$, $Y_{|v_j} = \overline{1, p}$.

Фиксируем $k = \overline{1, p}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{0,r}}$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям склейки (2), (3) и краевым условиям

$$\Phi_{kj}(0, \lambda) = \delta_{kj}, \quad j = \overline{1, p}, \quad (4)$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Обозначим $M_k(\lambda) := \Phi'_{kk}(0, \lambda)$, $k = \overline{1, p}$. Функция $M_k(\lambda)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k . Положим $M_{kj}^0(\lambda) = \Phi'_{kj}(0, \lambda)$, $M_{kj}^1(\lambda) = \Phi_{kj}(0, \lambda)$, $j = \overline{0, r}$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j, \lambda) = M_{kj}^1(\lambda)C_j(x_j, \lambda) + M_{kj}^0(\lambda)S_j(x_j, \lambda), \quad j = \overline{0, r}. \quad (5)$$

В частности, $M_{kk}^0(\lambda) = M_k(\lambda)$, $M_{kk}^1(\lambda) = 1$. Подставляя (5) в (2)–(4), получаем линейную систему s_k относительно $M_{kj}^0(\lambda)$, $M_{kj}^1(\lambda)$, $j = \overline{0, r}$. Определитель $\Delta_0(\lambda, G)$ этой системы не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, T)d(\lambda) + \Delta^1(\lambda, T)h(\lambda), \quad (6)$$

где $d(\lambda) = C_0(d_0, \lambda) + S'_0(d_0, \lambda) - 2$, а $\Delta_0(\lambda, T)$ и $\Delta^1(\lambda, T)$ – характеристические функции задач $L_0(T)$ и $L^1(T)$ соответственно (см. [1]). Функция $\Delta_0(\lambda, G)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями задачи $L_0(G)$. Решая алгебраическую систему s_k , получаем по формулам Крамера: $M_{kj}^\nu(\lambda) = \Delta_{kj}^\nu(\lambda, G)/\Delta_0(\lambda, G)$, $\nu = 0, 1$, $j = \overline{0, r}$, где определитель $\Delta_{kj}^\nu(\lambda, G)$ получается из $\Delta_0(\lambda, G)$ заменой столбца, соответствующего $M_{kj}^\nu(\lambda)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\Delta_k(\lambda, G)/\Delta_0(\lambda, G), \quad k = \overline{1, p}, \quad (7)$$

где $\Delta_k(\lambda, G)$, $k = \overline{1, p}$, получаются из $\Delta_0(\lambda, G)$ заменой $S_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$, $\nu = 0, 1$ на $C_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$. Нули $\Delta_k(\lambda, G)$ (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями задачи $L_k(G)$. Функция $\Delta_k(\lambda, G)$, $k = \overline{0, p}$, называется *характеристической функцией задачи $L_k(G)$* .

Фиксируем $k = \overline{p+1, r}$. Пусть $\Delta_0(\lambda, G_k)$ и $\Delta_k(\lambda, G_k)$ – характеристические функции для $L_0(G_k)$ и $L_k(G_k)$ соответственно. Формула (6) преобразуется к виду

$$\Delta_0(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, Q_k)\Delta_0(\lambda, G_k) + \left(\prod_{e_i \in R(v_k)} \Delta_0(\lambda, T_{ki}) \right) \Delta_k(\lambda, G_k), \quad (8)$$

где $\Delta_0(\lambda, Q_k)$ и $\Delta_0(\lambda, T_{ki})$ – характеристические функции для $L_0(Q_k)$ и $L_0(T_{ki})$ соответственно. Аналогично для $e_j \in E \cap T_{ks}$ имеем

$$\Delta_j(\lambda, G) = \Delta_j(\lambda, Q_k)\Delta_0(\lambda, G_k) + \left(\Delta_j(\lambda, T_{ks}) \prod_{e_i \in R(v_k), i \neq s} \Delta_0(\lambda, T_{ki}) \right) \Delta_k(\lambda, G_k), \quad (9)$$

где $\Delta_j(\lambda, Q_k)$ и $\Delta_j(\lambda, T_{ki})$ получены из $\Delta_0(\lambda, Q_k)$ и $\Delta_0(\lambda, T_{ki})$ заменой $S_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$, $j = 0, 1$, на $C_j^{(\nu)}(d_j, \lambda)$.

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im} \rho \geq 0$, $\Lambda^\delta := \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$, $\lambda_{kn}^0 = (\rho_{kn}^0)^2$, $k = \overline{0, p}$, – спектр задачи $L_k^0(G)$ с нулевым потенциалом $q = 0$, и пусть $\Delta_k^0(\lambda, G)$ – характеристические функции для $L_k^0(G)$. Используя (6), (8), (9), получаем следующие утверждения.

- 1) Существует $h > 0$ такое, что спектр $\lambda_{kn} = \rho_{kn}^2$ лежит в полосе $|\operatorname{Im} \rho| < h$.
- 2) При $\rho \in \Lambda^\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$ имеем $\Delta_k(\lambda, G) = \Delta_k^0(\lambda, G)(1 + O(\rho^{-1}))$.
- 3) При $n \rightarrow \infty$ имеем $\rho_{kn} = \rho_{kn}^0 + O((\rho_{kn}^0)^{-1})$.
- 4) Положим $\lambda_{kn}^{01} = \lambda_{kn}^0$, если $\lambda_{kn}^0 \neq 0$, и $\lambda_{kn}^{01} = 1$, если $\lambda_{kn}^0 = 0$. Тогда

$$\Delta_k(\lambda, G) = A_k^0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} - \lambda}{\lambda_{kn}^{01}}, \quad A_k^0 = \frac{(-1)^{s_k}}{s_k!} \left(\frac{\partial^{s_k}}{\partial \lambda^{s_k}} \Delta_k^0(\lambda, G) \right)_{|\lambda=0}, \quad (10)$$

где $s_k \geq 0$ – кратность нулевого собственного значения для $L_k^0(G)$.

3. Рассмотрим вспомогательную обратную задачу для G на ребре e_k , $k = \overline{1, p}$, которая называется **IP(k)**: дана $M_k(\lambda)$, построить $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$.

Теорема 1. Задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциал q_k на e_k . Функция q_k строится методом спектральных отображений (см. [1]).

Рассмотрим вспомогательную обратную задачу на ребре e_0 , которая называется **IP(0)**: даны $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$, построить $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, d_0]$.

Теорема 2. Задание $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$ однозначно определяет потенциал $q_0(x_0)$ на $[0, d_0]$. Функция q_0 может быть построена по следующему алгоритму.

Алгоритм 1. Даны $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$.

- 1) Находим $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ – нули $h(\lambda)$.
- 2) Вычисляем $H(\nu_n) = \omega_n \sqrt{d^2(\nu_n) - 4}$.
- 3) Строим $S'_0(d_0, \nu_n) = (d(\nu_n) - H(\nu_n))/2$.
- 4) Находим $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ по формуле $\alpha_n = \dot{h}(\nu_n) S'_0(d_0, \nu_n)$, $\dot{h}(\lambda) := \frac{dh(\lambda)}{d\lambda}$.
- 5) Строим q_0 по спектральным данным $\{\nu_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$, решая классическую обратную задачу Штурма – Лиувилля (см. [1]).

Пусть даны Λ_k , $k = \overline{0, p}$, и Ω . Решение обратной задачи 1 состоит в реализации так называемых D_μ -процедур последовательно при $\mu = \sigma, \sigma - 1, \dots, 1, 0$.

- D_σ-процедура.**
- 1) Для каждого $k = \overline{0, p}$ строим $\Delta_k(\lambda, G)$ по (10).
 - 2) Для каждого $k = \overline{1, p}$ вычисляем функцию Вейля $M_k(\lambda)$ по (7).
 - 3) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ решаем обратную задачу IP(k) и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$.
 - 4) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$, $S_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$, $\nu = 0, 1$.
 - 5) Для каждого $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ выберем s и j так, чтобы $e_j \in E \cap T_{ks}$. Решая линейную алгебраическую систему (8), (9), находим $\Delta_0(\lambda, G_k)$ и $\Delta_k(\lambda, G_k)$.
 - 6) При каждом $v_k \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ строим функцию Вейля $M_k(\lambda)$ для G_k по формуле

$$M_k(\lambda) = -\Delta_k(\lambda, G_k)/\Delta_0(\lambda, G_k). \quad (11)$$

Выполним D_μ -процедуры при $\mu = \overline{2, \sigma - 1}$ по индукции. Фиксируем $\mu = \overline{2, \sigma - 1}$ и предположим, что $D_{\sigma}, \dots, D_{\mu+1}$ -процедуры уже выполнены. Выполним D_μ -процедуру.

- D_μ-процедура.**
- 1) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ решаем обратную задачу IP(k) на G_k и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, d_k]$.
 - 2) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ вычисляем $C_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$, $S_k^{(\nu)}(d_k, \lambda)$, $\nu = 0, 1$.
 - 3) Для каждого $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ выберем s и j так, чтобы $e_j \in E \cap T_{ks}$. Решая линейную алгебраическую систему (8), (9), находим $\Delta_0(\lambda, G_k)$ и $\Delta_k(\lambda, G_k)$.
 - 4) При каждом фиксированном $v_k \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем $M_k(\lambda)$ для G_k по (11).

- D₁-процедура.**
- 1) Решаем обратную задачу IP(p+1) на G_{p+1} и находим $q_{p+1}(x_{p+1})$, $x_{p+1} \in [0, d_{p+1}]$ на корневом ребре e_{p+1} .
 - 2) Вычисляем $C_{p+1}^{(\nu)}(d_{p+1}, \lambda)$, $S_{p+1}^{(\nu)}(d_{p+1}, \lambda)$, $\nu = 0, 1$.
 - 3) Находим $d(\lambda)$ and $h(\lambda)$, решая линейную алгебраическую систему

$$\Delta_0(\lambda, G_{p+1}) = S_{p+1}(d_{p+1}, \lambda)d(\lambda) + S'_{p+1}(d_{p+1}, \lambda)h(\lambda),$$

$$\Delta_{p+1}(\lambda, G_{p+1}) = C_{p+1}(d_{p+1}, \lambda)d(\lambda) + C'_{p+1}(d_{p+1}, \lambda)h(\lambda).$$

D₀-процедура. Строим $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, d_0]$ на e_0 по алгоритму 1. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Задание Λ_k , $k = \overline{0, p}$, и Ω однозначно определяет потенциал q на G , который строится последовательным выполнением D_{σ^-} , $D_{\sigma-1^-}, \dots, D_0$ -процедур.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-HNC-a).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

УДК 629

А.Г. Бирюков, В.Г. Бирюков, Ю.Н. Челноков

**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
УГОЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Рассматривается задача оптимального вывода твердого тела на заданную программную траекторию углового движения. Движение твердого тела описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений в отклонениях [1]

$$\begin{aligned}\delta \dot{\bar{\omega}}_\xi &= \delta \bar{\varepsilon}_\xi + [\bar{\nu} \circ \bar{\omega}_\xi^0 \circ \tilde{\bar{\nu}}] \times \delta \bar{\omega}_\xi, \\ 2\dot{\bar{\nu}} &= \delta \bar{\omega}_\xi \circ \bar{\nu},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\bar{\omega}_\xi^0 = \bar{\omega}_\xi^0(t)$ – программная угловая скорость, $\delta \bar{\omega}_\xi = \delta \omega_{\xi 1} \bar{i}_1 + \delta \omega_{\xi 2} \bar{i}_2 + \delta \omega_{\xi 3} \bar{i}_3$, $\delta \bar{\varepsilon}_\xi = \delta \varepsilon_{\xi 1} \bar{i}_1 + \delta \varepsilon_{\xi 2} \bar{i}_2 + \delta \varepsilon_{\xi 3} \bar{i}_3$ – кватернионы ошибки угловой скорости и углового ускорения, $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ – мнимые единицы Гамильтона, волна означает сопряженный кватернион, $\bar{\nu} = \nu_0 + \nu_1 \bar{i}_1 + \nu_2 \bar{i}_2 + \nu_3 \bar{i}_3$ – кватернион, характеризующий отклонение текущей ориентации от программной, описываемой кватернионом программной ориентации $\bar{\lambda}^0 = \bar{\lambda}^0(t)$. Знак « \circ » обозначает кватернионное произведение, а « \times » – векторное произведение.

Требуется построить управление $\delta \bar{\varepsilon}_\xi$, переводящее твердое тело из начального положения

$$\delta \bar{\omega}_\xi(0) = \delta \bar{\omega}_\xi^0, \quad \bar{\nu}(0) = \bar{\nu}^0 \quad (2)$$

в конечное положение

$$\delta \bar{\omega}_\xi(t_1) = 0, \quad \bar{\nu}(t_1) = 1 \quad (3)$$

за время t_1 . При этом функционал качества

$$\begin{aligned}J = \int_0^{t_1} & \left[\alpha_1 (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2) + \alpha_2 (\delta \omega_1^2 + \delta \omega_2^2 + \delta \omega_3^2) + \right. \\ & \left. + \alpha_3 (\delta \varepsilon_1^2 + \delta \varepsilon_2^2 + \delta \varepsilon_3^2) \right] dt\end{aligned}\quad (4)$$

должен принимать минимальное значение. В функционале (4) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – положительные константы.

Будем считать, что на управление не накладывается никаких ограничений, а время переориентации является фиксированным (заданным).

Сформулированную задачу будем решать с помощью принципа максимума Л.С. Понtryгина. Составим функцию Гамильтона – Понtryгина [2]

$$\begin{aligned}
H = & - \left[\alpha_1 (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2) + \alpha_2 (\delta\omega_1^2 + \delta\omega_2^2 + \delta\omega_3^2) + \right. \\
& \left. + \alpha_3 (\delta\varepsilon_1^2 + \delta\varepsilon_2^2 + \delta\varepsilon_3^2) \right] + \varphi_1 (\delta\varepsilon_{\xi 1} + \Omega_2 \delta\omega_{\xi 3} - \Omega_3 \delta\omega_{\xi 2}) + \\
& + \varphi_2 (\delta\varepsilon_{\xi 2} + \Omega_3 \delta\omega_{\xi 1} - \Omega_1 \delta\omega_{\xi 3}) + \varphi_3 (\delta\varepsilon_{\xi 3} + \Omega_1 \delta\omega_{\xi 2} - \Omega_2 \delta\omega_{\xi 1}) + \\
& + \frac{1}{2} \psi_0 (-\nu_1 \delta\omega_{\xi 1} - \nu_2 \delta\omega_{\xi 2} - \nu_3 \delta\omega_{\xi 3}) + \frac{1}{2} \psi_1 (\nu_0 \delta\omega_{\xi 1} - \nu_2 \delta\omega_{\xi 3} + \nu_3 \delta\omega_{\xi 2}) + \\
& + \frac{1}{2} \psi_2 (\nu_0 \delta\omega_{\xi 2} + \nu_1 \delta\omega_{\xi 3} - \nu_3 \delta\omega_{\xi 1}) + \frac{1}{2} \psi_3 (\nu_0 \delta\omega_{\xi 3} - \nu_1 \delta\omega_{\xi 2} + \nu_2 \delta\omega_{\xi 1}),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ – сопряженные переменные, соответствующие фазовым переменным $\delta\omega_{\xi 1}, \delta\omega_{\xi 2}, \delta\omega_{\xi 3}$ и $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$.

Система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\varphi}} &= [\bar{\nu} \circ \bar{\omega}_{\xi}^0 \circ \tilde{\bar{\nu}}] \times \bar{\varphi} + \frac{1}{2} \text{vect}(\bar{\nu} \circ \tilde{\bar{\psi}}) + 2\alpha_2 \delta\bar{\omega}_{\xi}, \\
\dot{\bar{\psi}} &= \frac{1}{2} \delta\bar{\omega}_{\xi} \circ \bar{\psi} - \bar{\varphi} \circ \delta\bar{\omega}_{\xi} \circ \bar{\nu} \circ \bar{\omega}_{\xi}^0 - \delta\bar{\omega}_{\xi} \circ \bar{\varphi} \circ \bar{\nu} \circ \bar{\omega}_{\xi}^0 + 2\alpha_1 \bar{\nu}_v,
\end{aligned}$$

где $\bar{\psi} = \psi_0 + \psi_1 \bar{i}_1 + \psi_2 \bar{i}_2 + \psi_3 \bar{i}_3$, $\bar{\varphi} = \varphi_1 \bar{i}_1 + \varphi_2 \bar{i}_2 + \varphi_3 \bar{i}_3$, $\text{vect}(\cdot)$ – векторная часть кватерниона.

Из условия максимума функции Гамильтона – Понtryгина (5) для неограниченного управления имеем

$$\delta\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\varphi}}{2\alpha_3}. \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений краевой задачи оптимального управления, замкнутая полученным законом оптимального управления (6), запишется в виде

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\bar{\omega}}_{\xi} &= \frac{\bar{\varphi}}{2\alpha_3} + [\bar{\nu} \circ \bar{\omega}_{\xi}^0 \circ \tilde{\bar{\nu}}] \times \delta\bar{\omega}_{\xi}, \\
2\dot{\bar{\nu}} &= \delta\bar{\omega}_{\xi} \circ \nu, \\
\dot{\bar{\varphi}} &= [\bar{\nu} \circ \bar{\omega}_{\xi}^0 \circ \tilde{\bar{\nu}}] \times \bar{\varphi} + \frac{1}{2} \text{vect}(\bar{\nu} \circ \tilde{\bar{\psi}}) + 2\alpha_2 \delta\bar{\omega}_{\xi}, \\
\dot{\bar{\psi}} &= \frac{1}{2} \delta\bar{\omega}_{\xi} \circ \bar{\psi} - \bar{\varphi} \circ \delta\bar{\omega}_{\xi} \circ \bar{\nu} \circ \bar{\omega}_{\xi}^0 - \delta\bar{\omega}_{\xi} \circ \bar{\varphi} \circ \bar{\nu} \circ \bar{\omega}_{\xi}^0 + 2\alpha_1 \bar{\nu}_v.
\end{aligned} \tag{7}$$

Система (7) – это система четырнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений. Порядок системы может быть понижен на единицу путем введения новой векторной переменной $\bar{p} = \text{vect}(\bar{\nu} \circ \tilde{\psi})$:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\bar{\omega}}_\xi &= \frac{\bar{\varphi}}{2\alpha_3} + [\bar{\nu} \circ \bar{\omega}_\xi^0 \circ \tilde{\nu}] \times \delta\bar{\omega}_\xi, \\ 2\dot{\bar{\nu}} &= \delta\bar{\omega}_\xi \circ \bar{\nu}, \\ \dot{\bar{\varphi}} &= [\bar{\nu} \circ \bar{\omega}_\xi^0 \circ \tilde{\nu}] \times \bar{\varphi} + \frac{1}{2}\bar{p} + 2\alpha_2\delta\bar{\omega}_\xi, \\ \dot{\bar{p}} &= \delta\bar{\omega}_\xi \times \bar{p} - \alpha_1\nu_0\bar{\nu}_v - 2[\bar{\nu} \circ \bar{\omega}_\xi^0 \circ \tilde{\nu}] \times [\bar{\varphi} \times \delta\bar{\omega}_\xi].\end{aligned}\tag{8}$$

Для частного случая, когда программное движение есть ориентированное положение в пространстве, проведено аналитическое исследование дифференциальных уравнений задачи. Найдены три первых интеграла для уравнений задачи: скалярный первый интеграл

$$\alpha_3|\delta\bar{\omega}_\xi|^2 - \frac{1}{4\alpha_2}|\bar{\varphi}|^2 + \frac{1}{2}\bar{p} \cdot \delta\bar{\omega}_\xi - \alpha_1\nu_0^2 = C,\tag{9}$$

и два векторных первых интеграла

$$\delta\bar{\omega} \times \bar{\varphi} + \frac{1}{2}\bar{p} - \frac{1}{2}\tilde{\bar{\nu}} \circ \bar{p} \circ \bar{\nu} = \bar{D},\tag{10}$$

$$\delta\bar{\omega}_\xi - \tilde{\bar{\nu}} \circ \delta\bar{\omega}_\xi \circ \bar{\nu} = \bar{K}|\bar{\nu}_v \times \delta\bar{\omega}_\xi|,\tag{11}$$

где C, \bar{D}, \bar{K} – постоянные, которые могут быть определены через заданные граничные условия.

Для частного случая, когда программным движением является ориентированное положение в пространстве, а весовые коэффициенты $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, найдено частное аналитическое решение в предположении, что вектор $\delta\bar{\omega}_\xi$ сонаправлен или противоположно направлен вектору \bar{p} на всем интервале времени. Полученное решение согласуется с решением, построенным в работе [3]. Вектор ошибки по угловой скорости $\delta\bar{\omega}_\xi$ и кватернион ошибки ориентации $\bar{\nu}$ в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}\delta\bar{\omega}_\xi(t) &= \delta\bar{\omega}_\xi^0 - \frac{1}{2\alpha_3} \left[\bar{\varphi}_0 t - \frac{1}{4}\bar{p}_0 t^2 \right], \\ \bar{\nu}(t) &= \exp \left(\frac{1}{2}\bar{C} \left[|\delta\bar{\omega}_\xi^0|t - |\bar{p}_0| \frac{t^3}{24\alpha_3} - |\bar{\varphi}_0| \frac{t^2}{4\alpha_3} \right] \right) \circ \bar{\nu}^0, \\ \bar{\varphi}(t) &= \bar{\varphi}_0 + \frac{1}{2}\bar{p}_0 t, \quad \bar{p} = \bar{p}_0 = \text{const}, \\ |\bar{p}_0| &= \frac{48\alpha_3\vartheta - 24\alpha_3|\delta\bar{\omega}_\xi^0|t_1}{t_1^2}, \quad |\bar{\varphi}_0| = \frac{-12\alpha_3\vartheta + 4\alpha_3|\delta\bar{\omega}_\xi^0|t_1}{t_1},\end{aligned}$$

$$\vartheta = 2 \arccos(sqal(\bar{\nu} \circ \tilde{\bar{\nu}}^0)),$$

где $\bar{C} = \frac{\delta\bar{\omega}_\xi}{|\delta\bar{\omega}_\xi|}$, $\exp(\cdot)$ – кватернионная экспонента, $sqal(\cdot)$ – скалярная часть кватерниона. Этот случай имеет место, когда $\delta\bar{\omega}_\xi^0 \uparrow\uparrow vect(\bar{\nu}^0) \uparrow\uparrow \bar{p}_0 \uparrow\uparrow \bar{\varphi}_0$.

При $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$ задача решена численно с помощью метода Ньютона. Результаты математического моделирования подтвердили эффективность построенного закона оптимального управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 1 // Изв. РАН. Сер. МТТ. 2002. № 1. С. 3–17; 2002. № 2. С. 3–17.
2. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.
3. Молоденков А.В. Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления: Сб. науч. тр. Пермь, 1995. С. 122–131.

УДК 533.6.011.72:532.529

С.В. Иванов, А.Д. Ковалев

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В теоретических и экспериментальных исследованиях по динамике ударных волн в двухфазных газожидкостных средах широко применяются локально равновесные термодинамические модели, позволяющие учесть основной физический фактор – существенное изменение свойств сжимаемой среды. Равновесие модели двухфазных или в общем случае многофазных сред соответствуют двухпараметрическим средам, то есть определяются двумя независимыми термодинамическими параметрами. В задачах распространения относительно слабых волн уравнения состояния двухпараметрической среды рассматриваются обычно как произвольные и описываются дифференциальными уравнениями, соответствующими законам термодинамики [1]. При этом свойства двухпараметрической среды характеризуются коэффициентами дифференциальных уравнений.

Ниже дано конструктивное обобщение дифференциальной термодинамической модели произвольной двухпараметрической среды на случай

локально равновесной многофазной среды с произвольными уравнениями состояния фаз. Основная задача построений заключается в получении конструктивных выражений для коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих многофазную среду, через концентрации фаз и наборы независимых параметров, характеризующих термодинамические свойства фаз.

Дифференциальные уравнения состояния произвольной двухпараметрической среды относительно p, ρ, T, S, U, a — давления, плотности, температуры, удельной энтропии, удельной внутренней энергии и адиабатической скорости звука, запишем в виде, близком [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{dp}{\rho a^2} - \alpha_p T \frac{dS}{c_p}, & \frac{dT}{T} &= \alpha_p \frac{dp}{\rho c_p} + \frac{dS}{c_p}, \\ U &= \frac{PdP}{p^2 a^2} + \left(1 - \frac{p\alpha_p}{\rho c_p}\right) T dS, & \frac{da}{a} &= (m-1) \frac{dp}{\rho a^2} + m' \frac{dS}{c_p}. \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициенты уравнения зависят от p, ρ, T, a и включают изобарный коэффициент расширения α_p , изобарную удельную теплоемкость c_p и параметры m, m' , характеризующие нелинейность уравнений состояния:

$$\begin{aligned} m &\equiv \rho a (\delta_p a)_S + 1 = \frac{1}{2} \rho^3 a^4 (\delta_{pp} \rho^{-1})_S, \\ m' &\equiv \frac{c_p}{a} (\delta_S a)_p = -\frac{1}{2} a^2 c_p \delta_{pS} \rho. \end{aligned} \quad (2)$$

Для обычных сред выполняется неравенство, связанное с единственностью представлений об ударном переходе и входящее в определение среды с нормальными термодинамическими свойствами:

$$m > 0, ((\delta_{pp} V)_S > 0, (\delta_{vv} p)_S > 0; V = \rho^{-1}). \quad (3)$$

Здесь приведены также эквивалентные формулировки неравенства.

Для локально равновесных многофазных сред параметры p, T являются общими для фаз, а параметры ρ, α_p, c_p — аддитивными по фазам. Поэтому для обобщения (1) на случай многофазных сред остается выразить a, m, m' через параметры, аддитивные по фазам.

Естественные построения можно провести с использованием термодинамического потенциала Гиббса, зависящего от равновесных параметров $\Phi = \Phi(p, T)$. Потенциал определен с точностью до линейной функции от T и полностью характеризует термодинамические свойства среды:

$$\begin{aligned} \rho &= \Phi_p^{-1}, S = -\Phi_T, U = \Phi - p\Phi_p - T\Phi_T, \\ a^2 &\equiv (\delta_\rho p)_S = \Phi_p^2 \Phi_{TT} (\Phi_{pT}^2 - \Phi_{pp} \Phi_{TT})^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь индексы в обозначении Φ представляют собой частное дифферен-

цирование. Выражение для скорости звука получено с использованием термодинамических тождеств.

В дополнение к p, T и $\rho = \rho(p, T)$ введем набор независимых параметров, выражающихся через Φ и, следовательно, являющихся аддитивными по фазам:

$$\begin{aligned}\alpha_p &\equiv \rho (\delta_T \rho^{-1})_p = \rho \Phi_{pT}, \beta_T \equiv -\rho (\delta_p \rho^{-1})_T = -\rho \Phi_{pp}; \\ c_p &\equiv T (\delta_T S)_p = -T \Phi_{TT}, c'_p \equiv T (\delta_T c)_p = -T \delta_T (T \Phi_{TT}); \\ m_{pp} &\equiv \rho (\delta_{pp} \rho^{-1})_T = \rho \Phi_{ppp} = -(\delta_p \beta_T)_T + \beta_T^2; \\ m_{pT} &\equiv -\rho (\delta_{pT} \rho^{-1}) = -\rho \Phi_{ppT} = -(\delta_p \alpha_p)_T + \alpha_p \beta_T = (\delta_t \beta_t)_p + \alpha_p \beta_T; \\ m_{TT} &\equiv -\rho (\delta_{TT} \rho^{-1}) = -\rho \Phi_{pTT} = -(\delta_T \alpha_p)_p - \alpha_p^2 = \rho T^{-1} (\delta_p c_p)_T.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь β_T — изотермический коэффициент сжимаемости. Параметры c_p и c'_p характеризуют калорические свойства среды, остальные параметры — термические. Независимость параметров следует из независимости частных производных потенциала. Полнота набора параметров соответствует полноте набора смешанных производных потенциала второго и третьего порядков. Приведенные выражения параметров m_{pp} , m_{pT} , m_{TT} через α_p , β_T , c_p удобны, например при использовании справочных таблиц. Знаки в определениях параметров выбраны таким образом, чтобы для наиболее распространенных сред параметры были неотрицательными.

Выражение для скорости звука через аддитивные параметры (5) получается непосредственно из последней формулы (4); для вывода соответствующих выражений для m , m' необходимы довольно громоздкие построения, в результате которых получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} &= \rho \beta_T - \alpha_p^2 \frac{T}{c_p}; \\ m &= \frac{1}{2} \rho^2 a^4 \left[m_{pp} - 3m_{pT} \left(\frac{\alpha_p T}{\rho c_p} \right) - 3m_{TT} \left(\frac{\alpha_p T}{\rho c_p} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_p T}{\rho c_p} \right)^3 \frac{\rho c'_p - \rho c_p}{T^2} \right]; \\ m' &= \alpha_p T - \frac{1}{2} \rho a^2 T \left[m_{pT} + 2m_{TT} \left(\frac{\alpha_p T}{\rho c_p} \right) + \left(\frac{\alpha_p T}{\rho c_p} \right)^2 \frac{\rho c'_p - \rho c_p}{T^2} \right].\end{aligned}\quad (6)$$

Полученная формулировка дифференциальной термодинамической модели произвольной двухпараметрической среды (1), (5), (6) легко обобщается на случай многофазных сред.

Концентрация фазы обычно характеризуется либо локальным массовым содержанием χ_i , равным отношению массы фазы к массе смеси, либо локальным объемным содержанием φ_i , равным отношению объема фазы к объему смеси. Вследствие отсутствия относительного скольжения

фаз массовое содержание остается постоянным при движении субстанционального объема смеси, а объемное изменяется. Имеют место очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \sum_i \chi_i = 1, \quad \frac{1}{\rho} = \sum_i \frac{\chi_i}{\rho_i}, \quad \varphi_i = \chi_i \frac{\rho}{\rho_i} = \frac{\chi_i}{\rho_i} \left(\sum_i \frac{\chi_i}{\rho_i} \right)^{-1}; \\ \sum_i \varphi_i = 1, \quad \rho = \sum_i \varphi_i \rho_i, \quad \chi_i = \varphi_i \frac{\rho_i}{\rho} = \varphi_i \rho_i \left(\sum_i \varphi_i \rho_i \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Термодинамические параметры, характеризующие термодинамические и калорические свойства среды, являются аддитивными по объему и массе фаз соответственно, что вытекает из аддитивности по массе потенциала Φ :

$$\begin{aligned} f = \sum_i \varphi_i f_i, \quad (f = \alpha_p, \beta_T, m_{pp}, m_{pT}, m_{TT}); \\ g = \sum_i \chi_i g_i, \quad (g = c_p, c'_p, S, U, \Phi). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, для формирования дифференциальной термодинамической модели многофазной среды с произвольными уравнениями состояния фаз необходимо задать наборы независимых параметров (5) для каждой фазы в отдельности по заданным концентрациям фаз χ_i, φ_i , что эквивалентно в силу (7) определению набора независимых параметров для многофазной смеси (8) и расчету значения скорости звука и других параметров согласно (6). Полученные значения определяют коэффициенты дифференциальных уравнений состояния (1) для многофазной среды.

Развитый подход к построению моделей локально равновесных многофазных сред приводит к конструктивным выражениям для термодинамических параметров многофазной среды и доставляет программно реализуемый алгоритм формирования моделей многофазных сред по данным о фазах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком всякого теплопроводящего газа // ПММ. 1965. Т. 29, №6. С. 1004–1014.

**ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ
ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХФАЗНЫХ
ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ**

Возможность описания волновых процессов в многофазных средах на основе локально равновесной термодинамической модели существенно зависит от свойств фаз и гетерогенной структуры смеси. Ниже рассматривается распространенный на практике случай газожидкостных сред пузырьковой структуры. Пренебрежение скоростной неравновесностью в средах пузырьковой структуры связано с незначительным влиянием пузырьков газа на перенос массы в среде из-за малой плотности газа по сравнению с плотностью несущей жидкости. Для сред иной структуры, например газовзвесей, скоростной неравновесностью фаз (капель жидкости и несущего газа) пренебречь нельзя вследствие появления протяженных зон релаксации за ударными волнами.

В соответствии с дифференциальной формой уравнений состояния среды [1] представим соотношения Рэнкина — Гюгонио для элемента фронта ударной волны в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{a} &= \frac{dp}{\rho a^2}, \quad dv = 0, \quad \frac{dN}{a} = \frac{m}{2} \frac{dp}{\rho a^2} \\ \left(\frac{dp}{\rho a^2} \right) &= \frac{dp}{\rho} = \frac{c_p dT}{a^2 \alpha_p T} = \frac{da}{(m-1)a}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь dp — скачок давления на фронте ударной волны; du , dv — изменения нормальной и тангенциальной компонент скорости; dN — отклонение скорости распространения элемента ударной волны от скорости звука перед фронтом ударной волны.

Свойства фаз газожидкостной среды зададим следующим образом: жидкость является баротропной, описывается уравнением состояния в форме Тета и имеет постоянную теплоемкость; газ в свободном состоянии является термически и калорически совершенным. Соответствующие зависимости переменных параметров от равновесных параметров p , T имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_{10} \left[1 + \gamma_1 \frac{p-p_0}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]^{1/\gamma_1}, \quad \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \frac{p}{c_{p2} T}; \\ a_1 &= a_{10} \left(\frac{\rho_1}{\rho_{10}} \right)^{(\gamma_1-1)/2}, \quad a_2^2 = \frac{\gamma_2 p}{\rho_2} = (\gamma_2 - 1) c_{p2} T; \\ \rho &= \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 \rho_2, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1; \quad \chi_i = \varphi_i \frac{\rho_i}{\rho}, \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2)$$

Определим набор независимых параметров для газожидкостной среды в соответствии с полученными в работе [1] соотношениями аддитивности:

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \frac{\varphi_2}{T}, \beta_T = \frac{\varphi_1}{\rho_{10}a_{10}^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_{10}} \right)^{-\gamma_1} + \frac{\varphi_2}{p}; \\ c_p &= \chi_1 c_{p1} + \chi_2 c_{p2}, c'_p = 0; \\ m_{pp} &= \varphi_1 \frac{\gamma_1+1}{\rho_{10}^2 a_{10}^4} \left(\frac{\rho_1}{\rho_{10}} \right)^{-2\gamma_1} + \varphi_2 \frac{2}{p^2}, m_{pT} = \frac{\varphi_2}{pT}, m_{TT} = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Набор параметров (3) полностью определяет общую дифференциальную термодинамическую модель многофазной среды в случае двухфазной газожидкостной среды. Однако для целей анализа удобно провести явную подстановку набора параметров в общую модель и после преобразований получить

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho a^2} &= \frac{\varphi_1}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\varphi_2}{\rho_2 a_2^2} \left[1 + (\gamma_2 - 1) \frac{\chi_1 c_{p1}}{c_p} \right], \\ m &= \varphi_2 \frac{\gamma_2+1}{2} \left(\frac{\rho a^2}{\rho_2 a_2^2} \right)^2 \left(1 + \frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1} \frac{\chi_1 c_{p1}}{c_p} \right) \times \\ &\times \left[1 + (\gamma_2 - 1) \frac{\chi_1 c_{p1}}{c_p} \right] + \varphi_1 \frac{\gamma_1+1}{2} \left(\frac{\rho a^2}{\rho_1 a_1^2} \right)^2, \\ m' &= \varphi_2 - \frac{1}{2} \varphi_2 \frac{\rho a^2}{\rho_2 a_2^2} \left[1 + (\gamma_2 - 1) \frac{\chi_1 c_{p1}}{c_p} \right].\end{aligned}\quad (4)$$

Таким образом, локально равновесная модель газожидкостной среды, состоящей из жидкости с уравнением состояния в форме Тета и совершенного газа (2), описывается дифференциальными уравнениями [1] с коэффициентами (3), (4).

Выражение для скорости звука в газожидкостной среде (4) получается по общей методике [1], разработанной для многофазных сред. При этом процесс распространения возмущений рассматривается как адиабатический для смеси в целом. На практике, однако, выражение для равновесной скорости звука в газожидкостной смеси получают упрощенным способом, формулируя априорные предположения о характере процессов, происходящих при изменении объема пузырьков газа. Вследствие малости теплоемкости газа по сравнению с теплоемкостью несущей жидкости ($\chi_2 c_{p2} \ll \chi_1 c_{p1}$) при описании волновых процессов в смеси формулируется априорное предположение об изотермическом характере процессов в газе. Из полученного выражения для скорости звука (4) представления об изотермичности следуют непосредственно: при $\chi_2 c_{p2} \ll \chi_1 c_{p1}$, что эквивалентно $\chi_1 c_{p1}/c_p \sim 1$, скорость звука в смеси будет зависеть от изотермической скорости звука в газе $a_2/\sqrt{\gamma_2}$ и выражение для скорости звука

в смеси примет известный вид. Аналогично представления об изотермичности возникают автоматически и при анализе распространения ударных волн, что также хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Общность и конструктивность применяемой формы дифференциальной термодинамической модели позволяют освободиться от излишних априорных предположений о характере внутренних процессов в смеси.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иванов С.В., Ковалев А.Д. Об одной форме дифференциальной термодинамической модели // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 107–110.

УДК 501.1

В.И. Копнина, Е.С. Губина

ИЗГИБ АНИЗОТРОПНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ

Рассмотрим упругое равновесие тонкой эллиптической анизотропной плиты, ослабленной одним эллиптическим отверстием. Центр отверстия совпадает с центром плиты. Толщина кольца равна толщине плиты h ; ширина кольца достаточная, чтобы к кольцу можно было применить теорию изгиба плит.

Плита находится под действием изгибающих моментов интенсивности m , равномерно распределенных по внутреннему контуру. Внешний контур плиты жестко заделан. Определим напряженно-деформированное состояние такой плиты. Считаем материал пластинки анизотропным, обладающим одной плоскостью упругой симметрии, параллельной срединной плоскости плиты. Выберем систему координат следующим образом: пусть плоскость ХОY совпадает со срединной плоскостью плиты, ось OZ направлена вертикально вниз.

Обозначим:

L_0 — внешний контур плиты — эллипс с полуосями a_0, b_0 ;

L_1 — внутренний контур плиты — эллипс с полуосями a_1, b_1 .

Задача об изгибе такой плиты сводится к определению функций $W(x,y)$, представляющих прогиб ее срединной плоскости.

Искомые функции $W(x,y)$ удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению в частных производных 4-го порядка [1]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

и следующим граничным условиям [1]:

1) на контуре L_0 :

$$W = 0, \frac{dW}{dn} = 0; \quad (2)$$

2) на контуре L_1 :

$$M_n = m, \quad N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial s} = 0. \quad (3)$$

В уравнении (1) D_{kj} — жесткости материала, из которого изготовлена плита. В граничных условиях (2), (3) n — внешняя нормаль к соответствующему контуру; M_n — изгибающий момент, $N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial s}$ — обобщенная перерезывающая сила, действующие в плите на площадке с нормалью n .

Для решения поставленной задачи используем метод комплексных потенциалов, предложенный С.Г. Лехницким, согласно которому искомые функции могут быть представлены в виде [1]

$$W(x, y) = 2Re [W_1(z_1) + W_2(z_2)] \quad (j = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь $W_j(z_j)$ — произвольные аналитические функции, определенные в соответствующих плоскостях $z_j = x + \mu_j y$, где μ_j — комплексные параметры изгиба, характеризующие степень анизотропии материала. Функции будем находить из граничных условий (2) и (3), преобразовав их к виду [2]:

на контуре L_0 :

$$2Re[W'_1(t_1) + W'_2(t_2)] = 0; \quad 2Re[\mu_1 W'_1(t_1) + \mu_2 W'_2(t_2)] = 0; \quad (5)$$

на контуре L_1 :

$$\begin{aligned} 2Re \left[\frac{p_1}{\mu_1} W'_1(t_1) + \frac{p_2}{\mu_2} W'_2(t_2) \right] &= -my; \\ 2Re [q_1 W'_1(t_1) + q_2 W'_2(t_2)] &= -my, \end{aligned} \quad (6)$$

где p_j, q_j — постоянные, которые зависят от D_{jk} .

Согласно В. В. Меглинскому [2], искомые функции $W_j(z_j)$ выбираем так, чтобы их производные имели вид

$$W'_j(z_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{jk}}{[\zeta_1(z_j)]} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{jk} P_{k0}(z_j). \quad (7)$$

Здесь A_{jk}, C_{jk} — комплексные постоянные, подлежащие определению из граничных условий (5), (6). Остальные обозначения такие же, как в работе [2].

Поступая аналогично тому, как было сделано в работе [3], поставленную задачу можно свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Для получения численных результатов поставленной задачи система уравнений была сокращена до 12 уравнений, что соответствует $k=5$. Это можно сделать, так как система квазирегулярна. Используя полученное решение, по известным формулам можно определить прогибы и изгибающие моменты в некоторых точках рассматриваемой плиты [2].

Численные расчеты были проведены для круглой плиты с круговым отверстием; для эллиптической плиты с эллиптическим отверстием. В обоих случаях варьировалась ширина кольца.

В качестве материалов плиты выбирались СВАМ (слабоанизотропный материал) [2] и трехслойная авиационная фанера (материал с сильной анизотропией) [2].

Для иллюстрации в таблице приведены значения прогиба изгибающих моментов M_r , M_θ в точках на контурах плиты для случая, когда эллиптическая плита ($a_0 = 5$, $b_0 = 2$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0,5$) изготовлена из фанеры.

Углы, 0	Внешний контур			Внутренний контур		
	W	M_r	M_θ	W	M_r	M_θ
0	0.000	-0.017	-0.011	-2.016	1.030	-1.093
10	0.004	0.026	-0.002	-2.011	1.025	-0.876
20	0.012	0.094	0.058	-1.997	1.015	-0.285
30	0.018	0.132	0.152	-1.976	1.005	0.421
40	0.014	0.138	0.203	-1.951	0.997	0.703
50	0.004	0.134	0.164	-1.924	0.993	0.177
60	-0.002	0.137	0.085	-1.898	0.991	-0.840
70	0.004	0.137	0.049	-1.878	0.990	-1.781
80	0.013	0.125	0.053	-1.865	0.989	-2.372
90	0.017	0.117	0.059	-1.861	0.989	-2.568

Анализ полученных результатов в целом показывает, что граничные условия на внутреннем и внешнем контурах выполняются с достаточной степенью точности.

Прогиб достигает своего максимального значения в точках загруженного контура. При этом в эллиптической плите из фанеры значение максимального прогиба более чем в 10 раз превосходит соответствующее значение прогиба в плите из СВАМа.

Изгибающие моменты достигают своего наибольшего значения на загруженном контуре, и таким моментом является момент M_θ . Самое наибольшее значение момента M_θ достигается в круглой фанерной плите.

Оно примерно в 3 раза больше соответствующего значения этого же момента в такой же плите, изготовленной из СВАМа.

Геометрия плиты и степень анизотропии материала влияют на перераспределение напряжений в рассматриваемой плите.

Концентрация напряжения во всех изученных случаях наблюдается вблизи контура отверстия.

Таким образом, можно считать, что полученные результаты соответствуют физической постановке задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1975.
2. Меглинский В.В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1967. Вып. 3. С. 97–113.
3. Коннина В.И., Щербаков А.С. Изгиб эллиптической плиты с отверстием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 179–182.

УДК 532.5:533.6.011.5

В.С. Кожанов

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СХЛОПЫВАНИИ ПУСТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КАВЕРНЫ

Предметом исследования статьи является процесс схлопывания пустой сферической каверны в сжимаемой среде с отношением удельных теплоемкостей γ . Проведено обобщение результатов Хантера [1] для диапазона значений γ из интервала (2.4058, 8.4635).

Предполагается, что процесс схлопывания полости протекает в рамках гомэнтропической модели. Свойство гомэнтропии означает, что энтропийная функция $s = s(r, t)$ постоянна не только вдоль траектории частицы, но и во всей области течения (для всех траекторий). В таких условиях для описания течения достаточно двух уравнений газовой динамики [2]:

$$(c^2)_t + u(c^2)_r + (\gamma - 1)c^2(u_r + 2u/r) = 0, \quad u_t + uu_t + (c^2)_r/(\gamma - 1) = 0, \quad (1)$$

где t – время, r – координата, $u = u(r, t)$ – скорость частицы жидкости, $c^2 = c^2(r, t)$ – квадрат скорости звука.

Перейдем к автомодельной форме, определяя связи ($A = \text{const}$),

$$u = -Anr^{1-1/n}F(\eta), \quad c^2 = A^2n^2r^{2-2/n}G(\eta), \quad \eta = At/r^{1/n}. \quad (2)$$

Здесь n – показатель автомодельности, $F = F(\eta)$ и $G = G(\eta)$ – автомодельные представители функций u и c^2 соответственно, η – независимая автомодельная переменная.

Подстановка (2) в (1) дает систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно функций F и G :

$$\begin{aligned}\eta F'(\eta) &= \Delta_1/\Delta_0/(\gamma - 1) = (3n - 1)F - \Delta_5/\Delta_0/(\gamma - 1), \\ (1 + \eta F)G'(\eta) &= G\Delta_2/\Delta_0 = G[-2(1 - n)F + \Delta_5/\Delta_0],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= (1 + \eta F)^2 - \eta^2 G, \\ \Delta_5 &= (\gamma - 1)(1 + \eta F)[2n\eta F + 3n - 1]F + 2(1 - n)\eta G.\end{aligned}$$

Задача о схлопывании полости математически сводится к своеобразной задаче на собственные значения для нелинейного уравнения на фазовой плоскости переменных $V = -\eta F(\eta)$, $Z = \eta^2 G(\eta)$.

При заданном значении γ требуется найти такое n , чтобы интегральная кривая ОДУ $dZ/dV = \bar{\Delta}_2(V, Z, \gamma, n)/\bar{\Delta}_1(V, Z, \gamma, n)$, выходящая из особой точки типа *седло* $P_1(V_1 = 1, Z_1 = 0)$ вдоль сепаратрисы, проходила через особую точку типа *узел* $P_3(V_3, Z_3)$ с координатами

$$\begin{aligned}V_3 &= \left(-B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4B_2B_0}\right)/(2B_2), \quad Z_3 = (1 - V_3)^2, \\ B_1 &= \gamma - 3 - (3\gamma - 5)n, \quad B_2 = 2(\gamma - 1)n, \quad B_0 = 2(1 - n)\end{aligned}$$

вдоль уса отдельного направления. Такой проход обеспечивает аналитичность функций F и G на предельной характеристике (ПХ), которая представляет собой звуковую волну, приходящую в центр фокусировки вместе с границей полости. ПХ характеризуется значением $\eta = \eta_3$, а на фазовой плоскости VZ ей отвечает точка P_3 .

В основу расчетов были положены разложения функций F и G в окрестности ПХ $\eta = \eta_3$:

$$F = F_3 + p_i\delta^i, \quad G = G_3 + q_i\delta^i, \quad \eta = \eta_3 + \delta, \quad \delta \ll 1.$$

В таблице приведены показатель автомодельности, значения автомодельных представителей на ПХ и коэффициенты разложения p_i , q_i для пяти значений показателя адиабаты.

γ	2.41	3.0	5.0	7.0	8.46
n	0.77676398	0.70856126	0.60088048	0.55521127	0.53527898
η_3	-0.835240	-0.753657	-0.581142	-0.481214	-0.430373
F_3	0.967161	0.942845	0.869569	0.819936	0.792801
G_3	0.0529459	0.147470	0.724508	1.58293	2.34324
p_1	-0.309315	-0.364650	-0.402266	-0.392542	-0.381475
q_1	0.535782	0.928155	2.20141	3.44138	4.35758
p_2	-0.0706131	-0.0986944	-0.135258	-0.144106	-0.145698
q_2	0.0744925	0.171971	0.658430	1.30359	1.84798
p_3	-0.0300842	-0.0493061	-0.0815538	-0.0930389	-0.0968312
q_3	0.0338956	0.0947750	0.459084	0.994268	1.46585
η_{sw}	0.959757	0.670408	0.365720	0.263572	0.221756

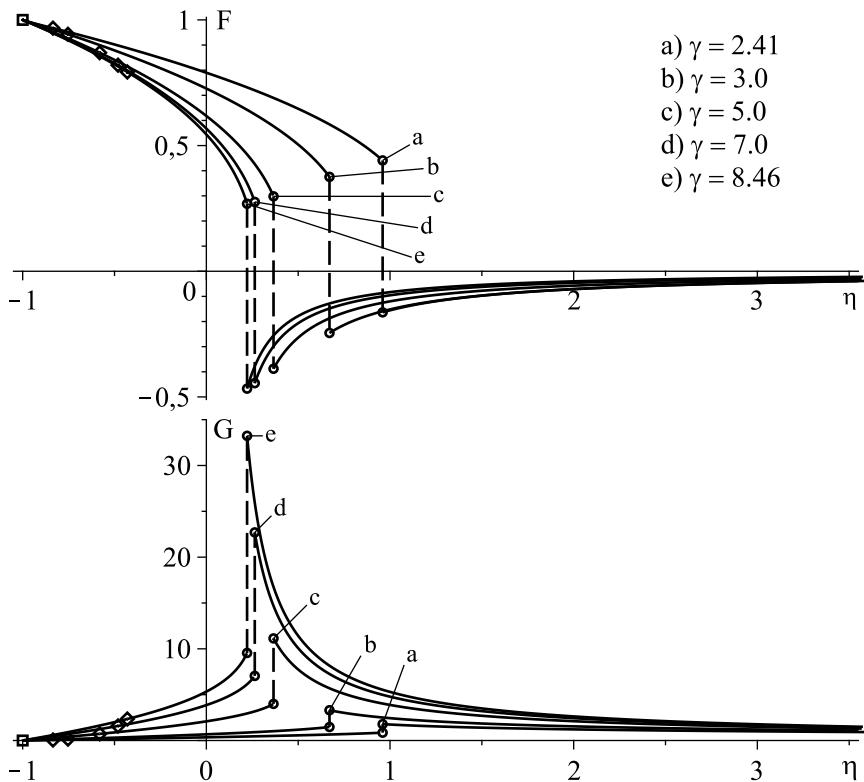
Для значений $\gamma \in (2.4058, 8.4635)$ построена интерполяционная формула, характеризующая зависимость n от γ :

$$n = \frac{-0.00098762\gamma^2 + 0.45733304\gamma + 0.62886285}{\gamma - 0.18884320}. \quad (3)$$

Максимальная относительная погрешность вычисления n по формуле (3) по сравнению со значением n , вычисляемым с использованием метода Рунге — Кутта, составляет не более $5 \cdot 10^{-3}\%$.

После фокусировки полости в центре возникает отраженная ударная волна (УВ), которая движется (от центра) навстречу набегающему на нее потоку. Предполагается такая модель отражения, что энтропия при переходе через УВ не меняется и во всей области за УВ остается равной своему первоначальному значению [1]. Основную трудность в построении решения на стадии отражения представляет определение положения ударного перехода η_{sw} .

На рисунке даны распределения автомодельных представителей F и G (по r) на обеих стадиях течения для пяти значений γ (ПХ обозначена символом \diamond , пунктиром указано положение ударного перехода)



Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хантер К. О захлопывании пустой полости в воде // Механика: Период. сб. переводов иностр. ст. 1961. № 3 (67). С. 77–100.
2. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // УМН. 1963. Т. 18, вып. 2 (110). С. 3–23.

УДК 624.131+5539.215

А.Г. Маркушин

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИСТЕЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА С ТВЕРДЫМ ЗЕРНОМ

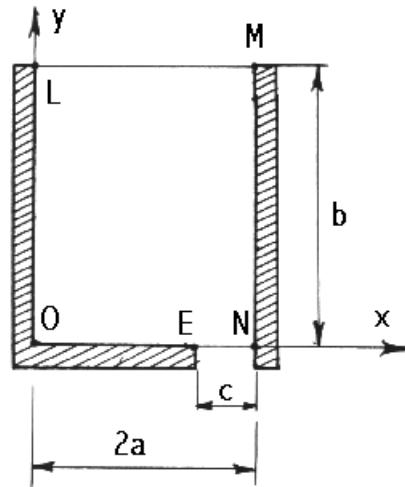
Сыпучее тело, отдельные зёरна которого не испытывают пластических деформаций ни при каких обстоятельствах его переработки, будем называть *твердозёренным сыпучим материалом*, или *сыпучим телом с твёрдым зерном*. Понятно, что предел текучести отдельных зёрен подобного сыпучего тела должен быть во много раз большим предела пропорциональности самого сыпучего материала. К таким материалам относятся все каменные породы мелкой фракции, пески и т.д.

Рассмотрим истечение сыпучего тела при разгрузке бункера в форме параллелепипеда с горизонтальным выпускным отверстием в виде щели во всю длину днища бункера, расположенным у одной из его боковых

стенок, и воспользуемся при этом моделью истечения сыпучего тела [1], основанной на теории пластического течения при переменных нагрузлениях.

Предположим, что длина бункера достаточна для того, чтобы в каждом поперечном сечении, удалённом от торцевых стенок, можно было считать движение сыпучего тела одинаковым, что позволяет ограничить рассмотрение движения материала его исследованием только в одном из этих сечений.

Отнесем выделенное сечение бункера к декартовой системе координат согласно рисунку. Для определения плоского напряжено-деформированного состояния материала и его движения при рассмотрении процесса разгрузки бункера в квазистатической постановке имеем уравнения теории упругости в приращениях напряжений [2]:



$$\frac{\partial \Delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Delta \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \sigma_y}{\partial y} = \Delta F. \quad (1)$$

В основе уравнений состояния пластически деформируемого материала лежат, как правило, условия пластичности, условия упрочнения и ассоциированный закон течения.

В теории течения в случае плоской деформации устанавливается связь между приращениями деформаций $d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\gamma_{xy}$, приращениями напряжений $d\sigma_x, d\sigma_y, d\tau_{xy}$ и напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Будем считать, что упрочнение является изотропным, а приращения деформаций складываются из приращений упругих и пластических составляющих

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_{xe} + d\varepsilon_{xp}, \quad d\varepsilon_y = d\varepsilon_{ye} + d\varepsilon_{yp}, \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{xye} + d\gamma_{xyp}, \quad (2)$$

здесь индексами e и p обозначены упругие и пластические составляющие соответственно.

Предположим также, что относительное изменение объёма θ и среднее напряжение σ связаны также, как и при упругой деформации: $\sigma = K\theta$ или $d\sigma = Kd\theta$, где $K = \lambda/\mu$ – объемный модуль упругости.

Будем считать, что приращения напряжений и упругих деформаций

связаны между собой обобщенным законом Гука:

$$d\varepsilon_{x^e} = 1/E[(1-\mu^2)d\sigma_x - \mu(1+\mu)d\sigma_y], \quad d\varepsilon_{y^e} = 1/E[(1-\mu^2)d\sigma_y - \mu(1+\mu)d\sigma_x], \\ d\gamma_{xy^e} = 1/Gd\tau_{xy}. \quad (3)$$

В качестве условия пластиичности возьмем энергетическое условие, по которому наступление пластического состояния определяется только вторым инвариантом девиатора напряжений, а в качестве параметра q упрочнения выберем параметр Удквиста, считая, что обобщенную кривую $\sigma_i = \Phi(q)$ можно построить по диаграмме деформирования материала, найденной из опытов.

Приращения пластических деформаций запишем в виде [2, 3]

$$d\varepsilon_{x^p} = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma)d\sigma_i, \quad d\varepsilon_{y^p} = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_y - \sigma)d\sigma_i, \\ d\gamma_{xy^p} = F_\sigma(\sigma_i)\tau_{xy}d\sigma_i, \quad (4)$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{(1 - \mu + \mu^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \sigma_x\sigma_y(1 + 2\mu - 2\mu^2) + 3\tau_{xy}^2}, \quad (5)$$

$$\sigma = (1 + \mu)/3(\sigma_x + \sigma_y).$$

Значение функции $F_\sigma(\sigma_i)$ может быть найдено с помощью обычной кривой деформирования и определено по формуле [4]

$$F(\sigma_i) = \begin{cases} (1 - \mu)/((1 + \mu)\sigma_i)(1/E_k - (1 - 2\mu^2/(1 - \mu))/E), \\ \sigma_i > \sigma_i^1, d\varepsilon_i > 0, \\ 0, \sigma_i < \sigma_i^1, d\varepsilon_i \leq 0, E_k = \partial\sigma_i(\varepsilon_i)/\partial\varepsilon_i, \end{cases} \quad (6)$$

где σ_i^1 – интенсивность напряжений, соответствующая по кривой деформирования пластической деформации ε_{i1p} , накопленной к началу рассматриваемого этапа нагружения $\varepsilon_{i1p} = \int de^p$. Здесь интенсивность дифференциалов пластической деформации вычисляется по формуле

$$de^p = 2/3\sqrt{(d\varepsilon_{x^p})^2 + (d\varepsilon_{y^p})^2 - d\varepsilon_{x^p}d\varepsilon_{y^p} + (d\gamma_{xy^p})^2}. \quad (7)$$

Подставив (3) и (4) в (2), получим уравнения состояния пластически деформируемой среды по теории течения:

$$d\varepsilon_x = 1/E[(1 - \mu^2)d\sigma_x - \mu(1 + \mu)d\sigma_y] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma)d\sigma_i, \\ d\varepsilon_y = 1/E[(1 - \mu^2)d\sigma_y - \mu(1 + \mu)d\sigma_x] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_y - \sigma)d\sigma_i, \\ d\gamma_{xy} = 1/Gd\tau_{xy} + F_\sigma(\sigma_i)\tau_{xy}d\sigma_i. \quad (8)$$

Численное решение рассматриваемой задачи проведем методом дополнительных деформаций [5], согласно которому решение задачи проводится поэтапно в смысле нагружения. При этом реальный процесс нагружения – разгрузки материала аппроксимируется квазистатическим процессом, в котором изменение нагружающего параметра ассоциируется с изменением времени. В качестве нагружающего параметра выберем перемещение v в центре отверстия выпуска материала, а в роли начального приближения решения задачи возьмем решение этой же задачи, но при закрытом выпускном отверстии.

Согласно технике применения метода дополнительных деформаций выполним интегрирование соотношений (8) по времени для n -го этапа нагружения, в результате получим

$$\begin{aligned}\Delta_n \varepsilon_x &= 1/E[(1 - \mu^2)\Delta_n \sigma_x - \mu(1 + \mu)\Delta_n \sigma_y] + \Delta_n \varepsilon_{x^p}, \\ \Delta_n \varepsilon_y &= 1/E[(1 - \mu^2)\Delta_n \sigma_y - \mu(1 + \mu)\Delta_n \sigma_x] + \Delta_n \varepsilon_{y^p}, \\ \Delta_n \gamma_{xy} &= 1/G\Delta_n \tau_{xy} + \Delta_n \gamma_{xy^p},\end{aligned}\tag{9}$$

где

$$\Delta_n \varepsilon_{x^p} = \langle \varepsilon_{x^{pn}} \rangle d\sigma_i, \quad \Delta_n \varepsilon_{y^p} = \langle \varepsilon_{y^{pn}} \rangle d\sigma_i, \quad \Delta_n \varepsilon_{xy^p} = \langle \varepsilon_{xy^{pn}} \rangle d\sigma_i,$$

при этом под $\langle \varepsilon_{x^{pn}} \rangle$, $\langle \varepsilon_{y^{pn}} \rangle$, $\langle \varepsilon_{xy^{pn}} \rangle$ понимается среднее значение величин

$$\varepsilon_{x^p} = [F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma)]_n, \quad \varepsilon_{y^p} = [F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_y - \sigma)]_n, \quad \gamma_{xy^p} = [F_{\sigma^n}(\sigma_i)\tau_{xy^n}]_n. \tag{10}$$

Разрешив соотношения (8) относительно приращений напряжений и учитывая равенство нулю объемной пластической деформации, будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta_n \sigma_x &= (\lambda + 2G)\Delta_n \varepsilon_x + \lambda \Delta_n \varepsilon_y - 2G\Delta_n \varepsilon_x^\gamma, \\ \Delta_n \sigma_y &= (\lambda + 2G)\Delta_n \varepsilon_y + \lambda \Delta_n \varepsilon_x - 2G\Delta_n \varepsilon_y^\gamma, \quad \Delta_n \tau_{xy} = G\Delta_n \gamma_{xy} - G\Delta_n \gamma_{xy^p}.\end{aligned}\tag{11}$$

Для вычисления приращений напряжений, деформаций и перемещений на каждом этапе нагружения построим процесс последовательных приближений. Первоначально приращения перемещений будем вычислять по напряженно-деформированному состоянию предыдущего этапа, затем будем полагать

$$\langle \Delta u^n \rangle = 1/2(\Delta u^{n-1} + \Delta u^n), \quad \langle \Delta v^n \rangle = 1/2(\Delta v^{n-1} + \Delta v^n),$$

$$\langle \varepsilon_{x^{pn}} \rangle = 1/2(\varepsilon_{x^{pn-1}} + \varepsilon_{x^{pn}}), \dots \quad (12)$$

Расчет будет повторяться до тех пор, пока значения приращений перемещений и пластических деформаций на смежных итерациях не окажутся достаточно близкими.

Если подставить соотношения (11) в уравнения (1) и использовать соотношения, аналогичные соотношениям Коши, связывающие приращения компонент деформации с приращениями перемещений, то можно получить систему дифференциальных уравнений для последних. Решение этой системы относительно приращений перемещений проводилось методом конечных разностей, для чего была поставлена соответствующая краевая задача. Краевые условия для указанной системы определялись следующим образом (рисунок): на границе LM и EN : $\Delta_n \tau_{xy} = 0$, $\Delta_n \sigma_y = 0$ – свободная поверхность; на границе MN : $\Delta_n u = 0$, $\Delta_n \tau_{xy} = \operatorname{tg} \Psi \Delta_n \sigma_x$ – шероховатая стенка, Ψ – угол трения; на границе EO : $\Delta_n u = 0$, $\Delta_n v = 0$ – абсолютно шероховатая стенка; на границе OL : $\Delta_n u = 0$, $\Delta_n \tau_{xy}=0$ – идеально гладкая стенка. Конечно-разностная краевая задача (КРКЗ) решалась методом верхней релаксации.

По приведенным выше формулам вычисления проводились в следующей последовательности. Предварительно определялись исходные данные задачи: задавались геометрические характеристики, b , области решения, механические характеристики материала E , μ , Ψ , σ_1^t , σ_2^t , σ_3^t , σ_4^t и зависимость $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ в аналитической форме или таблично. Далее задавались начальные значения всех величин, принимающих участие в вычислениях – u , v , Δu , Δv , ε_x , σ_x , ε_x^p , e^p , … Затем решалась упругопластическая задача при закрытом отверстии, т.е. на всей границе ON принимались условия $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. При этом нагружение собственным весом осуществлялось не сразу, а поэтапно – за m – этапов. Алгоритм решения этой задачи является частным случаем алгоритма задачи истечения, и поэтому отдельно его описывать не будем, тем более, что разгрузка отдельных элементов материала при нагружении собственным весом принципиально невозможна. Под элементом материала здесь и далее понимается достаточно большая совокупность отдельных зерен в окрестности узла (i, j) .

Решение задачи при закрытом отверстии будем считать первым этапом решения задачи истечения. Определение компонент решения u_2 , v_2 , $2\varepsilon_x$, …, $2\sigma_x$, …, $2e^p$ (индексами внизу условимся отмечать номер этапа нагружения, а индексами вверху, слева или справа, – номер итерации метода последовательных приближений) на втором этапе проводились по формулам

$$u_2 = u_1 + \Delta_2 u, v_2 = v_1 + \Delta_2 v, 2\varepsilon_x =_1 \varepsilon_x + \Delta_2 \varepsilon_x, \dots, 2\sigma_x =_1 \sigma_x +$$

$$+\Delta_2\sigma_x, \dots, {}_2e^p =_1 e^p + \Delta_2e^p \quad (13)$$

и следующей схеме.

По найденным на первом этапе дополнительным деформациям, при $\Delta p = 0$, открытом отверстии и заданным значениям $(\Delta_2v)_{i,0}$ по некоторому закону (линейному или синусоидальному, i – соответствовало точкам отверстия) решением КРКЗ находилось первое приближение Δ_2u^1 , Δ_2v^1 , затем по формулам – аналогам соотношений Коши – определялись соответствующие им величины $\Delta_2\varepsilon_x^1, \dots$, далее, по ним и формулам (11) при $\Delta_2\varepsilon_{x^p} = 0, \dots$ вычислялись $\Delta_2\sigma_x^1, \dots$, после чего – величины ${}_2\sigma_x^1 =_1 \sigma_x + \Delta_2\sigma_x^1, \dots$, по ним и формуле (5) вычислялись интенсивности напряжений σ_i . Далее, по формуле (3) определялись приращения упругих деформаций $\Delta_{2^1}\varepsilon_{x^e}$, затем – приращения пластических деформаций $\Delta_{2^1}\varepsilon_{x^p} = \Delta_{2^1}\varepsilon_x - \Delta_{2^1}\varepsilon_{x^e}, \dots$, и по ним и формуле (7) вычислялась интенсивность $\frac{1}{2}de^p$ дифференциалов пластических деформаций. После чего определялось значение интенсивности ${}_2e_p^1 =_1 e_p + \frac{1}{2}de^p$ и, наконец, значение интенсивности полных деформаций e_i по формуле

$${}_2e_i^1 = \sigma_i/\sqrt{3} + {}_2e_p^1.$$

При этом знак «+» или «–» для σ_i выбирался (так же, как и для $\frac{1}{2}de^p$) исходя из знака объемной деформации $\theta = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2$, именно, если $\theta > 0$ (т.е. и $\sigma > 0$, что соответствует растяжению элемента материала), то принимался знак «–», в противном случае при сжатии элемента материала – знак «+».

Далее вычислялось приращение интенсивности деформаций $\Delta e_i = {}_2e_i^1 - {}_1e_i$ и затем включался алгоритм учета истории нагружения элемента сыпучего тела, который выдавал значение σ_i^d интенсивности напряжений, соответствующее кривой деформирования, найденной опытным путем, и значение производной $E_k = \partial\sigma_i(\varepsilon_i)/\partial\varepsilon_i$ – модуль упрочнения, затем по формулам (6) и (10) определялись величины $\frac{1}{2}\varepsilon_x^p, \dots$, и по ним и формулам (11) и (9) переопределялись дополнительные деформации $\Delta_2^1\varepsilon_x^p, \dots$, причем $d\sigma_i$ вычислялось как $d\sigma_i = {}_2^1\sigma_i^d - {}_1\sigma_i^d$.

После чего с найденными значениями $\Delta_2^1\varepsilon_x^p$ выполнялась вторая итерация процесса последовательных приближений, затем вычисления повторялись в описанном порядке до тех пор, пока различия в значениях $\Delta_2^{n-1}\varepsilon_x^n \dots \delta_2^n\varepsilon_x^n, \dots$ оказывались меньше требуемой погрешности, после чего по формулам (13) и находились компоненты решения на втором этапе выгрузки бункера (втором этапе нагружения). Третий этап начинался с решения КРКЗ при $\Delta_2\varepsilon_x^n, \dots$ и находил Δ_3^1u, Δ_3^1v , далее процесс повторялся до значений u^n, v^n , при которых сохранялся физический смысл получаемого решения.

В заключение отметим, что при учете истории нагружения элемента материала были использованы пределы текучести при растяжении–сжатии динамически уложенного сыпучего тела наряду с таковыми для материала с естественной (насыпью) укладкой зерен [1]. Под динамической укладкой понимается следующее. Предполагается, что при течении материала его зерна, стремясь занять устойчивое положение, ориентируются длинными осями и утолщенными частями по направлению к отверстию и, двигаясь к нему, сближаются (регулярно укладываются), увеличивая тем самым плотность материала и пределы текучести.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Маркушин А.Г.* К построению модели истечения сыпучего тела с твердым зерном // Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующим с агрессивными средами: Материалы межвуз. науч. конф. Саратов, март 2000 г. Саратов, 2000.
2. *Биргер И.А.* Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Сер. Механика. 1965. №2. С. 113–119.
3. *Биргер И.А.* Теория пластического течения при неизотропическом нагружении // Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение. 1964. №1. 193 с.
4. *Маркушин А.Г.* Об основных деталях построения теории истечения сыпучего тела с твердым зерном // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 123–126.
5. *Шевченко Ю.А.* Термопластичность при переменных нагрузлениях. Киев: Наук. думка, 1970.

УДК 629

И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В работе [1] было показано, что задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА) посредством ограниченной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты, сводится к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений десятого порядка и восемью краевыми условиями, которые необходимо дополнить условиями трансверсальности и равенством $H|_{t_1} = H(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \chi, \mathbf{u}^0)|_{t_1} = 0$, имеющим место для оптимального управления и оптимальной траектории. Здесь H – функция Гамильтона – Понтрягина; $\boldsymbol{\lambda}$ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат относительно инерциальной системы координат; $\boldsymbol{\mu}$ – кватернион, сопряженный к фазовой переменной $\boldsymbol{\lambda}$;

χ – скалярная переменная, сопряженная к истинной аномалии φ , характеризующей положение КА на орбите; \mathbf{u}^0 – оптимальное управление; t_1 – время, подлежащее определению управляемого движения КА.

Уравнения задачи имеют глобальные первые интегралы:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\lambda}\| &= \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= \text{const}, \\ \nu_3 + \kappa\nu_1 &= \text{const}, \\ (\kappa\nu_3 - \nu_1)^2 + (1 + \kappa^2)\nu_2^2 &= \text{const}, \\ (\kappa^2 - 1)\nu_1^2 + 2\kappa\nu_1\nu_3 - \nu_2^2 &= \text{const}, \\ H(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \chi, \mathbf{u}^0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь λ_j – компоненты кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$, ν_j – компоненты векторной части кватерниона $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$; $\kappa = u \frac{r^3}{c^2}$; $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$; r – модуль радиуса-вектора центра масс КА; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты; c – постоянная площадей.

Интегралы (1) сохраняют постоянные значения на протяжении всего интервала управляемого движения КА и обладают общим свойством: пусть $\Psi(\varphi, \kappa, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \text{const}$ – один из первых интегралов (1) и при $\varphi = \tilde{\varphi}$ происходит переключение управления, тогда в случае быстродействия

$$\Psi(\tilde{\varphi}, \kappa, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \Psi(\tilde{\varphi}, -\kappa, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}). \tag{2}$$

Закон оптимального управления находится из условия максимума функции H по переменной \mathbf{u} с учетом ограниченности управления ($-u_{max} \leq u \leq u_{max} < \infty$, u – алгебраическая величина реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты КА). В случае быстродействия он имеет вид

$$u = \begin{cases} u_{max}, & \nu_1 \geq 0, \\ -u_{max}, & \nu_1 < 0. \end{cases}$$

Найдены также 2 локальных интеграла уравнений задачи, которые вместе с третьим интегралом (1) определяют общее решение дифференциальных уравнений, описывающих функцию переключения управления:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} [\nu_1 - \kappa\nu_3] \cos(k\varphi) - \frac{1}{k} \nu_2 \sin(k\varphi) &= \text{const}, \\ \frac{1}{k} \nu_2 \cos(k\varphi) + \frac{1}{k^2} [\nu_1 - \kappa\nu_3] \sin(k\varphi) &= \text{const}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $k = \sqrt{(1 + \kappa^2)}$.

Равенство (2) для интегралов (3) не выполняется, следовательно, они не являются глобальными и сохраняют постоянные значения лишь на протяжении отдельно взятых участков активного движения КА. Момент переключения управления является точкой разрыва первого рода для указанных локальных первых интегралов.

Проведенное исследование показало, что интегралы (3) являются глобальными для «вырожденной» задачи, когда сопряженные переменные $\nu_i \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$, а также в случае отсутствия реактивного ускорения, ортогонального плоскости орбиты, или нулевого радиуса орбиты. Такие условия лишают задачу физического смысла, а потому неприемлемы, хотя математически вполне допустимы.

Учет первых интегралов (1) и использование в качестве новых переменных компонент ν_k кватерниона $\boldsymbol{\nu}$ позволяет, как описано в [1], понизить порядок краевой задачи (без ее усложнения) на 7 единиц и привести ее к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_1}{d\varphi} &= \nu_2, \\ \frac{d\nu_2}{d\varphi} &= -\nu_1 + \kappa\nu_3, \\ \frac{d\nu_3}{d\varphi} &= -\kappa\nu_2, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \text{const.}$

Фактически уравнения (4) являются дифференциальными уравнениями функции переключения управления.

Возможна другая постановка задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА, когда задаются начальная и конечная ориентации нормали к плоскости орбиты. Тогда появляются новые условия трансверсальности, имеющие вид

$$\text{при } t = t_1 \quad \nu_3 = 0, \quad \chi = 0.$$

Аналогичные условия имеют место в начале движения КА при $t = 0$.

С использованием этих условий трансверсальности и первых интегралов найдены формулы для нахождения неизвестных начальных значений ν_{k0} :

$$\nu_{10} = 2 \frac{c}{\pm r u_{max}},$$

$$\nu_{20} = \frac{C_{31} \cos \varphi_0 + C_{32} \sin \varphi_0}{C_{31} \sin \varphi_0 - C_{32} \cos \varphi_0} \nu_{10},$$

$$\nu_{30} = 0.$$

Верхний знак берется, когда на первом активном участке движения КА управление $u = +u_{max}$, нижний – в противном случае; C_{ij} – компоненты матрицы направляющих косинусов C , которые находятся через заданные компоненты кватернионов начальной и конечной ориентаций орбиты: $C_{ij}(\Delta\Lambda) = C_{ij}(\tilde{\Lambda}^0 \circ \Lambda^*)$; $\nu_{i0} = \nu_i(0)$, $\varphi_0 = \varphi(0)$; $\Lambda^0 = \Lambda(0)$, $\Lambda^* = \Lambda(t_1)$. Кватернион Λ ориентации орбиты КА связан с фазовой переменной λ соотношением $\lambda = \Lambda \circ (\cos \frac{\varphi}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi}{2})$.

Знание этих условий дает аналитическое решение задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА при втором варианте постановки задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.

УДК 629.78

Я.Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С КОМБИНИРОВАННОЙ ТЯГОЙ

В статье в переменных Кустаанхеймо – Штифеля (KS – переменных), с помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимального управления движением космического аппарата (КА), движущегося под действием большой и малой тяги, для встречи с другим КА, который движется по своей орбите под действием силы притяжения к центру гравитации. Приводятся результаты численного решения задачи для различных значений отношения максимума большой тяги к силе притяжения

к центру. С помощью предельного перехода решена задача, когда максимальное значение большой тяги неограниченно увеличивается и большая тяга становится импульсной.

1. KS-переменные $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ связаны с векторами положения \mathbf{x} и скорости \mathbf{v} известными соотношениями [1, 2]. Переменная h определяет полную энергию единицы массы КА. Управляемый КА движется под действием силы притяжения к центру и двух двигателей большой и малой тяги. Тяга \mathbf{p}_1 сравнима с силой притяжения к центру и может превышать её в несколько раз, тяга \mathbf{p}_2 мала по сравнению с силой притяжения к центру. Ставится задача об оптимальном управлении для встречи управляемого и неуправляемого КА. Через R обозначим характерное расстояние, например, радиус начальной орбиты управляемого КА, γ – гравитационная постоянная, M – масса центра притяжения. Связь между размерными и безразмерными переменными:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= R^{1/2} \mathbf{u}^*; \quad \mathbf{s} = (\gamma M)^{1/2} \mathbf{s}^*; \quad h = \frac{\gamma M}{R} h^*; \quad \tau = \left(\frac{R}{\gamma M} \right)^{1/2} \tau^*; \\ I &= R \left(\frac{R}{\gamma M} \right)^{1/2} I^*; \quad t = R \left(\frac{R}{\gamma M} \right)^{1/2} t^*; \quad \mathbf{p}_1 = \frac{\gamma M}{R^2} \mathbf{p}_1^*; \quad \alpha_1 = \frac{R^2}{\gamma M} \alpha_1^*; \\ p_{1\max} &= \frac{\gamma M}{R^2} p_{1\max}^*; \quad \mathbf{p}_2 = p_{2\max} \mathbf{p}_2^*; \quad \alpha_2 = \left(\frac{R^2}{\gamma M} \right)^2 \alpha_2^*; \quad \frac{p_{2\max} R^2}{\gamma M} = \varepsilon \ll 1.\end{aligned}$$

Далее будут использоваться только безразмерные величины, верхний индекс "*" над которыми опускается. Движение неуправляемого аппарата А в безразмерных KS-переменных определяется через переменную τ_a соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_a &= \mathbf{C} \cos(k\tau_a) + \mathbf{D} \sin(k\tau_a); \quad \mathbf{s}_a = k (\mathbf{D} \cos(k\tau_a) - \mathbf{C} \sin(k\tau_a)); \\ k &= (-0.5h_a)^{1/2}; \quad h_a = -(C^2 + D^2)^{-1} < 0; \\ t &= \int_{\tau_{a\text{H}}}^{\tau_a} (\mathbf{u}_a)^2 d\tau_a; \quad \tau_a \geq \tau; \quad \mathbf{C} = \text{const}; \quad \mathbf{D} = \text{const}.\end{aligned}\tag{1}$$

Уравнения движения управляемого КА с учетом τ_a в безразмерных KS-переменных можно записать в виде [1, 2]

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \mathbf{s}; \quad \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} = 0.5h\mathbf{u} + 0.5u^2 P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon\mathbf{p}_2); \quad \frac{dh}{d\tau} = 2(\mathbf{s}, P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon\mathbf{p}_2)); \\ \frac{d\tau_a}{d\tau} &= \frac{u^2}{(\mathbf{u}_a(\tau_a))^2}, \quad \frac{dt}{d\tau} = u^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Функционал, который для оптимального процесса должен принимать минимальное значение, в безразмерных переменных имеет вид

$$I = \int_0^{\tau_k} [\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2 \alpha_2 \mathbf{p}_2^2] \mathbf{u}^2 d\tau, |\mathbf{p}_1| \leq p_{1 \max}, |\mathbf{p}_2| \leq 1. \quad (3)$$

Начальное состояние управляемого КА и начальное значение τ_a определяются соотношениями при $\tau = 0$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_h, \mathbf{s} = \mathbf{s}_h, h = h_h, \tau_a = \tau_{ah}. \quad (4)$$

В конечный "момент времени" $\tau = \tau_k$, который заранее не задается, управляемая система (2) в пространстве $(\mathbf{u}, \mathbf{s}, h, \tau_a)$ в случае мягкой встречи должна находиться на многообразии

$$\begin{aligned} P^T(\mathbf{u}(\tau_k))\mathbf{u}(\tau_k) &= P^T(\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k)))\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k)); \\ P^T(\mathbf{u}(\tau_k))\mathbf{s}(\tau_k) &= P^T(\mathbf{u}_a(\tau_a(\tau_k)))\mathbf{s}_a(\tau_a(\tau_k)). \end{aligned} \quad (5)$$

2. Функция Гамильтона — Понtryгина для системы (2) имеет вид

$$\begin{aligned} H = & -(\alpha_0 + \alpha_1 |\mathbf{p}_1| + \varepsilon^2 \alpha_2 \mathbf{p}_2^2) u^2 + (\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + \\ & + (\boldsymbol{\nu}, 0.5hu + 0.5u^2 P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon \mathbf{p}_2)) + \\ & + 2\eta(\mathbf{u}, P(\mathbf{u})(\mathbf{p}_1 + \varepsilon \mathbf{p}_2)) + \vartheta u^2 (\mathbf{u}_a(\tau_a))^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Сопряженные переменные $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3), \boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3), \eta, \vartheta$ удовлетворяют системе сопряженных уравнений. Согласно условию максимума оптимальное управление \mathbf{p}_{1opt} и \mathbf{p}_{2opt} выражается через фазовые и сопряженные переменные, их направления совпадают с направлением вектора $P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}$, где $\mathbf{q} = 0.5u^2\boldsymbol{\nu} + 2\eta\mathbf{s}$. На правом подвижном конце траектории при $\tau = \tau_k$ должны выполняться условия трансверсальности. В случае мягкой встречи они имеют вид

$$l(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) + l(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{s}) = 0; \quad l(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}) = 0; \quad \eta = 0; \quad \vartheta + (\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}) + 0.5h(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) = 0. \quad (7)$$

Кроме того, так как τ_k заранее не задается, то при $\tau = \tau_k$ $H_{opt}|_{\tau_k} = 0$.

Принцип максимума сводит решение задачи оптимального управления к решению краевой задачи для фазовых и сопряженных переменных.

3. При неограниченном возрастании $p_{1 \max}$ решение рассмотренной выше задачи будет стремиться к решению задачи об оптимальном управлении движением КА с импульсной тягой и малой тягой \mathbf{p}_2 [3]. Момент сообщения импульса тяги τ_i определяется из условия $|P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}| = \alpha_1 u^2$.

Направление вектора импульса тяги совпадает с направлением вектора $P^T(\mathbf{u})\mathbf{q}$. Из уравнений для фазовых и сопряженных переменных следует, что при предельном переходе к импульсной тяге в момент сообщения импульса переменные \mathbf{u} , τ_a , η , ϑ , \mathbf{q} остаются непрерывными, а переменные \mathbf{s} , h , μ , ν испытывают скачки, величины которых определяются по формулам, полученным с помощью предельного перехода.

Ниже в таблице в безразмерных переменных приведены результаты расчетов для различных значений $p_{1\max}$ для мягкой встречи управляемого космического аппарата, находящегося на орбите Земли, с аппаратом, который движется по орбите Марса. Угол, на который в начальный момент времени сдвинут аппарат, находящийся на орбите Марса, относительно управляемого аппарата равен 60° . Расчеты проведены для следующих значений безразмерных весовых множителей $\alpha_0 = 1.0$, $\alpha_1 = 0.75$, $\alpha_2 = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$. Расчеты показали, что двигатели с тягой \mathbf{p}_1 включаются в начале и в конце процесса управления.

$p_{1\max}$	t_{p1}	t_{p2}	t_k	$\Delta t_1 + \Delta t_2$	I_2	I
1.0	0.33890	1.58098	2.09403	0.85195	0.99503	2.83250
5.0	0.09728	1.49339	1.63462	0.23851	0.43657	2.57269
10.0	0.05243	1.47753	1.55160	0.12550	0.35859	2.52875
25.0	0.02130	1.46729	1.49780	0.05181	0.31487	2.50072
∞	0.0	1.45998	1.45998	0.0	0.28716	2.48121

В таблице t_{p1} – момент выключения тяги \mathbf{p}_1 , t_{p2} – момент включения тяги \mathbf{p}_1 на втором этапе, t_k – общее время процесса управления, $\Delta t_1 + \Delta t_2$ – суммарное время движения аппарата на первом и втором этапах с включенной тягой \mathbf{p}_1 , $I_2 = \int_0^{t_k} \mathbf{p}_2^2 \mathbf{u}^2 d\tau$, I – значение функционала (3). В последней строке приведены результаты для предельного случая, когда тяга \mathbf{p}_1 заменена импульсным двигателем, который включается в начальный и конечный моменты времени. Безразмерная величина начального импульса равна 0.54554, а величина конечного равна 0.77782.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Штифель Е., Шейфиле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975.
2. Сапунков Я.Г. Применение КС-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космические исследования. 1996. Т. 34, вып. 4. С. 428–433.
3. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука, 1976.

Р.А. Сафонов

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ**

Во многих прикладных задачах требуется определить напряженно-деформированное состояние тела под действием сосредоточенных нагрузок, однако во многих численных методах, которые применяются для проведения таких расчетов, требуется задавать действующие на тело усилия как гладкую функцию. В настоящей статье сделана попытка заменить сосредоточенную поперечную силу, действующую на тонкую изотропную пластинку, быстро растущими в окрестности точки приложения силы распределенными усилиями.

Рассмотрим тонкую пластинку из изотропного материала, срединное сечение которой имеет вид прямоугольника со сторонами длиной a и b . Толщину пластинки примем равной h . В дальнейшем будем считать, что $h \ll a, b$.

Как известно из теории тонких пластин, напряженно-деформированное состояние такой пластины целиком определяется величиной прогиба срединной поверхности. Для функции прогиба имеем уравнение

$$D\nabla^2\nabla^2w = q(x, y), D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга материала пластины, ν – коэффициент Пуассона, $q(x, y)$ – распределенные по верхней грани поперечные усилия, D – жесткость пластинки на изгиб. К этому уравнению требуется добавить граничные условия, выражающие закон закрепления и загружения краев пластины.

Введем безразмерные переменные

$$W = w/h, \xi = x/a, \eta = y/b.$$

В новых переменных уравнение (1) примет вид

$$\frac{Dh}{a^4} \left[\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2c \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + c^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} \right] = q(\xi, \eta). \quad (2)$$

Сведем уравнение (2) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода сплайн-коллокации [1]. Функцию прогиба

пластиинки будем искать в виде

$$W = \sum_{j=-2}^{N+2} B_j(\eta) W_j(\xi), \quad (3)$$

где $B_j(\eta)$ – система базисных сплайнов пятого порядка, а $W_j(\xi)$ – пока неизвестные функции.

Будем считать, что граничные условия на краях $\eta = 0$ и $\eta = 1$ позволяют выразить функции $W_{-2}, W_{-1}, W_{N+1}, W_{N+2}$ через остальные искомые функции. Тогда согласно классическому варианту метода сплайн-коллокации представление для функции прогиба (3) можно переписать в виде

$$W = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) W_j(\xi), \quad (4)$$

где $\varphi_j(\eta)$ – известные линейные комбинации базисных сплайнов. Подстановкой (4) в (2) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Приведем полученную систему к нормальной форме Коши:

$$\frac{d\vec{Y}}{d\xi} = A\vec{Y} + B, \quad (5)$$

где \vec{Y} – вектор-столбец искомых функций вместе с их производными, A и B – матрица коэффициентов системы и вектор-столбец свободных членов соответственно.

Система уравнений (5) с граничными условиями на краях $\xi = 0$ и $\xi = 1$ составляет краевую задачу, решение которой определяет функцию прогиба пластиинки. Для численного решения поставленной задачи можно использовать метод дискретной ортогонализации С.К. Годунова [2].

Рассмотрим функцию

$$f(x) = C \cos^k \frac{\pi}{2}(x - x_0), \quad (6)$$

где x_0 – фиксированная точка, C – масштабирующая константа, определяемая из условия

$$\int_0^1 f(x) dx = 1,$$

а для показателя степени справедливо условие $k \gg 1$.

Очевидно, что $f(x_0) = C$, а при удалении от точки $x = x_0$ функция $f(x)$ быстро убывает до малого по сравнению с единицей значения.

Если рассматривать $f(x)$ как распределение нагрузки по координате, то можно отметить, что при $k \rightarrow \infty$ функция $f(x)$ описывает сосредоточенную в точке $x = x_0$ силу. Таким образом, функция вида (6) описывает локальную нагрузку, сосредоточенную в окрестности точки $x = x_0$.

Будем использовать функции вида (6) для моделирования сосредоточенной нагрузки, действующей на пластинку.

Пусть на прямой $\xi = \xi_0$ приложена постоянная нагрузка с равнодействующей Q . Усилия такого вида будем аппроксимировать распределенной нагрузкой интенсивности

$$q(\xi, \eta) = C \cos^k \frac{\pi}{2} (\xi - \xi_0).$$

Если нагрузка приложена в точке (ξ, η) , то функция нагрузки примет вид

$$q(\xi, \eta) = C \cos^k \frac{\pi}{2} (\xi - \xi_0) \cos^k \frac{\pi}{2} (\eta - \eta_0).$$

Случаю, когда нагрузка распределена по диагонали пластиинки $\xi - \eta = 0$, соответствует функция

$$q(\xi, \eta) = C \cos^k \frac{\pi}{2} \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}.$$

Для определения константы C во всех перечисленных случаях следует пользоваться условием

$$\int_{0 \leq \xi, \eta \leq 1} q(\xi, \eta) d\xi d\eta = Q.$$

В качестве примера применения описанного подхода рассмотрим ряд задач, граничные условия которых позволяют применить метод сплайн-коллокации в описанном варианте. Будем рассматривать пластиинку толщиной $h = 0,01$ м с длинами сторон $a = b = 1$ м, упругие константы которой равны $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$. Для показателя степени k используем значение $k = 5000$. Как выяснилось в ходе вычислительных экспериментов, меньшие значения k не обеспечивают достаточно точного совпадения результатов расчетов с известными теоретическими решениями задачи, а большие значения требуют существенно более высокой точности сетки и, соответственно, значительного увеличения времени вычислений.

Пусть весь контур пластиинки шарнирно подкреплен, а в центральной точке приложена сосредоточенная сила интенсивности $Q = 1$ Н. Такая задача имеет аналитическое решение в виде суммы бесконечного ряда [3].

При указанных выше параметрах максимальный прогиб пластиинки, посчитанный по этой формуле, составляет $w_{max} = 6,12 \cdot 10^{-7}$ м. Та же величина, посчитанная численно с помощью предлагаемого подхода, составляет $w_{max} = 6,18 \cdot 10^{-7}$ м.

Если при шарнирно опертом контуре нагрузка с той же равнодействующей приложена вдоль прямой $\xi = 0,5$, то максимальный прогиб пластиинки составляет $w_{max} = 3,68 \cdot 10^{-7}$ м.

При жестко заделанном контуре максимальный прогиб пластиинки составил $w_{max} = 3,75 \cdot 10^{-7}$ м в случае приложенной в центральной точке силы, $w_{max} = 1,83 \cdot 10^{-7}$ м при нагрузке, сосредоточенной на прямой $\xi = 0,5$ и $w_{max} = 1,48 \cdot 10^{-7}$ м, при нагрузке, приложенной на диагонали $\xi = \eta$.

Сравнение результатов расчетов по предложенной методике с известными теоретическими решениями позволяет сделать вывод о применимости функций локальной нагрузки вида (6) для аппроксимации сосредоточенных усилий. При проведении расчетов особое внимание следует обращать на выбор показателя степени k , который должен обеспечивать достаточную скорость роста функции и вместе с тем не требовать чрезмерного возрастания размерности задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) // Прикл. мех. 1995. Т. 31, вып 6. С. 3–27.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН 1961. Т. XVI, № 3(99). С. 171–174.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластиинки и оболочки Пер. с англ. В.И. Контовта; Под ред. Г.С. Шапиро. М.: Наука, 1966. 636 с.

УДК 232.5; 232.135

М.И. Сафончик

РАЗВИТИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе [1] рассмотрен переход от одного стационарного течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости к другому при изменении угла наклона плоскости к горизонту. Вопрос о развитии течения и переход к стационарному режиму остался открытым. Настоящая статья посвящена ответу на этот вопрос.

Пусть слой вязкопластичной среды толщины H находится на горизонтальной плоскости. В момент $t = 0$ плоскость была наклонена на угол β к горизонту. Схема течения изображена на рисунке.

Пока напряжение на плоскости не достигнет статического предела текучести, материал будет вести себя как твердое тело, испытывая лишь упругие деформации, после его преодоления начнется этап развития течения. Угол наклона плоскости выбирается таким образом, чтобы с течением времени появился так называемый «эффект проскальзывания».

В этом случае соотношение между параметрами в рамках пятипараметрической модели Слибара — Паслай будет следующим: $g\rho H \sin \beta > \tau^* > \tau_c$, где τ^* — предельное напряжение, при котором начинается скольжение вдоль стенки, τ_c — статическое напряжение сдвига.

В отличие от вязкой жидкости, течение с взаимным скольжением слоёв развивается постепенно, охватывая всё большую область, граница которой заранее неизвестна.

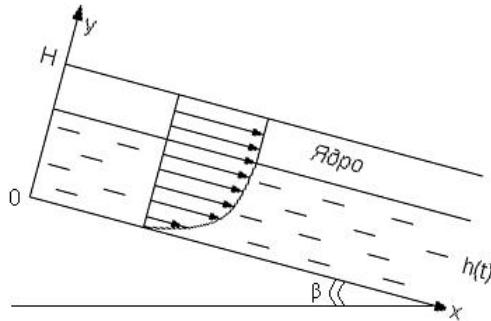


Схема течения по наклонной плоскости

Для единственной компоненты скорости краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g \sin \beta, \quad 0 < y < h(t), \quad t > 0; \quad (1)$$

$$h(0) = 0; \quad (2)$$

$$v_x(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq t^*, \\ \frac{1}{\lambda}(\tau(0, t) - \tau^*), & t^* < t; \end{cases} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y \rightarrow h(t)-0} = \frac{\tau_c - \tau_d}{\eta}; \quad (4)$$

$$v_x|_{y \rightarrow h(t)-0} = u(t), \quad (5)$$

Где

$$u(t) = gt \sin \beta - \frac{\tau_c}{\rho} \int_0^t \frac{d\xi}{H - h(\xi)}; \quad (6)$$

$$\tau(0, t) = \tau_{\text{d}} + \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0. \quad (7)$$

Здесь τ_{d} – динамическое напряжение сдвига, η – структурная вязкость, λ – коэффициент «внешнего» трения, $u(t)$ – скорость ядра, остальные обозначения стандартные.

Сформулированная краевая задача (1)–(7) в области с неизвестной подвижной границей принадлежит к классу не вполне корректных задач, так как в начальный момент область течения отсутствует. Наиболее эффективным методом её решения является модификация метода Колоднера [2].

Сначала приведем уравнение (1) к однородному, положив

$$v_x(y, t) = gt \sin \beta - w(y, t). \quad (8)$$

Границные условия при этом преобразуются к виду:

$$w(0, t) = \begin{cases} gt \sin \beta, & 0 < t \leq t^*, \\ gt \sin \beta - \frac{1}{\lambda}(\tau(0, t) - \tau^*), & t^* < t; \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\tau(0, t) - \tau_{\text{d}}}{\eta}; \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y \rightarrow h(t)-0} = -\frac{\tau_{\text{c}} - \tau_{\text{d}}}{\eta}; \quad (11)$$

$$w|_{y \rightarrow h(t)-0} = \frac{\tau_{\text{c}}}{\rho} \int_0^t \frac{d\xi}{H - h(\xi)}. \quad (12)$$

В соответствии с указанным методом строится вспомогательное решение в области

$$0 < y \neq h(t) < \infty, \quad t > 0,$$

при условиях:

$$\lim_{y \rightarrow h(t)+0} w(y, t) - \lim_{y \rightarrow h(t)-0} w(y, t) = -\frac{\tau_{\text{c}}}{\rho} \int_0^t \frac{d\xi}{H - h(\xi)}; \quad (13)$$

$$\lim_{y \rightarrow h(t)+0} \frac{\partial w}{\partial y} - \lim_{y \rightarrow h(t)-0} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{\text{c}} - \tau_{\text{d}}}{\eta}; \quad (14)$$

$$w(y, 0) = 0, \quad w(\infty, t) = 0; \quad (15)$$

Условии (10) и

$$|w(y, t)| \leq \text{const}, \quad \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{t}}. \quad (16)$$

Условие (9) в дальнейшем используется как дополнительное.

Решение этой задачи представляется в виде комбинации тепловых потенциалов простого и двойного слоёв

$$\begin{aligned} w(y, t) = & -\frac{\tau_c - \tau_d}{2\eta} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(y-h(\xi))^2}{4\nu(t-\xi)}} + e^{-\frac{(y+h(\xi))^2}{4\nu(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi + \\ & + \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{\tau(0, \xi) - \tau_d}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{y^2}{4\nu(t-\xi)}} d\xi + \\ & + \frac{\tau_c}{\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \left(\int_0^\xi \frac{d\sigma}{H - h(\sigma)} \right) \left[\begin{array}{l} \int_{\frac{y-h(\xi)}{2\sqrt{\nu(t-\xi)}}}^{\frac{y+h(\xi)}{2\sqrt{\nu(t-\xi)}}} e^{-z^2} dz - \\ \pm\infty \end{array} \right] . \end{aligned} \quad (17)$$

Функция $w(y, t)$ в уравнении (17) не зависит от конкретного вида функции $h(t)$. Потребовав, чтобы

$$\lim_{y \rightarrow h(t)+0} w(y, t) = 0, \quad (18)$$

получаем уравнение для определения $h(t)$:

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau_c - \tau_d}{2\eta} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(h(t)-h(\xi))^2}{4\nu(t-\xi)}} + e^{-\frac{(h(t)+h(\xi))^2}{4\nu(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi + \\ & + \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{\tau(0, \xi) - \tau_d}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{h^2(t)}{4\nu(t-\xi)}} d\xi - \\ & - \frac{\tau_c}{2\rho} \int_0^t \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{h(t) - h(\xi)}{2\sqrt{\nu(t-\xi)}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{h(t) + h(\xi)}{2\sqrt{\nu(t-\xi)}} \right) \right] \int_0^\xi \frac{d\sigma}{H - h(\sigma)} d\xi = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Доказано, что если $h(t)$ является решением (19), то $w(y, t) \equiv 0$ в области $h(t) < y < \infty$ и, следовательно, $\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y \rightarrow h(t)+0} = 0$.

Удовлетворив условию (9), получаем уравнение, связывающее напряжение на плоскости $y = 0$ с законом изменения границы $h(t)$.

$$\begin{aligned}
& - \frac{\tau_c - \tau_d}{2\eta} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{h^2(\xi)}{4\nu(t-\xi)}}}{\sqrt{t-\xi}} d\xi + \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_0^t \frac{\tau(0, \xi) - \tau_d}{\sqrt{t-\xi}} d\xi - \\
& - \frac{\tau_c}{\rho} \int_0^t erfc \left(\frac{h(\xi)}{2\sqrt{\nu(t-\xi)}} \right) \int_0^\xi \frac{d\sigma}{H - h(\sigma)} d\xi = \\
& = \begin{cases} gt \sin \beta, & 0 < t \leq t^*, \\ gt \sin \beta - \frac{1}{\lambda} [\tau(0, t) - \tau^*], & t^* < t. \end{cases}
\end{aligned} \tag{20}$$

Уравнение (20) является линейным интегральным уравнением Абеля относительно $\tau(0, t)$, допускающим построение точного решения. Для моментов $0 < t \leq t^*$ оно имеет вид

$$\begin{aligned}
\tau(0, t) = \tau_c - \frac{\tau_c - \tau_d}{\sqrt{\nu\pi}} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{h^2(\xi)}{4\nu(t-\xi)}} d\xi + \\
+ 2g\eta \sin \beta \sqrt{\frac{t}{\nu\pi}} + \frac{\tau_c}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{h^2(\xi)}{4\nu(t-\xi)}}}{[H - h(\xi)]\sqrt{t-\xi}} d\xi.
\end{aligned} \tag{21}$$

Для интервала $t^* < t$ также можно построить точное решение.

Уравнение (21) является нелинейным интегральным уравнением Вольтерровского типа. Существование и единственность решения такого типа уравнений доказана.

Ограниченнность объёма статьи не позволяет подробно остановиться на построении численного решения этого уравнения и анализе результатов. Отметим только, что для реальных значений параметров найдены законы изменения напряжения на плоскости и границы зоны течения, а также время t^* начала «проскальзывания». Процесс стабилизации течения оказывается весьма быстротечным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сафончик М.И.* Неустановившееся «запаздывающее» течение вязкопластичной среды по наклонной плоскости // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 180–183.
2. *Сафончик А.И.* Некоторые задачи неустановившегося течения вязкопластичных сред: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1962. 109 с.

Г.Д. Севостьянов

К КИНЕМАТИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

В статье найдены новые решения уравнений кинематики твердого тела с неподвижной точкой, записаны уравнения для угла нутации в случае вращения самолета, искусственного спутника Земли (ИСЗ), качки корабля; рассмотрена теорема Гамильтона — Ишлинского о телесном угле в неоднородном случае.

В кинематической задаче Дарбу [1] для твердого тела с неподвижной точкой требуется аналитически определить изменение трех углов Эйлера тела, если известно изменение мгновенной угловой скорости в связанной с телом системе координат. Три нелинейных кинематических уравнения Эйлера [1] и три линейных уравнения Пуассона (полученных впервые также Л. Эйлером [2, с. 62]) приведены к уравнению второго порядка для угла нутации [3, 4]:

$$s^2 + s'^2 + \left(\frac{s'' + s}{\sigma(\tau)} \right)^2 = 1, |s| \leq 1, \quad (1)$$

где $s(\tau) = \cos \theta$, θ — угол нутации; $\tau = \int_0^t \Omega(t) dt$ — интегральное безразмерное время; $\Omega^2 = p^2 + q^2$; $\bar{\omega}(p, q, r)$ — мгновенная известная угловая скорость тела в связанной с телом системе координат xyz ; $\sigma(\tau)$ — известная функция:

$$\sigma(\tau) = \frac{r}{\Omega} + \chi', \quad \chi = \operatorname{arctg} \frac{q}{p}. \quad (2)$$

Три угла Эйлера φ, ψ, θ (φ — угол собственного вращения, ψ — угол прецессии) определяют ориентацию тела в основной системе координат ξ, η, ζ .

Если $s(\tau)$ найдена из (1), то два других угла Эйлера (φ, ψ) найдем из равенств [4]:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \chi) &= \theta'(\tau); \\ \psi' &= \pm \frac{s'' + s}{|\sigma|(1 - s^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если заданы $p(t), q(t)$ и $\theta(t)$, то можно найти $s(\tau)$, тогда из (1) определим $\sigma(\tau)$, из (2) — r , из (3) — углы φ и ψ , а из динамических уравнений Эйлера — момент внешних сил относительно неподвижной точки [3]. Приведем некоторые частные решения.

Если $s(\tau) = \operatorname{th}(\tau + c)$, то из (2) имеем $\sigma(\tau) = \operatorname{ch}(\tau + c) - \frac{2}{\operatorname{ch}(\tau+c)}$, при этом скорость вращения тела возрастает, ось тела z приближается к неподвижной оси ζ основной системы $\xi\eta\zeta$.

Если выбрать

$$s(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} e^{-\alpha(\tau+c)}; c, \alpha > 0,$$

то

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{-1+e^{2\alpha(\tau+c)}}},$$

ось z тела заваливается относительно оси ζ .

Углы φ и ψ можно найти из (3).

Введенные Эйлером углы φ, ψ, θ используются в небесной механике и удовлетворяют кинематическим уравнениям Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для самолета кинематические уравнения [5] можно формально получить, если за основную систему координат выбрать нормальную $OX_gY_gZ_g$ (местную географическую) и сделать в (4) замены:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow -\omega_z, q \rightarrow \omega_y, r \rightarrow \omega_x, \\ \varphi &\rightarrow \gamma, \psi \rightarrow \Psi, \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \vartheta, \\ x &\rightarrow -Z, y \rightarrow Y, z \rightarrow X, \end{aligned} \quad (5)$$

где γ, ψ, ϑ – углы крена, рыскания и тангажа соответственно связанной системы $OXYZ$; $\bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Тогда в уравнении (1) для самолета $s(\tau) = \sin \vartheta$,

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \omega_y^2 + \omega_z^2, \\ \sigma(\tau) &= \frac{\omega_x}{\Omega} + \chi', \quad \chi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_y}{\omega_z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Совпадают по виду с самолетными уравнениями кинематические уравнения Эйлера для искусственного спутника (ИС) и космического аппарата (КА) [6] относительно орбитальной базовой системы координат (относительно абсолютной геоцентрической системы в координаты угловой скорости вносятся поправки на движение ИС и КА по траектории).

Для описания качки корабля используется левая система координат (ось $O\zeta$ направлена вертикально вниз; связанная ось OZ_k идет вниз в

плоскости симметрии, OY_k направлена к левому борту). Для углов Эйлера, введенных А.Н. Крыловым ($\theta_k, \psi_k, \varphi_k$ – углы крена, дифферента и рыскания корабля соответственно), кинематические уравнения получаются из (4), если сделать замены:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow -\omega_x, q \rightarrow \omega_y, r \rightarrow -\omega_z, \\ \varphi &\rightarrow -\varphi_k, \psi \rightarrow \psi_k, \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta_k, \\ x &\rightarrow -X_k, y \rightarrow Y_k, z \rightarrow -Z_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда в (1) для корабля $s(\tau) = \sin \theta_k$, $\Omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$,

$$\sigma(\tau) = -\frac{\omega_z}{\Omega} + \chi', \chi = -\arctg \frac{\omega_y}{\omega_x}. \quad (8)$$

Если $r(t) = \dot{\varphi}_z$ – известная функция, теорему Гамильтона – Ишлинского рассмотрим в неоднородном случае.

Возьмем на замкнутой траектории некоторой точки оси z на неподвижной сфере радиуса R две близкие точки B и C и полюс сферы A внутри траектории, через который проходит неподвижная ось ζ . Строим узкий сферический треугольник ABC . Площадь его $|dF| = R^2 \cdot (B + C + A - \pi)$, где $A = |d\psi|$, B и C – его углы. Прилегающие к углу A стороны равны: $b = \theta$ и $c = \theta + d\theta$.

Из сферической геометрии [7, с. 53] имеем аналогию Непера:

$$\tg \frac{B+C}{2} = \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2} \tg \frac{A}{2}} \approx \frac{2}{\cos \theta |d\psi|}.$$

Тогда

$$\frac{B+C}{2} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos \theta}{2} |d\psi|, |dF| = R^2 (1 - \cos \theta) |d\psi|.$$

Но из (4): $d\varphi = d\varphi_z - \cos \theta d\psi = d\varphi_z + \frac{|dF| sign \psi}{R^2} - d\psi$.

На замкнутой траектории $\Delta\psi = 2\pi sign \psi$, тогда

$$\Delta\tilde{\varphi} = \left(\frac{|F|}{R^2} - 2\pi \right) sign \psi; \tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_z.$$

Угол поворота тела около оси z при обходе замкнутой траектории:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_z + \left(\frac{|F|}{R^2} - 2\pi \right) sign \psi.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит., 1961.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978.
3. *Севостьянов Г.Д.* О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195–198.
4. *Севостьянов Г.Д.* Уравнение для угла нутации в кинематике тела с неподвижной точкой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 223–225.
5. Аэромеханика самолета: Динамика полета / Под ред. А.Ф. Бочкарева и В.В. Андреевского. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1985.
6. Основы испытаний летательного аппарата / Под общ. ред. Е.И. Кринецкого. М.: Машиностроение, 1989.
7. *Корн Г., Корн Т.* Определения, теоремы, формулы: Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.

УДК 532.5:533.6.011.5

И.А. Чернов

ГОМЭНТРОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИЛЬНОГО ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

Обсуждается частный случай движения сильной ударной волны по покоящемуся газу с нулевым давлением, но с переменной плотностью. Плотность описывается степенной зависимостью от расстояния до центра взрыва. Предлагается такой выбор показателя степени в этой зависимости, чтобы энтропия во всей области течения после прохождения ударной волны была постоянной. При этом получается качественно другое по сравнению с классическим случаем поведение температуры.

Введение. Задача о сильном точечном взрыве в автомодельной постановке была решена Л.И. Седовым [1] и Тейлором (см. [1, 2]). Ударная волна (УВ) возникает в результате выделения конечной энергии в точке пространства. Эта энергия передается движущемуся газу и является характерной и постоянной величиной данного физического процесса, что позволило найти [1] интеграл сложной системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (ОДУ). Соответствующее решение содержит два параметра: $\gamma = c_p/c_v$ – отношение удельных теплоемкостей и ω – показатель степени в автомодельном представлении плотности $\rho = \rho_0 t^\omega R(\xi)$, где t – время, $\xi = r/(Kt^n)$ – независимая автомодельная переменная (r – пространственная координата, K – масштабная константа). Сильный взрыв в покоящемся газе предполагает нулевое давление до УВ, что обеспечивает автомодельность задачи.

Обсудим вопрос о выборе ω . В работах [1, 2] положено $\omega = 0$ на том основании, что в покоящейся среде, по которой распространяется УВ, плотность постоянна и равна ρ_0 . Заметим, что такой выбор ω означает вырожденность функции $\rho(t, \xi)$, поскольку $\partial\rho(t, \xi)/\partial t = 0$ как до, так и после УВ, тогда как $p(t, \xi)$ – функция общего вида. В результате поведение температуры оказывается нефизичным: она растет до бесконечности после прохождения УВ через фиксированную точку пространства вместо того, чтобы уменьшаться. Заметим, что автомодельное решение должно правильно отражать лишь основные черты реального течения, его недостатки обычно устраняют за счет построения асимптотического ряда.

Ниже обсуждается другая теоретическая возможность: показатель ω выбирается из условия $\partial s(t, \xi)/\partial t = 0$ – это условие гомэнтропии. Физически это означает, что энтропия меняется скачком на УВ одинаково для всех траекторий, и следует рассматривать также другой, отличный от классического, предельный случай описания данного явления.

Если оставаться в рамках традиционного подхода, то представленные результаты можно трактовать как частный случай движения сильной УВ по покоящемуся газу с нулевым давлением, но с переменной по пространству начальной плотностью.

Основные уравнения и решение Седова. Изучаются одномерные неустановившиеся адиабатические течения идеального совершенного газа для трех случаев симметрии течения. Течение характеризуется скоростью $u = u(r, t)$, плотностью $\rho = \rho(r, t)$ и квадратом локальной скорости звука $c^2 = c^2(r, t)$, который с точностью до коэффициента совпадает с абсолютной температурой ($\nu = \{1, 2, 3\}$ для $\{\text{плоской, цилиндрической, сферической}\}$ симметрий потока). Основные уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho + \rho \frac{\partial}{\partial r}u + \frac{(\nu - 1)\rho u}{r} &= 0, \quad \gamma \frac{d}{dt}u + \frac{\partial}{\partial r}c^2 + c^2 \frac{\partial}{\partial r} \ln(\rho) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{\rho^{\gamma-1}} \right) &= 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагая автомодельность, зададим искомые функции в форме ($m = 1/n$, $w = \omega/n$):

$$u = \frac{K^m r^{1-m} U1(\eta)}{m}, \quad \rho = \rho_0 r^w R1(\eta), \quad c^2 = \frac{K^{2m} r^{2-2m} Z1(\eta)}{m^2}, \quad t = K^{-m} \eta r^m. \quad (2)$$

Для автомодельных представителей (по r) {скорости, плотности и квадрата скорости звука}, то есть для $\{U1, R1, Z1\}$, получим систему трех ОДУ.

Если УВ сильная и распространяется по неподвижному газу с $\{U_{11} = 0, Z_{11} = 0, R_{11} = \rho_0 = 1\}$, то позади нее ($\eta = 1$ – ее форма) имеем значения

$$U_{12} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad Z_{12} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}, \quad R_{12} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1},$$

которые являются начальными условиями при решении системы ОДУ.

Чтобы иметь возможность сравнения результатов с результатами классического подхода [1, 2], рассмотрим наряду с (2) традиционные формулы

$$r = Kt^n\xi, \quad u = nKt^{n-1}\xi U(\xi), \quad \rho = \rho_0 t^\omega R(\xi), \quad c^2 = n^2 K^2 t^{2n-2} \xi^2 Z(\xi). \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), легко получить соотношения

$$\xi = \eta^{-n}, \quad U(\xi) = \eta U_1(\eta), \quad Z(\xi) = \eta^2 Z_1(\eta). \quad (4)$$

Две функции $U(\xi), Z(\xi)$ параметрически представляют решение ОДУ первого порядка для $Z = Z(U)$ – фазовая плоскость. Для функции $Z = Z(U)$ имеем ОДУ:

$$\frac{dZ(U)}{dU} = \frac{\Delta_3(U, Z(U), \nu, \gamma, \omega, n)}{\Delta_1(U, Z(U), \nu, \gamma, \omega, n)}. \quad (5)$$

Качественный анализ (5) содержится в [1].

Рассмотрим полную (в единице массы газа) энергию жидкого объема

$$e = c_v T + \frac{u^2}{2}.$$

В работе [1] показано, что условию $\partial e(t, \xi)/\partial t = 0$ соответствует равенство

$$\omega = 2 - n(\nu + 2) \quad (6)$$

и уравнение (5) имеет частное решение Седова:

$$Z = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma U^2 (U - 1)(\gamma - 1)}{\gamma U - 1}. \quad (7)$$

Если в дополнении к (5) потребовать выполнения условия независимости плотности от времени (ξ фикс.), как в [1, 2], то $\omega = 0$, и из (6) получим $n = 2/(\nu + 2)$, то есть $n = \{2/3, 1/2, 2/5\}$ при $\nu = \{1, 2, 3\}$ и любом γ , если – энтропийной функции, то

$$\omega = \frac{2(n - 1)}{\gamma - 1}. \quad (8)$$

Совместное выполнение (6) и (8) дает

$$n = \frac{2\gamma}{\gamma\nu - \nu + 2\gamma}.$$

При $\gamma = 7/5$ получим $n = \{7/8, 7/9, 7/10\}$ для $\nu = \{1, 2, 3\}$ [3].

На приведенных рис. 1 – 4 изображено поведение автомодельных представителей $\{U1, R1, Z1, S1\}$ в зависимости от η . Расчет кривых 1 проведен для ($\nu = 3, \omega = 0, \gamma = 7/5, n = 2/5$), кривых 2 – для ($\nu = 3, \omega = 3/2, \gamma = 7/5, n = 7/10$).

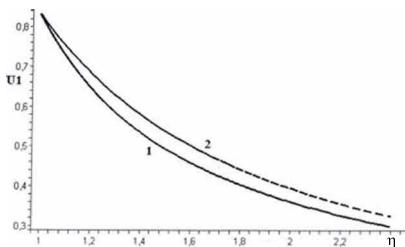


Рис. 1

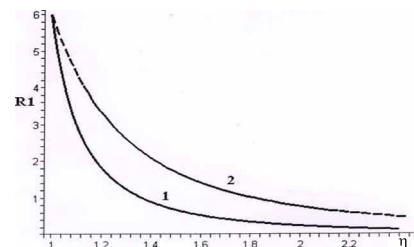


Рис. 2

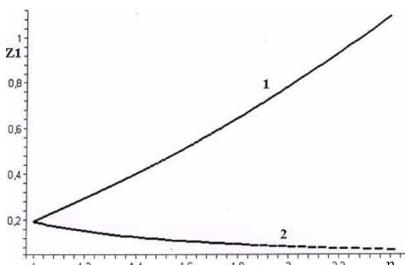


Рис. 3

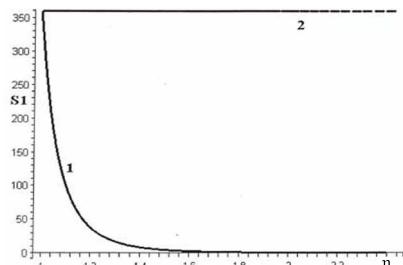


Рис. 4

На рис. 3 видно различие в поведении температуры: в классическом случае она растет после прохождения УВ (с течением времени в фиксированной точке пространства), в гомэнтропической модели – падает. На рис. 4 показано разное поведение представителя энтропийной функции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
2. Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В. Теория точечного взрыва. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 332 с.
3. Чернов И.А. К автомодельной задаче о сильном точечном взрыве. Саратов, 2009. 24 с. Деп. в ВИНТИ РАН 05.05.2009, № 289-В2009.

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ ДАВЫДОВА (НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ)

Течение тяжелой несжимаемой невязкой жидкости для случая двух пространственных переменных моделируется путем решения краевых задач для системы уравнений Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= F_y, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь u, v – компоненты вектора скорости, p – нормированное (поделенное на постоянную плотность) давление, F_y – сила тяжести.

На теле ставится условие непротекания (нормальная компонента скорости равна нулю), на свободной поверхности – давление равно атмосферному.

В принципе, из исходной системы можно получить уравнение Пуассона для давления [1, 2], которое должно решаться на каждом шаге по времени:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$$

или

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

и т.д. Однако эти уравнения носят академический интерес и не годятся для практических расчетов. Если не выполняется разностное уравнение для дивергенции в каждый момент времени, то течение быстро вырождается и становится сжимаемым [1].

Для решения подобных задач воспользуемся методом Давыдова [3, 4]. Рассмотрим случаи регулярной и нерегулярной (треугольной) сеток.

Регулярная сетка. Пусть

$$\tilde{D} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \tag{1}$$

–дивергенция вектора скорости на эйлеровом этапе, играющая ключевую роль в расчетах несжимаемой жидкости. Дивергенция должна равняться нулю в любой момент времени на любом этапе расчета как в дифференциальной форме, так и в разностной.

Выпишем дивергенцию вектора скорости в разностном виде

$$\tilde{D}_{i,j}^n = \frac{\tilde{u}_{i+1/2,j}^n - \tilde{u}_{i-1/2,j}^n}{h_x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+1/2}^n - \tilde{v}_{i,j-1/2}^n}{h_y}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \frac{\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n}{2} \text{ и т.д.};$$

$$\tilde{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \frac{\tau}{2h_x}(p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n) \text{ и т.д.}; \quad (3)$$

$$\tilde{v}_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \frac{\tau}{2h_y}(p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n) - \tau g_y \text{ и т.д.} \quad (4)$$

Итак,

$$\tilde{D}_{i,j}^n = 0. \quad (5)$$

Подставляя в левую часть (5) выражения из (2), (3), (4) и принимая для сокращения выкладок $h_x = h_y = h$, получим

$$\frac{4h^2}{\tau} D_{i,j}^n = (p_{i-2,j} + p_{i,j-2} + p_{i+2,j} + p_{i,j+2} - 4p_{i,j}), \quad (6)$$

где $D_{i,j}^n$ – разностная дивергенция в ячейке (i, j) на n -м полном шаге по времени.

Полученный шаблон изображен на рис. 1.

Разрешая (6) относительно $p_{i,j}$, получим матричное уравнение для давления:

$$p_{i,j} = \frac{1}{4}(p_{i-2,j} + p_{i,j-2} + p_{i+2,j} + p_{i,j+2}) - \frac{h^2}{\tau} D_{i,j}^n. \quad (7)$$

Формула (7), кроме нахождения давления, обнуляет дивергенцию $\tilde{D}_{i,j}^n$ на эйлеровом этапе каждого временного шага и таким образом не дает накапливаться неизбежным вычислительным ошибкам. Обнуление дивергенции $D_{i,j}^n$ в конце всего вычислительного цикла одного временного шага – гораздо более сложный процесс, так как схема метода Давыдова – с переключениями. В зависимости от направления потока через расчетную ячейку мы имеем фактически 16 вариантов разностных схем в двумерном случае.

Численное решение (7) и уравнений движения осложняется следующими обстоятельствами.

1. Часть границы (свободная поверхность) неизвестна и определяется в результате расчетов на основе методики из работы [1]. На свободной поверхности давление будем полагать равным атмосферному.

2. Количество расчетных ячеек меняется на каждом шаге по времени.

Справиться с такими проблемами помогают маркеры [1, 2] – виртуальные частицы, не влияющие на расчеты, а лишь показывающие положение свободной поверхности, перемещение частиц жидкости и другие детали течения. Жидкость «не чувствует» маркеров и переносит их «на себе». Таким образом, маркеры фактически иллюстрируют лагранжев подход в исследовании течений.

Решение уравнения (7) должно проводиться на каждом шаге по времени.

Компоненты вектора скорости традиционно получаются с помощью трех этапов (эйлеров, лагранжев, заключительный) метода Давыдова.

Нерегулярная треугольная сетка. Треугольная (в трехмерном случае – четырехгранная) сетка позволяет легко рассчитывать тела со сложной образующей, естественным образом ставить граничные условия для невязкой жидкости (условие непротекания), зато требует предварительного разбиения расчетной области на треугольники (триангуляция). Задача триангуляции весьма стандартна, хорошо алгоритмизируется и не является серьезной проблемой.

Исходные дифференциальные уравнения – те же, что и для регулярной сетки, разностные уравнения для компонент вектора скорости и давления сложнее, чем в случае регулярной сетки. Эйлеров, лагранжев и заключительный этапы для компонент скорости на треугольной сетке рассматривались в [5], поэтому подробнее рассмотрим получение и решение уравнения для давления. Как и в случае с регулярной сеткой, эти проблемы решаются внутри эйлерова этапа.

Разностные уравнения эйлерова этапа имеют вид

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n - \left(\frac{\Delta p}{\Delta x} \right)_i, \quad (8)$$

$$\tilde{v}_i^n = v_i^n - \left(\frac{\Delta p}{\Delta y} \right)_i, \quad (9)$$

где [5]

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta x} \right)_i = \frac{(p_{k_2} + p_{k_1})(y_{k_2} - y_{k_1}) + (p_{k_3} + p_{k_2})(y_{k_3} - y_{k_2}) + (p_{k_1} + p_{k_3})(y_{k_1} - y_{k_3})}{(x_{k_2} + x_{k_1})(y_{k_2} - y_{k_1}) + (x_{k_3} + x_{k_2})(x_{k_3} - x_{k_2}) + (x_{k_1} + x_{k_3})(y_{k_1} - y_{k_3})}, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta y} \right)_i = - \frac{(p_{k_2} + p_{k_1})(x_{k_2} - x_{k_1}) + (p_{k_3} + p_{k_2})(x_{k_3} - x_{k_2}) + (p_{k_1} + p_{k_3})(x_{k_1} - x_{k_3})}{(x_{k_2} + x_{k_1})(y_{k_2} - y_{k_1}) + (x_{k_3} + x_{k_2})(x_{k_3} - x_{k_2}) + (x_{k_1} + x_{k_3})(y_{k_1} - y_{k_3})}. \quad (11)$$

Здесь k_1, k_2, k_3 – номера треугольников, соседних с треугольником с номером i . Обход «соседей» происходит против часовой стрелки.

Необходимая нам дивергенция в случае треугольной сетки выглядит так [5]:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i^n &= \left(\frac{\Delta \tilde{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta \tilde{v}}{\Delta y} \right)_i = \\ &= \frac{1}{(x_{k_2} + x_{k_1})(y_{k_2} - y_{k_1}) + (x_{k_3} + x_{k_2})(x_{k_3} - y_{k_2}) + (x_{k_1} + x_{k_3})(y_{k_1} - y_{k_3})} \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^3 \left[\left(\tilde{u}_{k_{j+1}}^n + \tilde{u}_{k_j}^n \right) (y_{k_{j+1}} - y_{k_j}) - \left(\tilde{v}_{k_{j+1}}^n + \tilde{v}_{k_j}^n \right) (x_{k_{j+1}} - x_{k_j}) \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь $u_{k_4} = u_{k_1}, v_{k_4} = v_{k_1}, x_{k_4} = x_{k_1}, y_{k_4} = y_{k_1}$.

Ввиду неструктурированности разностной сетки у искомых дискретных величин, имеется один индекс, означающий номер крупной частицы в расчётом поле.

Теперь из (8), (9), (12) необходимо составить алгоритм вычисления давления в треугольнике с номером i таким образом, чтобы дискретный аналог дивергенции (12) точно обращался в ноль. Формулы (8), (9), (12) справедливы для всех внутренних точек, в том числе для соседних с i -й точкой точек k_1, k_2, k_3 , причем в каждой из них одним соседом является i -я точка. Подставляя в (12) выражения для точек k_1, k_2, k_3 и приравнивая (12) к нулю, получаем выражение, аналогичное (7), но гораздо более сложное. Проще решить эту проблему алгоритмически, создавая це-личисленные квадратные матрицы порядка 4, хранящие конфигурацию, изображенную на рис. 2, либо решая нелинейное уравнение (12) относи-тельно p_i .

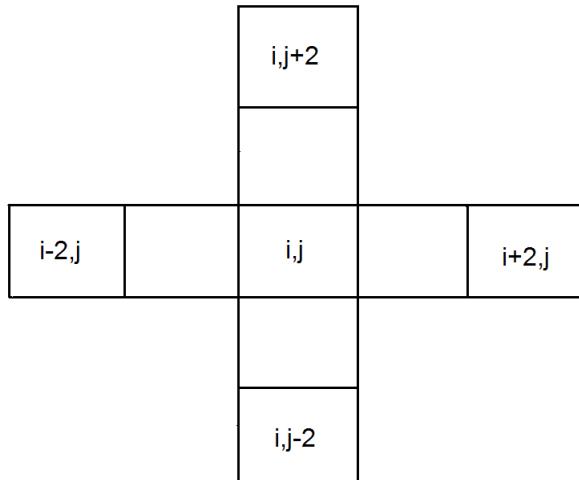


Рис. 1. Шаблон на регулярной сетке
для вычисления давления

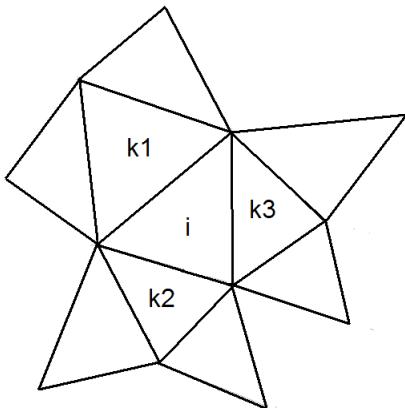


Рис. 2. Шаблон на нерегулярной сетке для вычисления давления (участвуют десять треугольников)

Для решения стационарных задач методом установления процесс вычисления давления можно сильно упростить. Для этого вместо уравнения неразрывности рассмотрим следующее нестационарное уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Когда в процессе установления давление p с помощью численного решения последнего уравнения выйдет на стационарный режим, то и исходное уравнение неразрывности будет автоматически выполняться. Уравнение Пуассона здесь решать не надо.

В качестве примера решены нестационарные задачи о размыве основания плотины и об истечении из сосуда. Применялись регулярная и нерегулярная сетки. На рис. 3 изображена расчетная область, покрытая нерегулярной треугольной сеткой, на рис. 4 – результаты расчета на этой сетке (показаны маркеры). Для первой задачи вправо распространяется волна с гребнем, во второй задаче образуется закрученная струя.

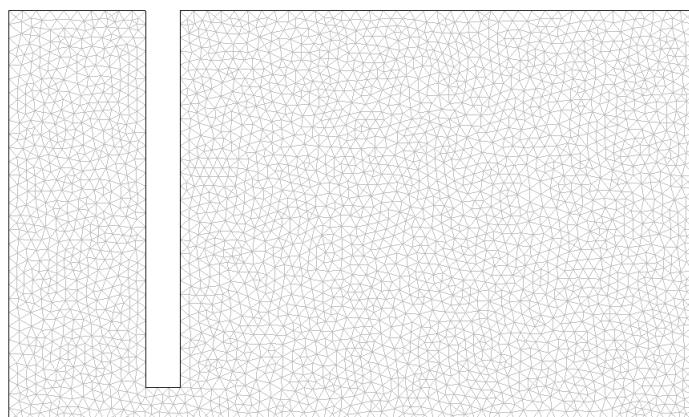


Рис. 3. Расчетная область с треугольной сеткой

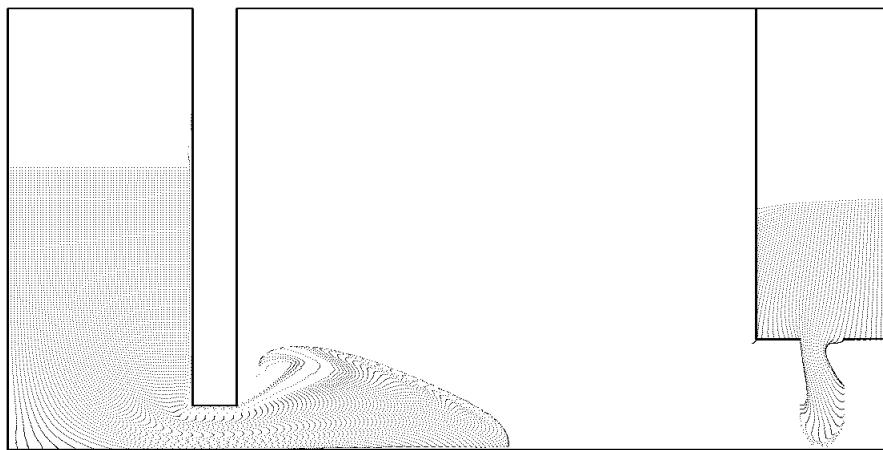


Рис. 4. Прорыв плотины и истечение из сосуда

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости: В 2 т. М.: Мир, 1991.
3. Математическая энциклопедия: В 5 т. М.: Сов. энцикл., 1982. Т. 3.
4. Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1988.
5. Шевырев С.П. Разностные схемы метода Давыдова на произвольной сетке // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 205–209.

УДК 533.6.0116:532.529

Г.П. ШИНДЯПИН, А.А. МАТУТИН, О.А. МАТУТИНА

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГЖС

При падении ударной волны $AR(BR)$ относительной интенсивности $\Delta p/\rho_0 c_0^2$, под углом α к вертикали на свободную поверхность KA , разделяющую ГАЗ/ГАЗ, ГАЗ/ГЖС, ГЖС/ГЖС, с газосодержаниями γ^+ , γ^- возникают различные режимы рефракции: RR – регулярный (рис. 1), NR – нерегулярный (рис. 2), RW – регулярный с отраженной ударной волной (УВ) (рис. 3) и др., характеризуемые фронтом преломленной волны AD и разрежением AB_KB_1 или отраженной УВ AC . Параметр q^+ , характеризующий интенсивность преломленной волны одновременно характеризует интенсивность волны разрежения или отраженной УВ ($\varepsilon_{20} = \varepsilon_{30}$).

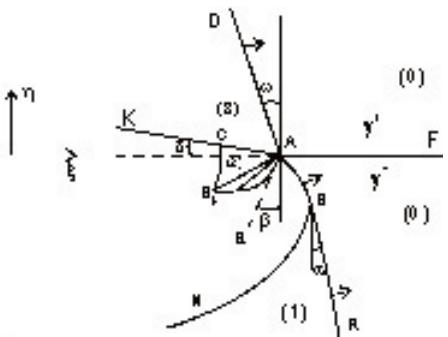


Рис. 1

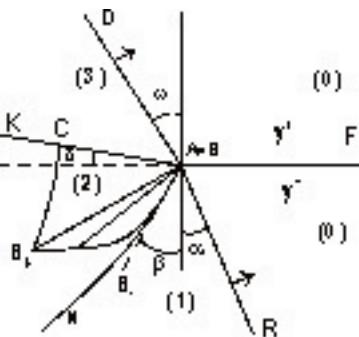


Рис. 2

Используется локально равновесная термодинамическая модель газожидкостной среды (ГЖС) [1], позволяющая для общего случая уравнений состояния жидкой и газообразной фаз (индекс I соответствует жидкости, II – газу)

$$\rho_I = f(p) = \rho^*(1 + p/k), \quad p = R\rho_{II}T, \quad k = 2.1 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad p_0 = 10^5 \text{ Па}$$

записать уравнения термодинамического и калорического состояния смеси, а также формулы для адиабатической скорости звука в виде

$$p \left[\frac{a}{\rho} - \frac{b}{f(p)} \right] = c_V T; \quad a = (1 + \gamma)b, \quad b = \frac{c_V}{\gamma R}; \quad (1)$$

$$c^2 = \frac{a + 1}{a - b \frac{d}{dp} \frac{p}{f(p)}} \cdot \frac{p}{\rho}; \quad B_0 = \rho_0 c_0^2; \quad (2)$$

$$p_{10} = \frac{p_1 - p_0}{\rho_0^{-} c_0^{-2}}, \quad \varepsilon = \frac{p_1 - p_0}{p_0},$$

$$\left(\frac{D_0}{c_0} \right) = N \left(\frac{\Delta p}{B_0} \right) = 1 + R_0(\gamma) \frac{\Delta p}{B_0} = 1 + L_0 \varepsilon,$$

$$\bar{\varepsilon} = L_0(\gamma) \varepsilon = R_0(\gamma) P_{10}, \quad L_0 = \frac{p_0 R_0(\gamma)}{B_0(\gamma)},$$

$$0.5 \cdot 10^{-4} \leq L_0 \leq 1.0.$$

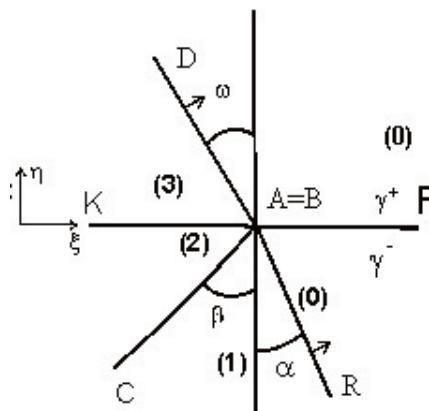


Рис. 3

Асимптотический анализ задач рефракции. Анализ задач рефракции УВ при относительно малой интенсивности падающей УВ ($\bar{\varepsilon} \ll 1$, $\bar{\varepsilon} = L_0(\gamma)\varepsilon_{10}$, $\varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$), характерных для ГЖС пузырькового типа, как и других случаев взаимодействия УВ, может быть проведен с помощью асимптотической теории коротких волн (для областей больших градиентов параметров).

Интерес к приближенным и асимптотическим методам в настоящее время объясняется, с одной стороны, достижениями в этой области, значение которых выходит за рамки рассматриваемых проблем, и, с другой стороны, физической актуальностью рассматриваемых проблем [1 – 3].

В точке $A(\xi_A, \eta_A = 0)$:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= L_0(\gamma^-) \cdot \varepsilon_{10} = R_0(\gamma^-) \cdot P_{10}, \\ \varepsilon_{10} &= \frac{p_1 - p_0}{p_0}, \quad P_{10} = \frac{p_1 - p_0}{p_0^- c_0^{-2}} \ll 1, \\ \xi &= \frac{x}{c_0^- t}, \quad \eta = \frac{y}{c_0^- t}, \quad c^* = \frac{c}{c_0}, \quad P^* = \frac{p - p_0}{B_0}.\end{aligned}\quad (3)$$

На свободной поверхности:

- 1) $\frac{N}{\cos\alpha} = \frac{N}{\cos\omega}$; $c_0^- \xi_A^- = c_0^+ \xi_A^+$ – I-инвариант (в точке A для областей (2), (3));
- 2) $\frac{v^\pm + c_0^\pm \eta_A^\pm}{u^\pm + c_0^\pm \xi_A^\pm} = \frac{1}{\xi}$, $\xi = \xi(\eta)$ – свободная поверхность $\eta_A = 0$;

$$|u^\pm| \ll c_0^\pm \xi_A, \quad V^+ = V^- - \text{II-инвариант}. \quad (4)$$

Анализ (1), (2) в переменных в теории коротких волн:

$$\begin{aligned}\xi &= 1 + \bar{\varepsilon}X, \quad \eta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y; \quad \frac{R}{c_0 t} = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \quad \theta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y; \\ \delta &= X + \frac{1}{2}Y^2; \quad \frac{u}{c_0} = P_{10} \frac{u^{(1)}}{c_0} + \dots, \quad \frac{v}{c_0} = P_{10}^{3/2} R_0^{1/2} \frac{V^{(1)}}{c_0} + \dots; \\ \frac{p - p_0}{B_0} &= P_{10} P^{(1)} + \dots, \quad \frac{u}{c_0} = \bar{\varepsilon} \cdot \frac{\mu}{R_0} + \dots, \quad \frac{v}{c_0} = \bar{\varepsilon}^{3/2} \frac{v}{R_0} + \dots; \\ \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} &= P_{10} H^{(1)}; \quad \bar{\varepsilon} = R_0 \cdot P_{10} = L_0 \cdot \varepsilon_{10}, \quad \varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0.\end{aligned}\quad (5)$$

Решение систем уравнений коротких волн имеет вид

$$[\mu(\mu - 2\delta)]_\delta + v_Y + 3\mu = 0, \quad \mu_Y = v_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)}. \quad (6)$$

Для волны разрежения получаем

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, \quad v = \frac{1}{3}z^3 - \mu Y + d, \quad z = \frac{\bar{X} - \bar{X}_A}{Y}. \quad (7)$$

Условия на фронтах $X = X^*(Y)$:

$$X - \Psi^v Y = \frac{1}{2}(\Psi^{v^-} + \mu + \mu'), \quad \Psi^v = \frac{dX^*}{dY}, \quad (\Psi^v = \frac{d\xi^*}{d\eta}/\bar{\varepsilon}^{1/2}),$$

$$(\mu - \mu') \cdot (\Psi^v + Y) = v' - v, \quad P^{(1)} = H^{(1)} = \mu. \quad (8)$$

В точке A :

$\mu_A = q^-$ – перед передним фронтом волн разрежения;

$\mu_A = q^+$ – за задним фронтом волн разрежения.

Инварианты:

$$(I) : \omega^{v2} = 2c_\gamma + \alpha^{v2} - q^+/\bar{L} + q^-, \quad \omega^v = \frac{tg\omega}{\bar{\varepsilon}^{1/2}}, \quad c_\gamma = \frac{c_0^- - c_0^+}{c_0^- \bar{\varepsilon}}; \quad (9)$$

$$(II) : \frac{q^+ \cdot \bar{B}}{\bar{c}} \cdot \omega^v = \frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{3/2} + d, \quad \bar{B}/\bar{c} = \bar{\rho} \cdot \bar{c}. \quad (10)$$

Исключая ω^v из (9), (10), имеем при $\bar{\rho} \cdot \bar{c} = 1$ условие ТКВ (рис. 4, 5).

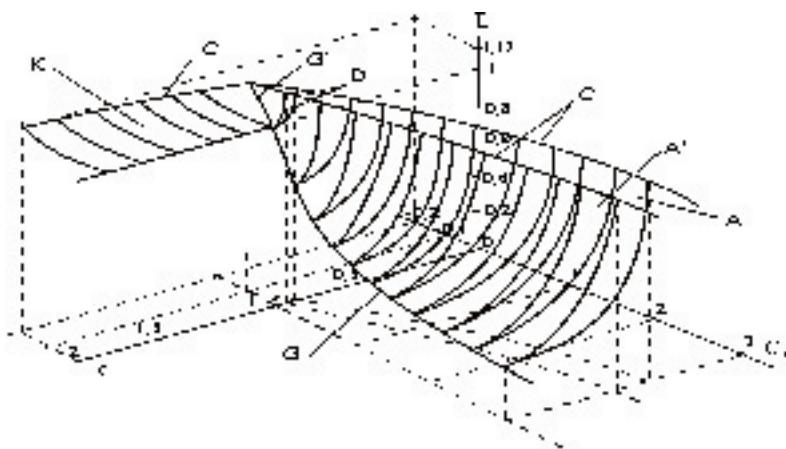


Рис. 4

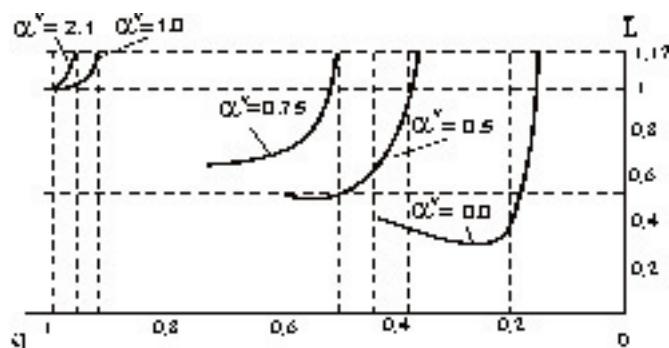


Рис. 5

Для режимов RRV , RR , NR получим выражение для q^+ .

$$\frac{q^{+2}}{\rho c} (2c_\gamma + \alpha^{v2} - q^+/\bar{L} + q^-) = \left[\frac{1}{3} (2X_A - 2q^+)^{3/2} + d \right]^2 \quad (11)$$

Здесь c_γ , α^v , \bar{L} – параметры подобия, X_A , d – const [4].

Для режима RW с УВ АС правая часть (10) имеет вид

$$v_2 = \alpha^v - (q^+ - 1) \sqrt{\alpha^{v2} - q^+}.$$

Численное решение нелинейных краевых задач. Метод последовательных приближений — сводит исходную задачу для уравнений коротких волн с неизвестной границей — к серии краевых задач с фиксированной границей [5].

Применяется метод конечных разностей 2-ого порядка точности с выделением фронтов УВ.

а) ГАЗ-ГЖС ($C_\gamma = \infty$, $q^+ = 0$, $\alpha^v = 2.147$, $\bar{L} = 0$, $\varepsilon_\Pi = 0.005$ – 2 краевые задачи – 15 итераций) – с УВ, замыкающей зону разрежения (рис. 6).

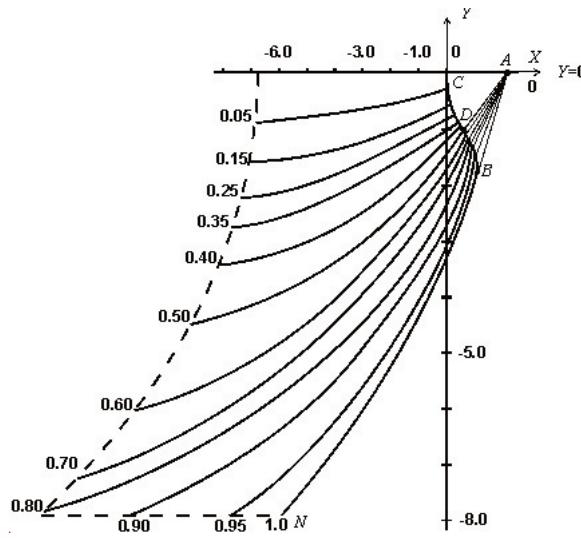


Рис. 6

б) ГАЗ-ГЖС ($C_\gamma = \infty$, $q^+ = 0$, $\alpha^v = 0.5$, $\bar{L} = 0$, $\varepsilon_\Pi = 0.002$ – 2 краевые задачи – 14 итераций) (рис. 7).

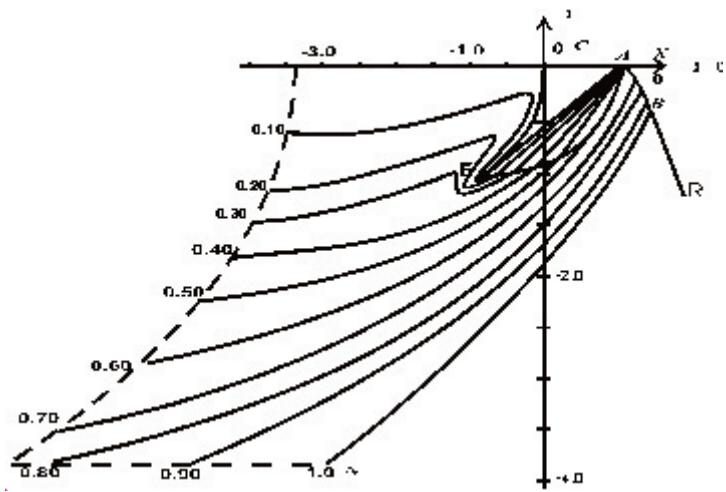


Рис. 7

в) ГЖС-ГЖС, ГАЗ-ГАЗ ($C_\gamma = 0$, $q^+ = 0.9$, $\alpha^v = 1.5$, $\bar{L} = 1.2$)
 γ^+, γ^- ; ρ^+, ρ^- ; $c_0^+ = c_0^-$ – итерационный процесс: $\varepsilon_{\Pi} = 0.0001$, 12 итераций; $\varepsilon_{\Phi} = 0.002$, 20 итераций; результирующая точность: $\varepsilon = 0.005$.

г) ГАЗ-ГАЗ (CO_2/CH_4)

Приведенные картины течений для относительно слабых УВ и малых углах взаимодействия б) ($\alpha \sim O(\bar{\varepsilon}^{1/2})$) и конечных углов взаимодействия с) ($\alpha \sim O(1)$) (рис. 8,9):

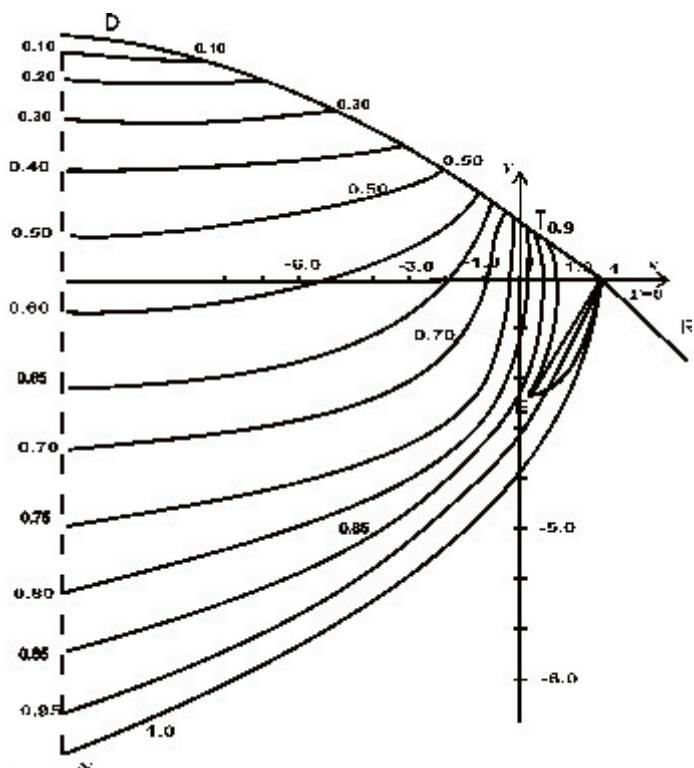


Рис. 8

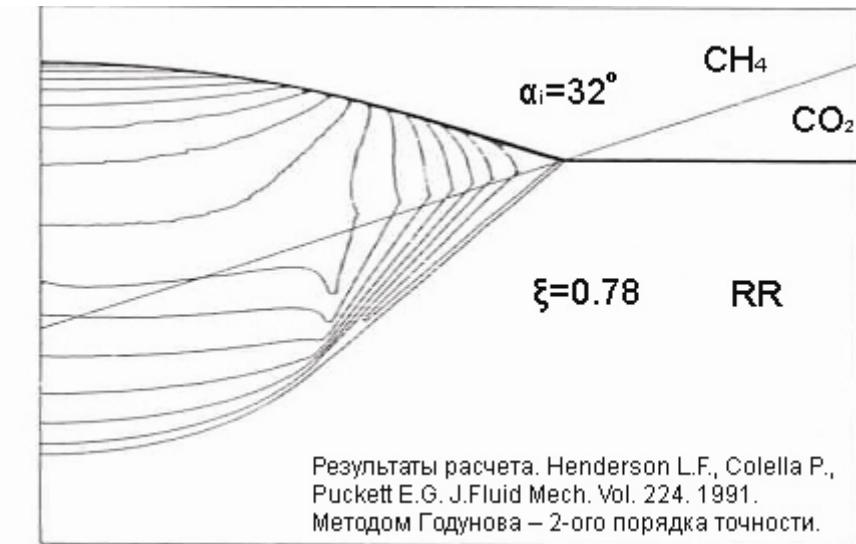


Рис. 9

имеют сходное поведение линий равных давлений; равным является изменение кривизны этих линий в окрестности фронта преломленной УВ, а также их поведение в окрестности нижней границы области возмущений;

-сходность картин ГЖС-ГЖС б) и ГАЗ-ГАЗ с) объясняется газоподобностью свойств ГЖС (см. термодинамическую модель $L = L(\gamma)$).

В общем случае, при C_{γ} отличных от 0 и ∞ (случаи б), а) – необходимо решать краевые задачи для верхней и нижней областей течений (D^+ , D^-), как это, например, сделано в [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г.П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
3. Шиндяпин Г.П., Матутин А.А. Аналитическое исследование нелинейной рефракции ударной волны на поверхности, разделяющей газовую и газожидкостную среды // Сб. науч. тр. Механика и процессы управления: Изд-во УРО РАН, Екатеринбург: 2004. С. 190-197.
4. Шиндяпин Г.П., Матутин А.А. Анализ нелинейной рефракции ударных волн методами асимптотической теории коротких волн // Сб. науч. тр. Механика. Математика, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 193-197.
5. Шиндяпин Г.П. Численное решение задачи нерегулярного отражения слабой ударной волны от жесткой стенки в идеальном газе // ЖВМ и МФ. 1980. №1. С. 249-254.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

БОНДАРЕНКО Н.П. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного уравнения Штурма — Лиувилля	3
БРЕДИХИН Д.А. О полугруппах отношений с унарными операциями	5
БУТЕРИН С.А. О конструктивном решении неполной обратной задачи Штурма — Лиувилля	8
ВЫГОДЧИКОВА И.Ю. Наилучшее приближение сегментной функции алгебраическим полиномом при наличии ограничений	12
ГАЛАЕВ С.В., ГОХМАН А.В. Внутренние неголономные связности, совместимые с допустимой почти симплектической структурой	15
ГУДОШНИКОВА Е.В. Порядок приближения дифференцируемых функций классом линейных операторов	19
ГУРЕВИЧ А.П. Асимптотика фундаментальной системы решений одного класса дифференциальных уравнений в комплексной плоскости	21
ДУДОВ С.И., МЕЩЕРЯКОВА Е.А. Об асферичности выпуклого компакта	24
ЕРШОВ А.В. О расслоениях со структурным группоидом матричных подалгебр	28
ИГНАТЬЕВ М.Ю. О решении одной неполной обратной задачи Штурма — Лиувилля	31
КОНЮШКОВ В.М. Общий алгоритм решения задачи Коши для уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа	34
КРЕЙС С.А. Альтернативные дуальные фреймы в банаховых пространствах	36
МОЛЧАНОВ В.А. О строении гомоморфизмов полугрупп вектор-функций	39
НОВИКОВ В.Е. Связь между решётками контекстов с бинарным и n -арным отношениями	42
ОРЕЛ А.А. Шаблоны проектирования бизнес-процессов с помощью сетей Петри	45
ПОПЛАВСКИЙ В.Б. О сохранении равенства единице полуперманентов булевых $\{0, 1\}$ -матриц	49
РАЗУМОВСКАЯ Е.В. Об одном коэффициентном функционале в подклассе однолистных ограниченных «тиично» вещественных функций	52
РОЗЕН В.В. Допустимые исходы для веерных структур коалиций	54
РОМАКИНА Л.Н. Инвариант группы симметрий эквидистанты расширенной гиперболической плоскости	58

РЫХЛОВ В.С. О полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов	60
САВИНА Т.Ф. Гомоморфизмы и конгруэнтности игр с отношениями предпочтения	63
СИДОРОВ С.П. Ошибка оптимальной интерполяции положительными алгоритмами	66
СУСИН М.Н. Толерантные гомотопические группы пространства толерантных петель	68
ТИМОФЕЕВ В.Г. Априорные оценки решения задач Дирихле в круге	71
ТРЫНИН А.Ю. Пример системы Чебышева с почти всюду сходящейся к нулю последовательностью функций Лебега интерполяционных процессов	74
ФАДЕЕВ Р.Н. Количественная оценка скорости сходимости ряда Фурье по мультипликативной системе	76
ФЕДОСЕЕВ А.Е. О сходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с ядром, разрывным на лучах	79
ХВОРОСТУХИНА Е.В. Об эпиморфизмах гиперграфических автоматов	82
ХРОМОВ А.А. Аппроксимация непрерывных функций степенями резольвент оператора дифференцирования	84
ХРОМОВ А.П. Оператор дифференцирования с разрывной весовой функцией	88
ХРОМОВА Г.В. О выборе параметра регуляризации при решении уравнений первого рода методом М.М. Лаврентьева	92
ШАТАЛИНА О.И. Решение задачи восстановления с помощью полиномов Лежандра	94
ШЕВЦОВ В.И. О рядах экспонент, ограниченных на вещественной оси	97
ЮРКО В.А. Краевые задачи на графе с корневым циклом	99

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

БИРЮКОВ А.Г., БИРЮКОВ В.Г., ЧЕЛНОКОВ Ю.Н. Задача оптимального управления угловым движением твердого тела	105
ИВАНОВ С.В., КОВАЛЕВ А.Д. Об одной форме дифференциальной термодинамической модели	108
ИВАНОВ С.В., КОВАЛЕВ А.Д. Применение дифференциальной термодинамической модели для описания волновых процессов в двухфазных газожидкостных средах	112
КОПНИНА В.И., ГУБИНА Е.С. Изгиб анизотропной эллиптической плиты	114
КОЖАНОВ В.С. Расчет течения в задаче о схлопывании пустой сферической каверны	117
МАРКУШИН А.Г. Алгоритм решения задачи истечения сыпучего тела с твердым зерном	120
ПАНКРАТОВ И.А., ЧЕЛНОКОВ Ю.Н. Исследование задачи оптимальной переориентации круговой орбиты космического аппарата	126
САПУНКОВ Я.Г. Оптимальное управление движением космического аппарата с комбинированной тягой	129
САФОНОВ Р.А. Численное решение некоторых задач статического изгиба прямоугольных пластин под действием локальной нагрузки	133

САФРОНЧИК М.И. Развитие течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости	136
СЕВОСТЬЯНОВ Г.Д. К кинематике твердого тела с неподвижной точкой	141
ЧЕРНОВ И.А. Гомэнтропическая модель сильного точечного взрыва	144
ШЕВЫРЕВ С.П. Расчет течения тяжелой несжимаемой невязкой жидкости методом Давыдова (нестационарный плоский случай)	148
ШИНДЯПИН Г.П., МАТУТИН А.А., МАТУТИНА О.А. Численное моде- лирование различных режимов рефракции ударных волн в ГЖС . . .	153