

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2008

УДК [51+531]

ББК (22.1+22.2)я43

М34

Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Саратов.
М34 ун-та, 2008. – Вып. 10. – 160 с.: ил.
ISSN 1609-4751

Настоящий сборник содержит статьи сотрудников механико-математического факультета Саратовского государственного университета. Представлены исследования по алгебре, геометрии, дискретной математике, информатике, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории приближений, математической экономике, биомеханике, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я :

Г. В. Хромова, доктор физ.-мат. наук (отв. редактор),

Г. П. Шиндяпин, доктор физ.-мат. наук (зам. отв. редактора),

Д. В. Прохоров, доктор физ.-мат. наук,

А. П. Хромов, доктор физ.-мат. наук,

П. Ф. Недорезов, доктор техн. наук,

С. П. Сидоров, кандидат физ.-мат. наук (отв. секретарь)

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1609-4751

© Саратовский государственный
университет, 2008

Д.А. Бредихин

О МНОГООБРАЗИИ ДИСТРИБУТИВНЫХ РЕШЕТОК С ОПЕРАЦИЯМИ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

В статье находится базис тождеств многообразий дистрибутивных решеток и инволютированных дистрибутивных решеток, порожденных классом решеток бинарных отношений, оснащенных операциями цилиндрификации и инволюции.

Дистрибутивной решеткой называется алгебра $(A, +, \cdot)$ типа $(2, 2)$, удовлетворяющая тождествам

$$x+x = x, \quad x+y = y+x, \quad (x+y)+z = x+(y+z), \quad xx = x, \quad xy = yx, \quad (xy)z = x(yz),$$

$$x(x+y) = x, \quad x+xy = x, \quad x(y+z) = xy+xz.$$

Инволютированной дистрибутивной решеткой назовем алгебру $(A, +, \cdot, {}^{-1})$ типа $(2, 2, 1)$, где $(A, +, \cdot)$ — дистрибутивная решетка и ${}^{-1}$ — унарная операция, удовлетворяющая тождествам

$$(x^{-1})^{-1} = x, \quad (x+y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}, \quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}.$$

Булева алгебра $(A, +, \cdot, {}^{-})$ — это алгебра типа $(2, 2, 1)$, где $(A, +, \cdot)$ — дистрибутивная решетка и ${}^{-}$ — унарная операция, удовлетворяющая тождествам

$$(x+y)^{-} = x^{-}y^{-}, \quad (xy)^{-} = x^{-} + y^{-}.$$

Теория булевых алгебр является алгебраической версией логики высказываний. Рассмотрение позитивной части логики высказываний (совокупности предложений, в записи которых используются только операции конъюнкции и дизъюнкции) сводится к изучению класса дистрибутивных решеток. Однако булевых операций оказывается недостаточно для алгебраизации логики предикатов. Это приводит к необходимости рассмотрения ряда

дополнительных операций над отношениями. К таким операциям, в частности, относятся операции цилиндрификации, являющиеся алгебраическими аналогами кванторов существования. Изучение возникающих таким образом алгебр может быть осуществлено в рамках теории булевых алгебр с дополнительными операциями [1]. Классическим примером таких алгебр являются так называемые цилиндрические алгебры [2].

Обозначим через $Rel(X)$ множество всех бинарных отношений, заданных на базисном множестве X . Множество бинарных отношений $\Phi \subset Rel(X)$, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую алгеброй отношений. Основы теории алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [3, 4] и в дальнейшем были развиты в работах многочисленных авторов [5, 6].

Обозначим $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω . Пусть $Q\{\Omega\}$ и $Var\{\Omega\}$ — квазимногообразие и многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

Нами будут рассмотрены операции объединения \cup , пересечения \cap , обращения $^{-1}$ отношений, а также операции цилиндрификации D_1 и D_2 , определяемые следующим образом:

$$D_1(\rho) = pr_1\rho \times X \text{ и } D_2(\rho) = X \times pr_2\rho,$$

где $pr_1\rho = \{x : (\exists y)(x, y) \in \rho\}$ и $pr_2\rho = \{y : (\exists x)(x, y) \in \rho\}$ — первая и вторая проекции отношения $\rho \in Rel(X)$ соответственно.

Общеизвестно, что класс $R\{\cup, \cap, ^{-1}\}$ совпадает с классом всех булевых алгебр, класс $R\{\cup, \cap\}$ — с классом всех дистрибутивных решеток, а класс $R\{\cup, \cap, ^{-1}\}$ — с классом всех инволютированных дистрибутивных решеток. Квазимногообразие $Q\{\cup, \cap, ^{-1}, D_1, D_2\}$, порожденное классом цилиндрических алгебр бинарных отношений, является многообразием, которое может быть задано с помощью конечной системы тождеств (см. [2]). Замети также, что операции цилиндрификации отношений находят применение в модальной логике [7].

Нами будут рассмотрены классы $R\{\cup, \cap, D_1\}$, $Var\{\cup, \cap, D_2\}$, $R\{\cup, \cap, D_1, D_2\}$ и $R\{\cup, \cap, ^{-1}, D_1, D_2\}$. Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах.

Теорема 1. *Многообразия $Var\{\cup, \cap, D_1\}$ и $Var\{\cup, \cap, D_2\}$ совпадают. Алгебра $(A, +, \cdot, \circ)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\cup, \cap, D_1\}$ тогда и только тогда, когда $(A, +, \cdot)$ — дистрибутивная решетка и выполняется следующая система тождеств:*

$$(x + y)^\circ = x^\circ + y^\circ \quad (x^\circ)^\circ = x^\circ, \quad x^\circ x = x.$$

Теорема 2. Алгебра $(A, +, \cdot, \circ, \bullet)$ типа $(2, 2, 1, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\cup, \cap, D_1, D_2\}$ тогда и только тогда, когда $(A, +, \cdot)$ — дистрибутивная решетка и выполняется следующая система тождеств:

$$(x + y)^\circ = x^\circ + y^\circ \quad (1), \quad (x + y)^\bullet = x^\bullet + y^\bullet; \quad (2), \quad (x^\circ)^\circ = x^\circ \quad (3), \quad (x^\bullet)^\bullet = x^\bullet \quad (4),$$

$$x^\circ x = x = x x^\bullet \quad (5), \quad (x^\circ)^\bullet = (x^\bullet)^\circ \quad (6).$$

Теорема 3. Алгебра $(A, +, \cdot, {}^{-1}, \circ, \bullet)$ типа $(2, 2, 1, 1, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\cup, \cap, {}^{-1}, D_1, D_2\}$ тогда и только тогда, когда $(A, +, \cdot, {}^{-1})$ — инволютированная дистрибутивная решетка, выполняются тождества (1-6) и тождество

$$(x^\circ) {}^{-1} = (x {}^{-1})^\bullet.$$

Идея доказательства теорем состоит в использовании результатов работ [8, 9, 10], дающих описание эквациональных теорий классов алгебр отношений с позитивными операциями, и некоторых теоретико-графовых методов. В заключение сформулируем ряд проблем, касающихся рассмотренных алгебр отношений.

Проблема 1. Являются ли классы $R\{\cup, \cap, D_1\}$, $R\{\cup, \cap, D_2\}$, $R\{\cup, \cap, D_1, D_2\}$ и $R\{\cup, \cap, {}^{-1}, D_1, D_2\}$ квазимногообразиями?

Проблема 2. Являются ли квазимногообразия $Q\{\cup, \cap, D_1\}$, $Q\{\cup, \cap, D_2\}$, $Q\{\cup, \cap, D_1, D_2\}$ и $Q\{\cup, \cap, {}^{-1}, D_1, D_2\}$ многообразиями?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Jónsson B., Tarski A.* Boolean algebras with operations, II // Amer. J. Math. 1952. V. 74. P. 127-162.
2. *Henkin L., Monk J.D., Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam. Part I, 1971.
3. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. V. 6. P. 73-89.
4. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. V. 18. P. 188-189.
5. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3-197.
6. *Schein B.M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1. P. 1-62.
7. *Venema Y.* Many-Dimensional Logic. Universitiet van Amsterdam, 1989.
8. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. Вузов. Сер. Матем. 1993. 3. С. 23-30.
9. *Бредихин Д.А.* О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29-41.
10. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Доклады РАН. 1998. Т. 360. С. 594-595.

С.А. Бутерин

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ПУЧКОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ**

1. Рассмотрим краевую задачу $L := L(q_0(x), q_1(x))$ вида

$$y'' + (\rho^2 - 2\rho q_1(x) - q_0(x))y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $q_j(x) \in W_1^j[0, \pi]$ – комплекснозначные функции, а ρ – спектральный параметр. В статье исследуется обратная задача восстановления пучка L по спектральным характеристикам. В качестве основной спектральной характеристики используется функция Вейля, являющаяся аналогом классической функции Вейля для оператора Штурма – Лиувилля. Показана эквивалентность функции Вейля заданию спектров двух краевых задач для уравнения (1) с одним общим краевым условием, а также спектру вместе с так называемыми весовыми числами. С помощью развития идей метода спектральных отображений [1, 2] доказана единственность решения обратной задачи. Отметим, что обратная задача для дифференциальных пучков второго порядка с вещественными коэффициентами при некотором дополнительном ограничении, обеспечивающем, в частности, простоту спектра, исследовалась в [3] и других работах методом оператора преобразования. В [4] решена обратная задача восстановления дифференциального уравнения (1) на полуоси по функции Вейля.

2. Пусть функции $S(x, \rho)$, $S_1(x, \rho)$, $C(x, \rho)$ и $\Psi(x, \rho)$ являются решениями уравнения (1) и удовлетворяют условиям $S(0, \rho) = S_1(\pi, \rho) = C'(0, \rho) = \Psi(\pi, \rho) = 0$, $S'(0, \rho) = -S_1'(\pi, \rho) = C(0, \rho) = \Psi(0, \rho) = 1$. Функции $\Psi(x, \rho)$ и $M(\rho) := \Psi'(0, \rho)$ называются соответственно решением Вейля и функцией Вейля пучка L . Обозначим $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$. Собственные значения ρ_n , $|n| \in \mathbb{N}$, краевой задачи (1), (2) совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\rho) := \langle S_1(x, \rho), S(x, \rho) \rangle = S(\pi, \rho) = S_1(0, \rho)$. Имеем

$$\Psi(x, \rho) = C(x, \rho) + M(\rho)S(x, \rho) = \frac{S_1(x, \rho)}{\Delta(\rho)}, \quad M(\rho) = -\frac{\Delta_1(\rho)}{\Delta(\rho)}, \quad (3)$$

где $\Delta_1(\rho) = -S_1'(0, \rho)$ – характеристическая функция краевой задачи для уравнения (1) с краевыми условиями $y'(0) = y(\pi) = 0$. Обозначим ρ_n^1 , $n \in \mathbb{Z}$, – ее собственные значения. Очевидно, что $\{\rho_n\} \cap \{\rho_n^1\} = \emptyset$. Таким образом, $M(\rho)$ – мероморфная функция с полюсами ρ_n и нулями ρ_n^1 . Положим

$$Q(x) = \int_0^x q_1(t) dt, \quad \omega = \frac{1}{\pi}Q(\pi), \quad G_\delta^\alpha = \{\rho : |\rho - k - \alpha| \geq \delta, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Известным методом (см., например, [2]) доказываемая следующая

Лемма 1. *Имеют место представления:*

$$\left. \begin{aligned} \rho S(x, \rho) &= \sin(\rho x - Q(x)) + \eta(x, \rho), \\ \rho S_1(x, \rho) &= \sin(\rho(\pi - x) - Q(\pi) + Q(x)) + \eta_1(x, \rho), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\eta^{(\nu)}(x, \rho), \eta_1^{(\nu)}(\pi - x, \rho) = O\left(\frac{1}{\rho^{1-\nu}} \exp(|\operatorname{Im}\rho|x)\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \nu = 0, 1, \quad (5)$$

равномерно по $x \in [0, \pi]$. Кроме того,

$$\Delta(\rho) = \frac{\sin(\rho - \omega)\pi}{\rho - \omega} \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in G_\delta^\omega, \quad (6)$$

$$\Delta_1(\rho) = \cos(\rho - \omega)\pi \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in G_\delta^{\omega+\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Используя (6), (7) и теорему Руше, известным методом [2] получаем, что

$$\rho_n = n + \omega + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \rho_n^1 = n - \frac{1}{2} + \omega + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad |n| \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Без ущерба для общности будем предполагать, что $\rho_n \neq \rho_k$ при $nk < 0$. Обозначим m_n – кратность собственного значения ρ_n ($\rho_n = \rho_{n+1} = \dots = \rho_{n+m_n-1}$) и положим $\mathbb{S} := \{n : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}, \rho_{n-1} \neq \rho_n\} \cup \{1\}$. Согласно (8) для достаточно больших $|n|$ имеем $m_n = 1$. С помощью метода контурного интегрирования доказываемое следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо представление*

$$M(\rho) = \sum_{n \in \mathbb{S}} \sum_{\nu=0}^{m_n-1} \frac{M_{n+\nu}}{(\rho - \rho_n)^{\nu+1}}.$$

Коэффициенты M_n , $|n| \in \mathbb{N}$, называются весовыми числами. Они обобщают классические весовые числа для самосопряженного оператора Штурма – Лиувилля, являющиеся величинами скачков его спектральной функции. Как и для несамосопряженного оператора Штурма – Лиувилля [5], можно получить выражение чисел M_n через собственные и присоединенные функций пучка L .

С помощью асимптотик (6)–(8) и теоремы Адамара о разложении целой функции конечного порядка в бесконечное произведение доказываемое следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедливы представления*

$$\Delta(\rho) = \frac{\sin \omega \pi}{\omega} \exp\left(\left(\frac{1}{\omega} - \pi \operatorname{ctg} \omega \pi\right)\rho\right) \prod_{|n| \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n - \rho}{n + \omega} \exp\left(\frac{\rho}{n + \omega}\right), \quad \omega \notin \mathbb{Z}, \quad (9)$$

$$\Delta_1(\rho) = \cos \omega \pi \exp(\pi \rho \operatorname{tg} \omega \pi) \prod_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\rho_n^1 - \rho}{n - \frac{1}{2} + \omega} \exp\left(\frac{\rho}{n - \frac{1}{2} + \omega}\right), \quad \omega - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}. \quad (10)$$

(Случаи других значений ω вносят незначительные изменения.)

Заметим, что из асимптотики (8) величина ω определяется с точностью до целого слагаемого, и поэтому функции $\Delta(\rho)$, $\Delta_1(\rho)$ согласно (9), (10) определяются по своим нулям с точностью до знака. Однако функция Вейля $M(\rho)$ согласно (3), (9), (10) определяется по спектрам $\{\rho_n\}_{|n| \in \mathbb{N}}$, $\{\rho_n^1\}_{n \in \mathbb{Z}}$ однозначно. Таким образом, задание функции Вейля $M(\rho)$ равносильно заданию двух спектров $\{\rho_n\}_{|n| \in \mathbb{N}}$, $\{\rho_n^1\}_{n \in \mathbb{Z}}$ или спектральных данных $\{\rho_n, M_n\}_{|n| \in \mathbb{N}}$.

Обратная задача формулируется следующим образом: задана функция Вейля $M(\rho)$, найти L . Докажем теорему единственности решения обратной задачи. Для этого наряду с L будем рассматривать пучок $\tilde{L} = L(\tilde{q}_0(x), \tilde{q}_1(x))$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к L , то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к \tilde{L} , и $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$.

Теорема 3. *Если $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$, то $L = \tilde{L}$, то есть $q_1(x) \equiv \tilde{q}_1(x)$ и $q_0(x) = \tilde{q}_0(x)$ почти всюду на $[0, \pi]$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $P(x, \rho) = [P_{jk}(x, \rho)]_{j,k=1,2}$, определяемую равенством

$$P(x, \rho) \begin{bmatrix} \tilde{S}(x, \rho) & \tilde{\Psi}(x, \rho) \\ \tilde{S}'(x, \rho) & \tilde{\Psi}'(x, \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(x, \rho) & \Psi(x, \rho) \\ S'(x, \rho) & \Psi'(x, \rho) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Так как $\langle S(x, \rho), \Psi(x, \rho) \rangle = -1$, то

$$\left. \begin{aligned} P_{j1}(x, \rho) &= \Psi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{S}'(x, \rho) - S^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\Psi}'(x, \rho), \\ P_{j2}(x, \rho) &= S^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\Psi}(x, \rho) - \Psi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{S}(x, \rho). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Согласно (3)–(6) для любого фиксированного $\delta > 0$ будем иметь

$$P_{11}(x, \rho) = \cos \hat{Q}(x) + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad P_{12}(x, \rho) = -\frac{\sin \hat{Q}(x)}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \quad (13)$$

при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in G_\delta^\omega$ равномерно по $x \in [0, \pi]$. Кроме того, (3), (12) дают

$$P_{11}(x, \rho) = C(x, \rho) \tilde{S}'(x, \rho) - S(x, \rho) \tilde{C}'(x, \rho) + \hat{M}(\rho) S(x, \rho) \tilde{S}'(x, \rho),$$

$$P_{12}(x, \rho) = S(x, \rho) \tilde{C}(x, \rho) - C(x, \rho) \tilde{S}(x, \rho) - \hat{M}(\rho) S(x, \rho) \tilde{S}(x, \rho).$$

Поскольку $\hat{M}(\rho) = 0$, для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ функции $P_{1j}(x, \rho)$, $j = 1, 2$, являются целыми аналитическими по ρ , что вместе с (13) дает $P_{11}(x, \rho) \equiv \cos \hat{Q}(x)$, $P_{12}(x, \rho) \equiv 0$. Также имеем $\sin \hat{Q}(x) \equiv 0$. Следовательно, $\hat{Q}(x) \equiv \pi\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$. В силу непрерывности $\hat{Q}(x)$ число α не зависит от x , и поэтому $\hat{Q}(x) \equiv 0$, то есть $q_1(x) \equiv \tilde{q}_1(x)$. Получаем $P_{11}(x, \rho) \equiv 1$. Согласно (11) получаем $S(x, \rho) = \tilde{S}(x, \rho)$, и следовательно, $q_0(x) = \tilde{q}_0(x)$ почти всюду на $[0, \pi]$. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проекты МК-1701.2007.1 и НШ-2970.2008.1), РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003, 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
3. *Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш.* Определение оператора диффузии по спектральным данным // ДАН Азерб. ССР. 1981. Т.37, №2. С.19–23.
4. *Юрко В.А.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Матем. сб. 2000. Т.191, №10. С.137–160.
5. *Buterin S.A.* On inverse spectral problem for non-selfadjoint Sturm – Liouville operator on a finite interval // J. Math. Anal. Appl. 2007. V.335. Issue 1. 739–749.

УДК 512.7

А.М. Водолазов

АЛГЕБРЫ ЦЕЛОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Пусть k – поле p -адических чисел, O – кольцо целых p -адических. T – алгебраический k -тор. В работах [1-3] рассматривается алгебра

$$A = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O\},$$

где U_k – максимальная компактная подгруппа группы $T(k)$. Эта алгебра представляет интерес при исследовании целых моделей алгебраических торов. Она имеет бесконечный набор образующих. В [1] был поставлен ряд вопросов об изучение свойств этой алгебры. В частности, вопрос о нахождении образующих для разложимых торов $T = G_m^n$. Образующие для разложимых торов были найдены в работе [4].

Дальнейшее изучение алгебры A можно проводить в двух направлениях. Во-первых, переходить к более сложным классам алгебраических торов,

чем разложимые, т.е. изучать квазиразложимые, норменные и другие классы торов. Во-вторых, провести описание для торов малой размерности, т.е. одномерных, двухмерных и т.д.

В этой статье будут описаны образующие алгебры A для одномерных и двухмерных торов.

Имеется два одномерных тора $T = G_m$ и $T = R_{L/k}^{(1)}(G_m)$, где $L = k(\sqrt{d})$. Первый тор разложимый, и его образующие найдены в [4]. Рассмотрим второй тор, и пусть $(d, p) = 1$. Образующие алгебры A в этом случае сводятся к образующим алгебры

$$B = \{f \in k[x, y] \mid f(U) \subseteq O\},$$

$$\text{где } U = \{(x, y) \in O^2 \mid x^2 - dy^2 = 1\}. \quad (1)$$

Подробнее рассмотрим множество U . Обозначим

$$U_1 = \{(\pm x_1, \pm y_1), \dots, (\pm x_s, \pm y_s)\}$$

множество решений сравнения

$$x^2 - dy^2 \equiv 1 \pmod{p}. \quad (2)$$

Плюс и минус у x и y берутся всевозможными способами. Если пара (x_i, y_i) является решением сравнения (1), то для $y'_i = y_i + y_i^{(2)}p$ при любом $y_i^{(2)}$ из полной системы вычетов по модулю p существует единственное решение x'_i сравнения

$$(x'_i)^2 - d(y'_i)^2 \equiv 1 \pmod{p^2} \quad (3)$$

удовлетворяющее сравнению $(x'_i) \equiv x_i \pmod{p}$. Это следует из леммы Гензеля для сравнения (2). Далее, применяя лемму Гензеля, можно строить по решениям сравнения по модулю p^n решения по модулю p^{n+1} , в пределе получая элемент множества U .

Пусть U_n — множество решений сравнения (2) по модулю p^n , тогда мощности этих множеств u_n связаны соотношением $u_{n+1} = pu_n$. Обозначим $T_1 = U_1$, $T_n = U_n/U_{n-1}$ при $n \leq 2$, $|T_1| = s$, $T_n = \tilde{\varphi}(n) = |U_n| - |U_{n-1}| = \varphi(p^{n-1})s$ (φ — функция Эйлера).

Теорема. Пусть $u_n < m \leq u_{n+1}$, а

$$G_m(x) = \frac{1}{p^{sm}} \prod_{(x_i, y_i) \in U_n} (x - x_i) \prod_{(x_j, y_j) \in T_{n+1}, u_n < j \leq m} (x - x_j)$$

и

$$H_m(y) = \frac{1}{p^{sm}} \prod_{(x_i, y_i) \in U_n} (y - y_i) \prod_{(x_j, y_j) \in T_{n+1}, u_n < j \leq m} (y - y_j),$$

если $m = m_n \tilde{\varphi}(n) + \dots + m_1 \tilde{\varphi}(1) + m_0$, то $s_m = m_n \alpha_n + \dots + m_1 \alpha_1$, где $0 \leq m_i < p$, $\alpha_i = \frac{p^i - 1}{p - 1}$, при $0 < i \leq k$ $m_k \neq 0$, $0 \leq m_0 < s$, тогда

$$B = O[x, y, G_1(x), H_1(y), \dots, G_n(x), H_n(y), \dots] .$$

Доказательство. Для доказательства теоремы надо проверить, что многочлены $H_n(y)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $\deg H_m = m$,
- 2) $H_m \in B$,
- 3) $\frac{H_m(y_{m+1})}{p} \notin B$.

Сначала рассмотрим многочлены H_m при $m = u_n$, т.е. многочлены

$$H_{u_n}(y) = \frac{1}{p^{\alpha_n}} \prod_{y_i \in U_n} (y - y_i) ,$$

где $\alpha_n = \frac{p^n - 1}{p - 1}$. Проверим свойства 1)-3) для этих многочленов.

Так как y является решением уравнения (1), а y_i пробегает множество решений соответствующего сравнения по модулю p^n , то имеет место следующее разложение:

$$y = b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1} + b_n p^n + \dots \quad (0 < b_0 \leq p - 1, 0 \leq b_i \leq p - 1)$$

$$y_i = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} \quad (0 < a_0 \leq p - 1, 0 \leq a_i \leq p - 1)$$

Разность $(y - y_i)$ делится точно на p^l , если $b_i = a_i$ при $i = 0, \dots, l - 1$, а $b_l \neq a_l$. При фиксированном y , когда y_i пробегает множество решений сравнения по модулю p^n , количество $(y - y_i)$ в $\prod_{y_i \in U_n} (y - y_i)$, делящихся точно на p^l при $l < k$, равно $(p - 1)p^{k-(l+1)}$, так как для этих y_i

$$a_0 = b_0, \dots, a_{l-1} = b_{l-1},$$

а $a_l \neq b_l$ и a_j произвольные при $j \geq l + 2$. Заметим, что, если $a_j = b_j$, $j = 0, \dots, n - 1$, то $(y - y_i)$ делится на p^n только для одного y_i из U_n и может делиться на большую степень, если $b_k = \dots = b_{k+m} = 0$. В результате $\prod_{y_i \in U_n} (y - y_i)$ всегда делится на p^{α_n} , где

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n + (p-1)(n-1) + p(p-1)(n-2) + \dots + (p-1)p^{n-(l+1)}l + \dots + (p-1)p^{n-2}1 = \\ &= 1 + p + \dots + p^{n-1} = \frac{p^n - 1}{p - 1}. \end{aligned}$$

Для y' , у которого цифра b_n при p^n не равна нулю, $\prod_{y_i \in U_n} (y' - y_i)$ не делится на $p^{\alpha_n + 1}$. Тем самым свойства 1)-3) для многочленов H_{u_n} доказаны.

Для произвольного H_n проверка свойств 1)-3) аналогична, надо только упорядочить элементы множества T_n .

Так же доказываются свойства 1)-3) для многочленов $G_n(x)$. Из этого и следует утверждение теоремы.

Мы рассмотрели одномерные торы, разложимые и норменные для неразветвленных расширений. Существуют 9 различных неизоморфных двумерных торов. Часть из них является прямыми произведениями разложимых и норменных одномерных торов, что сводит изучение таких торов к полученным нами результатам.

Библиографический список

1. *Kunyuskii V.E., Moroz B.Z., Voskresenskii V.E.* On integral models of an algebraic torus // Max - Planck - Institut fur Mathematic. Preprint Series 2001 (12).
2. *Воскресенский В.Е., Фомина Т.В.* Целые структуры в алгебраических торах // Изв. РАН: Сер. матем. 1995. Т. 59, №5. С. 3-18.
3. *Popov S.Yu., Voskresenskii V.E.* Galois lattices and reduction of algebraic tori. // Communications of Algebra. №9, 2001. P. 213-223.
4. *Водолазов А.М.* Целые модели разложимых алгебраических торов бесконечного типа // Современные проблемы алгебры, теории чисел и функционального анализа: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, Вып. 1. 2003. С. 14-23.

УДК 515.51

И.Ю. Выгодчикова

ОБ УСЛОВНОЙ ЗАДАЧЕ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Рассматривается задача наилучшего равномерного приближения сегментной функции алгебраическим полиномом при наличии ограничения на значение полинома в одном узле сетки. Получен критерий оптимальности в форме, сравнимой с известным в теории приближений альтернансом П.Л. Чебышева.

Пусть n, N — целые числа, $n \geq 0, N \geq n + 1, T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$, $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$. На сетке T задана сегментная функция $\Phi(\cdot)$, $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, причем $y_{2,k} \geq y_{1,k}, k = \overline{0, N}$. Обозначим через $f_1(A, t_k) = p_n(A, t_k) - y_{1,k}$, $f_2(A, t_k) = y_{2,k} - p_n(A, t_k)$, $f(A, t_k) = \max\{f_1(A, t_k), f_2(A, t_k)\}$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0, N}} f(A, t_k) \longrightarrow \min_{A \in D}, \quad (1)$$

$$D = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : p_n(A, t_s) \leq \nu\}, \quad (2)$$

где $t_s \in T$, $\nu \in R$.

Доказано [1], что $M(\hat{A}) = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : \rho(A) \leq \rho(\hat{A})\}$ непусто, замкнуто и ограничено при любом $A \in \mathbb{R}^{n+1}$. Такими же свойствами обладает $M(\hat{A}) \cap D$ при $\hat{A} \in D$. Отсюда ввиду непрерывности целевой функции вытекает существование решения задачи (1), (2). Обозначим $\rho^* = \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \rho(A)$, $\mathfrak{R} = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\}$, $\rho^{**} = \min_{A \in D} \rho(A)$, $\mathfrak{R}(\nu) = \{A \in D : \rho(A) = \rho^{**}\}$.

Очевидно, чтобы множество $A^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ принадлежало множеству $\mathfrak{R}(\nu)$, необходимо выполнение одного из условий:

а) $\mathfrak{R} \cap D \neq \emptyset$, $A^* \in \mathfrak{R} \cap D$,

б) $\mathfrak{R} \cap D = \emptyset$, $p_n(A^*, t_s) = \nu$ и достаточно выполнения условия а).

Далее считаем $\mathfrak{R} \cap D = \emptyset$. В таком случае имеем

$$\rho(A) > \rho^* \geq m := \max_{k=0, N} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}, \quad \forall A \in \mathfrak{R}(\nu). \quad (3)$$

Приведем очевидный факт.

Лемма 1. Пусть $n \geq 1$, $x_0 < \dots < x_{n+1}$, $p_n(A, x_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$ и существуют $l \in \overline{1, n+1}$, $z \in (x_{l-1}; x_l)$ такие, что $(-1)^l p_n(A, z) < 0$, то $(-1)^i p_n(A, x) < 0$ при любом $x \in (x_{i-1}; x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{R} \cap D = \emptyset$. Вектор $A^* \in R^{n+1}$ принадлежит множеству $\mathfrak{R}(\nu)$ тогда и только тогда, когда

$$p_n(A^*, t_s) = \nu \quad (4)$$

и выполняется хотя бы одно из условий:

(I) $\rho(A^*) = \theta$, где $\theta = \max\{y_{2,s} - \nu, \nu - y_{1,s}\}$,

(II) $\exists n+1$ точки $\Delta := \{t_{q_0} < \dots < t_{q_n}\} \subset T \setminus \{t_s\}$, такие, что $\rho(A^*) = f_2(A^*, t_{q_k})$, если $z(t_{q_k})$ – четно, $\rho(A^*) = f_1(A^*, t_{q_k})$, если $z(t_{q_k})$ – нечетно, для $k = \overline{0, n}$, где через $z(t_{q_k})$ обозначено количество точек множества Δ , расположенных на интервале (t_s, t_{q_k}) при $t_s < t_{q_k}$ или (t_{q_k}, t_s) при $t_s > t_{q_k}$.

Доказательство. Необходимость. 1. При $n = 0$ утверждение очевидно, считаем $n \geq 1$. Пусть $A^* \in \mathfrak{R}(\nu)$ и условие (I) не выполняется. Тогда

$$\rho(A^*) > \theta. \quad (5)$$

Рассмотрим множество $S := \{t_k \in T \setminus \{t_s\} : f(A^*, t_k) = \rho(A^*)\}$. Ввиду (5) $S \neq \emptyset$. Из (3) вытекает, что $f_1(A^*, t) \neq f_2(A^*, t)$ для любого $t \in S$. Будем говорить, что в точке $t \in S$ действует функция f_j , если $f(A^*, t) = f_j(A^*, t)$. Разобьем множество S на следующие друг за другом подмножества $\{S_i\}_{i=1}^w$, на каждом из которых действует только одна из функций f_1 (f_2). Если допустить, что $w > n+1$, то мы получим условие, из которого вытекает, что

$A^* \in \mathfrak{R}$ [1]. Последнее противоречит предположению $\mathfrak{R} \cap D = \emptyset$. Следовательно,

$$w \leq n + 1. \quad (6)$$

2. Пусть $\bar{\theta}_i = \max_{t \in S_i} t$, $\underline{\theta}_i = \min_{t \in S_i} t$, $i = \overline{1, w}$. Покажем, что не существует индекса $r \in \overline{1, w - 1}$ такого, что

$$\bar{\theta}_r < t_s < \underline{\theta}_{r+1}. \quad (7)$$

Допустим, (7) выполняется. Для определенности считаем, что на множестве S_r действует функция f_1 . Возьмем $x_i \in (\bar{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$, $i = \overline{1, r - 1} \cup \overline{r + 1, w - 1}$, $x_r = t_s$ и, если $w < n + 1$, $x_i > t_N$, $i = \overline{w, n}$. Используя лемму 1, нетрудно показать, что для вектора A^ϵ , определяемого равенствами $p_n(A^\epsilon, x_i) = p_n(A^*, x_i)$, $i = \overline{1, n}$, $p_n(A^\epsilon, \bar{\theta}_r) = p_n(A^*, \bar{\theta}_r) - \epsilon$, при малом $\epsilon > 0$ будет выполняться неравенство

$$\rho(A^\epsilon) < \rho(A^*), \quad (8)$$

противоречащее оптимальности A^* .

3. Пусть $\underline{\theta}_r < t_s < \bar{\theta}_r$, при этом в точках множества S_r действует функция f_2 . Если $w = n + 1$, выбираем по одной точке из каждого множества разбиения, из них формируем множество Δ , и тем самым получаем (II). Пусть $w < n + 1$. Возьмем $x_i \in (\bar{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$, $i = \overline{1, r - 1}$, $x_r \in (\bar{\theta}_r; t_s)$, $x_{r+1} \in (t_s; \underline{\theta}_{r+1})$, $x_{i+1} \in (\bar{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$, $i = r + 1, w - 1$, и, если $w < n$, $x_i > t_N$, $i = \overline{w + 1, n}$. Далее берем малое $\epsilon > 0$ и решаем относительно A^ϵ систему $p_n(A^\epsilon, x_i) = p_n(A^*, x_i)$, $i = \overline{1, n}$, $p_n(A^\epsilon, t_s) = p_n(A^*, t_s) - \epsilon$, приходим к противоречию с (8).

4. Если $\underline{\theta}_r < t_s < \bar{\theta}_r$ и в точках множества S_r действует функция f_1 , берем $x_i \in (\bar{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$, $i = \overline{1, r - 1}$, $x_{i-1} \in (\bar{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$, $i = r + 1, w$. Ввиду (6) выбрано не более n точек. Далее, рассуждая как и в предыдущем пункте, приходим к противоречию с (8).

5. Случаи $t_s < t_{q_0}$ или $t_s > t_{q_n}$ рассматриваются аналогично п.3.

Достаточность. Имеем $\mathfrak{R} \cap D = \emptyset$ и выполняется (4).

1. Пусть справедливо условие (I) теоремы. Тогда для любого A , удовлетворяющего равенству $p_n(A, t_s) = \nu$, имеем $\rho(A) \geq f(A, t_s) = \theta = \rho(A^*)$, что свидетельствует об оптимальности A^* .

2. Пусть справедливо условие (II) теоремы. Рассмотрим сначала случай $t_{q_0} < t_s < t_{q_n}$. Тогда найдется l такое, что $t_{q_l} < t_s < t_{q_{l+1}}$, причем в точках t_{q_l} и $t_{q_{l+1}}$ действует функция f_2 . Допустим, что

$$A^{**} \in \mathfrak{R}(\nu), A^{**} \neq A^*. \quad (9)$$

Тогда $p_n(A^{**}, t_s) = \nu$, откуда, учитывая (4), получаем

$$p_n(A^{**} - A^*, t_s) = 0. \quad (10)$$

Если в точке t_{q_j} действует функция f_1 , то $p_n(A^{**}, t_{q_j}) < p_n(A^*, t_{q_j})$, если же в точке t_{q_j} действует f_2 , то $p_n(A^{**}, t_{q_j}) > p_n(A^*, t_{q_j})$. Тогда ввиду (II) $p_n(A^{**} - A^*, t)$ обращается в ноль на каждом интервале $(t_{q_j}; t_{q_{j+1}})$, $j = \overline{0, l-1}, j = \overline{l+1, n-1}$. Отсюда и из (10) вытекает, что полином $p_n(A^{**} - A^*, t)$ имеет n нулей. Следовательно, полином $\frac{d}{dt}p_n(A^* - A^{**}, t)$ имеет $n - 1$ нулей в точках, отличных от t_s .

3. Ввиду п.2 и (9) на интервале $(t_{q_l}; t_{q_{l+1}})$ полином $p_n(A^{**} - A^*, t)$ имеет нулевое значение лишь при $t = t_s$, в остальных точках значение полинома положительно, как и в точках t_{q_l} и $t_{q_{l+1}}$, где действует функция f_2 . Следовательно, в точке t_s этот полином достигает локального минимума, поэтому $\frac{d}{dt}p_n(A^* - A^{**}, t_s) = 0$. Учитывая предыдущий пункт доказательства, получаем, что полином $\frac{d}{dt}p_n(A^* - A^{**}, t)$ имеет n нулей, что противоречит (9).

4. При $t_s < t_{q_0}$ или $t_s > t_{q_n}$ из (10), (II) сразу получаем, что полином $p_n(A^{**} - A^*, t)$, имеет $n + 1$ нулей, что невозможно. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $T = \{0 < 1 < 2 < 3\}$, $\Phi(0) = [1; 2]$, $\Phi(1) = [1; 1]$, $\Phi(2) = [2; 3]$, $\Phi(3) = [0; 0]$, $n = 1$, $s = 1$, $\nu = 1$. Решение задачи (1), (2), $p_1(t) = 2/3 + 1/3t$, удовлетворяет условию (II). Решением безусловной задачи является полином $p_1(t) = 7/3 - 1/3t$.

Пример 2. Пусть $T = \{0 < 1 < 2\}$, $\Phi(0) = 2$, $\Phi(1) = 3$, $\Phi(2) = 2$, $n = 1$, $s = 1$, $\nu = 1$. Задача (1), (2) имеет бесконечно много решений $p_1(t) = 1 - a + at$, $a \in [-1; 1]$, выполняется условие (I). Решение безусловной задачи (Чебышева) $p_1(t) = 5/2 [2]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И.Ю.* О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 25-28.
2. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

УДК 517.984

А.В. Голубь

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} f(t)dt,$$

где $\theta(x) = \frac{2k-1}{n} - x$ при $x \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]$ и $k = \overline{1, n}$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, то есть $\theta(\theta(x)) \equiv x$ и имеет разрывы первого рода.

В данной статье, в отличие от работы [1], где рассматривается оператор

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} A(x, t)f(t)dt,$$

$\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in [0; \frac{1}{2}]$, $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in [\frac{3}{2}; 1]$, для получения теоремы равномерности не требуется предполагать существование A^{-1} .

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если $y = R_\lambda(A)f(x) = (E - \lambda A)^{-1}Af(x)$, то

$$v'(x) = \lambda Bv(x) + B\Phi(x), \quad (1)$$

$$P_0v(0) + P - 1v(1/n) = 0, \quad (2)$$

где $v(x) = (v_1(x), \dots, v_{2n}(x))^T$, $v_{2k-1}(x) = y(\frac{k-1}{n} + x)$, $v_{2k}(x) = y(\frac{k}{n} - x)$, $k = \overline{1, n}$; $\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_{2n}(x))^T$, $f_{2k-1}(x) = f(\frac{k-1}{n} + x)$, $f_{2k}(x) = f(\frac{k}{n} - x)$, $k = \overline{1, n}$; $x \in [0; \frac{1}{n}]$. Матрица B размерности $2n \times 2n$ имеет на главной диагонали блоки $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, остальные элементы — нули. Постоянные матрицы P_0 и P_1 размерности $2n \times 2n$ имеют компоненты $P_{0,1,2} = 1$, $P_{0,2k+1,2k-1} = 1$, $k = \overline{1, n-1}$, $P_{0,2k,2k} = 1$, $k = \overline{2, n}$; $P_{1,2,1} = 1$, $P_{1,2k-1,2k-1} = P_{1,2k,2k-2} = -1$, $k = \overline{2, n}$, остальные элементы — нули.

Теорема 2. Если $v(x)$ удовлетворяет системе (1), (2) и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A)$ существует и

$$R_\lambda(A)f(x) = \{v_{2k-1}(x - (k-1)/n), x \in [(k-1)/n; k/n], k = \overline{1, n}\}.$$

Теорема 3. Если $v(x)$ удовлетворяет теореме 1, то $h(x) = \Gamma^{-1}v(x)$ удовлетворяет системе

$$h'(x) = \lambda Dh(x) + \Gamma^{-1}B\Phi(x), \quad (3)$$

$$U(h) = P_0\Gamma h(0) + P_1\Gamma h(1/n), \quad (4)$$

где $D = \Gamma^{-1}B\Gamma = \text{diag}(i, -i, \dots, i, -i)$, Γ — неособая матрица, у которой на главной диагонали стоят блоки $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}$, остальные элементы равны нулю.

Лемма 1. Для решения $h(x, \lambda)$ задачи (3), (4) имеет место формула

$$h(x, \lambda) = -Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{1/n} U_x(g(x, t, \lambda))Q(t) dt + g_\lambda G(x),$$

где $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix}, \dots, e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix})$ — матрица размерности $2n \times 2n$; $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$; $U_x(\cdot)$ означает, что условие U по переменной x ; $g(x, t\lambda) = \text{diag}(g_1(x, t\lambda), \dots, g_{2n}(x, t\lambda))$, $g_{2k+1}(x, t\lambda) = -\varepsilon(t, x)e^{\lambda i(x-t)}$, $g_{2k}(x, t\lambda) = \varepsilon(t, x)e^{-\lambda i(x-t)}$, $k = \overline{1, n}$, здесь $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$ и $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$; $G(x) = \Gamma^{-1}B\Phi(x)$; $g_\lambda Q(x) = \int_0^{1/n} g(x, t, \lambda)Q(t) dt$.

Лемма 2. $\det \Delta(\lambda) = (ie^{\lambda i/n}, ie^{-\lambda i/n})^n$.

Будем считать далее, что $\text{Re } \lambda i \geq 0$. Обозначим через S_δ комплексную λ -плоскость с удаленными вместе с δ -окрестностью нулями $\det \Delta(\lambda)$ и собственных значений краевых задач

$$y'(x) = \pm i\lambda y(x), \quad y(0) = y(1/n).$$

Лемма 3. Если $\varepsilon \in (0; 1/2n)$, то для любой $f(x) \in L[0, 1]$ в области S_δ имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [h(x, \lambda) - u(x, \lambda)] d\lambda \right\|_{C[\varepsilon, \frac{1}{n}-\varepsilon]} = 0,$$

где $u(x, \lambda)$ удовлетворяет задаче $u'(x) = \lambda Du(x) + Q(x)$, $u(0) = u(\frac{1}{n})$.

Теорема «равносходимости». Для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$ и любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2n})$ имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \max_{\varepsilon + \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n} - \varepsilon} |S_r(x, f) - \sigma_r(x, f_k)| \right\} = 0,$$

где $S_r(x, f)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(x, f_k)$ — частичная сумма ряда Фурье по системе $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2nk\pi ix} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ функции $g(x)$ на отрезке $x \in [0, 1/n]$, $f_k(x) = f(\frac{k-1}{n} + x)$, $k = \overline{1, n}$, $x \in [0; \frac{1}{n}]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голубь А.В., Хромов А.П. Теорема равномерности разложений по собственным функциям интегральных операторов с инволюцией, допускающей разрывы // Изв. Саратов. ун-та. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 5–10.

УДК 517.51

Е.В. Гудошникова

КОНСТРУКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим функции $g(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющие следующим условиям:

(А) $g(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в круге $|z| < a$ и принимают положительные значения на $[0; a]$;

(В) на $[0; a]$ $x\psi'(x) < \psi(x)$;

(С) числа $\alpha_{0,n} = g(0)^n$ и $\alpha_{k,n} = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\left(g(z)^n \right)' \psi(z)^k \right]_{z=0}$, $k = \overline{1, \infty}$ неотрицательны.

В работе [1] было показано, что в этом случае функция

$$x(z) = \frac{z\psi(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}$$

монотонно возрастает, следовательно, существует обратная ей функция $z(x)$ и $z'(x) > 0$.

По теореме Лагранжа [2] имеет место представление

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\psi(x)} \right)^k \alpha_{k,1},$$

откуда легко видеть, что $g'(z) > 0$. Обозначим $v(x) = \frac{xg(x)}{z'(x)g'(x)}$.

Для $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим последовательность операторов:

$$L_n(f; x) = \frac{1}{g(z(x))^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \alpha_{k,n} \left[\frac{z(x)}{\psi(z(x))} \right]^k.$$

Отметим, что частными случаями этой последовательности являются операторы Бернштейна, Баскакова, Саса-Миракьяна, Каталана и многие другие.

Теорема. Для $f \in C[0; x(a)]$ $|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right)$.

Для $f \in C'[0; x(a)]$ $|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2\sqrt{\frac{v(x)}{n}} \cdot \omega\left(f'; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right)$.

Для $f \in C''[0; x(a)]$ $|L_n(f; x) - f(x) - \frac{v(x)}{2n}| \leq 3\frac{v(x)}{n} \cdot \omega\left(f''; \frac{v(x)}{n}\right)$.

Доказательство. Используя свойства модуля непрерывности, легко получить следующее утверждение:

(1) Для $\forall \delta > 0$ $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \cdot \omega(f; \delta) \leq \left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \cdot \omega(f; \delta)$.

В работе [1] было показано, что

(2) $L_n(1; x) = 1$;

(3) $L_n(t; x) = x$, следовательно, $L_n(t - x; x) = 0$;

(4) $L_n(t^2; x) = x^2 + \frac{v(x)}{n}$, следовательно, $L_n((t - x)^2; x) = \frac{v(x)}{n}$.

Непосредственным вычислением находится, что

(5) $L_n((t - x)^2; x) = \frac{3v^2(x)}{n^2} + \frac{v(x)v'^2(x) + v^2(x)v''(x)}{n^3}$.

С учетом (1) и (4) получаем

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq L_n\left(\left(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \cdot \omega(f; \delta); x\right) = \omega(f; \delta) \left(1 + \frac{v(x)}{\delta^2 n}\right),$$

откуда следует первое утверждение теоремы.

Применяя формулу Лагранжа, получим, что для некоторого ξ , лежащего между x и t ,

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \left|L_n\left(f'(x)(t-x); x\right)\right| + L_n\left(|f'(\xi) - f'(x)| \cdot |t-x|; x\right) \leq \\ &\leq L_n\left(\left(1 + \frac{|\xi-x|}{\delta}\right)|t-x|\omega(f'; \delta); x\right) \leq \omega(f'; \delta) \left[\sqrt{L_n\left((t-x)^2; x\right)} + \frac{v(x)}{\delta n}\right] = \\ &= 2\sqrt{\frac{v(x)}{n}} \cdot \omega\left(f'; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right) \end{aligned}$$

и второе утверждение теоремы так же доказано.

Применяя формулу Тейлора, получим, что для некоторого ξ , лежащего

между x и t ,

$$\begin{aligned}
 |L_n(f; x) - f(x) - \frac{v(x)}{2n}| &\leq \\
 &\leq \left| L_n\left(f'(x)(t-x); x\right) \right| + \frac{1}{2} L_n\left(|f''(\xi) - f''(x)| \cdot (t-x)^2; x\right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} L_n\left(\left(1 + \frac{(\xi-x)^2}{\delta^2}\right)(t-x)^2 \omega(f''; \delta); x\right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \omega(f''; \delta) \left[\frac{v(x)}{n} + \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{3v^2(x)}{n^2} + \frac{v(x)v'^2(x) + v^2(x)v''(x)}{n^3} \right) \right] = \\
 &= \frac{v(x)\omega(f'', \delta)}{2n} \left[4 + \frac{v''(x)}{n} + \frac{v'^2(x)}{nv(x)} \right] \leq 3 \frac{v(x)}{n} \cdot \omega\left(f''; \frac{v(x)}{n}\right)
 \end{aligned}$$

и доказано третье утверждение теоремы, из которого, в частности, следует, что порядок приближения рассмотренной последовательностью операторов не выше, чем $1/n^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гудошникова Е.В.* Конструкция линейных положительных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 20-22.
2. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. М., 1962. Т.1

УДК 517.518.82

С.И. Дудов, Е.В. Сорина

КРИТЕРИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ

Рассматривается задача наилучшего равномерного на отрезке приближения в метрике Хаусдорфа сегментной функции полосой постоянной ширины, осью которой является полином заданной степени. Средствами и в терминах выпуклого анализа получен критерий решения задачи, а также достаточные условия решения в форме, сравнимой с чебышевским альтернансом.

1. Пусть $F(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ — сегментная функция (с.ф.), заданная на отрезке $[c, d]$ непрерывными функциями $g_1(t) \leq g_2(t)$, а с.ф. $\Pi_{n,r}(A, t) = [P_n(A, t) - r, P_n(A, t) + r]$ задаёт полиномиальную полосу ширины $2r$, осью

которой является полином $P_n(A, t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$.

Рассмотрим задачу

$$\phi(A, r) \equiv \max_{t \in [c, d]} \max \{|g_1(t) - P_n(A, t) + r|, |g_2(t) - P_n(A, t) - r|\} \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}, r \geq 0}. \quad (1)$$

В записи целевой функции $\phi(A, r)$ экстремальной задачи (1) выражение $\max\{\cdot\}$ является расстоянием Хаусдорфа между сегментом $F(t)$ и сегментом $\Pi_{n,r}(A, t)$. Однако эта задача принципиально отличается от задачи приближения в метрике Хаусдорфа графика с.ф. графиком полинома, рассматриваемой в [1]. Если же в задаче (1) зафиксировать значение r и минимизировать $\phi(A, r)$ только по A , то в зависимости от этого значения её связь с некоторыми другими задачами по оценке с.ф. полиномиальной полосой отмечалась в [2]. Обозначим через

$$\rho(A) = \max_{t \in [c, d]} \max \{P_n(A, t) - g_1(t), g_2(t) - P_n(A, t)\},$$

$$\pi(A) = \max_{t \in [c, d]} \max \{g_1(t) - P_n(A, t), P_n(A, t) - g_2(t)\}.$$

Нетрудно показать, что

$$\phi(A, r) = \max \{\rho(A) - r, \pi(A) + r\}. \quad (2)$$

Будем также использовать следующие обозначения:

$$R_1^\rho(A) = \{t \in [c, d] : \rho(A) = P_n(A, t) - g_1(t) > g_2(t) - P_n(A, t)\},$$

$$R_2^\rho(A) = \{t \in [c, d] : \rho(A) = g_2(t) - P_n(A, t) > P_n(A, t) - g_1(t)\},$$

$$R_3^\rho(A) = \{t \in [c, d] : \rho(A) = P_n(A, t) - g_1(t) = g_2(t) - P_n(A, t)\},$$

$$R_1^\pi(A) = \{t \in [c, d] : \pi(A) = P_n(A, t) - g_2(t) > g_1(t) - P_n(A, t)\},$$

$$R_2^\pi(A) = \{t \in [c, d] : \pi(A) = g_1(t) - P_n(A, t) > P_n(A, t) - g_2(t)\},$$

$$R_3^\pi(A) = \{t \in [c, d] : \pi(A) = P_n(A, t) - g_2(t) = g_1(t) - P_n(A, t)\},$$

$R_1(A) = R_1^\rho(A) \cup R_1^\pi(A)$, $R_2(A) = R_2^\rho(A) \cup R_2^\pi(A)$, coB — выпуклая оболочка множества B , $O_{n+1} = (0, \dots, 0) \in R^{n+1}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Очевидно, функции $\rho(A)$ и $\pi(A)$ являются выпуклыми на R^{n+1} . Используя субдифференциальное исчисление выпуклых функций (см., напр., [3]), нетрудно получить формулы субдифференциалов этих функций

$$\partial\rho(A)(\pi(A)) = co \left\{ \begin{array}{ll} (1, t, \dots, t^n), & t \in R_1^{\rho(\pi)}(A); \\ -(1, t, \dots, t^n), & t \in R_2^{\rho(\pi)}(A); \\ [-(1, t, \dots, t^n), (1, t, \dots, t^n)], & t \in R_3^{\rho(\pi)}(A). \end{array} \right\} \quad (3)$$

2. Приведём критерий решения задачи (1).

Теорема 1. *Для того чтобы пара (A^*, r^*) была решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы*

$$O_{n+1} \in \partial\rho(A^*) + \partial\pi(A^*), \quad r^* = (\rho(A^*) - \pi(A^*))/2. \quad (4)$$

Доказательство. Поскольку $\rho(A) \geq \pi(A)$, то для фиксированного вектора коэффициентов A минимальное значение функции $\phi(A, r)$ по $r \geq 0$ достигается при $r = (\rho(A) - \pi(A))/2$. Подставляя это значение в (2), приходим к выводу, что задача (1) эквивалентна задаче

$$f(A) \equiv \rho(A) + \pi(A) \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (5)$$

В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [3, с. 142], критерием решения задачи (5) является выполнение включения $O_{n+1} \in \partial f(A^*)$. Осталось заметить, что по теореме Моро–Рокафеллара [3, с.78] субдифференциал суммы двух выпуклых конечных функций является суммой субдифференциалов слагаемых. Теорема доказана.

Теперь покажем, что используя формулы (3), можно получить с помощью теоремы 1 достаточные условия решения конструктивного вида, сравнимого с известным в теории приближения явлением альтернанса.

Теорема 2. *Если для вектора A^* найдутся $n + 2$ пары точек*

$$t_1^{(1)} = t_1^{(2)} < t_2^{(1)} \leq t_2^{(2)} < \dots < t_{n+1}^{(1)} \leq t_{n+1}^{(2)} < t_{n+2}^{(1)} = t_{n+2}^{(2)} \quad (6)$$

таких, что если $t_i^{(2)} \in R_1^\rho(A^)(R_2^\rho(A^*), R_1^\pi(A^*), R_2^\pi(A^*))$, то соответственно $t_{i+1}^{(1)} \in R_2^\pi(A^*)(R_1^\pi(A^*), R_2^\rho(A^*), R_1^\rho(A^*))$ и при этом либо $\{t_i^{(1)}, t_i^{(2)}\} \subset R_1(A^*)$, либо $\{t_i^{(1)}, t_i^{(2)}\} \subset R_2(A^*)$. Тогда вектор A^* и $r^* = (\rho(A^*) - \pi(A^*))/2$ являются решением задачи (1).*

Доказательство. В силу теоремы 1 нам достаточно доказать включение

$$O_{n+1} \in \partial\rho(A^*) + \partial\pi(A^*). \quad (7)$$

Если предположить противное, то по теореме отделимости ([3, с. 17]) найдётся вектор $A \in R^{n+1}$, $A \neq O_{n+1}$, такой, что

$$\langle A, v \rangle > \langle A, w \rangle, \quad \forall v \in \partial\rho(A^*), w \in \partial\pi(A^*). \quad (8)$$

В соответствии с формулой (3) мы можем подставлять в (8) в качестве $v(w)$ элементы вида $(1, t, \dots, t^n)$, если $t \in R_1^\rho(A^*)(R_1^\pi(A^*))$, или

$-(1, t, \dots, t^n)$, если $t \in R_2^\rho(A^*)(R_2^\pi(A^*))$. Используя таким образом точки из (6), мы приходим к выводу, что если $P_n(A, t_i^{(2)}) < (>) P_n(A, t_{i+1}^{(1)})$, то $P_n(A, t_{i+1}^{(2)}) > (<) P_n(A, t_{i+2}^{(1)})$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно, производная полинома $P_n(A, t)$ обязана иметь, по крайней мере, n нулей. Это означает, что $A = O_{n+1}$ и противоречит (8). Теорема доказана.

Примеры показывают, что решение задачи (1) может удовлетворять условиям теоремы 2, а может и не удовлетворять, то есть оно не является необходимым условием решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения. София, 1979. 372 с.
2. Сорина Е.В. О наилучшем приближении многозначного отображения полиномиальной полосой // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й Саратов. зимней шк. Саратов, 2006. С. 164-165.
3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

УДК 517.984

М.Ю. Игнатъев

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 4-ГО ПОРЯДКА ПО НУЛЯМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор L , порожденный дифференциальным выражением

$$\ell y = y^{(4)} + (p(x)y')' + q(x)y$$

с вещественными коэффициентами $p(x) \in C^2[0, 1]$, $q(x) \in C[0, 1]$ и краевыми условиями

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

Пусть $\{\lambda_n\}$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$, — собственные значения оператора L , занумерованные таким образом, что при $n \rightarrow \infty$ $\lambda_n = (n\pi + O(1))^4$ и пусть $y_n(x)$ — соответствующие собственные функции. Обозначим через $X_L^{(n)}$ множество нулей функции $y_n(x)$. Из асимптотик собственных функций [1] следует, что, начиная с некоторого номера N , множества $X_L^{(n)}$ непусты и их элементы $x_j^{(n)}$ могут быть занумерованы так, что справедлива асимптотика $x_j^{(n)} = jn^{-1} + o(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $c_1n < j < c_2n$ для любых фиксированных $0 < c_1 < c_2 < 1$. Обозначим $X_L = \bigcup_{n=\overline{N, \infty}} X_L^{(n)}$. Из асимптотики

$x_j^{(n)}$ следует, что X_L всюду плотно на отрезке $[0, 1]$. Пусть X — произвольное всюду плотное на $[0, 1]$ подмножество X_L . Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. По заданному множеству X и числам $\omega_\nu, \nu = \overline{0, 3}$, таким, что $\lambda_n = \left(n\pi + \sum_{\nu=0}^3 \omega_\nu n^{-\nu} + o(n^{-3}) \right)^4$, найти коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$.

Обозначим $\tilde{\rho}_n = n\pi + \sum_{\nu=0}^3 \omega_\nu n^{-\nu}$, $\theta_j^{(n)} = \tilde{\rho}_n x_j^{(n)} - j\pi$. Основной результат статьи содержит следующая теорема.

Теорема 1. Пусть x — произвольная точка из интервала $(0, 1)$ и пусть последовательность $x_k = x_{j_k}^{(n_k)} \in X$ такова, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. Обозначим $\theta_k = \theta_{j_k}^{(n_k)}$. Тогда существуют пределы $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_{n_k} \theta_k = \alpha(x)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{\rho}_{n_k}^3 \theta_k - \tilde{\rho}_{n_k}^2 \alpha(x_k)) = \beta(x)$. Далее, для каждого $x \in (0, 1)$

$$p(x) = -4\alpha'(x),$$

$$q(x) = -4\beta'(x) - 2\alpha^2(x)\alpha'(x) + 2(\alpha'(x))^2 + 4\alpha(x)\alpha'(x) - \alpha'''(x) - 4\alpha(x)\alpha''(x).$$

Из теоремы 1 следует единственность решения задачи 1, а также конструктивная процедура ее решения, состоящая в последовательном нахождении функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, а затем — коэффициентов $p(x)$, $q(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

УДК 517.51

Т.В. Иофина

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ И ИХ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛИПШИЦА

Пусть $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \leq p_i \leq N$, $m_0 = 1$, $m_n = p_1 p_2 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение $x = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{m_n}$, где $x_n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq x_n < p_n$. Для таких $x, y \in [0, 1)$ определим разность $z = x \ominus y$, где $z = \sum_{n=1}^\infty \frac{z_n}{m_n}$, $z_n = x_n - y_n \pmod{p_n}$. Каждое целое неотрицательное k представимо в виде $k = \sum_{n=1}^\infty m_{n-1} k_n$, где $k_n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq k_n <$

p_n . Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ определим $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right)$. Известно, что система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, называемая системой Виленкина, ортонормирована и полна в $L[0, 1)$. Если $f \in L[0, 1)$, то $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_k(t)} dt$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \chi_k(x)$, $\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n S_k(f)(x)/n$, $V_n(f)(x) = 2\sigma_{2n}(f)(x) - \sigma_n(f)(x)$, $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$. Для $f, g \in L^1[0, 1)$ свертка определяется равенством $f * g(x) = \int_0^1 f(x \ominus t)g(t) dt$. Далее рассматриваются пространства $L^p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$. В случае $p = \infty$ вместо $L^\infty[0, 1)$ рассматриваем пространство $C^*[0, 1)$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x < 1} |f(x)|$, состоящее из функций f , для которых $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x) - f(x \ominus h)\|_\infty = 0$. Для $f \in L^p[0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$ введем $\omega^*(f, \delta)_p = \sup_{0 < h < \delta} \|f(x) - f(x \ominus h)\|_p$ и $\|f\|_{p, \alpha} = \|f\|_p + \sup_{0 < \delta < 1} \frac{\omega^*(f, \delta)_p}{\delta^\alpha}$. Если $\|f\|_{p, \alpha} < \infty$, то f принадлежит пространству Липшица $Lip^*(\alpha, p)$.

Изучение приближений суммами Фурье и их линейными средними в классах $Lip(\alpha, p)$ 2π -периодических функций началось с работы Прессдорфа [1] и продолжалось в статьях Лейндлера, Тотика, Мохapatры, Чандры и др. Целью статьи является получение подобных результатов для приближений по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Ранее подобные вопросы не рассматривались. Наша теорема 1 является аналогом теоремы 4 из [1], а теорема 2 — аналогом теоремы из [2].

Лемма. Пусть $F_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{D_k(x)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Для всех $x \in [0, 1)$ верно неравенство $|nF_n(x)| \leq Cx^{-2}$. Кроме того, $\|F_n\|_1$ ограничены константой C_1 .

Вторая часть леммы установлена в [3, с. 139], доказательство первой будет опубликовано в другой работе.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in Lip^*(\alpha, p)$ и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega^*(f, \delta)_p}{\delta^\alpha} = 0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(f) - f\|_{p, \alpha} = 0.$$

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из [3, с.139] следует, что при условиях теоремы справедлива оценка $\|\rho_n\|_p := \|f - \sigma_n(f)\|_p < \varepsilon$ при $n > n_1$. Найдем m_k , такое что при $h \in [0, m_k^{-1})$ справедливо неравенство $\|f(x) - f(x \ominus h)\|_p \leq \varepsilon m_k^{-\alpha}$. При этих h , применяя обобщенное неравенство Минковского,

оценим разность

$$\begin{aligned} \|\rho_n(x) - \rho_n(x \ominus h)\|_p &\leq \left\| \int_0^1 (f(x \ominus t) - f(x \ominus h \ominus t)) F_n(t) dt \right\|_p + \\ &+ \left\| \int_0^1 (f(x) - f(x \ominus h)) F_n(t) dt \right\|_p \leq \int_0^1 \|f(x \ominus t) - f(x \ominus h \ominus t)\|_p |F_n(t)| dt + \\ &+ \int_0^1 \|f(x) - f(x \ominus h)\|_p |F_n(t)| dt = 2\|f(x) - f(x \ominus h)\|_p \|F_n\|_1 \leq 2C_1 \varepsilon m_k^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Пусть $h \in [m_{i+1}^{-1}, m_i^{-1})$, $i \geq k$. Тогда

$$\|\rho_n(x) - \rho_n(x \ominus h)\|_p \leq 2C_1 \varepsilon m_i^{-\alpha} \leq 2C_1 \varepsilon (N/m_{i+1})^\alpha \leq 2C_1 N^\alpha \varepsilon h^\alpha.$$

Пусть теперь $h \in [m_k^{-1}, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\rho_n(x) - \rho_n(x \ominus h)\|_p &\leq 2 \int_0^1 \|f(x) - f(x \ominus t)\|_p |F_n(t)| dt = \\ &= 2 \int_0^{1/m_k} \|f(x) - f(x \ominus t)\|_p |F_n(t)| dt + 2 \int_{1/m_k}^1 \|f(x) - f(x \ominus t)\|_p |F_n(t)| dt = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Имеем $I_1 \leq 2\varepsilon m_k^{-\alpha} \int_0^1 |F_n(t)| dt \leq 2C_1 \varepsilon h^\alpha$. С другой стороны, по лемме

$$I_2 \leq \int_{1/m_k}^1 4\|f\|_p \frac{C}{nx^2} dx \leq 4\|f\|_p m_k C/n.$$

При достаточно больших n ($n > n_0$) получаем $I_2 < \varepsilon m_k^{-\alpha} < \varepsilon h^\alpha$. В результате $I_1 + I_2 < (2C_1 + 1)\varepsilon h^\alpha$ при $n > n_0$. Таким образом, учитывая, что $\|\rho_n\|_p < \varepsilon$ при $n > n_1$ получаем при $n > \max(n_0, n_1)$

$$\|\rho_n\|_{p,\alpha} \leq \varepsilon + \max(2C_1 N^\alpha, 2C_1 + 1)\varepsilon \leq C_2 \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n\|_{p,\alpha} = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $0 < \beta < \alpha$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in Lip^*(\alpha, p)$ и $A_n(f) = K_n * f$, где $K_n \in L[0, 1)$. Тогда

$$\|A_n(f) - f\|_{p,\beta} = O(n^\beta \|A_n(f) - f\|_p + n^{\beta-\alpha} (1 + \|A_n\|_{L^p \rightarrow L^p})).$$

Следствие 1. Пусть $0 < \beta < \alpha$, $f \in Lip^*(\alpha, p)$. Тогда

1) $\|S_n(f) - f\|_{p,\beta} = O(n^{\beta-\alpha} \|D_n\|_1)$ при $p = 1$ или $p = \infty$;

2) $\|S_n(f) - f\|_{p,\beta} = O(n^{\beta-\alpha})$ при $1 < p < \infty$.

Следствие 2. Пусть $0 < \beta < \alpha$, $f \in Lip^*(\alpha, p)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда $\|V_n(f) - f\|_{p,\beta} = O(n^{\beta-\alpha})$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Prössdorf S. Zur Konvergenz der Fourierreihen hölderstetiger Funktionen // Math. Nachr. 1975. V. 69. P. 7-14

2. Leindler L., Meir A., Totik V. On approximation of continuous functions in Lipschitz norms // Acta Math. Hung. 1985. V. 45, №3-4. P. 441-443.

3. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981.

УДК 513.6

И.А. Кляева

ГОМОЛОГИИ ПРИВЕДЕННЫХ ТОЛЕРАНТНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИНГУЛЯРНЫХ ЦЕПЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ВЫРОЖДЕННОСТИ

При построении спектральной последовательности групп гомологий толерантных расслоений возникла проблема сопоставления обычного для алгебраической топологии определения вырожденности [1] и определения вырожденности, используемого в толерантном случае [2]. В статье рассматривается вопрос о совпадении с точностью до изоморфизма групп гомологий приведенных толерантных кубических сингулярных (ТКС) цепей различной вырожденности.

Для $n \in \mathbb{N}$ толерантное пространство $\left(\times_{i=1}^n I_{m^{(i)}}, \times_{i=1}^n \iota_{m^{(i)}} \right)$ [3, 4] будем называть n -мерным толерантным кубом размера $(m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(n)})$.

Определение 1. Пусть (X, τ) — произвольное толерантное пространство, а $n, m^{(1)}, \dots, m^{(n)}$ — произвольные натуральные числа. Тогда любое толерантное отображение $u : \left(\times_{i=1}^n I_{m^{(i)}}, \times_{i=1}^n \iota_{m^{(i)}} \right) \longrightarrow (X, \tau)$ будем называть n -мерным толерантным сингулярным кубом пространства (X, τ) .

Для $n \geq 0$ обозначим через $Q_n(X)$ абелеву группу, свободно порожденную над \mathbb{Z} всеми n -мерными толерантными сингулярными кубами пространства (X, τ) , и положим $Q_n(X) = 0$ для целых $n < 0$. Элементы группы $Q_n(X)$ будем называть n -мерными толерантными кубическими сингулярными цепями.

Определение 2. Пусть t — произвольное натуральное число. Толерантный сингулярный куб $u : \left(\prod_{i=1}^n I_{m^{(i)}}, \prod_{i=1}^n \iota_{m^{(i)}} \right) \longrightarrow (X, \tau)$ размерности n будем называть t -вырожденным, если u вырожден хотя бы по одному из t последних аргументов, то есть

$$(\forall j, n-t < j \leq n) \quad (\forall k^{(i)} = \overline{0, m^{(i)}}, i = \overline{1, n})$$

$$u \left(\frac{k^{(1)}}{m^{(1)}}, \dots, \frac{k^{(j)}}{m^{(j)}}, \dots, \frac{k^{(n)}}{m^{(n)}} \right) = d_j^0 u \left(\frac{k^{(1)}}{m^{(1)}}, \dots, \widehat{\frac{k^{(j)}}{m^{(j)}}}, \dots, \frac{k^{(n)}}{m^{(n)}} \right). \quad (1)$$

Обозначим через $D_n^{(t)}(X)$ подгруппу в группе ТКС цепей $Q_n(X)$, порожденную n -мерными t -вырожденными ТС кубами. Очевидны следующие свойства:

$$(\forall t \geq n) \quad D_n^{(t)}(X) = D_n(X), \quad (2)$$

$$(\forall n) \quad (\forall t) \quad D_n^{(t)}(X) \subset D_n^{(t+1)}(X) \subset D_n(X), \quad (3)$$

$$(\forall n \geq 1) \quad (\forall t) \quad \partial_n(D_n^{(t)}(X)) \subset D_{n-1}^{(t)}(X). \quad (4)$$

Из (3) следует, что для каждого $t \in \mathbb{N}$ имеется цепной комплекс

$$C^{(t)}(X) = \left\{ C_n^{(t)}(X) = Q_n(X)/D_n^{(t)}(X), \partial_n \right\}_{n \geq 0}$$

приведенных ТКС цепей, чьи группы циклов, границ и гомологий обозначим:

$$Z_n^{(t)}(X) = \text{Ker} \partial_n, B_n^{(t)}(X) = \text{Im} \partial_{n+1},$$

$$H_n^{(t)}(X) = Z_n^{(t)}(X)/B_n^{(t)}(X) = H_n(C^{(t)}(X)).$$

Таким образом, имеем для каждого $t \in \mathbb{N}$ цепной $C^{(t)}$ и гомологический $H^{(t)}$ функторы на категории толерантных пространств T_0 [4].

Теорема. Для каждого $t \in \mathbb{N}$ имеется естественный по (X, τ) изоморфизм

$$\varphi_* = \left\{ \varphi_{n*} : H_n^{(t)}(X) \cong H_n^{(t+1)}(X) \right\}_{n \geq 0}$$

функторов $H^{(t)}$ и $H^{(t+1)}$.

Доказательство. Из свойств (3), (4) следует, что существует сюръективный цепной гомоморфизм:

$$\varphi = \left\{ \varphi_n : C_n^{(t)}(X) \rightarrow C_n^{(t+1)}(X) \right\}_{n \geq 0}, \quad \varphi_n(c + D_n^{(t)}(X)) = c + D_n^{(t+1)}(X).$$

Очевидно, его ядро $\text{Ker} \varphi \subset Q(X)/D^{(t)}(X) = C^{(t)}(X)$. Следовательно, имеется короткая точная последовательность цепных комплексов, естественно зависящая от пространства (X, τ) :

$$0 \rightarrow D^{(t+1)}(X)/D^{(t)}(X) \xrightarrow{i} C^{(t)}(X) \xrightarrow{\varphi} C^{(t+1)}(X) \rightarrow 0.$$

Эта последовательность индуцирует естественную по (X, τ) точную длинную гомологическую последовательность:

$$\begin{array}{ccc} H(D^{(t+1)}(X)/D^{(t)}(X)) & \xrightarrow{i_*} & H(C^{(t)}(X)) \\ & \searrow \delta & \swarrow \varphi_* \\ & H(C^{(t+1)}(X)) & \end{array}$$

Нетрудно показать, что

$$H(D^{(t+1)}(X)/D^{(t)}(X)) = 0.$$

Поэтому точность длинной последовательности означает выполнение равенств

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi_* &= \text{Im } i_* = 0, \\ \text{Im } \varphi_* &= \text{Ker } \delta = H(C^{(t)}(X)). \end{aligned}$$

В этом случае имеем естественный по (X, τ) изоморфизм:

$$\varphi_* : H(C^{(t)}(X)) \cong H(C^{(t+1)}(X)).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
2. *Небалухев С.И., Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестн. Самар. ун-та. Самара: Самарский университет, 2007. Вып. 7 (57). С. 134-151.
3. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception. The Topology of 3-Manifolds, M.K. Ford(ed). 1962.
4. *Небалухев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006.

УДК 517.984

В.В. Корнев

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Пусть $\theta(x)$ — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция, трижды непрерывно дифференцируемая на $(0, 1)$, $\theta'(x) < 0$, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$ и $\theta(\theta(x)) \equiv x$. Предположим также, что в некоторой окрестности нуля $\theta'(x) = -x^\alpha$, $\alpha > 0$. Это условие делает $\theta(x)$ недифференцируемой в точке $x = 1$.

Определим с помощью инволюции $\theta(x)$ дифференциальный оператор

$$Ly = \frac{d}{dx}y(\theta(x)),$$

область определения которого состоит из абсолютно непрерывных функций $y(x)$, удовлетворяющих условию $y(1) = 0$, и таких, что $y'(\theta(x))\theta'(x) \in L[0, 1]$.

Для разложений по собственным функциям оператора L справедлив следующий достаточный признак их равномерной сходимости, который можно рассматривать как аналог известного признака Жордана из теории тригонометрических рядов Фурье.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $f(x)(1-x)^{-\alpha(1+\alpha)}$ суммируемы на $[0, 1]$, а на отрезке $[a, b] \subset (0, 1)$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Тогда на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ ряд Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям оператора L равномерно сходится к $f(x)$.

Доказательство. Обозначим через $\theta_1(x)$ произвольную функцию со следующими свойствами: $\theta_1(x) \in C^3[0, 1]$, $\theta_1'(x) < 0$, $\theta_1(0) = 1$, $\theta_1(1) = 0$, $\theta_1(\theta_1(x)) \equiv x$ и $\theta_1(x) \equiv \theta(x)$ при $\varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, $\varepsilon = \min\{a, 1 - b\}$.

Положим $\beta = \int_0^1 \sqrt{-\theta_1'(t)} dt$ и введем в рассмотрение функцию $\varphi(\xi) : [0, \beta] \rightarrow [0, 1]$, которая удовлетворяет соотношению $\int_0^{\varphi(\xi)} \sqrt{-\theta_1'(t)} dt \equiv \xi$.

Нетрудно показать, что $\varphi(\xi)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi'(\xi) > 0$.

Рассмотрим теперь на отрезке $[0, \beta]$ функцию $f_1(\xi) = f(\varphi(\xi))$. Из свойств функции $\varphi(\xi)$ следует, что $f_1(\xi)$ суммируема на $[0, \beta]$, непрерывна на $[\xi_a, \xi_b] = [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)]$ и имеет на этом отрезке ограниченную вариацию. Тогда по теореме Жордана [1, с. 121] на любом отрезке $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (\xi_a, \xi_b)$ справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\sigma_r(f_1, \xi) - f_1(\xi)\|_{C[\tilde{a}, \tilde{b}]} = 0,$$

где $\sigma_r(f_1, \xi)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f_1(\xi)$ по системе $\{\exp 2k\beta^{-1}\pi i\xi\}_{-\infty}^{\infty}$ по тем k , для которых $|2k\pi| < \beta r$. Из этого соотношения следует, что на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ имеет место следующая сходимость:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \sigma_r(f_1, \xi)|_{\xi=\varphi^{-1}(x)} - f(x) \right\|_{C[a_1, b_1]} = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь оператор L^{-1} , обратный к оператору L . Он действует в пространстве $L[0, 1]$ по формуле

$$L^{-1}f = \int_0^{\theta(x)} f(t) dt. \quad (2)$$

Для интегрального оператора (2) в работе [2] была получена теорема равносходимости, согласно которой

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_r(f_1, \xi)|_{\xi=\varphi^{-1}(x)}\|_{C[a_1, b_1]} = 0, \quad (3)$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным функциям оператора (2), соответствующая характеристическим значениям из круга $|\lambda| < r$. Так как собственные функции операторов L и L^{-1} совпадают, то из соотношений (1) и (3) следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1) и РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
2. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О сходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией, имеющей особенность // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Саратов. зимней шк., посвящ. памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов, 28 янв. - 4 февр. 2008. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. С. 94-95.

УДК 517.984

О.А. Королёва

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ С ЯДРОМ, РАЗРЫВНЫМ НА ЛОМАННЫХ ЛИНИЯХ

Равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегральных операторов с ядрами, разрывными на ломаных линиях, впервые ввел в рассмотрение А.П. Хромов [1]. В статье изучается один частный случай такого оператора.

1. Резольвента оператора

Рассмотрим интегральный оператор

$$y(x) = Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt, \quad (1)$$

ядро которого $A(x, t)$ имеет вид

$$A(x, t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha_1, & 0 \leq t \leq 1/2 - x \\ \alpha_5, & 1/2 - x \leq t \leq 1/2 + x \\ \alpha_2, & 1/2 + x \leq t \leq 1 \end{bmatrix}, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ \begin{bmatrix} \alpha_3, & 0 \leq t \leq -1/2 + x \\ \alpha_5, & -1/2 + x \leq t \leq 3/2 - x \\ \alpha_4, & 3/2 - x \leq t \leq 1 \end{bmatrix}, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Лемма 1. Если $y(x) = R_\lambda(A)f(x)$, то

$$v'(x) = \lambda Dv(x) + Dm(x), \quad x \in [0, 1/2], \quad (3)$$

$$P_0v(0) + P_1v(1/2) = 0, \quad (4)$$

где $v(x) = (v_{11}(x), v_{12}(x), v_{21}(x), v_{22}(x))^\top = (y(x), y(1/2 + x), y(1/2 - x), y(1 - x))^\top$,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ c & 0 & 0 & d \\ -b & 0 & 0 & -a \\ 0 & -d & -c & 0 \end{pmatrix}$$

$a = \alpha_5 - \alpha_2$, $b = \alpha_5 - \alpha_1$, $c = \alpha_3 - \alpha_5$, $d = \alpha_4 - \alpha_5$,

$$m(x) = (f(x), f(1/2 + x), f(1/2 - x), f(1 - x))^\top, \quad P_0 = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -B \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

A и B являются решением системы $\begin{cases} \alpha_1x + \alpha_3y = \alpha_5 \\ \alpha_2x + \alpha_4y = \alpha_5 \end{cases}$ при условии, что

$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{pmatrix} \neq 0$. Обратно, если $v(x) = (v_{11}(x), v_{12}(x), v_{21}(x), v_{22}(x))^\top$ удовлетворяет (3), (4) и соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение, и матрица $Q_1 + Q_2$ невырождена, где

$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -A & 0 \end{pmatrix}$, а $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -B \end{pmatrix}$ то R_λ существует и

$$R_\lambda = \begin{cases} v_{11}(x), & 0 \leq x \leq 1/2, \\ v_{12}(x - 1/2), & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Лемма 2. При условии $d \neq b$, $(d + b)^2 - 4ac \neq 0$ матрица D подобна диагональной $D_1 = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, причем $\omega_3 = -\omega_2$, $\omega_4 = -\omega_1$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

2. Теорема равносходимости

Преобразование $v = \Gamma h$, где $\Gamma^{-1}D\Gamma = D_1$, приводит систему (3), (4) к виду

$$h'(x) = \lambda D_1 h(x) + \Gamma^{-1} D m(x), \quad (5)$$

$$U(h) = P_0 \Gamma h(0) + P_1 \Gamma h(1/2) = 0, \quad (6)$$

Обозначим через $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$, где $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda\omega_1 x}, e^{\lambda\omega_2 x}, e^{\lambda\omega_3 x}, e^{\lambda\omega_4 x})$. Зафиксируем $\arg \lambda$. При этом будем считать, что

$$\text{Re} \lambda \omega_1 > \text{Re} \lambda \omega_2 > 0.$$

Потребуем, чтобы

$$\det \Delta_{11} = \det \begin{pmatrix} \gamma_{11} - B\gamma_{21} & \gamma_{12} - B\gamma_{22} & -A\gamma_{13} & -A\gamma_{14} \\ -A\gamma_{31} & -A\gamma_{32} & \gamma_{33} - B\gamma_{43} & \gamma_{43} - B\gamma_{44} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} \\ -\gamma_{41} & -\gamma_{42} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{pmatrix} \neq 0,$$

где γ_{ij} — элементы матрицы Γ .

Удалим все нули $\det \Delta(\lambda)$ (а они и являются собственными значениями краевой задачи (5), (6)) вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ , тогда в получившейся области S_δ имеет место оценка

$$\det \Delta(\lambda) \geq c \cdot |e^{\lambda/2(\omega_1 + \omega_2)}|,$$

где $c > 0$ и зависит только от δ .

Рассмотрим краевую задачу:

$$u'(x) = \lambda D_1 u(x) + \Gamma^{-1} D m(x),$$

$$U_0(u) = u(0) - u(1/2) = 0.$$

Теперь из S_δ дополнительно удалены δ -окрестности нулей $\det \Delta_0(\lambda)$, $\Delta_0(\lambda) = U_0(Y(x, \lambda))$.

Справедлива следующая

Лемма 3. Если $\varepsilon \in (0, 1/4)$, то для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} |h(x, \lambda) - u(x, \lambda)| d\lambda \right\|_{[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]} = 0,$$

(окрестности $|\lambda| = r$ целиком находятся в S_δ).

Теорема. При выполнении вышеуказанных условий для любой $f(x) \in L[0, 1]$ имеют место соотношения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sum_{j=1}^4 \gamma_{kj} \frac{1}{\omega_j} \sigma_{r|\omega_j|} \left(m_{1j}, x - \frac{k-1}{2} \right) \right\|_{[\frac{k-1}{2} + \varepsilon, \frac{k}{2} - \varepsilon]} = 0, \quad k = 1, 2,$$

где $\varepsilon \in (0, 1/4)$, $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f, x)$ —

частичная сумма ряда Фурье по собственным функциям оператора $u'(x)$, $u(0) = u(1/2)$ (u — скалярная функция) для собственных значений λ_k^0 , для которых $|\lambda_k^0| < r$, m_{1j} — компоненты $\Gamma^{-1}Dt(x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб., 2006. Т. 197, №11. С. 115-142.

УДК 518.9

И.А. Кузнецова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГР ТРЕХ ЛИЦ

Понятие иерархических игр было предложено Ю.Б. Гермейером [1], который вместе с учениками создал развитую теорию таких игр [2, 3]. Теория же иерархических игр трех лиц не является такой полной и завершенной. В работе [4] автором рассматривались иерархические игры трех лиц с коалициями. Настоящая статья посвящена некоторому классу бескоалиционных иерархических игр трех лиц.

Рассмотрим следующую ситуацию. Главный управляющий игрок («хозяин») управляет подчиненным через посредника («директора»). Доход «хозяина» явно зависит от действий его и подчиненного, доход «директора» — от действий «хозяина», доход подчиненного — от действий его и «хозяина». «Хозяин» выбирает свою стратегию как функцию от действий «директора», а стратегия «директора», в свою очередь, является функцией от действий подчиненного. Как и обычно в иерархических играх, первый игрок первым выбирает свою стратегию и сообщает ее второму игроку, затем второй игрок выбирает свою стратегию и сообщает ее третьему игроку, после чего делает свой выбор третий игрок, определяя тем самым исход игры. Каждый игрок действует в своих интересах, максимизируя свою функцию выигрыша. Для упрощения изложения считаем, что множества стратегий игроков конечны.

Пусть дана игра $\Gamma = (X, Y, Z, F, G, H)$, где X, Y, Z — множества стратегий игроков, F, G, H — их функции выигрыша. В соответствии с вышеизложенным F отображает $X \times Z$ в R , $G — Y$ в R , $H — Y \times Z$ в R . Мы будем рассматривать следующее информационное расширение данной игры: $\bar{\Gamma} = (\Psi_1, \Phi_2, Z, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$, где $\Psi_1 = \{\psi_1\}$, $\psi_1 : \Phi_2 \rightarrow X$, $\Phi_2 = \{\varphi_2\}$, $\varphi_2 : Z \rightarrow Y$, при всех ψ_1, φ_2, z справедливо равенство $\bar{F}(\psi_1, \varphi_2, z) = F(\psi_1(\varphi_2), \varphi_2(z), z)$, функции \bar{G} и \bar{H} определяются аналогично. После выбора первым игроком своей стратегии ψ_1 второй игрок, действуя в своих интересах, может выбрать свои стратегии только из множества

$$M_2(\psi_1) = \left\{ \varphi'_2 : G(\psi_1(\varphi'_2)) = \max_{\varphi_2 \in \Phi_2} G(\psi_1(\varphi_2)) \right\}.$$

Аналогично после выбора вторым игроком своей стратегии ψ_2 третий игрок выбирает свои стратегии из множества

$$M_3(\varphi_2) = \left\{ z' : H(\varphi_2(z'), z') = \max_{z \in Z} H(\varphi_2(z), z) \right\}.$$

Таким образом, наибольший гарантированный результат первого игрока в игре $\bar{\Gamma}$ определяется равенством

$$\gamma(\bar{\Gamma}) = \max_{\psi_1 \in \Psi_1} \min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1)} \min_{z \in M_3(\varphi_2)} F(\psi_1(\varphi_2), z).$$

Вычисление $\gamma(\bar{\Gamma})$ — это решение вариационной задачи с ограничениями. Основной результат статьи состоит в сведении данной задачи к нескольким экстремальным задачам на исходных множествах X, Y, Z и указании стратегий, обеспечивающих управляющему игроку данный результат.

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\gamma(\bar{\Gamma}) = \gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2),$$

$$\begin{aligned} \text{где } \gamma_1 &= \max_{x \in D_2} \gamma(x), \quad D_2 = \{x' : G(x') > \min_{x \in X} G(x)\}, \quad \gamma(x) = \max(K(x), M(x)), \\ K(x) &= \max_{z \in D_3} F(x, z), \quad D_3 = \{z' : \max_{y \in Y} H(y, z') > L_3\}, \quad L_3 = \max_{z \in Z} \min_{y \in Y} H(y, z), \\ M(x) &= \min_{z \in E_3} F(x, z), \quad E_3 = \{z' \in Z : \min_{y \in Y} H(y, z') = L_3\}, \\ \gamma_2 &= \max_{x \in E_2} \min_{z \in D_3 \cup E_3} F(x, z), \quad E_2 = \{x' : G(x') = \min_{x \in X} G(x)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы построим стратегию, обеспечивающую первому игроку результат γ . Рассмотрим следующие случаи.

1. $\gamma_1 \geq \gamma_2$. Тогда $\gamma = \gamma_1 = \max_{x \in D_2} \gamma(x) = \gamma(x_1^0)$, где $\gamma(x_1^0) = \max(K(x_1^0), M(x_1^0))$. Имеются две возможности.

1а. Выполняется неравенство $K(x_1^0) \geq M(x_1^0)$. Тогда $\gamma(x_1^0) = K(x_1^0) = \max_{z \in D_3} F(x_1^0, z) = F(x_1^0, z_1^0)$, причем $\max_{y \in Y} H(y, z_1^0) > L_3$.

Определим стратегию первого игрока равенством

$$\psi_1^0(\varphi_2) = \begin{cases} x_1^0, & \text{если } \varphi_2 = \varphi_2^0, \\ x^-, & \text{если } \varphi_2 \neq \varphi_2^0, \end{cases} \quad (1)$$

где точка x^- определяется из условия $G(x^-) = \min_{x \in X} G(x)$, стратегия φ_2^0 определяется равенством

$$\varphi_2^0(z) = \begin{cases} \varphi_1^+(z), & \text{если } z = z_1^0, \\ \varphi_1^-(z), & \text{если } z \neq z_1^0, \end{cases}$$

где при всех $z \in Z$ $H(\varphi_1^+(z), z) = \max_{y \in Y} H(y, z)$, $H(\varphi_1^-(z), z) = \min_{y \in Y} H(y, z)$.

Нетрудно видеть, что в данном случае верны равенства $M_2(\psi_1^0) = \{\varphi_2^0\}$, $M_3(\varphi_2^0) = \{z_1^0\}$ и, следовательно,

$$\min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1^0)} \min_{z \in M_3(\varphi_2^0)} F(\psi_1^0(\varphi_2), z) = F(\psi_1^0(\varphi_2^0), z_1^0) = F(x_1^0, z_1^0) = \gamma_1,$$

и результат γ_1 гарантирован первому игроку.

16. Справедливо неравенство $K(x_1^0) < M(x_1^0)$. Тогда $\gamma(x_1^0) = M(x_1^0) = \min_{z \in E_3} F(x_1^0, z)$. Стратегия первого игрока определяется равенством (1), но в данном случае имеем

$$\varphi_2^0(z) = \begin{cases} \varphi_1^+(z), & \text{если } z \in E_3, \\ \varphi_1^-(z), & \text{если } z \notin E_3. \end{cases}$$

Тогда выполняются условия $M_2(\psi_1^0) = \{\varphi_2^0\}$, $M_3(\varphi_2^0) \subset E_3$ и, следовательно,

$$\min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1^0)} \min_{z \in M_3(\varphi_2^0)} F(\psi_1^0(\varphi_2), z) \geq \min_{z \in E_3} F(x_1^0, z) = \gamma(x_1^0),$$

и опять результат γ_1 первому игроку гарантирован.

2. Теперь предположим, что выполняется неравенство $\gamma_1 < \gamma_2$, то есть $\gamma = \gamma_2 = \max_{x \in E_2} \min_{z \in D_3 \cup E_3} F(x, z)$. Тогда оптимальная стратегия первого игрока определяется равенством

$$\psi_1^0(\varphi_2) \equiv x_2^0,$$

где точка x_2^0 находится из условия

$$\min_{z \in D_3 \cup E_3} F(x_2^0, z) = \max_{x \in E_2} \min_{z \in D_3 \cup E_3} F(x, z) = \gamma_2.$$

Поскольку в данном случае $M_2(\psi_1^0) = \Phi_2$ и при всех $\varphi_2 \in \Phi_2$ $M_3(\varphi_2) \subset D_3 \cup E_3$, то верно неравенство

$$\min_{\varphi_2 \in M_2(\psi_1^0)} \min_{z \in M_3(\varphi_2)} F(\psi_1^0(\varphi_2), z) \geq \min_{z \in D_3 \cup E_3} F(x_2^0, z) = \gamma_2,$$

и результат γ_2 первому игроку гарантирован.

Итак, мы доказали, что, действуя оптимальным образом, первый игрок может гарантировать себе выигрыш $\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2)$. Можно показать, что большего выигрыша он себе гарантировать не может. Таким образом, выполняется равенство $\gamma(\bar{\Gamma}) = \gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2)$, что и требовалось доказать.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гермейер Ю.Б.* Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198, №5. С. 1001–1004.
2. *Гермейер Ю.Б.* Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
3. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Лекции по теории неантогонистических игр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.
4. *Кузнецова И.А.* Иерархические игры трех лиц с коалициями // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 41–43.

В.П. Курдюмов, А.П. Хромов

**О БАЗИСАХ РИССА
ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ**

Настоящая статья продолжает исследования функционально-дифференциальных и интегральных операторов с операторами отражения, которые интенсивно развиваются.

Рассматривается функционально-дифференциальный оператор

$$\alpha_j y'(x) + \beta_j y'(\gamma_{j-1} + \gamma_j - x) + p_{j1}(x)y(x) + p_{j2}(x)y(\gamma_{j-1} + \gamma_j - x), \quad (1)$$

$$x \in [\gamma_{j-1}, \gamma_j], \quad (j = 1, 2, 3), \quad 0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 = 1, \quad \int_0^1 y(t)d\sigma(t) = 0. \quad (2)$$

Нам удобно заменой отрезков $[\gamma_{j-1}, \gamma_j]$ на $[0, 1]$ привести очевидным образом (1), (2) к следующему оператору в пространстве вектор-функций размерности 3:

$$Ly = l[y] = \begin{pmatrix} \alpha_1 y'_1(x) + \beta_1 y'_1(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y'_2(x) + \beta_2 y'_2(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$y'_3(x) = p(x)y_3(x),$$

$$y_1(0) = y_3(1), \quad y_2(1) = y_3(0),$$

$$\int_0^1 y_1(t)d\sigma_1(t) + \int_0^1 y_2(t)d\sigma_2(t) + \int_0^1 y_3(t)d\sigma_3(t) = 0. \quad (4)$$

Здесь $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ (T — знак транспонирования), $\alpha_j, \beta_j, p_{ij}(x)$ имеют новый смысл. Предположим, что $\alpha_j^2 \neq \beta_j^2$, $\beta_j \neq 0$, $p(x)$ и $p_{ij}(x) \in C^1[0, 1]$, $\sigma_j(x)$ ($j = 1, 2, 3$) — функции ограниченной вариации, имеющие скачки в точках 0 и 1.

Пусть $y = R_\lambda f$, где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор), $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$. Тогда y удовлетворяет системе

$$\alpha_1 y'_1(x) + \beta_1 y'_1(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \quad (5)$$

$$\alpha_2 y'_2(x) + \beta_2 y'_2(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) = \lambda y_2(x) + f_2(x), \quad (6)$$

$$y'_3(x) + p(x)y_3(x) = \lambda y_3(x) + f_3(x) \quad (7)$$

и условиям (4). Введем краевую задачу:

$$u' + \tilde{P}(x)u - \lambda Du = \tilde{m}(x), \quad (8)$$

$$\tilde{M}_0 u(0) + \tilde{M}_1 u(1) = 0, \quad (9)$$

$$\int_0^1 (u_1(t) + b_1 u_2(t)) d\sigma_1(t) + \int_0^1 (u_3(t) + b_2 u_4(t)) d\sigma_2(t) + \int_0^1 u_5(t) d\sigma_3(t) = 0, \quad (10)$$

где $u = (u_1, \dots, u_5)^T$, $\tilde{P}(x) = \text{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}P_1(x)B_1, B_2^{-1}Q_2^{-1}P_2(x)B_2, B_3^{-1}Q_3^{-1}P_3(x)B_3)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2$), $b_k = \beta_k^{-1}(i\sqrt{d_k} + \alpha_k)$ ($k = 1, 2$), $B_3 = (1)$, $Q_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2$), $Q_3 = (1)$, $P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2$), $P_3(x) = (p(x))$, $D = \text{diag}(D_1, D_2, D_3)$, $D_k = \text{diag}(i\sqrt{d_k}, -i\sqrt{d_k})$ ($k = 1, 2$), $D_3 = (1)$, $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$ ($k = 1, 2$), $\tilde{m}(x) = \text{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}, B_2^{-1}Q_2^{-1}, B_3^{-1}Q_3^{-1})m(x)$, $m(x) = (m_1(x), \dots, m_5(x))^T$, $m_1(x) = f_1(x)$, $m_2(x) = f_1(1-x)$, $m_3(x) = f_2(x)$, $m_4(x) = f_2(1-x)$, $m_5(x) = f_3(x)$, $\tilde{M}_0 = M_0 B$, $\tilde{M}_1 = M_1 B$, M_k ($k = 0, 1$) — матрица размерности 4×5 с элементами $m_{ij}^{(k)}$, $m_{11}^{(0)} = m_{34}^{(0)} = m_{44}^{(0)} = m_{22}^{(1)} = 1$, $m_{35}^{(0)} = m_{15}^{(1)} = m_{25}^{(1)} = m_{43}^{(1)} = -1$, $m_{ij}^{(k)} = 0$ при остальных i, j и $k = 0, 1$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$.

Лемма 1. Если $y = R_\lambda f$, $u(x, \lambda)$ — решение задачи (8) — (10) и $z(x) = Bu(x, \lambda)$, то $z_1(x) = y_1(x)$, $z_3(x) = y_2(x)$, $z_5(x) = y_3(x)$, где $z(x) = (z_1(x), \dots, z_5(x))^T$.

Присутствие матрицы $\tilde{P}(x)$ в (8) является серьезным препятствием в исследовании решения задачи (8)-(10). Здесь мы приведем ее преобразование, заменяющее $\tilde{P}(x)$ на матрицу с элементами $O(\lambda^{-1})$ [1, с. 48-58].

Пусть $H_0(x) = (H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$, где $H_{01}(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$, $H_{02}(x) = \text{diag}(h_3(x), h_4(x))$, $h_i(x) = \exp\left(-\int_0^x \tilde{p}_{ii}(t) dt\right)$, $\tilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\tilde{P}(x)$; $H_1(x) = \text{diag}(H_{11}(x), H_{12}(x), H_{13}(x))$, где $H_{13}(x) = 0$, $H_{1k}(x)$ ($k = 1, 2$) — кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения $H'_{0k}(x) + \tilde{P}_k(x)H_{0k}(x) + (H_{1k}(x)D_k - D_k H_{1k}(x)) = 0$, $\tilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$.

Теорема 1. При больших $|\lambda|$ неособое преобразование $u = H(x, \lambda)v$, где $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, приводит систему (8) — (10) к виду

$$v' + P_\lambda(x)v - \lambda Dv = m(x, \lambda), \quad (11)$$

$$u_1(v) = u_1(H(x, \lambda)v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
u_2(v) &= u_1(H(x, \lambda)v) = \\
&= \int_0^1 [h_1(t) + \lambda^{-1}b_1\tilde{r}_2(t)]v_1(t) + (b_1h_2(t) + \lambda^{-1}\tilde{r}_1(t)v_2(t)]d\sigma_1(t) + \\
&+ \int_0^1 [(h_3(t) + \lambda^{-1}b_2\tilde{r}_4(t))v_3(t) + (b_2h_4(t) + \lambda^{-1}\tilde{r}_3(t))v_4(t)]d\sigma_2(t) + \\
&+ \int_0^1 h_5(t)v_5(t)d\sigma_3(t) = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где $P_\lambda(x) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)(H'_1(x) + \tilde{P}(x)H_1(x))$, $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)\tilde{m}(x)$, $M_{0\lambda} = M_0H(0, \lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1H(1, \lambda)$, $\tilde{r}_k(t)$ ($k = 1, 2$) — элементы матрицы $H_{11}(t)$, $\tilde{r}_k(t)$ ($k = 3, 4$) — элементы матрицы $H_{12}(t)$.

Лемма 2. Если $v(x, \lambda) = (v_1(x, \lambda), \dots, v_5(x, \lambda))^T$ является решением (11) — (13), то $R_\lambda f = ((h_1(x) + \lambda^{-1}b_1\tilde{r}_2(x))v_1(x, \lambda) + (b_1h_2(x) + \lambda^{-1}\tilde{r}_1(x))v_2(x, \lambda), (h_3(x) + \lambda^{-1}b_2\tilde{r}_4(x))v_3(x, \lambda) + (b_2h_4(x) + \lambda^{-1}\tilde{r}_3(x))v_4(x, \lambda), h_5(x)v_5(x, \lambda))^T$.

Предположим далее, что $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ и считаем выполненным условие $b_1b_2(\alpha_{10} + b_1\alpha_{11} + \alpha_{31})(\alpha_{20} + b_2\alpha_{21} + b_2\alpha_{30})(b_1\alpha_{10} + \alpha_{11} + b_2\alpha_{31})(b_2\alpha_{20} + \alpha_{21} + \alpha_{30}) \neq 0$, где $\alpha_{i0} = \sigma_i(+0) - \sigma_i(0)$, $\alpha_{i1} = \sigma_i(1) - \sigma_i(1-0)$ ($i = 1, 2, 3$).

Лемма 3. При отображении $\mu = i\lambda/d_1$ собственные значения задачи (11) — (13) находятся в двух полосах: вдоль мнимой и вещественной осей. Причем в любом прямоугольнике $|Im \mu - t| \leq 1$ первой полосы и любом прямоугольнике $|Re \mu - t|$ второй полосы число этих нулей ограничено при всех вещественных t .

Удалим из этих полос собственные значения вместе с их δ -окрестностями и полученные области обозначим $\Pi_1(\delta)$ (для области вдоль мнимой оси) и $\Pi_2(\delta)$.

Также, как и в [2] представим полосу из леммы 3, расположенную вдоль мнимой оси в виде объединения конечного числа различных групп прямоугольников, границы которых $\Gamma_{k,1}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) (при возрастании $|k|$ контуры удаляются от начала координат) состоят из отрезков, лежащих на прямых $Re \mu = h$ (h — ширина полосы), $Re \mu = 0$ и из отрезков длины h , параллельных вещественной оси. Контуры $\Gamma_{k,1}$ принадлежат $\Pi_1(\delta)$ и для каждого $\Gamma_{k,1}$ конкретной группы существует целое t_k , что $\Gamma_{k,1} = \Gamma + it_k$, где Γ — некоторый фиксированный прямоугольный контур из этой группы. Аналогичное построение проводится и для второй полосы из леммы 3. Построенные в ней контуры обозначим $\Gamma_{k,2}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Лемма 4. Пусть Γ_k — любой из контуров $\Gamma_{k,1}, \Gamma_{k,2}$ и J — любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел и $R(\mu) = R_{-i\mu\sqrt{d_1}}$.

Тогда имеет место оценка

$$\left\| \sum_{k \in J} \int_{\Gamma_k} R(\mu) d\mu \right\| \leq c,$$

равномерная по J .

Лемма 5. Система собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) полна в $L_2^3[0, 1]$.

Теорема 2. Система с.п.ф. функций оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2^3[0, 1]$. При этом в скобки следует объединять те с.п.ф., которые соответствуют собственным значениям λ_m , для которых числа $i\lambda_m/\sqrt{d_1}$ попали внутрь контуров Γ_k .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Раппопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР. 1954.
2. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2004. Вып. 6. С. 80-87.

УДК 517.984

Ю.В. Курышова

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье приводится формула восстановления потенциала $q \in \mathbf{L}_2(0, \pi)$ интегродифференциального оператора $L(q, M)$, заданного выражением

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x, t)y(t)dt, \quad x \in [0, \pi],$$

и краевыми условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

по так называемым узлам — нулям собственных функций (СФ). Суммируемая функция $M(x, t)$ полагается известной.

Узлы как спектральные данные (СД) были введены в работе Джойс Маклахлин [1], где доказывалась единственность восстановления классического

оператора Штурма – Лиувилля по узлам. Для указанного интегродифференциального оператора в [2] была доказана теорема единственности решения обратной узловой задачи.

Обозначим $\lambda = \rho^2$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty$ собственные значения (СЗ) краевой задачи, которую обозначим также как и оператор $L(q, M)$

$$\ell y = \lambda y, \quad (1)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0. \quad (2)$$

Пусть $S(x, \lambda)$ есть решение уравнения (1) с начальными условиями $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$. Для этого решения имеет место следующее асимптотическое представление

$$\begin{aligned} S(x, \lambda) = & \frac{\sin \rho x}{\rho} - \frac{\cos \rho x}{2\rho^2} \int_0^x q(t) dt + \frac{1}{2\rho^2} \int_0^x \cos \rho(x-2t) q(t) dt + \\ & + \frac{1}{\rho^2} \int_0^x \sin \rho(x-t) dt \int_0^t M(t, \xi) \sin \rho \xi d\xi + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^3}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Функции $S(x, \lambda_n)$ являются СФ задачи (1), (2), а соответствующие СЗ совпадают с нулями характеристической функции задачи $\Delta(\lambda) = S(\pi, \lambda)$, то есть $\Delta(\lambda_n) = S(\pi, \lambda_n) = 0$.

Из асимптотики СФ ясно, что, начиная с некоторого номера N , узлы задачи $L(q, M)$ имеют те же свойства, что и узлы $L(q, 0)$ (см. [1]). То есть, каждая n -я СФ, имеет внутри интервала $(0, \pi)$ ровно n нулей ($n > N$) и узлы образуют плотное в $(0, \pi)$ множество. Обозначим позицию j -го узла n -й СФ $x_j^{(n)}$. Из (3) с учетом того, что $S(x, \lambda_n) - \text{СФ}$, получаем

$$\rho_n x_j^{(n)} = \pi j + O\left(\frac{1}{\rho_n}\right), \quad \rho_n := \sqrt{\lambda_n}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (4)$$

Стандартным методом можно получить, что

$$\rho_n = n + \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi q(t) dt + \frac{\kappa_n}{n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \{\kappa_n\}_{n=1}^\infty \in l_2. \quad (5)$$

Положим в (5) $x = x_j^{(n)}$, $\lambda = \lambda_n$ и, поделив обе части на $\cos \rho_n x_j^{(n)}$, получим

$$\begin{aligned} tg \rho_n x_j^{(n)} = & \frac{1}{2\rho_n} \int_0^{x_j^{(n)}} q(t) dt - \frac{1}{2\rho_n \cos \rho_n x_j^{(n)}} \int_0^{x_j^{(n)}} \cos \rho_n(x_j^{(n)} - 2t) q(t) dt - \\ & - \frac{1}{2\rho_n \cos \rho_n x_j^{(n)}} \int_0^{x_j^{(n)}} \sin \rho_n(x_j^{(n)} - t) dt \int_0^t M(t, \xi) \sin \rho_n \xi d\xi + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right). \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Тейлора для тангенса и, комбинируя последнее равенство с (4), имеем

$$\begin{aligned} \rho_n x_j^{(n)} &= j\pi + \frac{1}{2\rho_n} \int_0^{x_j^{(n)}} q(t) dt - \frac{1}{2\rho_n \cos \rho_n x_j^{(n)}} \int_0^{x_j^{(n)}} \cos \rho_n (x_j^{(n)} - 2t) q(t) dt - \\ &- \frac{1}{2\rho_n \cos \rho_n x_j^{(n)}} \int_0^{x_j^{(n)}} \sin \rho_n (x_j^{(n)} - t) dt \int_0^t M(t, \xi) \sin \rho_n \xi d\xi + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Положим в (3) $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$. Учитывая, что $S(\pi, \lambda_n) = 0$ и, снова применяя формулу Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \pi \rho_n &= \pi n + \frac{1}{2\rho_n} \int_0^\pi q(t) dt - \frac{1}{2\rho_n \cos \pi \rho_n} \int_0^\pi \cos \rho_n (\pi - 2t) q(t) dt - \\ &- \frac{1}{2\rho_n \cos \pi \rho_n} \int_0^\pi \sin \rho_n (\pi - t) dt \int_0^t M(t, \xi) \sin \rho_n \xi d\xi + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_n - n) \rho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(t) dt. \quad (7)$$

Из (5), очевидно, имеем $\frac{\rho_n}{n} \rightarrow 1$, при $n \rightarrow \infty$. Зафиксируем x и выберем подпоследовательность $\frac{j_n \pi}{n} \rightarrow x$ ($\frac{j_n \pi}{n} \neq x$) при $n \rightarrow \infty$. Из (6) имеем

$$\frac{\rho_n}{n} x_{j_n}^{(n)} = \frac{j_n \pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Тогда для выбранного подмножества индексов

$$x_{j_n}^{(n)} \rightarrow x, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Рассмотрим последовательность $\left((\rho_n x_{j_n}^{(n)} - j_n \pi) + x_{j_n}^{(n)} (n - \rho_n) \right) \rho_n$ для выбранного подмножества индексов и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. С учетом (6), (8) и (7), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((\rho_n x_{j_n}^{(n)} - j_n \pi) + x_{j_n}^{(n)} (n - \rho_n) \right) \rho_n = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt - \frac{x}{2\pi} \int_0^\pi q(t) dt.$$

С другой стороны, этот предел в силу асимптотики (5) равен

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n x_{j_n}^{(n)} - j_n \pi \right) n. \quad (9)$$

Итак,

$$g(x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt - \frac{x}{2\pi} \int_0^\pi q(t) dt. \quad (10)$$

Функция $g(x) \in AC[0, \pi]$. Дифференцируя (10), с учетом того, что $g(0) = g(\pi) = 0$, получим

$$g'(x) = \frac{1}{2}q(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(t) dt \quad \text{п.в. на } [0, \pi].$$

Сформулируем полученное утверждение.

Теорема. Пусть $NS[0, \pi]$ — множество узлов задачи (1), (2), а X — плотное его подмножество. Для точки $x \in [0, \pi]$ выберем подпоследовательность $\{x_{j_n}^{(n)}\} \subset X$, к ней сходящуюся. Тогда существует предел $g(x)$ в (9) и имеет место следующая формула восстановления потенциала:

$$q(x) = 2g'(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt \quad \text{п.в. на } [0, \pi].$$

Заметим, что имеется проблема переопределенности узловых СД для любых обратных задач, так как, вообще говоря, не существует минимального плотного подмножества узлов из $NS[0, \pi]$. В [3], где рассмотрена обратная задача для оператора Штурма – Лиувилля, сделана попытка преодолеть эту переопределенность, взяв за СД классы эквивалентности последовательностей узлов с одинаковым асимптотическим поведением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *McLaughlin J. R.* Inverse theory Using Nodal Points as Data – A Uniqueness Result // J.Dif. Eq. 1988. V. 73, №2. P. 354-362.
2. *Курьшова Ю.В.* Единственность решения обратной узловой задачи для интегродифференциальных операторов // Математика. Механика. Сб. науч.тр. Саратов: Изд. Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 44-47.
3. *Lau C.K., Tsay J.* On the well-posedness of the inverse nodal problem // Inverse problems. 2001. V. 17. P. 1493-1512.

А.Л. Лукашов

ОЦЕНКА КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ

Изучение констант Лебега интерполяционных процессов Лагранжа на множествах — одна из основных задач теории интерполирования (см., например, [1]). Основная цель предлагаемой статьи — дать оценку константы Лебега для случая нескольких отрезков и матрицы узлов интерполирования, составленной из нулей многочленов, наименее уклоняющихся от нуля.

Приведем основные определения (подробнее о терминологии и истории вопроса см. [2]). Пусть $E = [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{2l-1}, a_{2l}]$ — система непересекающихся отрезков на действительной прямой такая, что $\omega_j(\infty) \in \mathbb{Q}$, $j = 1, \dots, l$, где $\omega_j(\infty)$ — гармонические меры отрезков $[a_{2j-1}, a_{2j}]$ относительно бесконечно удаленной точки. Далее, пусть $\mathcal{T}_n(x)$ — многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на E , и $x_{k,n}$ — их нули, образующие матрицу узлов интерполирования. Обозначим через L_n соответствующие константы Лебега, т.е.

$$L_n = \max_{x \in E} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\mathcal{T}_n(x)}{\mathcal{T}'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})} \right|.$$

Теорема. При выполнении всех перечисленных ранее условий

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\log n} \geq \frac{2}{\pi}.$$

Доказательство. При условии рациональности гармонических мер составляющих E отрезков для некоторого $q \in \mathbb{N}$ существует многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на E с максимальным числом точек уклонения $(n + l)$. Тогда многочлены степеней nq , наименее уклоняющиеся от нуля на E , имеют вид

$$\mathcal{T}_{nq}(x) = T_n(\mathcal{T}_q(x)).$$

Обозначим через $y_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, нули многочленов Чебышева первого рода T_n , тогда

$$L_{nq} = \max_{x \in E} \sum_{j=1}^n \frac{T_n(y_{j,n})}{|T'_n(y_{j,n})||y - y_{j,n}|} \sum_{k: \mathcal{T}_q(x_{k,nq})=y_{j,n}} \frac{|\mathcal{T}_q(x) - y_{j,n}|}{|\mathcal{T}'_q(x_{k,nq})||x - x_{k,nq}|} \geq$$

$$\max_{x \in E} \sum_{j=1}^n \frac{T_n(y_{j,n})}{|T'_n(y_{j,n})||y - y_{j,n}|} \left| \sum_{k: \mathcal{T}_q(x_{k,nq})=y_{j,n}} \frac{(\mathcal{T}_q(x) - y_{j,n})}{\mathcal{T}'_q(x_{k,nq})(x - x_{k,nq})} \right|.$$

Так как последняя сумма равна единице по свойствам интерполяционных многочленов, то в результате получим константу Лебега интерполяционных процессов Лагранжа по нулям классических многочленов Чебышева, которая, как известно (см. [1]) равна

$$\frac{2}{\pi} \log n + C + o(1).$$

Отсюда легко получаем требуемое.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.01).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Привалов А.А.* Теория интерполирования функций: В 2-х кн. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990.
2. *Лукашов А.Л.* Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках //Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т.68, Вып.3. С. 115–138.

УДК 518.91

А.Д.Луньков

РЕГРЕССИОННЫЕ МЕТОДЫ ПАНЕЛЬНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РОССИЙСКИХ РЕГИОНОВ

В данной статье построена регрессионная модель, описывающая на основе данных по регионам Российской Федерации зависимость показателей рождаемости от социально-экономических факторов.

Используются данные для 77 административных единиц (Москва, Санкт-Петербург, области, края, республики). Из наблюдения ввиду недостаточности данных исключена лишь Чеченская Республика. Показатели относятся к 2001-2006 г.г. Исходная информация содержится на сайте Роскомстата www.gks.ru и в Российском статистическом ежегоднике.

Введем обозначения: Y — число родившихся детей, отнесенное к числу совершеннолетних граждан; X_1 — число браков, отнесенное к тому же показателю; X_2 — число разводов, отнесенное к тому же показателю; X_3 — число зарегистрированных безработных, отнесенное ко всему населению (на начало года); X_4 — число преступлений, связанных с оборотом оружия, отнесенное ко всему населению.

Первая переменная — зависимая, она выбрана в качестве показателя, характеризующего рождаемость. Остальные переменные выбраны объясняющими для регрессионной модели.

Эти факторы характеризуют отношение в обществе к браку, уровень социального стресса, уровень экономической нестабильности. К сожалению,

отсутствует в должном объеме информация о показателях, адекватно характеризующих качество здравоохранения. В некоторых источниках, например в [1], таким показателем считается смертность от аппендицита – показатель, близкий к нулю при минимальном порядке в лечебных учреждениях. Принято считать, что число врачей, больниц, койко-мест на душу населения, характеризует лишь количественную сторону процесса.

Коэффициенты корреляции между объясняющими переменными практически незначимы.

Классическая линейная регрессионная модель, описанная в [2], имеет вид

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = 0; \quad V(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n.$$

Оценив неизвестные параметры, получаем модель следующего вида:

$$y = 1,2 x_1 - 0,75 x_2 + 120,73 + 0,01 x_4 + 4,36.$$

Все коэффициенты значимы на стандартном уровне 0,95, значима и модель. Однако коэффициент детерминации объясняет лишь 42% изменения дисперсии. Кроме того, знаки при коэффициентах противоречат естественным предположениям (необъяснимо, например, вытекающее для модели предположение о положительном влиянии роста преступности и безработицы на рождаемость). Таким образом, модель нельзя считать адекватной.

Применяя модель к рассматриваемым данным, мы не учитываем то, что в течение нескольких временных периодов наблюдаются одни и те же объекты (регионы). Данные имеют панельную структуру. В таком случае для компонент регрессионной модели справедливо представление:

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it}.$$

Здесь y_{it} – зависимая переменная для экономической единицы i в момент времени t , x_{it} – набор объясняющих переменных (вектор размерности k) и ε_{it} – соответствующая ошибка, $i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T$. В зависимости от предположений относительно характера величины α_i рассматриваются две модели. В модели с фиксированным эффектом предполагается, что величины α_i являются неизвестными параметрами. Случайный эффект означает, что $\alpha_i = \mu + u_i$, где μ – параметр, общий для всех единиц во все моменты времени, а u_i – ошибки, некоррелированные с ε_{it} и некоррелированные между собой при разных i . Полная спецификация и методика оценки параметров таких моделей описана в [2]. При наличии, например, фиксированного эффекта, МНК-оценки будут несмещенными и эффективными, но, вообще говоря, не состоятельными за счет малого числа временных периодов ([2]).

Оценим параметры модели в предположении наличия индивидуального эффекта α_i . Для модели с фиксированным эффектом получаем:

$$y = 0,4 x_1 + 0,25 x_2 - 14,234 - 0,04 x_4 + 0,011 + \alpha_i$$

(0,06) (0,03) (5,92) (0,08) (0,05)

Все коэффициенты значимы, уравнение значимо. В скобках указаны стандартные ошибки. Что существенно, знаки при всех коэффициентах не противоречат естественным предположениям.

При построении модели со случайным эффектом тест Вальда отвергает гипотезу о стандартной модели в пользу случайного эффекта. Знаки при коэффициентах не противоречат естественным тенденциям. Однако при показателе безработицы коэффициент незначим. Тест Хаусмана также отвергает гипотезу о случайном эффекте.

Выбор в пользу модели с фиксированным эффектом имеет естественное объяснение. Безусловно, процессы рождаемости определяются не только набором формализуемых социально-экономических показателей. Они зависят и от некоторых характеристик, не поддающихся непосредственному измерению, а связанных с семейным укладом, отношением к институту семьи и к материнству, расстановкой приоритетов между семьей и работой для женщины. Такие отношения индивидуальны хотя бы в некоторых из регионов. Для ответа на вопрос о том, существенны ли они для изучения того или иного процесса, и используются модели с индивидуальным эффектом. В нашем случае индивидуальный эффект – это некая «добавка» к рождаемости, полученная для данного региона. Оценив величины индивидуальных эффектов, наблюдаем, что значения коэффициентов положительны в национальных республиках, в областях и краях Восточной Сибири и Дальнего Востока. Нарушает однородность этого списка многонациональная Астраханская область, а также Архангельская и Вологодская области. Минимальные значения коэффициентов наблюдаются практически во всей центральной полосе – в регионах вокруг Москвы и Санкт-Петербурга, и непосредственно в самих городах. Действительно, вряд ли коэффициентам рождаемости в мегаполисах можно дать то же объяснение, что и в других регионах. Впрочем, разные причины порой приводят к одним и тем же эффектам. Нет центральных регионов с положительным эффектом. Приведем максимальные и минимальные коэффициенты, умноженные на 1000:

| | |
|-----------------------|-----------|
| Тыва | 13.86898 |
| Республика Алтай | 7.374624 |
| Якутия | 6.20173 |
| Ингушетия | 6.085838 |
| Дагестан | 5.933025 |
| Ленинградская область | -2.885122 |
| Санкт-Петербург | -2.919571 |
| Рязанская область | -2.947467 |
| Москва | -2.985784 |
| Тульская область | -3.626536 |

Для модели со случайным эффектом используется предположение о

некоррелированности ошибок наблюдения во времени и пространстве. Возможно, такое предположение не вполне реалистично хотя бы во второй своей части – в едином государстве нет экономически и политически изолированных субъектов, процессы в соседних регионах взаимосвязаны, хотя связь определяется не только расстоянием. Для учета данного фактора в рамках расширенной модели со случайным эффектом [3] требуется оценка некоторой весовой диагональной матрицы, определяющей близость между объектами. Соответственно итоговая модель зависит от принципов, по которым строится матрица. Оценив матрицу, можно проверить гипотезы о пространственной и временной автокорреляции для случайного эффекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Касьян Г.А.* Скачок смертности в России: результаты анализа международных панельных данных // Препринт # BSP/02/055 R. М.: Российская экономическая школа, 2002. 64 с.
2. *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс: Учебник. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2004. 576 с.
3. *Baltagi B.H., Song S.H., Jung B.C., Koh W.* Testing for serial correlation, spatial autocorrelation and random effects using panel data // J. of Econometrics. 2007. V.140, №1. P.5-51

УДК 519.853.3

Е.А. Мещерякова

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ПО ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ

Пусть D — выпуклый компакт из \mathbb{R}^p , $\text{int}D \neq \emptyset$, $n(x)$ — некоторая норма на \mathbb{R}^p . Функции

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y), \quad \rho_D(x) = \min_{y \in D} n(x - y)$$

выражают соответственно расстояния от точки x до самой удаленной и самой близкой точки множества D . Известно, что функция $R(x)$ выпукла на \mathbb{R}^p , а $\rho_\Omega(x)$, где $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$, является вогнутой функцией на D . Задачей асферичности выпуклого компакта D называют

$$\varphi_1(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho_\Omega(x)} \longrightarrow \min_{x \in D}. \quad (1)$$

Задача о постороении шарового слоя наименьшего объема, содержащего границу выпуклого компакта D сводится к задаче

$$\varphi_2(x) \equiv R^p(x) - \rho_\Omega^p(x) \longrightarrow \min_{x \in D}. \quad (2)$$

Оптимальные значения целевых функций задач (1) и (2) по разному отражают величину отличия выпуклого компакта D от шара нормы $n(x)$. В этом смысле данные задачи сравнимы с задачей построения шарового слоя наименьшей толщины, содержащего границу компакта D [1], и с задачей Хаусдорфова приближения компакта D шаром нормы $n(x)$ [2]. Примеры показывают, что решения всех перечисленных задач могут быть разными. Цель статьи — получить необходимые условия решения задач (1) и (2).

Теорема 1. *Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются субдифференцируемыми (в смысле В.Д. Демьянова, А.М. Рубинова [3]) всюду на D , причем их субдифференциалы можно выразить следующими формулами:*

$$\underline{\partial}\varphi_1(x) = \rho_\Omega^{-2}(x) (\rho_\Omega(x)\underline{\partial}R(x) - R(x)\overline{\partial}\rho_\Omega(x)), \quad (3)$$

$$\underline{\partial}\varphi_2(x) = p(R^{p-1}(x)\underline{\partial}R(x) - \rho_\Omega^{p-1}(x)\overline{\rho}_\Omega(x)). \quad (4)$$

где $\underline{\partial}R(x)$ – субдифференциал выпуклой функции $R(x)$, $\overline{\rho}_\Omega(x)$ – супердифференциал вогнутой на D функции $\rho_\Omega(x)$.

Доказательство. Функция $R(x)$ – выпуклая на \mathbb{R}^p , $\rho_\Omega(x)$ – вогнутая функция на D , поэтому их квазидифференциалы (в определении [3, с. 128]) можно записать в виде

$$\mathcal{D}R(x) = [\underline{\partial}R(x), \{0_p\}], \quad \mathcal{D}\rho_\Omega(x) = [\{0_p\}, \overline{\rho}_\Omega(x)].$$

Используя правила квазидифференциального исчисления (см. [1]), имеем

$$\mathcal{D} \left[\frac{1}{\rho_\Omega(x)} \right] = \left[-\frac{\overline{\partial}\rho_\Omega(x)}{\rho_\Omega^2(x)}, \{0_p\} \right],$$

и тогда

$$\mathcal{D} \left[\frac{R(x)}{\rho_\Omega(x)} \right] = \left[R(x) \left(-\frac{\overline{\partial}\rho_\Omega(x)}{\rho_\Omega^2(x)} \right) + \frac{\underline{\partial}R(x)}{\rho_\Omega(x)}, \{0_p\} \right].$$

Таким образом, субдифференциал функции $\underline{\partial}\varphi_1(x)$ принимает вид (3). По индукции, используя формулу квазидифференциала произведения квазидифференцируемых функций, получаем

$$\mathcal{D}[R^p(x)] = [pR^{p-1}(x)\underline{\partial}R(x), \{0_p\}],$$

$$\mathcal{D}[\rho_\Omega^p(x)] = [\{0_p\}, p\rho_\Omega^{p-1}(x)\overline{\partial}\rho_\Omega(x)].$$

Отсюда вытекает

$$\mathcal{D}[R^p(x) - \rho^p(x)] = [p(R^{p-1}(x)\underline{\partial}R(x) - \rho^{p-1}(x)\overline{\partial}\rho(x)), \{0_p\}],$$

а значит, и формула (4).

Теорема 2. Если $x^* \in \text{int}D$ – решение задачи (1), то

$$\rho_\Omega(x^*)\underline{\partial}R(x^*) \cap R(x^*)\overline{\partial}\rho_\Omega(x^*) \neq \emptyset. \quad (5)$$

Доказательство. В соответствии с условием минимума субдифференцируемой функции для $x^* \in \text{int}D$ ([3, с. 239]) должно выполняться $0_p \in \underline{\partial}\varphi_1(x^*)$, что в соответствии с формулой (3) эквивалентно

$$0_p \in (\rho_\Omega(x^*)\underline{\partial}R(x^*) - R(x^*)\overline{\partial}\rho_\Omega(x^*))$$

или соотношению (5).

Теорема 3. Если точка $x^* \in D$ является решением задачи (2), то

$$\left[R^{p-1}(x^*)\underline{\partial}R(x^*) - \rho_\Omega^{p-1}(x^*)\overline{\partial}\rho_\Omega(x^*) \right] \cap K^+(x^*, D) \neq \emptyset, \quad (6)$$

где $K^+(x^*, D)$ – сопряженный конус к конусу возможных направлений множества D в точке x .

Доказательство. В соответствии с условием минимума субдифференцируемой функции на заданном выпуклом множестве [3, с. 239] должно выполняться соотношение $\underline{\partial}\varphi_2(x^*) \cap K^+(x^*, D) \neq \emptyset$, которое, учитывая формулу (4), эквивалентно (6).

Замечание. Формулы субдифференциала функции $R(x)$ и субдифференциала функции $\rho_\Omega(x)$, в которых отражается зависимость от нормы и множества D имеются в [2]. Это придает соотношениям (5) и (6) конструктивный вид и позволяет решать конкретные задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боннезен Т. Фенхель В. Теория выпуклых тел. М.: ФАЗИС, 2002.
2. Дудов С. И. Златорунская И.В. Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы //Мат.сб. 2000, Т. 191, №10. С. 13-38.
3. Демьянов В. Ф. Рубинов А.М. Основы выпуклого анализа и квазидифференциального исчисления. М.: Наука, 1990.

УДК 519.4

В.А. Молчанов

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛОГИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЯЗЫКОВ

В настоящей статье продолжается исследование языков произвольных слов, начало которому было положено в [1]. Рассматривается конечный алфавит A и следующие множества слов: $W_{fin}(A)$ – множество всех конечных слов, $W^{\rightarrow}(A)$ – множество всех бесконечных вправо слов, $W^{\leftarrow}(A)$ – множество всех бесконечных влево слов, $W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество всех бесконечных в

обе стороны слов и $W(A) = W_{fin}(A) \cup W^{\rightarrow}(A) \cup W^{\leftarrow}(A) \cup W^{\leftrightarrow}(A)$ – множество всех слов над алфавитом A . Подмножества $W(A)$ называются языками произвольных слов над алфавитом A .

В работе [2] показано, что класс $\text{Rec}_S(A)$ распознаваемых полугруппами языков произвольных слов над алфавитом A состоит из конечных объединений множеств вида $X, X^{-\omega}Y, XY^{+\omega}, X^{-\omega}YZ^{+\omega}$, где X, Y, Z – рациональные языки над алфавитом A и $X^{+\omega} = \{u_1u_2\dots : u_1, u_2, \dots \in X\}$, $X^{-\omega} = \{\dots u_{-2}u_{-1} : u_{-1}, u_{-2}, \dots \in X\}$. В работе [3] показано, что класс $\text{Rec}_S(A)$ содержится в классе $\text{Rec}_L(A)$ всех таких языков произвольных слов, которые определяются формулами языка \mathcal{L} монадической логики 2-го порядка сигнатуры $\Omega = \{<, (R_a)_{a \in A}\}$, состоящей из одного символа бинарного предиката $<$ и семейства символов унарных предикатов R_a ($a \in A$). Целью настоящей работы является доказательство обратного включения $\text{Rec}_L(A) \subset \text{Rec}_S(A)$.

Для языка $L \subset W(A)$ и пустого слова Λ положим: $L_{fin} = L \cap W_{fin}(A)$, $L^{\rightarrow} = L \cap W^{\rightarrow}(A)$, $L^{\leftarrow} = L \cap W^{\leftarrow}(A)$, $L^{\leftrightarrow} = L \cap W^{\leftrightarrow}(A)$, $L_{inf} = L^{\rightarrow} \cup L^{\leftarrow} \cup L^{\leftrightarrow}$, $L_{fin}^{\rightarrow} = L_{fin} \cup L^{\rightarrow} \cup \{\Lambda\}$, $L_{fin}^{\leftarrow} = L_{fin} \cup L^{\leftarrow} \cup \{\Lambda\}$. Согласно [1], рациональными операциями на множестве подмножеств $W(A)$ являются тернарное произведение [...] и бесконечная степень $^{\infty}$, которые определяются следующим образом: $[K, L, M] = K_{fin}^{\leftarrow} L_{fin} M_{fin}^{\rightarrow}$, $L^{\infty} = L_{fin}^+ \cup L_{fin}^{+\omega} \cup L_{fin}^{-\omega} \cup L_{fin}^{\omega}$, где $L_{fin}^+ = \{u_1 \dots u_n : n \in \mathbb{N} \text{ и } u_1, \dots, u_n \in L_{fin}\}$, $L_{fin}^{\omega} = \{\dots u_{-1}u_0u_1 \dots : u_n \in L_{fin} \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}\}$.

Лемма 1. *В результате применения к рациональным языкам над алфавитом A рациональных и булевых операций получают языки из класса $\text{Rec}_S(A)$.*

Согласно [3], для каждого слова $w \in W(A)$ (рассматриваемого как отображение некоторого отрезка множества \mathbb{Z} в алфавит A) определяется алгебраическая Ω -система $M_w = (\mathbb{Z}, <, (R_a)_{a \in A})$, где $<$ – отношение сравнения целых чисел и $R_a = \overline{w}^{-1}(a)$ ($a \in A$). При этом слово w удовлетворяет формуле Φ языка \mathcal{L} , если $M_w \models \Phi$. Множество всех слов $w \in W(A)$, удовлетворяющих формуле Φ , называется спектром формулы Φ и обозначается $S(\Phi)$.

Пусть $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_p, X_1, \dots, X_q)$ – формула языка \mathcal{L} , содержащая предметные переменные x_1, \dots, x_p и унарные предикатные переменные X_1, \dots, X_q , значения которых в модели M_w представляются с помощью интерпретации $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, где θ_1 отображает предметные переменные в элементы множества M и θ_2 отображает унарные предикатные переменные в подмножества множества M .

По аналогии с изложенным в работе [4] методом доказательства эквивалентности автоматов Буши и языка монадической логики 2-го порядка условие $M_w \models_{\theta} \Phi$ можно естественно описать с помощью нового алфави-

та $B = A \times \{0, 1\}^{2m}$, элементами которого являются упорядоченные наборы $b = (a, k_1, \dots, k_{2m})$ для некоторого фиксированного натурального числа $m \geq \max\{p, q\}$. В этом случае компонента a называется носителем слова b и обозначается $a = \pi_0(b)$, а остальные компоненты k_1, \dots, k_{2m} слова b называются его маркировками и обозначаются $k_i = \pi_i(b)$ для всех $i = \overline{1, 2m}$. В результате каждому маркированному слову $\bar{w} \in W(B)$ соответствует однозначно определенное слово $w = \pi_0(\bar{w})$ над алфавитом A и $2m$ двоичных слов $w_i = \pi_i(\bar{w})$ ($i = \overline{1, 2m}$). Тогда условие $M_w \models_{\theta} \Phi$ можно описать с помощью однозначно определенного маркированного слова $\bar{w}_{\theta} \in W(B)$, удовлетворяющего условиям: (1) $\pi_0(\bar{w}_{\theta}) = w$, (2) для каждого $i = \overline{1, m}$ значение $\theta_1(x_i) = n$ в том и только том случае, если соответствующая i -ая маркировка n -ой буквы слова \bar{w}_{θ} равна 1, (3) для каждого $j = \overline{1, m}$ интерпретация $\theta_2(X_j)$ состоит из номеров всех таких букв слова \bar{w}_{θ} , у которых $(m + j)$ -ая маркировка равна 1. Маркированные слова над алфавитом B будем называть допустимыми, если соответствующие им двоичные слова w_i при всех $i = \overline{1, m}$ содержат точно одну 1. Множество всех допустимых слов над алфавитом B обозначим D .

Рассмотрим следующие множества маркированных букв: $C_i = \{b \in B : \pi_i(b) = 1\}$, $C_{i,a} = \{b \in B : \pi_0(b) = a \wedge \pi_i(b) = 1\}$, $C_{i,k} = \{b \in B : \pi_i(b) = 1 \wedge \pi_k(b) = 1\}$, где $1 \leq i, k \leq 2m$ и $a \in A$. Легко видеть, что множество D представляется в виде: $D = \bigcap_{1 \leq i \leq m} ([B^{\infty}, C_i, B^{\infty}] \setminus [B^{\infty}, C_i B^* C_i, B^{\infty}])$ и, значит, принадлежат классу языков $\text{Rec}_S(B)$.

Таким образом, для формулы Φ над алфавитом B однозначно определяется маркированный спектр $\bar{S}_B(\Phi)$, состоящий из всех таких маркированных слов $\bar{w}_{\theta} \in W(B)$, что $M_w \models_{\theta} \Phi$ для некоторой интерпретации θ . Ясно, что при описанном подходе маркированный спектр атомарной формулы $R_a(x_i)$ будет состоять из допустимых слов, у которых на месте $\theta_1(x_i)$ стоит буква с носителем a , маркированный спектр атомарной формулы $x_i < x_k$ будет состоять из допустимых слов, у которых номер буквы с i -ой маркировкой 1 меньше номера буквы с k -ой маркировкой 1, маркированный спектр атомарной формулы $x_i = x_k$ будет состоять из допустимых слов, у которых номер буквы с i -ой маркировкой 1 равен номеру буквы с k -ой маркировкой 1, и маркированный спектр атомарной формулы $X_j(x_i)$ будет состоять из допустимых слов, у которых буквы с i -ой маркировкой 1 имеют также $(m + j)$ -ую маркировку 1.

Лемма 2. *Маркированные спектры атомарных формул представляются в виде:*

$$\begin{aligned} \bar{S}_B(R_a(x_i)) &= D \cap [B^{\infty}, C_{i,a}, B^{\infty}], \quad \bar{S}_B(x_i < x_k) = D \cap [B^{\infty}, C_i B^* C_k, B^{\infty}], \\ \bar{S}_B(x_i = x_k) &= D \cap [B^{\infty}, C_{i,k}, B^{\infty}], \quad \bar{S}_B(X_j(x_i)) = D \cap [B^{\infty}, C_{i,m+j}, B^{\infty}], \end{aligned}$$

и, значит, принадлежат классу языков $\text{Rec}_S(B)$.

Для каждого $i = \overline{1, 2m}$ обозначим π_{-i} отображение множества B на множество $B' = A \times \{0, 1\}^{p+q-1}$, которое в маркированных буквах $b = (a, k_1, \dots, k_{2m})$ из множества B удаляет i -ую маркировку, т.е. $\pi_{-i}(b) = (a, k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_{2m})$.

Лемма 3. Для любых формул Φ, Ψ языка \mathcal{L} и значений $1 \leq i, j \leq m$ выполняются равенства: $\overline{S}_B(\Phi \wedge \Psi) = \overline{S}_B(\Phi) \cap \overline{S}_B(\Psi)$, $\overline{S}_B(\Phi \vee \Psi) = \overline{S}_B(\Phi) \cup \overline{S}_B(\Psi)$, $\overline{S}_B(\neg \Phi) = D \setminus \overline{S}_B(\Phi)$, $\pi_{-i}(\overline{S}_B(\Phi)) = \overline{S}_{B'}((\exists x_i)\Phi)$, $\pi_{-(m+j)}(\overline{S}_B(\Phi)) = \overline{S}_{B'}((\exists X_j)\Phi)$.

Теорема. Для любого предложения Φ языка \mathcal{L} спектр $S(\Phi)$ принадлежит классу языков $\text{Res}_S(A)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Molchanov V.A. Nonstandard approach to general rational languages // Contributions to General Algebra. 2001. V. 13. P. 233-244.
2. Молчанов В.А. О распознавании языков полугруппами и автоматами // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2006. Вып. 8. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. С. 83-86.
3. Молчанов В.А. О логической определяемости языков на конечных автоматах // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2007. Вып. 9. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. С. 83-86.
4. Büchi J.R. Weak second-order arithmetic and finite automata // Z. Math. Logik and Grundl. Math. 1960. V. 6. P. 66-92.

УДК 519.4

В.Е. Новиков

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В ФОРМАЛЬНОМ КОНТЕКСТЕ

Статья продолжает исследование связи между структурой формальных концептов и структурой функциональных зависимостей [1] на n -арном отношении, которые были начаты в [2].

Восстановим основные определения концептуального анализа [3], используя аппарат алгебры отношений В.В. Вагнера [4] на контексте с n -арным отношением. Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$ — n -арное отношение, где $\bar{n} := (1, 2, \dots, n)$, $M_{\bar{n}} := M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, $\bar{i}_1 = i_1$ и $\bar{i}_k := (i_1, i_2, \dots, i_k)$, $x_{\bar{i}_k} := (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, $M_{\bar{i}_k} := M_{i_1} \times M_{i_2} \times \dots \times M_{i_k}$ для произвольных $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, при этом также обозначаем $\bar{i}_k \subseteq \bar{n}$. Говорим, что k -система $x_{\bar{i}_k}$ входит в отношение ρ , если существует n -система $x_{\bar{n}} \in \rho$, для которой элементы $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ являются её соответствующими компонентами. Для $\bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, $a_{\bar{i}_s} \in M_{\bar{i}_s}$, $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$ обозначим:

$$\pi_{\bar{j}_k}(\rho) := \{y_{\bar{j}_k} \in M_{\bar{j}_k} \mid y_{\bar{j}_k} \text{ входит в } \rho\};$$

$$\sigma_{\{a_{\bar{i}_s}\}}(\rho) := \{x_{\bar{n}} \in \rho \mid a_{\bar{i}_s} \subseteq x_{\bar{n}}\}; \quad \rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle := \pi_{\bar{j}_k}(\sigma_{\{x_{\bar{i}_s}\}}(\rho));$$

$$\widehat{\rho}_{\bar{j}_k}(X) := \cap \{\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle : x_{\bar{i}_s} \in X\}; \quad \widehat{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X) := \widehat{\rho}_{\bar{i}_s}(\widehat{\rho}_{\bar{j}_k}(X)).$$

Формальный контекст определяется как тройка $\mathbb{K} = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$, где зафиксирован $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$. $M_{\bar{i}_s}$ называется *множеством объектов*, $M_{\bar{n}}$ – декартово произведение базисных множеств атрибутов, $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ – некоторое n -арное отношение на базисных множествах атрибутов. Если $X = \widehat{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X)$ и $\widehat{\rho}_{\bar{i}_s}(Y) = X$ для $Y \subseteq M_{\bar{j}_k}$, то X называется \bar{i}_s -*концептом* по \bar{j}_k и Y – \bar{j}_k -*генератором* \bar{i}_s -*концепта* X . В этом случае элементы множества X будем называть *объектами*, а элементы множества Y – *атрибутами* \bar{i}_s -*концепта* X по \bar{j}_k , \bar{j}_k будем называть *индексом* генератора или атрибута.

Будем говорить, что в отношении $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ *имеет место F-зависимость* $M_{\bar{l}_q} \mapsto M_{\bar{j}_k}$, $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, если $\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{l}_q} \rangle$, $x_{\bar{l}_q} \in M_{\bar{l}_q}$, определяет отображение $\pi_{\bar{l}_q}(\rho) \mapsto \pi_{\bar{j}_k}(\rho)$.

Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ – произвольное n -арное отношение, $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ и $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$, определим *срез через множество* X :

$$\widetilde{\rho}_{\bar{j}_k}(X) := \cup \{\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle : x_{\bar{i}_s} \in X\}; \quad \widetilde{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X) := \widetilde{\rho}_{\bar{i}_s}(\widetilde{\rho}_{\bar{j}_k}(X)).$$

Из определений следует $\widehat{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X) \subseteq \widetilde{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X)$.

Предложение 1. *Пусть в отношении $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ имеет место F-зависимость $M_{\bar{l}_q} \mapsto M_{\bar{j}_k}$, $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, тогда для любого $X \subseteq M_{\bar{j}_k}$ выполняется*

$$\widetilde{\rho}_{\bar{j}_k \bar{l}_q}(X) = X.$$

Предложение 2. *Пусть в отношении $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ имеет место F-зависимость $M_{\bar{l}_q} \mapsto M_{\bar{j}_k}$, $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, и $\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{l}_q} \rangle = x_{\bar{j}_k}$, тогда*

$$\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{l}_q} \rangle \subseteq \rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{j}_k} \rangle.$$

Теорема 1. *Пусть в отношении $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ имеет место F-зависимость $M_{\bar{l}_q} \mapsto M_{\bar{j}_k}$, $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, тогда для любого $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$ каждый \bar{i}_s -концепт по \bar{l}_q содержится в некотором \bar{i}_s -концепте по \bar{j}_k , и каждый \bar{i}_s -концепт по \bar{j}_k содержит в себе некоторый \bar{i}_s -концепт по \bar{l}_q . А именно каждый \bar{i}_s -концепт по \bar{j}_k является объединением некоторых \bar{i}_s -концептов по \bar{l}_q .*

На рис. 1 с помощью кругов Эйлера показан один из возможных вариантов соотношений между этими концептами. Штрихованной линией указаны \bar{i}_s -концепты по \bar{l}_q , непрерывной линией – два \bar{i}_s -концепта по \bar{j}_k .

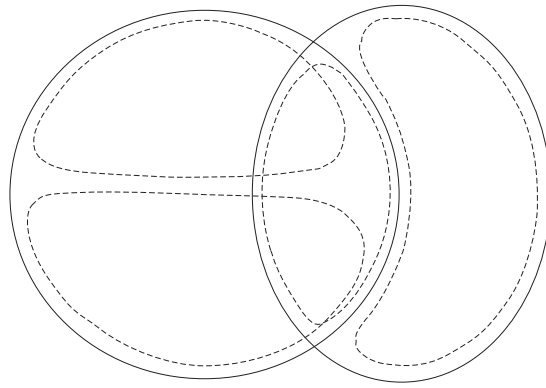


Рис. 1

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.
2. *Новиков В.Е.* Концепты и функциональные зависимости // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 68-70.
3. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
4. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1965. Вып.1. С. 3 - 178.

УДК 519.95: 681.31

А.А. Орел

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ МОДЕЛЕЙ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ, ОСНОВАННЫХ НА СЕТЯХ ПЕТРИ, К SADT-МОДЕЛЯМ

В работе [1] была рассмотрена технология проектирования бизнес-процессов, состоящая из двух этапов. На начальном этапе применяется методология структурного проектирования SADT [2] и создается функциональная модель, а затем на ее основе строится имитационная модель с использованием аппарата сетей Петри. Отмечено, что зачастую при построении имитационной модели лежащая в ее основе функциональная модель недостаточно точна и допускает неоднозначную трактовку. Для устранения обнаруженной неточности или неоднозначности требуется изменение функциональной модели и возврат к построению новой имитационной модели. Таким образом, реализуется некоторый итерационный процесс, в результате которого создаются все более точные модели рассматриваемой предметной области. Процесс завершается, когда устраняются все неточности и неоднозначности функциональной модели или когда достигается достаточная согласованность между функциональной и имитационной моделями.

Циклического процесса уточнения функциональной модели можно избежать, если на первом этапе проектирования построить имитационную модель на основе сети Петри. Это оправдано в случаях, когда наиболее важен

анализ динамических характеристик при взаимодействии бизнес-процессов. Примером может служить модель функционирования крупной библиотеки, построенная с использованием аппарата сетей Петри, рассмотренная в работе [3]. В этой работе применена методология проектирования «от общего к частному», основанная на последовательном уточнении проектных решений, представленных моделями, каждая последующая из которых уточняет предыдущую модель, до тех пор, пока не достигается необходимая степень детализации. Так, первая наиболее общая модель представлена сетью Петри, вид которой изображен на рис. 1. Она описывает только процессы выдачи и

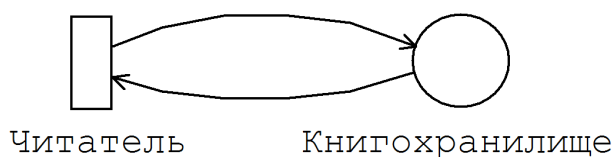


Рис.1

приема книг. Далее делается более десяти шагов для достижения требуемой детализации описания предметной области. В результате получается модель, отражающая основные бизнес-процессы функционирования крупной библиотеки. Она представлена следующей сетью Петри (рис. 2).

В данной модели функции читателя представлены переходами сети Петри, реализующими заказ, получение или возврат книги. Кроме того, отражены функции библиотеки, такие как приобретение новых книг и ликвидация книг пришедших в негодность. Они представлены соответствующими сетевыми переходами.

Рассмотрим задачу построения функциональной SADT-модели на основе сети Петри. В соответствии с технологией, описанной в работе [1], переходам сети Петри соответствуют функциональные блоки, а позициям – дуги функциональной модели, передающие данные. Однако такая технология не применима, когда позиции сети Петри представляют накопители данных. В рассмотренной модели такими позициями являются: книгохранилище, каталог книг и каталог выданных книг. При выполнении сети Петри фишки, моделирующие данные, поступающие в такие позиции, могут накапливаться, поэтому извлекаемые из них фишки при последовательных тактах выполнения сети в общем случае соответствуют другим данным. Необходимо найти способ представления позиций – накопителей данных в функциональной модели. Одним из вариантов представления такой позиции в функциональной модели являются последовательно связанные функциональные (рис. 3).

С точки зрения системного анализа подобная связь между функциями может квалифицироваться как патологическая, нарушающая принцип скрытия, а функциональные блоки могут оцениваться как содержательно-

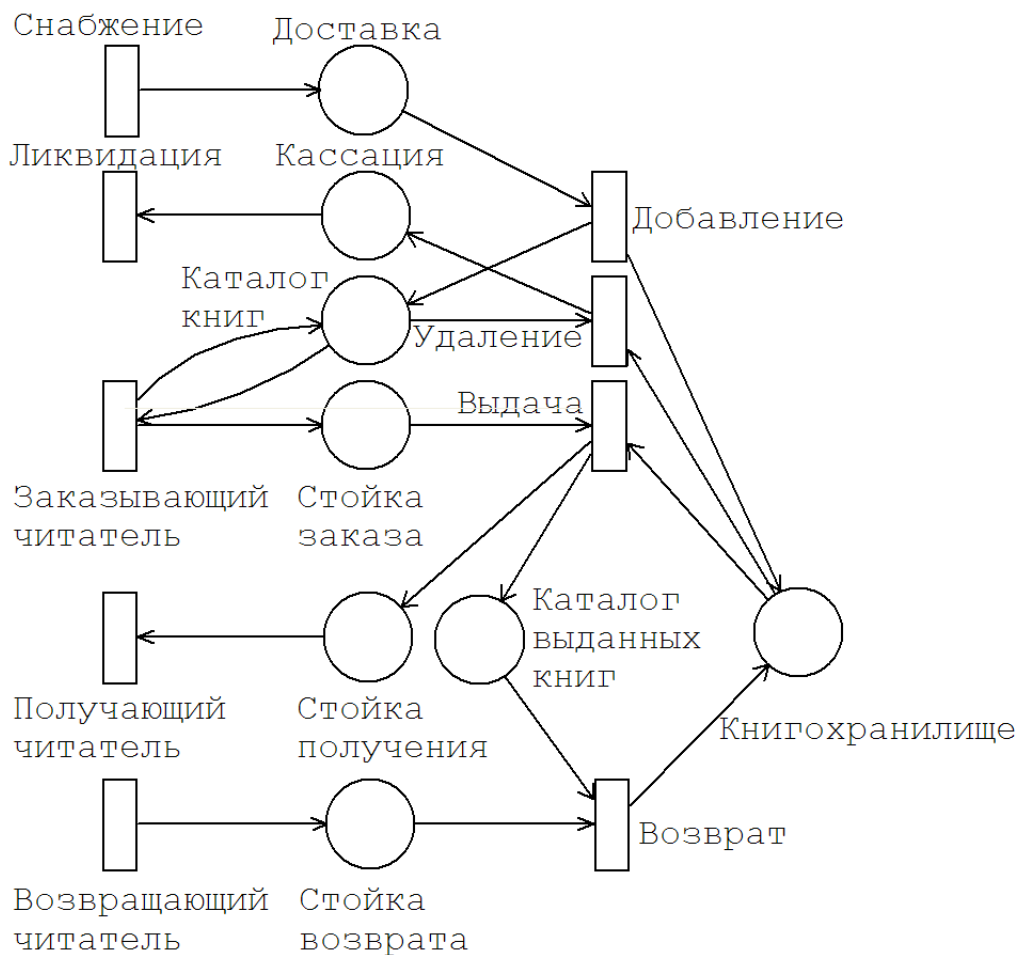


Рис.2

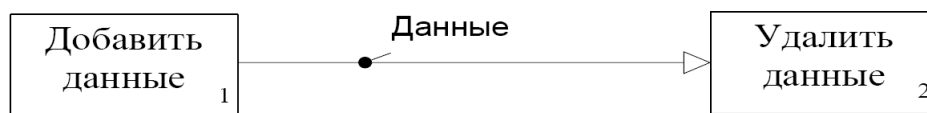


Рис.3

связанные. Однако в рассматриваемом случае дуга, передающая данные от выхода первого блока на вход второго символизирует всю совокупность хранимых данных, в то время как второй блок использует только часть данных. В общем случае эти данные отличаются от тех, которые получены на выходе первого блока. Поэтому рассматриваемые блоки не являются содержательно-связанными, а связь между ними не является патологической. Используя описанный подход, можно выполнить преобразование сети Петри, представленной на рис. 2, в функциональную модель. В результате получим следующую диаграмму (рис. 4).

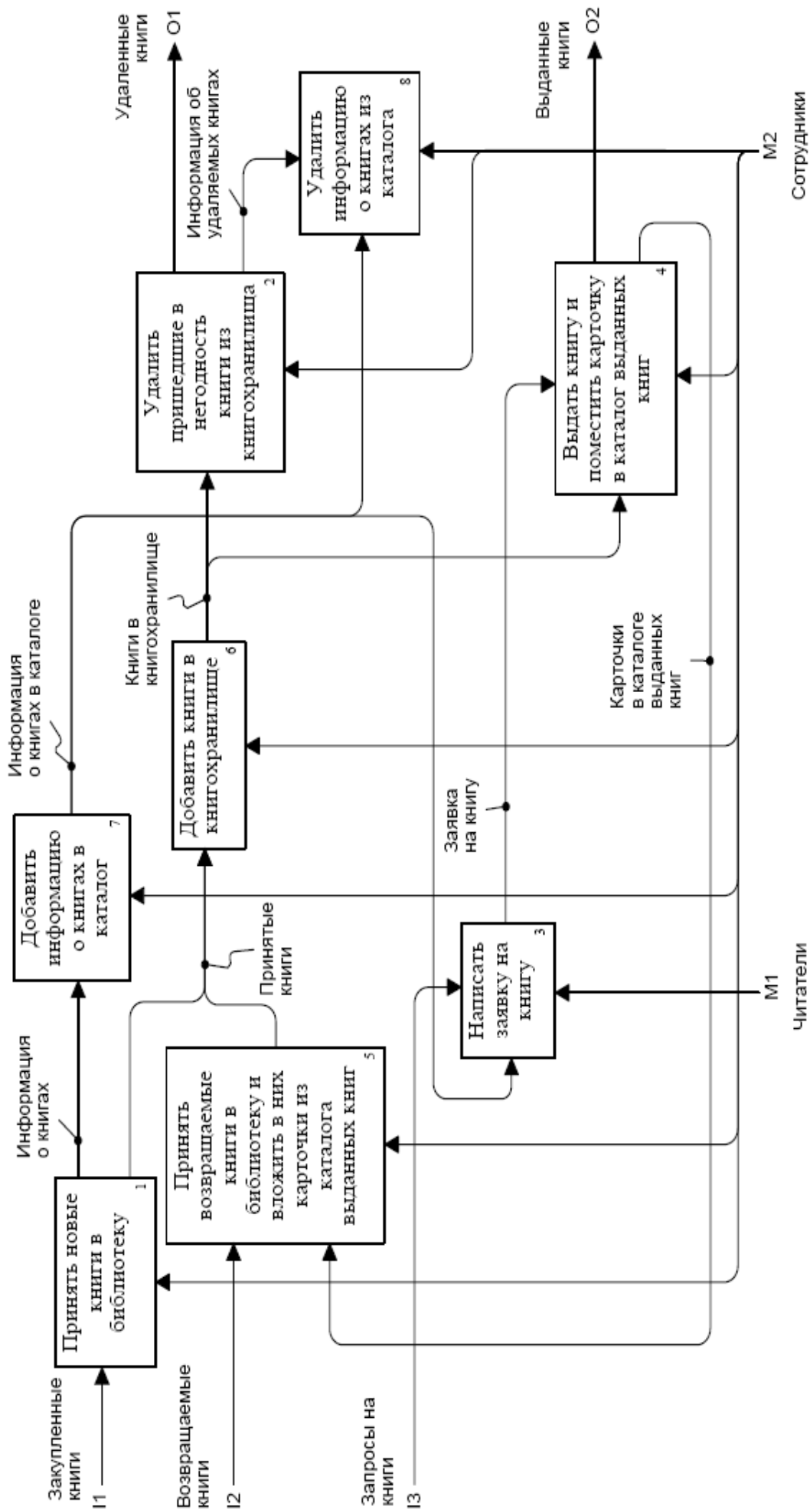


Рис.4

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Орел А.А. Моделирование бизнес-процессов с помощью сетей Петри // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2005. Вып. 7. С. 89–93.
2. Марка Д.А., МакГоуэн К. Методология структурного анализа и проектирования. М.: МетаТехнология, 1993.
3. Starego D. Modelowanie systemu funkcjonowania biblioteki za pomocą sieci Petriego. Referat wygłoszony na IV środowiskowej konferencji matematycznej Rzeszów-Czudec, listopad, 1997. <http://danstar.republika.pl/publik/modelow.html>

УДК 517.54

Е.В. Разумовская, А.В. Володченко

ОБ ОДНОМ КОЭФФИЦИЕНТНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ НА КЛАССАХ ОДНОЛИСТНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть C – класс функций Каратеодори $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$. Обозначим через $C(\alpha, \gamma)$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma \leq 1/(1 - \alpha)$, подкласс всех функций C $h(z) = 1 + h_1z + h_2z^2 + \dots$, таких, что $h(z) = \frac{1-\gamma}{(1-\alpha)p(z)+\alpha} + \gamma, p(z) \in C$.

Зафиксируем M , $1 < M < \infty$. Пусть $C_t(\alpha, \gamma)$ – класс всех функций $h(z, t)$, определенных на множестве $E \times [0, \log M]$, удовлетворяющих условию $h(\cdot, t) \in C(\alpha, \gamma)$ для почти всех $t \in [0, \log M]$; $h(w, \cdot)$ измерима на $[0, \log M]$, $w \in E = \{z : |z| < 1\}$. Будем говорить, если $f(z) \in S^M(\alpha, \gamma)$, то она может быть представлена в виде $f(z) = Mf(z, \log M, h)$, $h \in C_t(\alpha, \gamma)$, где $f(z, t, h)$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = -wh(w, t), t \in [0, \log M], w|_{t=0} = z, z \in E.$$

Такие классы функций при некоторых параметрах α, γ, M совпадают с классами функций, введенными В.Я. Гутлянским [1]. В таких классах рассмотрим задачу о нахождении множества значений системы функционалов $I_1(f) = (\operatorname{Re} a_2, \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Re} a_2 a_3)$. Похожие функционалы в данных классах исследовались в работах А.Ю. Васильева [2, 3]. Основным результатом предположим лемму.

Лемма. Пусть $p(z) \in C$. Тогда множество значений $(\operatorname{Re} p_1, \operatorname{Im} p_2, \operatorname{Re} p_2)$ задается условиями $|p_1| \leq 2$,

$$\max_{p \in C} \operatorname{Re} p_2(p_1) = 2 - (\operatorname{Im} p_1)^2, \min_{p \in C} \operatorname{Re} p_2(p_1) = -2 + (\operatorname{Re} p_1)^2,$$

$$\max_{p \in C} \operatorname{Im} p_2(p_1) = 2 - \frac{(\operatorname{Re} p_1 - \operatorname{Im} p_1)^2}{2}, \min_{p \in C} \operatorname{Im} p_2(p_1) = \frac{(\operatorname{Re} p_1 + \operatorname{Im} p_1)^2}{2} - 2.$$

Точки $\pm \max (\pm \operatorname{Re} p_2 (p_1))$ и $\pm \max (\pm \operatorname{Im} p_2 (p_1))$ доставляются двухпараметрическим семейством функций

$$p^\pm (z) = \frac{\left(1 + \frac{\bar{p}_1}{2} + z \left(1 + \frac{p_1}{2}\right)\right) \frac{1 \pm z}{1 \mp z} + 1 - \frac{\bar{p}_1}{2} + z \left(\frac{p_1}{2} - 1\right)}{\left(1 + \frac{\bar{p}_1}{2} - z \left(1 + \frac{p_1}{2}\right)\right) \frac{1 \pm z}{1 \mp z} + 1 - \frac{\bar{p}_1}{2} - z \left(\frac{p_1}{2} - 1\right)}. \quad (1)$$

Следствие. Пусть $h(z) \in C(\alpha, \gamma)$. Тогда множество значений $(\operatorname{Re} h_1, \operatorname{Im} h_1, \operatorname{Re} h_2, \operatorname{Im} h_2)$ задается условиями:

$$\begin{aligned} \max_{h \in C(\alpha, \gamma)} \operatorname{Re} h_2 (h_1) &= \\ &= \begin{cases} 2(1 - \alpha)(1 - \gamma) - \frac{(\operatorname{Re} h_1)^2 \alpha}{(1 - \alpha)(1 - \gamma)} - \frac{(\operatorname{Im} h_1)^2}{1 - \gamma}, & 0 \leq \gamma \leq 1; \\ 2(1 - \alpha)(\gamma - 1) - \frac{(\operatorname{Im} h_1)^2 \alpha}{(1 - \alpha)(\gamma - 1)} - \frac{(\operatorname{Re} h_1)^2}{\gamma - 1}, & 1 \leq \gamma \leq \frac{1}{1 - \alpha}; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{h \in C(\alpha, \gamma)} \operatorname{Im} h_2 (h_1) &= \\ &= \begin{cases} 2(1 - \gamma)(1 - \alpha) - \frac{(\operatorname{Re} h_1 - \operatorname{Im} h_1)^2}{2(1 - \gamma)(1 - \alpha)} - \frac{2\alpha \operatorname{Re} h_1 \operatorname{Im} h_1}{(1 - \gamma)(1 - \alpha)}, & 0 \leq \gamma \leq 1; \\ 2(\gamma - 1)(1 - \alpha) - \frac{(\operatorname{Re} h_1 + \operatorname{Im} h_1)^2}{2(\gamma - 1)(1 - \alpha)} + \frac{2\alpha \operatorname{Re} h_1 \operatorname{Im} h_1}{(\gamma - 1)(1 - \alpha)}, & 1 \leq \gamma \leq \frac{1}{1 - \alpha}; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{h \in C(\alpha, \gamma)} \operatorname{Re} h_2 (h_1) &= \\ &= \begin{cases} -2(1 - \alpha)(1 - \gamma) + \frac{(\operatorname{Im} h_1)^2 \alpha}{(1 - \alpha)(1 - \gamma)} + \frac{(\operatorname{Re} h_1)^2}{1 - \gamma}, & 0 \leq \gamma \leq 1; \\ -2(1 - \alpha)(\gamma - 1) + \frac{(\operatorname{Re} h_1)^2 \alpha}{(1 - \alpha)(\gamma - 1)} + \frac{(\operatorname{Im} h_1)^2}{\gamma - 1}, & 1 \leq \gamma \leq \frac{1}{1 - \alpha}; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{h \in C(\alpha, \gamma)} \operatorname{Im} h_2 (h_1) &= \\ &= \begin{cases} -2(1 - \gamma)(1 - \alpha) + \frac{(\operatorname{Re} h_1 + \operatorname{Im} h_1)^2}{2(1 - \gamma)(1 - \alpha)} - \frac{2\alpha \operatorname{Re} h_1 \operatorname{Im} h_1}{(1 - \gamma)(1 - \alpha)}, & 0 \leq \gamma \leq 1; \\ -2(\gamma - 1)(1 - \alpha) + \frac{(\operatorname{Re} h_1 - \operatorname{Im} h_1)^2}{2(\gamma - 1)(1 - \alpha)} + \frac{2\alpha \operatorname{Re} h_1 \operatorname{Im} h_1}{(\gamma - 1)(1 - \alpha)}, & 1 \leq \gamma \leq \frac{1}{1 - \alpha}. \end{cases} \end{aligned}$$

Точки $\pm \max (\pm \operatorname{Re} h_2 (h_1))$ и $\pm \max (\pm \operatorname{Im} h_2 (h_1))$ доставляются двухпараметрическим семейством функций

$$h^\pm (z) = \frac{1 - \gamma}{(1 - \alpha) p^\pm (z) + \alpha} + \gamma. \quad (2)$$

Рассмотрим поставленную задачу как задачу оптимального управления. Пусть $0 \leq \gamma \leq 1$. Будем решать задачу об экстремуме $\operatorname{Re} a_2 a_3$ при фиксированном a_2 . Пусть вектор фазовых координат $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) = (\operatorname{Re} a_2(t), \operatorname{Im} a_2(t), \operatorname{Re} a_3(t), \operatorname{Im} a_3(t))$ и вектор управлений

$(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)) = (\operatorname{Re} h_1(t), \operatorname{Im} h_1(t), \operatorname{Re} h_2(t), \operatorname{Im} h_2(t))$. Обозначим через G множество значений $(\operatorname{Re} h_1, \operatorname{Im} h_1, \operatorname{Re} h_2, \operatorname{Im} h_2)$, описанное в следствии. Равенства для x_1, x_2, x_3, x_4 можно записать в виде дифференциальных уравнений связи с начальными условиями

$$\frac{dx_1}{dt} = -u_1(t) e^{-t} = f_1, \quad x_1(0) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -u_2(t) e^{-t} = f_2, \quad x_2(0) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -2u_1(t) e^{-t} x_1(t) + 2u_2(t) x_2 e^{-t} - u_3(t) e^{-2t} = f_3, \quad x_3(0) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -2u_1(t) x_2(t) e^{-t} - 2u_2(t) x_1(t) e^{-t} - u_4(t) e^{-2t}, \quad x_4(0) = 0. \quad (6)$$

Будем искать максимум $\operatorname{Re} a_2 a_3$ при наличии дифференциальных уравнений (3) – (6) и условий $x_1(\log M) = \operatorname{Re} a_2, x_2(\log M) = \operatorname{Im} a_2, x_3(\log M) = \operatorname{Re} a_3, x_4(\log M) = \operatorname{Im} a_3$. Компактность класса $S^M(\alpha, \gamma)$, на котором рассматривается экстремальная задача, гарантирует существование экстремальной функции, что в свою очередь, обеспечивает существования оптимального управления \bar{u} . Последнее удовлетворяет принципу максимума Л.С.Понтрягина, то есть при почти всех $t \in [0, \log M]$ доставляет абсолютный максимум по \bar{u} функции Гамильтона

$$H(t, \bar{u}, \bar{x}, \bar{\psi}) = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 + \psi_3 f_3 + \psi_4 f_4, \quad (7)$$

где $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ является решением сопряженной гамильтоновой системы. Без ограничения общности будем считать $\psi_0 = +1$ в задаче $\operatorname{Re} a_2 a_3 \rightarrow \max$. Тогда после интегрирования

$$\psi_1(t) = -\psi_0 x_3 - 2x_1 c_3 - 2x_2 c_4 + c_1, \quad \psi_2(t) = \psi_0 x_4(t) + 2x_2 c_3 - 2x_1 c_4 + c_2,$$

$$\psi_3 = -\psi_0 x_1 + c_3, \quad \psi_4 = \psi_0 x_2 + c_4.$$

Функция Гамильтона $H = -u_1 c_1 e^{-t} - u_2 c_2 e^{-t} - u_3 c_3 e^{-2t} - u_4 c_4 e^{-2t}$. Так как $\frac{\partial H}{\partial u_i} = -c_i e^{-t}, i = 1, 2, \frac{\partial H}{\partial u_j} = -c_j e^{-2t}, j = 3, 4$, не обращаются в нуль, то максимальное значение функции Гамильтона достигается на границе множества G . Введем обозначения: $u_3^* = \max \operatorname{Re} h_2(h_1), u_4^* = \max \operatorname{Im} h_2(h_1)$.

Рассмотрим $H^* = H(u_1, u_2, u_3^*, u_4^*)$. Максимум функции H^* по u_1, u_2 на множестве $\tilde{G} : \{|h_1| < 2(1-\alpha)|1-\gamma|\}$, то есть $\tilde{G} = \{u_1^2 + u_2^2 < 4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2\}$ доставляет управление

$$u_1^0 = e^{-t} \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)(c_2c_4(1+2\alpha) + c_1c_4 + 2(1-\alpha)c_1c_3)}{(4\alpha((1-\alpha)c_3^2 - (1+\alpha)c_4^2) + 2c_4c_3)} e^t = L_1 e^t,$$

$$u_2^0 = \frac{(1-\alpha)(1-\gamma)(c_1c_4(1+2\alpha) + c_2c_4 + 2\alpha c_2c_3)}{(4\alpha((1-\alpha)c_3^2 - (1+\alpha)c_4^2) + 2c_4c_3)} e^t = L_2 e^t$$

при выборе начальных условий c_i из области: $\{c_3 < 0, c_4 < \frac{1+\sqrt{1\alpha^2-16\alpha^4+1}}{4\alpha(1+\alpha)}c_3\}$. Окончательный итог формулируется в следующей теореме.

Теорема. Для множества значений системы функционалов $I_1(f) = (\operatorname{Re} a_2, \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Re} a_2 a_3)$ в классе $S^M(\alpha, \gamma)$ справедливы следующие оценки:

Пусть $0 \leq \gamma \leq 1, L_1^2 + L_2^2 \leq \frac{4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2}{M^2}$, тогда $a_2 = -L_1 \log M - iL_2 \log M$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_2 a_3 &\leq -L_1 (L_1^2 - L_2^2) \log^3 M - \\ &- L_1 (1-\alpha)(1-\gamma) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \log M - \frac{\alpha L_1^2 + (1-\alpha)L_2^2}{(1-\alpha)(1-\gamma)} L_1 \log^2 M + \\ &+ 2L_1 L_2^2 \log^3 M + (1-\alpha)(1-\gamma) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) L_2 \log M + \\ &+ \frac{(L_1 - L_2)^2 - 4\alpha L_1 L_2}{2(1-\alpha)(1-\gamma)} L_2 \log^2 M. \end{aligned}$$

Пусть $1 \leq \gamma \leq \frac{1}{1-\alpha}, L_1^2 + L_2^2 \leq \frac{4(1-\alpha)^2(1-\gamma)^2}{M^2}$, тогда $a_2 = -L_1 \log M - iL_2 \log M$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_2 a_3 &\geq -L_1 (L_1^2 - L_2^2) \log^3 M - \\ &- L_1 (1-\alpha)(1-\gamma) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \log M - \frac{\alpha L_1^2 + (1-\alpha)L_2^2}{(1-\alpha)(1-\gamma)} L_1 \log^2 M + \\ &+ 2L_1 L_2^2 \log^3 M + (1-\alpha)(1-\gamma) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) L_2 \log M + \\ &+ \frac{(L_1 - L_2)^2 - 4\alpha L_1 L_2}{2(1-\alpha)(1-\gamma)} L_2 \log^2 M. \end{aligned}$$

При каждом фиксированном значении (L_1, L_2) экстремальную точку доставляет единственная функция, представимая в виде (2), с использованием функции (1), где $p_1 = \frac{(L_1 + iL_2)M}{(1-\alpha)(1-\gamma)}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гутлянский В.Я. О некоторых классах однолистных аналитических функций // Теория функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1979. Т. 194. С. 85-87.
2. Васильев А.Ю. Взаимное изменение начальных коэффициентов в подклассах однолистных функций // Выч. методы и программирование. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. С. 55-64.
3. Васильев А.Ю. Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных функций // Мат. заметки. 1985. Т.38, №1. С. 56-65.

УДК 519.4, 519.8

В.В. Розен

РЕШЕТКА МАЖОРАНТНО СТАБИЛЬНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА

1. Напомним, что подмножество упорядоченного множества называется мажорантно стабильным, если вместе с каждым элементом оно содержит и больший его элемент. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – упорядоченное множество. Отображение, которое каждому подмножеству $B \subseteq A$ ставит в соответствие множество его мажорант $\check{\omega}(B)$, является операцией замыкания, замкнутыми относительно которой будут, в точности, все мажорантно стабильные подмножества упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$. Поэтому семейство всех мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ образует полную решетку относительно включения; она обозначается далее через $\langle M(\omega), \subseteq \rangle$. Эта решетка обладает «хорошими» алгебраическими свойствами, в частности, она является вполне дистрибутивной и монокомпактно порожденной [1]. Двойственная ей полная решетка минорантно стабильных подмножеств есть $\langle M(\omega^{-1}), \subseteq \rangle$. Отображение, которое каждому мажорантно стабильному подмножеству B ставит в соответствие его теоретико-множественное дополнение B' , есть антиизоморфизм первой решетки на вторую. Указанные полные решетки являются важными производными структурами упорядоченного множества, которые встречаются в различных разделах математики, связанными со структурой порядка. Приведем несколько примеров, относящихся к задачам принятия решения с упорядоченным множеством исходов.

Пример 1. Антагонистическая игра с упорядоченными исходами представляет собой систему вида $G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle$, где X есть множество стратегий игрока 1, Y – множество стратегий игрока 2, A – множество исходов, упорядоченное отношением порядка ω , $F: X \times Y \rightarrow A$ – функция реализации. Для антагонистических игр с упорядоченными исходами некоторые их аналоги, заимствованные из классической теории антагонистических игр с функциями выигрыша (оптимальные стратегии игроков, цена игры и

др.), обладают рядом аномалий. Например, свойство стратегии «быть оптимальной» не сохраняется при изотонном преобразовании порядка или при добавлении несущественных исходов; игра может иметь цену, а двойственная ей игра - нет и т. п. В работе автора [2] показано, что указанные аномалии исчезают при «погружении» первоначального упорядоченного множества исходов игры $\langle A, \omega \rangle$ в полную решетку $\langle M(\omega), \subseteq \rangle$ ее мажорантно стабильных подмножеств.

Пример 2. В ряде задач принятия решений с упорядоченным множеством исходов возникает проблема продолжения упорядоченности на множество вероятностных мер. Обладающее «хорошими» математическими свойствами так называемое каноническое продолжение ϖ порядка ω на множество вероятностных мер $P_\omega(A)$ задается формулой

$$\mu \leq^{\varpi} \nu \Leftrightarrow (\forall \varphi \in C_0(\omega)) \bar{\varphi}(\mu) \leq \bar{\varphi}(\nu),$$

где $\mu, \nu \in P_\omega(A)$, $C_0(\omega)$ есть множество всех изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в действительную прямую \mathbf{R} , $\bar{\varphi}$ – продолжение отображения φ на множество вероятностных мер: $\bar{\varphi}(\mu) = \int_A \varphi d\mu$. В работе [3] установлено, что каноническое продолжение порядка ω на множество вероятностных мер может быть задано в явном виде следующим образом:

$$\mu \leq^{\varpi} \nu \Leftrightarrow (\forall B \in M(\omega)) \mu(B) \leq \nu(B). \quad (1)$$

Формула (1) показывает, что упорядочение по каноническому продолжению ϖ «учитывает» лишь мажорантно стабильные подмножества упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$.

Пример 3. С помощью мажорантно стабильных подмножеств может быть дано описание всех изотонных отображений конечного упорядоченного множества в числовую прямую [4]. Припишем каждому мажорантно стабильному подмножеству B конечного упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ некоторый неотрицательный вес $\lambda(B)$. Тогда отображение $\varphi: A \rightarrow \mathbf{R}$, определенное формулой

$$\varphi(a) = \sum_{a \in B} \lambda(B), \quad (2)$$

является изотонным. Обратно, любое изотонное отображение упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в \mathbf{R} может быть представлено в виде (2) с точностью до константы. При этом если все $\lambda(B)$ строго положительны, равенство (2) дает все строго изотонные отображения из $\langle A, \omega \rangle$ в \mathbf{R} с точностью до константы.

2. В связи с приведенными выше примерами представляет интерес нахождение различных числовых характеристик упорядоченного множества

$\langle M(\omega), \subseteq \rangle$. Как известно, важнейшими числовыми характеристиками конечного упорядоченного множества являются число его элементов, длина, ширина и размерность. В данной статье даются оценки указанных величин. При этом основную роль играет следующая

Теорема 1. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – конечное упорядоченное множество, имеющее наименьший элемент 0 . Пусть $(C_i)_{i \in I}$ – семейство цепей, образующих покрытие множества A , причем каждая цепь C_i содержит 0 . Тогда упорядоченное множество $\langle M(\omega^{-1}), \subseteq \rangle$ изоморфно вкладывается в прямое произведение указанного семейства цепей, снабженное покомпонентным упорядочением.

Доказательство теоремы основано на следующем утверждении, доказательство которого содержится в [5].

Лемма. Пусть Y – множество всех неразложимых в объединение элементов упорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$, имеющего наименьший элемент. Рассмотрим разложение множества Y в объединение цепей $(Z_k)_{k \in K}$, каждая из которых содержит наименьший элемент: $Y = \bigcup Z_k$. Определим при каждом k отображение $\varphi_k: X \rightarrow Z_k$ равенством: $\varphi_k(x) = \sup\{y \in Z_k: y \leq x\}$. Тогда отображение $\varphi(x) = (\varphi_k(x))_{k \in K}$ является изоморфным вложением упорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$ в прямое произведение семейства цепей $(Z_k)_{k \in K}$, снабженное покомпонентным упорядочением.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Возьмем в условиях леммы в качестве $\langle X, \leq \rangle$ упорядоченное множество $\langle M(\omega^{-1}), \subseteq \rangle$ (при этом пустое множество принадлежит $M(\omega^{-1})$ и является в нем наименьшим элементом). Неразложимыми в объединение элементами упорядоченного множества $\langle M(\omega^{-1}), \subseteq \rangle$ являются элементарные срезы $\omega^{-1} \langle a \rangle$, где $a \in A$. (Заметим, что в алгебраической терминологии $M(\omega^{-1})$ есть множество идеалов упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$, причем идеалы вида $\omega^{-1} \langle a \rangle$ суть, в точности, его главные идеалы.) Так как соответствие $a \mapsto \omega^{-1} \langle a \rangle$ является изоморфизмом упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ на упорядоченное множество всех главных идеалов, то разложению множества A в объединение цепей $(C_i)_{i \in I}$ будет соответствовать разложение в объединение цепей множества главных идеалов, то есть разложение в объединение цепей подмножества неразложимых в объединение элементов решетки $\langle M(\omega^{-1}), \subseteq \rangle$. В силу леммы, отображение $\varphi(B) = (\varphi_i(B))_{i \in I}$, где $\varphi_i(B) = \sup\{a \in C_i: a \in B\}$, будет изоморфным вложением упорядоченного множества $\langle M(\omega^{-1}), \subseteq \rangle$ в прямое произведение семейства цепей $(C_i)_{i \in I}$, снабженное покомпонентным порядком. Теорема доказана.

Для получения оценок числовых характеристик решетки $\langle M(\omega^{-1}), \subseteq \rangle$ воспользуемся наиболее «экономным» представлением упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в виде объединения цепей, предложенным Дилуорсом. Со-

гласно [6], наименьшее число цепей, в объединение которых разложимо упорядоченное множество, равно его ширине (то есть максимальной мощности его антицепи). Назовем такое разложение дилуорсовским.

В качестве следствий теоремы 1 можно получить оценки числовых характеристик решетки $\langle M(\omega), \subseteq \rangle$. Пусть $A = \bigcup_{i=1}^m C_i$ – дилуорсовское разложение упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$. Тогда справедливы следующие оценки.

Следствие 1. (оценка числа элементов решетки $\langle M(\omega), \subseteq \rangle$, то есть числа мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$): $|M(\omega)| \leq \prod_{i=1}^m |C_i|$.

Следствие 2. (оценка длины l упорядоченного множества $\langle M(\omega), \subseteq \rangle$): $l(M(\omega)) \leq \sum_{i=1}^m l(C_i)$.

Следствие 3. (оценка размерности \dim упорядоченного множества $\langle M(\omega), \subseteq \rangle$): $\dim M(\omega) \leq m$, где m – ширина упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В.В. Игры с упорядоченными исходами и монокомпактно порожденные решетки // Упорядоченные множества и решетки. Сб. науч. тр. 1978. Вып. 5. С. 90-97.
2. Розен В.В. Порядковые инварианты и проблема «окружения» для игр с упорядоченными исходами // Кибернетика и системный анализ. 2001. №2. С. 145-159.
3. Розен В.В. Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные линейные пространства // Изв. вузов. Сер. Математика. 1998. №7 (434). С. 32-38.
4. Розен В.В. Представление изотонных отображений в виде сумм весов мажорантно-стабильных подмножеств // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2001. Вып. 3. С. 110-113.
5. Розен В.В. Кодирование упорядоченных множеств // Упорядоченные множества и решетки. Сб. науч. тр. 1991. Вып.10. С. 88-96.
6. Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов

О СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ПРЯМОЙ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0, 1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y, \lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y, \lambda) = U_{\nu 0}(y, \lambda) + U_{\nu 1}(y, \lambda) := \\ := (\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид $\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0$.

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1 \omega + p_2 = 0$ и предположим, что корни ω_1, ω_2 отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала. Не нарушая общности, можно считать

$$1^0) \quad \omega_2 < 0 < \omega_1.$$

Обозначим $\tau := |\omega_2|/\omega_1 > 0$, $y_1(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_1 x)$, $y_2(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_2 x)$. Для определенности считаем $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Обозначим $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j, \lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda \omega_j) U_{\nu 1}(y_j, \lambda)/\lambda$ и $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ ($\nu, j = 1, 2$). Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det(U_\nu(y_j, \lambda))_{\nu, j=1}^2 = \\ = \lambda^2 \{a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda \omega_1} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda \omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)} a_{12}\} = \lambda^2 \Delta_0(\lambda).$$

Предположим, что всюду в дальнейшем выполняется условие

$$2^0) \quad a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{1\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0.$$

При этом условии $\Delta_0(\lambda) = a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda \omega_1} a_{\bar{1}2}$ и, следовательно, рассматриваемый пучок $L(\lambda)$ не является регулярным [1, с. 66–67] и, более того, не является нормальным по терминологии работы [2].

Очевидно, уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число простых корней, которые выражаются формулой

$$\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/\omega_1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $d_0 := \ln_0 c_0$ (\ln_0 есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $c_0 := -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{1\bar{2}}$.

Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Справедливы следующие альтернативные условия:

$$3^0) \quad W_2 \neq 0 \text{ или: } W_2 = 0 \text{ и } a_{1\bar{1}} = 0;$$

$$4^0) \quad W_2 = 0 \text{ и } a_{1\bar{1}} \neq 0.$$

В [3] показано, что если выполняется условие $\mathbf{3}^0$, то функция $y(x, \lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$ является порождающей для системы собственных функций (с.ф.) пучка $L(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$. Если же выполняется условие $\mathbf{4}^0$, то порождающей функцией является функция $y(x, \lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2 x))$, где $b_0 = a_{1\bar{1}}/a_{1\bar{2}} \neq 0$.

Обозначим $Y_\Lambda := \{y(x, \lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Если $\lambda = 0 \notin \Lambda$, то система Y_Λ совпадает с системой с.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с.з. В случае выполнения условия $\mathbf{3}^0$ система Y_Λ совпадает с обычной тригонометрической системой в экспоненциальной форме, и вопрос о полноте системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0, 1]$ в этом случае является тривиальным. В дальнейшем считаем, что выполняется условие $\mathbf{4}^0$.

В работе [3] было найдено значение параметра $\hat{\sigma} = \frac{1}{1+\tau}$, такое что система Y_Λ 2-кратно полна в пространстве $L_2[0, \sigma]$ при $\sigma = \hat{\sigma}$ и 2-кратно неполна с бесконечным дефектом при $\sigma > \hat{\sigma}$. Кроме того, были найдены условия, при которых имеет место 1-кратная полнота системы Y_Λ в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

В данной статье решается задача нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых системы Y_Λ 1-кратно неполна, минимальна и образует базис безусловной сходимости в пространстве $L_2[0, \sigma]$. Отметим, что в случае $0 < \omega_1 < \omega_2$ и при условиях $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} = a_{12} = 0$ свойства с.ф. (1-кратная полнота и неполнота, минимальность, базисность Рисса) детально исследовались в [4], а при условии $\mathbf{2}^0$ – в [5].

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Если выполняются условия $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, то для того чтобы система Y_Λ была 1-кратно неполна в $L_2[0, \sigma]$ и имела там бесконечный дефект, достаточно выполнения:*

- а) в случае $\sigma > \frac{1}{2}$, $\tau = 1$ – условия $b_0 = \pm 1$;
- б) в случае $\sigma > \frac{m+1}{\tau}$ и $\tau > m + 1$ при $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ – условия

$$\tau < |b_0|^2 \max\{1, |c_0|^{2m}\}; \quad (1)$$

- в) в случае $\sigma > 1$ и $m < \tau < m + 1$ при $m = 1$ и $m \leq \tau < m + 1$ при $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ – условия

$$|b_0|^2 \sum_{s=0}^m \frac{1}{|c_0|^{2s}} < \tau. \quad (2)$$

Теорема 2. *Если выполняются условия $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, то для 1-кратной минимальности системы Y в $L_2[0, \sigma]$ достаточно выполнения:*

- а) в случае $\sigma \geq \tilde{\sigma} := 1$, $\tau = 1$ – условия $b_0 \neq \pm 1$; функции биортогональной системы $Z = \{z_n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ определяются при $\sigma = \tilde{\sigma}$ однозначно;
- б) в случае $\sigma \geq \sigma_0 := \frac{1}{\tau}$, $\tau > 1$ – условия $\tau < |b_0|^2$; функции биортогональной системы Z определяются при $\sigma = \sigma_0$ однозначно;

в) в случае $\sigma \geq \frac{m+1}{\tau}$, $\tau > m+1$ — условия (1); функции биортогональной системы $Z = \{z_n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ определяются неоднозначно;

г) в случае $\sigma \geq \tilde{\sigma}$, $m < \tau \leq m+1$ при некотором $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\tau \neq 1$ — условия (2); функции биортогональной системы Z определяются при $\sigma = \tilde{\sigma}$ однозначно.

Теорема 3. Если выполняются условия 1^0 , 2^0 , 4^0 , то для 1-кратной безусловной базисности системы Y_Λ в $L_2[0, \sigma]$ достаточно выполнения:

а) в случае $\sigma = \frac{1}{\tau}$ и $\tau > 1$ — условия $\tau < |b_0|^2$;

б) в случае $\sigma = 1$, $\tau = 1$ — условия $b_0 \neq \pm 1$;

в) в случае $\sigma = 1$ и $m < \tau \leq m+1$, $\tau \neq 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — условия (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. Шкалик А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190-229.
3. Рыхлов В.С. О полноте собственных функций дифференциального пучка второго порядка, корни характеристического уравнения которого лежат на одной прямой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2007. Вып. 9. С. 88-91.
4. Рыхлов В.С. О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1992. Т. 36. № 3. С. 35-44.
5. Рыхлов В.С. О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциально-квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. М.: Науч.-исслед. гр. междунар. журн. "Integral Transforms and Special Functions" и ВЦ РАН. 2001. Т. 2. № 1. С. 85-103.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов, О.В. Шигаева

ТЕОРЕМА О КРАТНОЙ НЕПОЛНОТЕ КОМБИНАЦИИ ЭКСПОНЕНТ С ПОКАЗАТЕЛЯМИ, ЛЕЖАЩИМИ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ, И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ПУЧКАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0, 1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением

$$l(y, \lambda) = y^{(n)}(x) + \lambda p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda^n p_n y(x)$$

и двухточечными линейно независимыми краевыми условиями

$$\sum_{s+k \leq n-1} \lambda^s \left(\alpha_{jks} y^{(k)}(0) + \beta_{jks} y^{(k)}(1) \right) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где $n \geq 3$, $p_j, \alpha_{j sk}, \beta_{j sk} \in \mathbb{C}$.

Пусть собственные значения (с.з.) пучка $L(\lambda)$ образуют счетное множество $\{\lambda_j\}$, занумерованы в порядке неубывания модулей и, начиная с некоторого номера, простые. Обозначим $\Lambda = \{\lambda_j\} \setminus \{0\}$.

Пусть корни ω_j , $j = \overline{1, n}$, характеристического уравнения

$$\omega^n + p_1\omega^{n-1} + \dots + p_n = 0$$

попарно различны, отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, причем так, что один корень ω_n лежит по одну сторону от начала, а все другие корни – по другую сторону. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\omega_n < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n-1}. \quad (1)$$

Предположим также, что функция

$$y(x, \lambda) = a_1 e^{\lambda\omega_1 x} + a_2 e^{\lambda\omega_2 x} + \dots + a_{n-1} e^{\lambda\omega_{n-1} x} + a_n e^{\lambda\omega_n x}, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

является порождающей для собственных функций (с.ф.) пучка $L(\lambda)$, соответствующих с.з. из множества Λ .

Рассмотрим следующие системы функций:

$$Y_\Lambda = \{y(x, \lambda) | \lambda \in \Lambda\}, \quad Y_\mathbb{C} = \{y(x, \lambda) | \lambda \in \mathbb{C}\}. \quad (3)$$

Система Y_Λ есть система всех с.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих с.з. из множества Λ .

Пусть $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$. В настоящей статье исследуется вопрос об n - и m -кратной неполноте систем $Y_\mathbb{C}$ и Y_Λ в пространствах $L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 0$. Ранее в [1, 2] был исследован случай, когда корни характеристического уравнения лежат на одном луче и порождающая функция имеет вид (2). В [3] анонсирована теорема об n -кратной неполноте систем $Y_\mathbb{C}$ и Y_Λ в пространствах $L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 0$ при условиях (1)-(2).

Введем обозначения:

$$\hat{y}(x, \lambda) = (y_1(x, \lambda), \lambda y(x, \lambda), \dots, \lambda^m y(x, \lambda)),$$

$$\hat{f}(x) = (\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x), \dots, \bar{f}_m(x)),$$

$$\forall g \in L[0, \sigma] : \quad (g)_1(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi,$$

$$(g)_j(x) = \int_0^x (g)_{j-1}(\xi) d\xi = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{j-1}}{(j-1)!} g(\xi) d\xi, \quad j = \overline{2, m-1}.$$

Справедливы следующие результаты.

Лемма. Если

$$f_k \in L_2[0, \sigma], k = \overline{1, m},$$

$$(f_k)_j(\sigma) = 0, j = \overline{1, m-k}, k = \overline{1, m-1},$$

тогда для того чтобы

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \widehat{y}(\cdot, \lambda) \perp \widehat{f}$$

в пространстве $L_2^m[0, \sigma]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_n}{|\omega_n|} F_n\left(\frac{x}{|\omega_n|}\right) = 0, \quad x \in [0, \sigma|\omega_n|], \\ \sum_{s=1}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) = 0, \quad x \in [0, \sigma\omega_1], \\ \sum_{s=2}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) = 0, \quad x \in (\sigma\omega_1, \sigma\omega_2], \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{s=n-2}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) = 0, \quad x \in (\sigma\omega_{n-3}, \sigma\omega_{n-2}], \\ \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) = 0, \quad x \in (\sigma\omega_{n-2}, \sigma\omega_{n-1}], \end{array} \right.$$

где

$$F_s(x) = \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \omega_s^{m-k} (f_k)_{m-k}(x).$$

Теорема 1. Предположим, выполняется условие (1) и функция $y(x, \lambda)$ в (3) определяется формулой (2). Тогда при любых $a_j, j = \overline{1, n}$, в (2) система $Y_{\mathbb{C}}$ не является n -кратно полной ни в каком пространстве $L_2[0, \sigma]$, где $\sigma > 0$, и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно n -кратной полноты.

Следствие 1. Система Y_{Λ} не является n -кратно полной ни в каком пространстве $L_2[0, \sigma]$, где $\sigma > 0$, и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно n -кратной полноты.

Теорема 2. Предположим $n \geq 4$, выполняется условие (1) и функция $y(x, \lambda)$ в (3) определяется формулой (2). Тогда если коэффициенты $a_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1, n}$, в (2) таковы, что выполняется условие

$$\min_{\substack{r, l = \overline{1, m} \\ r \neq l}} \sum_{s=1}^{n-2} \left| \frac{a_s}{a_{n-1}} \right| \left| \frac{\omega_s^{-l} - \omega_s^{-r} \omega_n^{r-l}}{\omega_{n-1}^{-l} - \omega_{n-1}^{-r} \omega_n^{r-l}} \right| < 1, \quad (4)$$

то система $Y_{\mathbb{C}}$ не является m -кратно полной ($3 \leq m \leq n-1$) ни в каком пространстве $L_2[0, \sigma]$, где $\sigma > 0$, и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно m -кратной полноты.

Следствие 2. Предположим $n \geq 4$, выполняется условие (1) и функция $y(x, \lambda)$ в (3) определяется формулой (2). Тогда если коэффициенты $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$ в (2) таковы, что выполняется условие (4), то система Y_Λ не является m -кратно полной ($3 \leq m \leq n - 1$) ни в каком пространстве $L_2[0, \sigma]$, где $\sigma > 0$, и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно m -кратной полноты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голубь А.В., Кутепов В.А., Рыхлов В.С. Кратная неполнота собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // Саратов, 2004. 24 с. Деп. в ВИНТИ 05.08.04, №1353-В2004.
2. Рыхлов В.С. О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // Докл. РАЕН. 2004. С. 72–79.
3. Рыхлов В.С., Шигаева О.В. Об n -кратной неполноте системы собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Сарат. зимней шк., посвящ. памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов, 28 янв. – 4 февр. 2008 г. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2008. С. 162.

УДК 517.518.85

С.П. Сидоров

ТЕОРЕМА ТИПА КОРОВКИНА ДЛЯ КЛАССА ОПЕРАТОРОВ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ ФОРМОСОХРАНЕНИЯ

Классическими результатами для класса положительных операторов являются результаты П.П. Коровкина. Им были найдены [1] условия сходимости последовательности линейных положительных операторов к тождественному оператору I в $C[0, 1]$

Теорема 1. Пусть последовательность линейных операторов $L_i : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $n \geq 1$, такова, что

(1) $L_i(V_0) \subset V_0$, где $V_0 := \{f \in C[0, 1] : f \geq 0\}$;

(2) $\lim_{i \rightarrow \infty} \|(L_i - I)e_j\| = 0$, $j = 0, 1, 2$.

Тогда для всех $f \in C[0, 1]$ будет

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(L_i - I)f\| = 0.$$

Здесь $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \dots$, $\|\cdot\|$ означает равномерную норму, $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

Пусть $u_k \in C^n[0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, таковы, что система u_1, \dots, u_n есть обобщенная полная система Чебышева на $[0, 1]$. Напомним, что функция f , определенная на $[0, 1]$, называется выпуклой по отношению к системе функций u_1, \dots, u_k , если

$$\begin{vmatrix} u_0(t_0) & u_0(t_1) & \dots & u_0(t_{k+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_k(t_0) & u_k(t_1) & \dots & u_k(t_{k+1}) \\ f(t_0) & f(t_1) & \dots & f(t_{k+1}) \end{vmatrix} \geq 0$$

для всех наборов $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} < 1$, при этом пишут $f \in C(u_0, \dots, u_k)$.

В частности, если $u_0 = e_0$, то $C(u_0)$ есть конус всех возрастающих функций на $(0, 1)$. Если $u_0 = e_0$, $u_1 = e_1$, то $C(u_0, u_1)$ есть конус всех выпуклых на $(0, 1)$ функций. Обзор некоторых результатов обобщенной теории выпуклости содержится в книге [2].

Пусть $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in R^{n+1}$, $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\sigma_0\sigma_n \neq 0$. Обозначим $V_{k+1} := \{f \in C^k[0, 1] : f \in C(u_0, \dots, u_k)\}$, $k = 0, \dots, n-1$, и рассмотрим конус

$$V_{0,n}(\sigma) = \bigcap_{k=0}^n \sigma_k V_k.$$

В настоящей статье показывается, что для последовательностей линейных операторов, обладающих свойством формосохранения, связанным с конусом $V_{0,n}(\sigma)$, справедлив результат, аналогичный теореме 1. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\sigma_0\sigma_2 \neq -1$, $u_0 = e_0$, $u_1 = e_1$. Пусть последовательность линейных операторов $L_i : C^n[0, 1] \rightarrow C^n[0, 1]$, $i \geq 1$, такова, что

- (1) $L_i(V_{0,n}(\sigma)) \subset V_{0,n}(\sigma)$;
- (2) $\lim_{i \rightarrow \infty} \|(L_i - I)u_j\| = 0$, $j = 0, \dots, n$.

Тогда для всех $f \in C^n[0, 1]$ будет

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(L_i - I)f\| = 0.$$

Утверждение теоремы 2 следует из [3, теорема 3] и следующей леммы.

Лемма. Для всякого $z \in [0, 1]$ существует $\varphi_z \in \text{span}\{u_0, \dots, u_n\}$ такая, что

- (1) $\varphi_z \in V_{0,n}(\sigma)$;
- (2) $\varphi_z(z) = 0 < \varphi_z(x)$ для всех $x \in [0, 1] \setminus \{z\}$;
- (3) для любой $f \in C^n[0, 1]$ найдется $\alpha = \alpha(f) \geq 0$ такое, что для всех $\beta > \alpha$ будет $\beta\varphi_z + f \in V_{0,n}(\sigma)$.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что $\sigma_0 = 1$, а функции $u_1, \dots, u_n \in C^n[0, 1]$ удовлетворяют начальным условиям $u_k^{(p)} = 0$, $p = 0, \dots, k-1$, $k = 1, \dots, n$. Система u_1, \dots, u_n представима в виде (см. [2])

$$u_0(t) = \omega_0(t),$$

$$u_k(t) = \omega_0(t) \int_0^t \omega_1(\zeta_1) \int_0^{\zeta_1} \omega_2(\zeta_2) \dots \int_0^{\zeta_{k-1}} \omega_k(\zeta_k) d\zeta_k \dots d\zeta_1, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ есть строго положительные на $[0, 1]$ функции, такие что $\omega_k \in C^{n-k}[0, 1]$, $k = 0, \dots, n$.

Обозначим D_j , $j = 0, \dots, n$, дифференциальный оператор первого порядка

$$(D_j f)(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right).$$

Справедливы соотношения

$$D_j \dots D_0 u_{j+1} = \omega_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (1)$$

$$D_j \dots D_0 u_j = 0, \quad j = 0, \dots, n. \quad (2)$$

Возьмем $z \in [0, 1]$ и определим функцию $\varphi_z \in \text{span}\{u_0, \dots, u_n\}$,

$$\varphi_z = \sum_{k=0}^n \frac{D_{k-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} u_k,$$

следующим образом:

$$1) \quad D_{n-1} \dots D_0 \varphi_z(0) = \sigma_n \omega_n(0) \|1/\omega_n\|;$$

2) если $p = n-1, \dots, 2$, то полагаем $D_{p-1} \dots D_0 \varphi_z(0) = \sigma_p \omega_p(0) \|1/\omega_p\| (1 + \beta_p)$, где

$$\beta_p = \left| \sum_{k=p}^n \frac{D_{k-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \dots D_0 u_k \right|.$$

Тогда

$$\sigma_n D_{n-1} \dots D_0 \varphi_z = \omega_n \|1/\omega_n\| \geq 1.$$

Кроме того, для $p = n - 1, \dots, 2$ с учетом (1), (2) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_p D_{p-1} \dots D_0 \varphi_z &= \sigma_p D_{p-1} \dots D_0 \left(\sum_{k=0}^n \frac{D_{k-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} u_k \right) = \\
&= \sigma_p \sum_{k=0}^n \frac{D_{k-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \dots D_0 u_k = \\
&= \sigma_p \sum_{k=p}^n \frac{D_{k-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \dots D_0 u_k = \\
&= \sigma_p \left(\frac{D_{p-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_p(0)} D_{p-1} \dots D_0 u_p + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=p+1}^n \frac{D_{k-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \dots D_0 u_k \right) = \\
&= \omega_p \|1/\omega_p\| (1 + \beta_p) + \sigma_p \sum_{k=p+1}^n \frac{D_{k-1} \dots D_0 \varphi_z(0)}{\omega_k(0)} D_{p-1} \dots D_0 u_k \geq 1.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_p D_{p-1} \dots D_0 \varphi_z \geq 1, \quad p = 2, \dots, n.$$

Из [2, теорема 3.1, с. 392] следует, что

$$\varphi_z \in \sigma_p V_p, \quad p = 2, \dots, n.$$

Заметим, что так как $u_0 = e_0$, $u_1 = e_1$, то $D_1 = D_0 = D$, где D есть оператор дифференцирования первого порядка, $Df(t) = \frac{d}{dt}f(t)$. Поэтому $D(D\varphi_z) = D_1 D_0 \varphi_z \geq 1$ и φ_z строго выпукла на $[0, 1]$. Доопределим φ_z так, чтобы $\varphi_z(z) = 0 < \varphi_z(x)$ для $x \in [0, 1] \setminus \{z\}$. Для этого положим

$$\varphi_z(x) = \psi(x) - \psi(z) - D\varphi_z(z)(x - z)$$

на $[0, 1]$, где $D\psi = D\varphi_z$. Лемма доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167-а) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коровкин П.П. Сходимость линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР, Т. 90, 1953. с. 961-964
2. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
3. Munoz-Delgado F.J., Ramirez-Gonzalez V., Cardenas-Morales D. Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. V. 94. P. 144-159

Е.В. Сорина

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ

Рассматривается задача о построении полосы наименьшей постоянной ширины с полиномиальной осью, содержащей график заданной сегментной функции. Методами выпуклого анализа получены достаточные условия единственности решения задачи.

Пусть задана сегментная функция (с.ф.) $F(t) = [g_1(t), g_2(t)]$, $t \in [c; d]$, $g_1(t), g_2(t)$ – непрерывные функции, причём $g_1(t) \leq g_2(t)$, $P_n(A, t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$, $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ – вектор коэффициентов.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\rho(A) \equiv \max_{t \in [c; d]} \max \{P_n(A, t) - g_1(t), g_2(t) - P_n(A, t)\} \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (1)$$

Это задача о внешней оценке с.ф. $F(t)$ полиномиальной полосой. Если A^* – решение задачи (1), то $P_n(A^*, t)$ является осью полиномиальной полосы наименьшей ширины, которая содержит график с.ф.

Очевидно, задача (1) является обобщением задачи П.Л. Чебышёва о равномерном приближении непрерывной функции полиномом (случай, когда $g_1(t) = g_2(t)$ при $t \in [c; d]$). В дискретном случае, когда отрезок $[c; d]$ заменяется конечной сеткой значений для t , задача рассматривалась И.Ю. Выгодчиковой [1].

Введём обозначения

$$R_1(A) = \{t \in [c; d] : \rho(A) = P_n(A, t) - g_1(t) > g_2(t) - P_n(A, t)\},$$

$$R_2(A) = \{t \in [c; d] : \rho(A) = g_2(t) - P_n(A, t) > P_n(A, t) - g_1(t)\},$$

$$R_3(A) = \{t \in [c; d] : \rho(A) = P_n(A, t) - g_1(t) = g_2(t) - P_n(A, t)\},$$

$$R(A) = R_1(A) \cup R_2(A) \cup R_3(A).$$

Отметим, что если $R_3(A) \neq \emptyset$, то, очевидно,

$$R_3(A) = \{\hat{t} \in [c; d] : g_2(\hat{t}) - g_1(\hat{t}) = \max_{t \in [c; d]} (g_2(t) - g_1(t))\}.$$

Ранее в работе [2] был получен критерий решения задачи (1):

Теорема 1. *Для того, чтобы вектор коэффициентов A^* был решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий*

а) $R_3(A^*) \neq \emptyset$;

б) существует упорядоченный набор точек $\{t_i\}_{i=\overline{1, n+2}}$, $c \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+2} \leq d$, такой что если $t_i \in R_1(A^*)(R_2(A^*))$, то $t_{i+1} \in R_2(A^*)(R_1(A^*))$.

В отличие от задачи П.Л. Чебышёва задача (1) может иметь не единственное решение. Приведём достаточные условия единственности.

Теорема 2. Если вектор A^* удовлетворяет одному из условий

1) множество $R_3(A^*)$ содержит не менее $(n+1)$ точки,

2) существует набор $T = \{t_i\}_{i=\overline{1, n+2}} \subset R(A^*)$, в котором можно выделить упорядоченные точки $t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_l}$, $l \leq n+2$, из множества $R_1(A^*) \cup R_2(A^*)$, а остальные точки набора T содержатся в $R_3(A^*)$, и при этом если

$$t_{i_k} \in R_1(A^*)(R_2(A^*)), \text{ то } t_{i_{k+1}} \in \begin{cases} R_1(A^*)(R_2(A^*)), & i_{k+1} - i_k - \text{чѐтн.}, \\ R_2(A^*)(R_1(A^*)), & i_{k+1} - i_k - \text{нечѐтн.}, \end{cases}$$

то A^* является, причѐм единственным, решением задачи (1).

Доказательство. 1. Докажем, что A^* – решение задачи (1). Если выполнено условие 1) или условие 2) при $l < n+2$, то $R_3(A^*) \neq \emptyset$ и A^* – решение задачи (1) в соответствии с условием а) теоремы 1. Если же выполнено условие 2) и $R_3(A^*) = \emptyset$, то выполняется условие б) теоремы 1. Таким образом, в любом случае A^* – решение задачи (1).

2. Докажем единственность. Пусть $R_3(A^*) \neq \emptyset$ и A – ещё одно решение задачи (1). Тогда $R_3(A^*) = R_3(A)$ в силу определения множества $R_3(\cdot)$.

Если выполнено условие 1), то для точек $\{t_i\}_{i=\overline{1, n+1}} \subset R_3(A^*)$, как это следует из определения множества $R_3(A)$, будут выполняться равенства

$$P_n(A^*, t_i) = (g_1(t_i) + g_2(t_i))/2, i = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

которые представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно (a_0, a_1, \dots, a_n) . Её определитель, являющийся определителем Вандермонда, отличен от нуля. Поэтому A^* – единственное решение системы (2), а следовательно, и задачи (1).

Пусть теперь выполняется только условие 2). Функция $\rho(A)$ является выпуклой и конечной на R^{n+1} . Её субдифференциал, пользуясь субдифференциальным исчислением [3], можно записать в виде

$$\partial\rho(A) = \text{co}\{\partial_A f(A, t) : t \in R(A)\}, \quad (3)$$

где $f(A, t) = \max\{P_n(A, t) - g_1(t), g_2(t) - P_n(A, t)\}$, а $\partial_A f(A, t)$ – субдифференциал функции $f(A, t)$ по A . Тогда в соответствии с субдифференциаль-

ным исчислением можно выразить его в виде

$$\partial_A f(A, t) = \begin{cases} (1, t, \dots, t^n), & P_n(A, t) - g_1(t) > g_2(t) - P_n(A, t); \\ -(1, t, \dots, t^n), & g_2(t) - P_n(A, t) > P_n(A, t) - g_1(t); \\ [-(1, t, \dots, t^n), (1, t, \dots, t^n)], & P_n(A, t) = \frac{g_2(t) + g_1(t)}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает

$$\partial \rho(A)(\pi(A)) = \text{co}\{\xi(t)(1, t, \dots, t^n) : t \in R(A)\}, \quad (5)$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in R_1(A); \\ -1, & \text{если } t \in R_2(A); \\ [-1, 1], & \text{если } t \in R_3(A). \end{cases} \quad (6)$$

Учитывая (5) и (6), а также само условие 2), нетрудно выбрать для A^* селектор $\eta(t) \in \xi(t)$ так, что если $\eta(t_i) = +1(-1)$, то $\eta(t_{i+1}) = -1(+1)$, $i = \overline{1, n+1}$. Тогда по теореме 2 из [4] выполняется

$$O_{n+1} \in \text{int } \text{co}\{\eta(t_i)(1, t_i, \dots, t_i^n), i = \overline{1, n+2}\}.$$

Поэтому тем более $O_{n+1} \in \text{int } \rho(A^*)$, что, как известно из выпуклого анализа (см. [3]), говорит о том, что A^* – единственное решение задачи (1). Теорема доказана.

Приведём пример, показывающий существенность условий теоремы. Пусть $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = t + 2$, $t \in [0; 1]$, $n = 1$. Условие 1) теоремы 2 не выполняется, так как для оптимальных точек A множество $R_3(A) = \{1\}$ содержит лишь одну точку. Также не существует набора точек T , удовлетворяющего условию 2). Множество решений этой задачи можно записать в виде

$$\Omega = \{A^* = (a_0^*, a_1^*) : 0 \leq a_1^* \leq 1; a_0^* = 2 - a_1^*\}.$$

Оно содержит более чем одну точку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчиков И.Ю.* О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2001. Вып. 3. С. 25-27.
2. *Дудов С.И., Сорина Е.В.* О приближении сегментной функции полиномиальной полосой // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Саратов. зимней шк. Саратов, 28 янв. – 4 февр. 2008 г. Саратов, 2008. С. 67-68.
3. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
4. *Дудов С.И.* О двух вспомогательных фактах для исследования задач полиномиального приближения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2007. Вып. 9. С. 22-26.

А.Ю. Трынин

**СУЩЕСТВОВАНИЕ СИСТЕМ ЧЕБЫШЕВА
С ОГРАНИЧЕННЫМИ КОНСТАНТАМИ ЛЕБЕГА
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ**

Справедлива следующая

Теорема. *Существует последовательность систем Чебышева непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, для которой последовательность констант Лебега интерполяционного процесса по этой системе ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_{k,n} = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n}$, $n \in \mathbf{N}$, и последовательность положительных чисел d_n удовлетворяет соотношению

$$d_n = O\left(\frac{1}{\ln 2n}\right). \quad (1)$$

Положим

$$y(x, n) = \begin{cases} (-1)^k \sin\left(\frac{\pi n}{2d_n}(x - x_{k,n})\right), & k = \overline{0, n}, \\ \text{при } x \in [x_{k,n} - \frac{d_n}{n}, x_{k,n} + \frac{d_n}{n}] \cap [0, 1]; \\ (-1)^k, & k = \overline{0, n-1}, \\ \text{при } x \in [x_{k,n} + \frac{d_n}{n}, x_{k+1,n} - \frac{d_n}{n}]. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим систему функций $\{l_{k,n}\}_{k=0}^n$, $n \in \mathbf{N}$, где

$$l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k 2d_n y(x, n)}{\pi n (x - x_{k,n})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad n \in \mathbf{N}.$$

Каждая функция $l_{k,n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbf{N}$, непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$. На отрезке $[0, 1]$ любой нетривиальный полином, составленный из $n + 1$ функции этой системы,

$$\sum_{k=0}^n a_{k,n} l_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n a_{k,n} \frac{(-1)^k 2d_n y(x, n)}{\pi n (x - x_{k,n})} = \frac{y(x, n)}{\omega_n(x)} P_n(x),$$

здесь

$$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_{k,n}), \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{(-1)^k 2d_n a_{k,n}}{\pi n} \prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_{i,n}) \right\},$$

имеет не более n нулей. Так как функция $\frac{y(x,n)}{\omega_n(x)}$ в силу (2) на отрезке $[0, 1]$ нулей не имеет, а P_n – многочлен степени не выше n , то согласно

определению системы Чебышева (см., например, [1, гл. 1, §2; 2, гл. 1, §4; 3, гл. 1, §1.3]), множество функций $\{l_{k,n}\}_{k=0}^n$ является системой Чебышева (Т-системой), и для произвольной функции f , определённой в $x_{k,n} = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n}$, $n \in \mathbf{N}$, однозначно разрешима интерполяционная задача $\sum_{k=0}^n a_{k,n} l_{k,n}(x_{k,n}) = f(x_{k,n})$, $k = \overline{0, n}$, $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим интерполяционные операторы Лагранжа, построенные по функциям (2) и ставящие в соответствие любой определённой на отрезке $[0, \pi]$ функции f интерполирующую её в узлах $\{x_{k,n}\}_{k=0}^n$ функцию

$$\begin{aligned} L_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n \frac{y(x, n)}{y'(x_{k,n}, n)(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) \\ &= y(x, n) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) = \sum_{k=0}^n l_{k,n}(x) f(x_{k,n}). \end{aligned} \quad (3)$$

Значит, в качестве коэффициентов интерполяционного полинома по системе Чебышева $l_{k,n}$ следует брать $a_{k,n} = f(x_{k,n})$.

Оценим сверху константы Лебега — нормы операторов L_n , действующих из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$.

$$L_n = \sup_{f: \|f\|_{C[0,1]}=1} \|L_n(f, \cdot)\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} \left\{ |y(x, n)| \sum_{k=0}^n \left| \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x - x_{k,n})} \right| \right\}.$$

Возьмём произвольное $x \in [0, 1]$. Обозначим через k_0 номер ближайшего к x узла интерполирования $x_{k_0, n} = \frac{k_0}{n}$. Если таких узла два, то — номер левого. Тогда

$$\begin{aligned} L_n &= \max_{x \in [0,1]} \left\{ |y(x, n)| \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x - x_{k,n})} \right| + |y(x, n)| \left| \frac{(-1)^{k_0} 2d_n}{\pi n(x - x_{k_0, n})} \right| + \right. \\ &\quad \left. + |y(x, n)| \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x - x_{k,n})} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Сначала с помощью формулы Лагранжа и (2) (заметим, что $\max_{x \in [0,1]} |y'(x, n)| = |y'(x_{k_0, n}, n)|$) оценим

$$|y(x, n)| \left| \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x - x_{k_0, n})} \right| = \frac{2d_n |y(x, n) - y(x_{k_0, n}, n)|}{\pi n |x - x_{k_0, n}|} = \frac{|y'(\xi_{k_0, n}, n)|}{|y'(x_{k_0, n}, n)|} \leq 1, \quad (5)$$

где $\xi_{k_0, n}$ лежит между x и $x_{k_0, n}$. Далее, сумму первого и третьего слагаемых в (4) оценим таким образом

$$\left\{ |y(x, n)| \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x - x_{k,n})} \right| + |y(x, n)| \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x - x_{k,n})} \right| \right\} \leq$$

$$\leq \frac{2d_n}{\pi n} 4n \left\{ \int_0^{x-\frac{1}{4n}} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\frac{1}{4n}}^1 \frac{dt}{t-x} \right\}.$$

Учитывая, что $\max_{x \in [0,1]} \ln x(1-x) = \ln \frac{1}{4}$, получаем, что для любого натурального n и произвольного $x \in [0, 1]$

$$\left\{ |y(x, n)| \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})} \right| + |y(x, n)| \sum_{k=k_0+1}^n \left| \frac{(-1)^k 2d_n}{\pi n(x-x_{k,n})} \right| \right\} \leq \frac{16d_n}{\pi} \ln 2n.$$

Отсюда, из (4) и (5) следует

$$L_n \leq 1 + \frac{16d_n}{\pi} \ln 2n.$$

Учитывая выбор последовательности d_n в (1), получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Рассматриваемая система $\{l_{k,n}\}_{k=0}^n$, $n \in \mathbf{N}$, — не полная система Чебышева [2, гл.1, §1), т.е. система $\{l_{k,n}\}_{k=0}^r$, $n \in \mathbf{N}$, $r < n$ не является Т-системой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00167) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1977.
2. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
3. Привалов А.А. Теория интерполирования функций. В 2-х кн. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990.

УДК 517.51

Р.Н. Фадеев

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$ и $2 \leq p_n \leq N$ для всех $n \in \mathbf{N}$, $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbf{N}$. Если $I_i^k = [i/m_k, (i+1)/m_k)$, $i, k \in \mathbf{Z}_+$, $i < m_k$, то I_i^k разбивается на p_{k+1} интервалов I_j^{k+1} , $p_{k+1}p_{k+2}$ интервалов I_j^{k+2} и т.д.

Для $x \in [0, 1)$, записанного в виде $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n$, $x_n \in \mathbf{Z} \cap [0, p_n)$ (для $x = i/m_k$ берется разложение с конечным числом $x_n \neq 0$), и $k \in \mathbf{Z}_+$, записанного в виде $k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbf{Z} \cap [0, p_j)$, полагаем $\chi_k(x) =$

$\exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной и полной в $L[0, 1)$, что позволяет определить для $f \in L[0, 1)$ коэффициенты Фурье $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_k(t)} dt$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (см. [1, § 1.5]). В данной статье устанавливаются два признака сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|$, т.е. абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \chi_n(x)$. В отличие от аналогов классических результатов С.Н. Бернштейна и А. Зигмунда (см. [1, § 2.7 при $p_i \equiv 2$), в которых накладываются условия на функцию, здесь важную роль играют условия на коэффициенты Фурье типа квазиположительности. Тригонометрические аналоги теорем 1 и 2 установлены К.Яно [2].

Теорема 1. Пусть $f \in L[0, 1)$ и $m_n \int_0^{1/m_n} f(t) dt = O(1)$. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (|\hat{f}(n)| - \hat{f}(n))$ сходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \chi_n(x)$ сходится абсолютно.

Доказательство. Пусть $D_{m_n}(t) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \chi_k(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда, согласно формуле (1.5.21) из [1, § 1.5] имеем $D_{m_n}(t) = m_n X_{[0, 1/m_n)}$, где X_E – индикатор множества E . Поэтому из ортогональности системы $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ следует, что

$$\left| \sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}(k) \right| = \left| \int_0^1 f(t) D_{m_n}(t) dt \right| = \left| m_n \int_0^{1/m_n} f(t) dt \right| = O(1).$$

В силу неравенства

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} |\hat{f}(k)| \leq \left| \sum_{k=0}^{m_n-1} (|\hat{f}(k)| - \hat{f}(k)) \right| + \left| \sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}(k) \right| = O(1)$$

получаем утверждение теоремы.

Пусть $\text{osc}(f, [a, b)) = \sup_{x, y \in [a, b)} |f(x) - f(y)|$ и $v_k(f) := \text{osc}(f, [0, 1/k))$. Через $B[0, 1)$ обозначим пространство измеримых и ограниченных функций на $[0, 1)$.

Теорема 2. Пусть $f \in B[0, 1)$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – положительная последовательность, такая что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\lambda_n)^{-1} = \infty, \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\lambda_n)^{-1} v_n(f) < \infty. \quad (2)$$

Если $\{\hat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и при этом

$$\hat{f}(n) \geq -(n\lambda_n)^{-1}v_n(f), \quad (3)$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|$ сходится.

Доказательство. По определению $v_n(f) \downarrow$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(f) = v > 0$, то в силу (1) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\lambda_n)^{-1}v_n(f) \geq v \sum_{n=1}^{\infty} (n\lambda_n)^{-1} = \infty,$$

что противоречит (2). Значит, $v = 0$. Далее

$$\left| n \int_0^{1/n} f(t) dt - f(0) \right| \leq n \int_0^{1/n} |f(t) - f(0)| dt \leq v_n(f) \rightarrow 0.$$

В частности, $m_n \int_0^{1/m_n} f(t) dt$ ограничены. Если $\hat{f}(n) < 0$, $n \in \mathbb{N}$, то согласно (3) имеем $|\hat{f}(n)| - \hat{f}(n) = -2\hat{f}(n) \leq 2v_n(f)(n\lambda_n)^{-1}$, в противном случае эта разность равна нулю. Из этого неравенства и (2) следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (|\hat{f}(n)| - \hat{f}(n))$ сходится и, используя теорему 1, получаем утверждение данной теоремы.

Пусть $z_{k,n}(f) = \sum_{i=0}^{p_{n+1} \dots p_k - 1} \text{osc}(f, I_i^k)$, $k \geq n+1$, и $z_{n,n}(f) = \text{osc}(f, [0, 1/m_n])$.

Тогда $\sup_{k \geq n} z_{k,n}(f)$ обозначим через $\mathcal{F}l(f, [0, 1/m_n])$.

Следствие. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $0 < C_1\lambda_{m_k} \leq \lambda_n \leq C_2\lambda_{m_n}$ при $n \in [m_k, m_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и верно (1). Если для $f \in B[0, 1)$ имеем $\{\hat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}l(f, [0, 1/m_n])\lambda_{m_n}^{-1} < \infty, \quad \hat{f}(n) \geq -\mathcal{F}l(f, [0, 1/m_n])(n\lambda_n)^{-1},$$

где $n \in [m_k, m_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. Yano K. A note on absolute convergence of Fourier series // Proc. Japan Acad. 1963. V. 39, № 2. P. 65-68.

А.В. Харламов

ГЕОГРАФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ

В задачах пространственного моделирования для больших территорий, условия применения классической регрессионной модели [1]:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = 0, \quad V(\varepsilon) = \sigma^2 I,$$

как правило, не выполняются в силу естественной пространственной неоднородности или пространственной нестационарности. Пространственная нестационарность обусловлена тем, что объекты, которые находятся поблизости друг от друга, как правило, имеют много общего и в силу этого строятся регрессионные модели с учетом пространственной автокорреляции, отличающиеся от классической модели с постоянной дисперсией, которая в случае нормальности распределения ошибок представима в виде

$$Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I).$$

Модель пространственной автокорреляции в общем случае имеет следующий вид

$$Y \sim N(\mu, A),$$

где $\mu = X\beta$ и $A = V(\varepsilon)$ — дисперсионная матрица произвольного вида.

При анализе таких моделей используют два метода: условной авторегрессии и одновременной авторегрессии [2].

В модели условной авторегрессии предполагается, что переменная y_i зависит не только от регрессоров, но также от своих соседних значений, и ее распределение можно представить как условное нормальное:

$$y_i | \{y_j, j \neq i\} \sim N(\mu_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}(y_j - \mu_j), \tau^2).$$

Условное распределение зависит не только от набора регрессоров x_{ik} , $i = \overline{1; n}$, $k = \overline{1; p}$, но также от ошибок прогнозирования, которые берутся с соответствующими весовыми коэффициентами c_{ij} . Значения весов могут быть рассчитаны одним из возможных способов. Матричное представление модели имеет вид

$$Y \sim N(\mu, (I - C)^{-1} \tau^2).$$

Одновременная авторегрессионная модель определяется следующим образом:

$$y_i \sim N(\mu_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}(y_j - \mu_j), \tau^2).$$

Здесь рассматриваются уже безусловные распределения и вся система представима как система одновременных уравнений. Матричное представление данной модели имеет следующий вид:

$$Y \sim N(\mu, (I - C)^{-1}(I - C^T)^{-1}\tau^2).$$

Рассмотренные модели пространственной автокорреляции были предложены как вариант моделирования при наличии автокорреляции в ошибках.

Проведем сравнительный анализ различных методов моделирования для данных на вторичном рынке жилья однокомнатных квартир г. Саратова, полученных с сайта еженедельника газеты «Квадратный метр» (<http://www.ks.sarbc.ru>) за январь 2006 года. В моделях использовались следующие переменные:

- y – цена квартиры, тыс. руб.;
- x_1 – жилая площадь, м²;
- x_2 – площадь кухни, м²;
- x_3 – дополнительная площадь, м²;
- x_4 – логарифм расстояния, ln(м);
- x_5 – расположение на первом этаже;
- x_6 – расположение на последнем этаже;
- x_7 – дом малой этажности;
- x_8 – пятиэтажка;
- x_9 – кирпичный дом;
- x_{10} – в хорошем или отличном состоянии;
- x_{11} – имеются балкон или лоджия.

Глобальная линейная регрессионная модель, построенная по этим данным, имела следующий вид:

$$y = 1180,61 + 13,04x_1 + 10,38x_2 + 11,17x_3 - 116,40x_4 - 36,82x_5 - 28,19x_6 - 122,10x_7 - 30,43x_8 + 20,88x_9 + 19,22x_{10} + 16,87x_{11},$$

(1,04)
(1,36)
(0,79)
(2,62)
(5,70)
(5,34)
(10,99)
(5,06)
(5,03)
(4,20)
(5,30)

в скобках указаны стандартные ошибки. Все коэффициенты при переменных оказались значимыми, как и вся модель в целом. Коэффициент детерминации, равный $R^2 = 0,7008$ показывает, что модель объясняет 70% имеющейся зависимости.

Анализ ошибок глобальной модели (предполагается, что наличие автокорреляционной зависимости непременно проявляется в остатках классической регрессии) показал наличие автокорреляционной зависимости и значение коэффициента пространственной автокорреляции $\rho = 0,79$.

Построение авторегрессионных моделей дало следующие результаты.

Условная авторегрессионная модель —

$$y = 1102,99 + 13,19 x_1 + 9,93 x_2 + 9,89 x_3 - 106,53 x_4 - \\ - 34,98 x_5 - 28,03 x_6 - 124,56 x_7 - 28,73 x_8 + 14,02 x_9 + \\ + 18,33 x_{10} + 12,53 x_{11} + 0,97 y^*$$

(1,00) (1,27) (0,75) (3,40) (5,28) (4,97) (10,68) (4,76) (4,69) (3,85) (4,82) (0,07)

и одновременная авторегрессии модель —

$$y = 1117,09 + 13,30 x_1 + 10,09 x_2 + 10,08 x_3 - 108,54 x_4 - \\ - 36,14 x_5 - 28,19 x_6 - 125,51 x_7 - 28,46 x_8 + 14,74 x_9 + \\ + 18,44 x_{10} + 12,87 x_{11} + 0,64 y^*.$$

(1,00) (1,28) (0,76) (3,50) (5,37) (4,99) (10,64) (4,79) (4,85) (3,89) (4,94) (0,05)

Сравнивая все три модели, убеждаемся, что оценки коэффициентов в глобальной регрессионной модели и в моделях с пространственной автокорреляцией практически не различаются. Отметим, что коэффициент авторегрессии в условной модели принимает большее значение, чем в одновременной, что обуславливается спецификой методики их построения. Можно сделать вывод, что применение авторегрессионных моделей не дает какого-либо преимущества по сравнению с классической регрессией. Построенные модели только выявили пространственную нестационарность в данных, никак ее не объясняя.

Теперь можно отметить, что использование коэффициента авторегрессии в глобальной модели не дает того эффекта, который можно получить при географическом подходе, когда распределение получаемых остатков носит практически случайный характер. Анализ географически взвешенной модели по тем же данным [3] показывает, что географически поход дает более наглядное представление о наличии или отсутствии пространственной нестационарности в изучаемой области. Более того, этот поход позволяет находить объяснение пространственной зависимости и выявлять специфические особенности, присущие отдельным районам города.

Анализ остатков географической регрессии показывает значительное уменьшение пространственной зависимости, коэффициент автокорреляции уже принимает значение, равное $\rho = 0,36$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Greene C.W.* Econometric Analise. 3rd edition. New Jersey, 1997
2. *Fotheringham A.S., Brunson C., Charlton M.* Geographically weighted regression the analysis of spatially varyng relationships. University of Newcastle, 2002
3. *Харламов А.В.* Географический метод в построении регрессионных моделей // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып.9 С. 100-103.

Е.В. Хворостухина

О КОНКРЕТНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

Теория автоматов представляет собой один из основных разделов математической кибернетики, в котором изучаются устройства преобразования информации. В зависимости от специфики рассматриваемых задач устройство преобразования информации может моделироваться автоматом, у которого множество состояний наделено дополнительной математической структурой, сохраняющейся функциями переходов автомата. Так, известные конкретные задачи математической кибернетики приводят к понятиям упорядоченных, линейных, вероятностных, гиперграфических и других автоматов. Исследованиям таких автоматов посвящены, работы Б.И. Плоткина, Р.Г. Бухараева, Л.М. Глускина, Д.В. Сперанского, А.А. Сытника, В.Б. Лендера, А.В. Молчанова и многих других (см., например, [1-3]).

В настоящей статье продолжается изучение гиперграфических автоматов, т.е. автоматов, у которых множество состояний наделено дополнительной алгебраической структурой гиперграфа. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как многообразие таких алгебраических систем охватывает, в частности, автоматы, у которых множество состояний наделено дополнительной алгебраической структурой проективной или аффинной плоскости.

Согласно [4] гиперграфом называется алгебраическая система вида $H = (X, L)$, где X – непустое множество вершин гиперграфа и L – семейство произвольных подмножеств X , называемых ребрами гиперграфа. Вершины гиперграфа, содержащиеся в некотором его ребре, называются смежными. Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина содержится в некотором его ребре. Пусть p – произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p -определимыми ребрами, если в каждом его ребре найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p его вершин содержатся не более, чем в одном ребре.

Эндоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ называется преобразование φ множества вершин X , которое смежные в гиперграфе вершины переводит в смежные вершины этого гиперграфа. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\text{End}H$.

В статье под автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов (см. [1]) $A = (X, S, \delta)$ с множеством состояний X , полугруппой входных сигналов S и функцией переходов $\delta : X \times S \rightarrow X$. Для каждого $s \in S$ отображение δ определяет соответствующую этому входному сигналу

s функцию переходов $\delta_s : X \longrightarrow X$ по формуле: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$ ($x \in X$). Автомат $A = (X, S, \delta)$ будем называть гиперграфическим, если множество его состояний X наделено такой структурой гиперграфа $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов δ_s является эндоморфизмом гиперграфа H .

Пусть $H = (X, L)$ — произвольный гиперграф и $\text{End}H$ — полугруппа всех эндоморфизмов H . Определим отображение $\delta : X \times \text{End}H \longrightarrow X$, полагая $\delta(x, \varphi) = \varphi(x)$, где $x \in X$ и $\varphi \in \text{End}H$. Очевидно, что система $\text{Atm}(H) = (H, \text{End}H, \delta)$ является гиперграфическим автоматом. Такой автомат $\text{Atm}(H)$ называется универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфом H , так как он обладает следующим универсальным свойством: для всякого гиперграфического автомата $A = (H, S, \delta)$ существует, и притом единственный, гомоморфизм по входным сигналам этого автомата в автомат $\text{Atm}(H)$.

В статье исследована задача конкретной характеристики универсальных гиперграфических автоматов, которая формулируется следующим образом: при каких условиях на множестве состояний автомата $A = (X, S, \delta)$ можно так определить структуру гиперграфа $H = (X, L)$, что будет выполняться равенство $A = \text{Atm}(H)$, т.е. полугруппа входных сигналов автомата A будет равна полугруппе эндоморфизмов $\text{End}H$?

Пусть X — произвольное непустое множество, p — натуральное число и S — произвольная полугруппа преобразований множества X . Тогда S определяет на X следующие канонические $(p + 1)$ -арные отношения:

$$\delta_p = \cup\{\varphi^{p+1} : \varphi \in S\};$$

$$R_p = \{(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in X^{p+1} : X^{p+1} \setminus \Delta_X(p+1) \subset \delta_p^{-1}(x_1, \dots, x_p, x_{p+1})\},$$

где $\Delta_X(n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i = x_j \text{ для некоторых } 1 \leq i \neq j \leq n\}$.

Полугруппу S условимся называть n -ограниченно замкнутой, если она удовлетворяет следующему условию: полугруппа S содержит все такие преобразования φ множества X , что для любого n -элементного подмножества $Y \subset X$ выполняется равенство $\varphi|Y = \psi|Y$ при некотором $\psi \in S$.

Теорема. Автомат $A = (X, S, \delta)$ без равнодействующих входных сигналов в том и только том случае будет универсальным гиперграфическим автоматом $\text{Atm}(H) = (H, \text{End}H, \delta)$ для некоторого эффективного гиперграфа с p -определимыми ребрами $H = (X, L)$, если полугруппа входных сигналов S является $(p + 1)$ -ограниченно замкнутой полугруппой и ее каноническое отношение R_p удовлетворяет следующим условиям:

$$(T_1) \quad (x, \dots, x, x) \in R_p \text{ для любого } x \in X;$$

(T₂) для любых $1 \leq i_1, \dots, i_p, i_{p+1} \leq p+1$

$$(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in R_p \implies (x_{i_1}, \dots, x_{i_p}, x_{i_{p+1}}) \in R_p;$$

(T₃) для любых попарно различных элементов $x_1, \dots, x_p \in X$

$$(x, x_1, \dots, x_p), (x_p, x_1, \dots, y) \in R_p \implies (x, x_1, \dots, x_{p-1}, y) \in R_p;$$

(T₄) для любых $x_1, \dots, x_p \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, \dots, x_p, x_p) \in R_p$, найдется такой отличный от всех них элемент $x \in X$, что $(x_1, \dots, x_p, x) \in R_p$.

Полученный результат дает алгоритм решения задачи о том, какой конечный автомат является универсальным гиперграфическим автоматом для некоторого эффективного гиперграфа с p -определимыми ребрами. С другой стороны, этот результат позволяет изучать взаимосвязь абстрактных и элементарных свойств универсальных гиперграфических автоматов и их подгрупп входных сигналов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.
2. Лендер В.Б. Об эндоморфизмах проективных геометрий // Исследования алгебраических систем: Мат. записки Урал. ун-та. Свердловск, 1984. С. 48-50.
3. Молчанов А.В. Об определяемости гиперграфических автоматов их выходными функциями // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 1998. Вып. 2. С. 74-84.
4. Зыков А.А. Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29, №6. С. 89-154.

УДК 519.642.8

А.А. Хромов

ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ПОМОЩЬЮ СУММ ФЕЙЕРА

В данной статье результаты, полученные в [1] для простейшего интегрального уравнения первого рода, обобщаются на интегральное уравнение Вольтерра.

Рассмотрим уравнение

$$Au \equiv \int_0^x A(x, t)u(t)dt = f(x), \quad (1)$$

где $A(x, t)$ удовлетворяет следующим условиям: $A_x(x, t)$, $A_{xt}(x, t)$ непрерывны, $A(x, x) = 1$, $A_x(x, t)|_{t=x} = 0$, оператор A действует в пространстве $C[0, 1]$, а $f(x)$ задана ее δ -приближением $f_\delta(x)$.

Из теории интегральных уравнений известно [2]: $A^{-1}f = f' + Nf'$, где N — интегральный оператор:

$$N = -A_x + A_x^2 - A_x^3 + \dots$$

(A_x — интегральный оператор с ядром $A_x(x, t)$).

Продолжим функцию $u(x)$ на отрезок $[-1, 0]$ четным образом, а затем полученную функцию продолжим периодически на всю вещественную ось. В результате получим функцию $\tilde{u}(x)$.

Пусть F_n — оператор Фейера [3]. Рассмотрим

$$F_n \tilde{u} = \int_{-1}^1 F_n(x, t) \tilde{u}(t) dt,$$

где $F_n(x, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos k\pi(t - x)$.

Определим оператор \tilde{F}_n из равенства $\tilde{F}_n u = F_n \tilde{u}$.

Очевидно, \tilde{F}_n — интегральный оператор с ядром

$$\tilde{F}_n(x, t) = F_n(x, t) + F_n(x, -t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos k\pi t \cos k\pi x. \quad (2)$$

Построим операторы $R_n = \tilde{F}_n A^{-1}$.

Теорема 1. Операторы R_n имеют вид $R_n = R_n^\circ + R_{nN}$, где

$$\begin{aligned} R_n^\circ f &= \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (-1)^k \cos k\pi x\right] f(1) + \\ &+ 2\pi \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) k \cos k\pi x \int_0^1 \sin k\pi t f(t) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

$$R_{nN} f = \int_0^1 \int_t^1 \tilde{F}_n(x, \tau) N'_t(\tau, t) d\tau f(t) dt, \quad (4)$$

$N(\tau, t)$ — ядро оператора N .

Доказательство. Очевидно, $R_n f = \tilde{F}_n f' + \tilde{F}_n N f'$.

Далее,

$$\tilde{F}_n f' = \int_0^1 \tilde{F}_n(x, t) f'(t) dt = \tilde{F}_n(x, 1) f(1) - \int_0^1 F'_{nt}(x, t) f(t) dt.$$

Подставляя сюда (2), получим (3). Далее,

$$\tilde{F}_n N f' = \int_0^1 \tilde{F}_n(x, t) \int_0^t N(t, \tau) f'(\tau) d\tau dt.$$

Берем внутренний интеграл по частям.

Учитывая, что $N(t, t) = 0$, $f(0) = 0$, получим

$$\int_0^t N(t, \tau) f'(\tau) d\tau = - \int_0^t N'_\tau(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Подставляем этот интеграл в выражение для $\tilde{F}_n N f'$, меняем порядок интегрирования, затем меняем ролями τ и t . В результате получаем (4).

Получим оценки сверху и снизу для норм операторов R_n .

Теорема 2. *Операторы R_n являются ограниченными при каждом фиксированном n , и для их норм справедлива двусторонняя оценка, асимптотическая по n при $n \rightarrow \infty$*

$$n + \psi_2(n) \leq \|R_n\| \leq \frac{2}{3}n^2 + \psi_1(n),$$

где $\psi_1(n) = O(n)$, $\psi_2(n) = O(1)$.

Доказательство. Оценим сначала $\|R_n^\circ\|$. Имеем

$$\begin{aligned} |R_n^\circ f| &\leq \left| 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (-1)^k \cos k\pi x \right| \|f\|_C + \\ &+ 2\pi \left| \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) k \cos k\pi x \int_0^1 \sin k\pi t f(t) dt \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, первое слагаемое оценивается сверху константой $(1 + 2n)\|f\|_C$.

При оценке второго слагаемого в (5) отметим, что $\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) k = \frac{n^2-1}{6}$, а

$\int_0^1 |\sin k\pi t| |f(t)| dt \leq \frac{2}{\pi} \|f\|_C$. Тогда второе слагаемое оценится сверху константой $\frac{2}{3}n^2 - \frac{2}{3}$. Отсюда получим оценку

$$\|R_n^\circ\| \leq \frac{2}{3}n^2 + 2n + \frac{1}{3}. \quad (6)$$

Далее, очевидно, что

$$\begin{aligned} \|R_n^\circ\| &\geq |R_n f_0|_{f_0=1, x=0} = \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) (-1)^k + 2\pi \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) k \int_0^1 \sin k\pi t dt. \end{aligned}$$

Поскольку $k \int_0^1 \sin k\pi t dt = \frac{1}{\pi}(1 - (-1)^k)$, то

$$\|R_n^\circ\| \geq 1 + 2n - 2 \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = n. \quad (7)$$

Теперь оценим $\|R_{nN}\|$. Имеем $R_{nN}f = \tilde{F}_n N_1$, где $N_1(t) = - \int_0^t N'_\tau(t, \tau) f(\tau) d\tau$.

Построим по аналогии с $\tilde{u}(x)$ периодическое продолжение $\tilde{N}_1(t)$ функции $N_1(t)$. Тогда будем иметь

$$|R_{nN}f| = |F_n \tilde{N}_1| \leq \|\tilde{N}_1\|_{C[-1,1]} \int_{-1}^1 |F_n(x, t)| dt.$$

Но $\int_{-1}^1 |F_n(x, t)| dt = \int_{-1}^1 F_n(x, t) dt = 1$ [3] в силу положительности ядра Фейера,

а $\|\tilde{N}_1\|_{C[-1,1]} = \|N_1\|_{C[0,1]} \leq C \|f\|_{C[0,1]}$, где $C = \max_t \int_0^t |N'_\tau(t, \tau)| d\tau$. Отсюда следует оценка

$$\|R_{nN}\| \leq C. \quad (8)$$

Из (6), (7), (8) и оценки

$$\|R_n^\circ\| - \|R_{nN}\| \leq \|R_n\| \leq \|R_n^\circ\| + \|R_{nN}\|$$

вытекает утверждение теоремы.

Следствие. *Для того чтобы*

$$\Delta(u, R_n, \delta) \equiv \sup\{\|R_n f_\delta - u\|_C : \|f_\delta - f\|_C \leq \delta\} \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$, необходимо выбрать $n = n(\delta)$ так, чтобы $n(\delta)\delta \rightarrow 0$ и достаточно — так, чтобы $n^2(\delta)\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.А. Приближение решений простейшего интегрального уравнения с помощью сумм Фейера // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. окл. 14-й Саратов зим. шк., посв. памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов, 28 янв. – 4 февр. 2008 г. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2008. С. 199-200.
2. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959. 232 с.
3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.:Наука. 1977. 508 с.

А.П. Хромов

**ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ
ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Пусть A — интегральный оператор:

$$Af = \int_0^1 A(x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1]. \quad (1)$$

Наложим следующие условия на ядро $A(x, t)$. Требуем, чтобы $A(x, t)$, $A_x(x, t)$, $A_t(x, t)$, $A_{xt}(x, t)$, $A_{x^2}(x, t)$ ($A_{x^s t^l}(x, t) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A(x, t)$) были непрерывны при $t \leq x$ и $t \geq x$ (см. [1, с. 383]) и

$$\Delta A(x, t)|_{t=x} = A(x, x-0) - A(x, x+0) = 1. \quad (2)$$

Оператор (1) с условием (2) (даже в более общем случае) рассматривался в [1]. Рассмотрим теперь такой случай, когда область значений оператора A удовлетворяет условию периодичности:

$$y(0) = y(1), \quad (3)$$

где $y = Af$.

Следующая теорема показывает насколько богат такой класс интегральных операторов.

Теорема 1. *Если $A_1 f = \int_0^1 A_1(x, t)f(t) dt$ — произвольный интегральный оператор с кусочно-непрерывным ядром, $g(x) \in C[0, 1]$ и $g(0) \neq g(1)$, то оператор $Af = \int_0^1 A_1(x, t)f(t) dt + g(x) \int_0^1 v(t)f(t) dt$, где $v(t) = (A_1(1, t) - A_1(0, t))(g(0) - g(1))^{-1}$ удовлетворяет (3).*

Отметим, что оператор A получается из A_1 одномерным возмущением, которое не меняет, например, такого свойства, как (2).

Пусть $A_x f = \int_0^1 A_x(x, t)f(t) dt$. Представим его в виде $A_x = W + V$, где $\|W\| < 1$ (норма в $L_2[0, 1]$), а V конечномерный: $Vf = \sum_{k=1}^m (f, \psi_k)g_k(x)$, где $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$. Очевидно, без ограничения общности можно считать,

что $\psi_k(x)$ и $g_k(x)$ бесконечно дифференцируемы (достаточно взять в качестве $g_k(x)$ обычную тригонометрическую систему, а в качестве $\psi_k(x)$ подобрать линейные комбинации этой системы).

Как и лемма 14 из [2] получается

Лемма 1. *Оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы*

$$M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{g}_k, \psi_j)_1^m \\ \int_0^1 A(0, t) \tilde{g}^T(t) dt \end{pmatrix}$$

равен m . Здесь $\tilde{g}_k = (E + W)^{-1}g_k$, $\tilde{g}(t) = (\tilde{g}_1(t), \dots, \tilde{g}_m(t))^T$ (T — знак транспонирования), E — единичная матрица (в дальнейшем через E будет обозначаться и единичный оператор).

Лемма 2. *Пусть A^{-1} существует и для определенности, пусть $\Delta = \det \|E + (\tilde{g}_k, \psi_j)_1^m\| \neq 0$. Тогда область определения $D_{A^{-1}}$ оператора A^{-1} состоит из всех $y(x) \in W_2^1[0, 1]$, для которых $y(0) = y(1)$, и*

$$A^{-1}y = (E + W)^{-1}y' - \frac{1}{\Delta} \sum_{j,k=1}^m ((E + W)^{-1}y', \psi_j) \Delta_{jk} \tilde{g}_k(x), \quad (4)$$

где Δ_{jk} — алгебраические дополнения элементов определителя Δ .

Доказательство. Пусть $y = Af$. Тогда эквивалентно имеем

$$y'(x) = f(x) + A_x f, \quad (5)$$

$$y(0) = \int_0^1 A(0, t) f(t) dt, \quad (6)$$

Из (5) получаем

$$(E + W)^{-1}y' = f(x) + \sum_{k=1}^m (f, w_k) \tilde{g}_k(x). \quad (7)$$

Из (7) имеем

$$((E + W)^{-1}y', \psi_j) = (f, \psi_j) + \sum_{k=1}^m (f, w_k) (\tilde{g}_k, \psi_j) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (8)$$

Находя из (8) (f, ψ_j) и подставляя в (7), приходим к (4). Подставив вместо f в правую часть (6) $A^{-1}y$, получим

$$y(0) = \int_0^1 A(0, t) A^{-1}y(t) dt. \quad (9)$$

Таким образом, $D_{A^{-1}}$ состоит из всех $y(x) \in W_2^1[0, 1]$, для которых выполняется (9). Но в то же время $D_{A^{-1}}$ удовлетворяет условиям (3). Покажем, что условия (3) и (9) эквивалентны. Обозначим через L множество функций из $W_2^1[0, 1]$, для которых $f_1(y) = y(0) - y(1) = 0$. Тогда, очевидно, имеем $D_{A^{-1}} \subset L$. Условие (9) запишем так: $f_2(y) = 0$. Покажем, что функционалы f_1 и f_2 линейно зависимы. Допустим противное. Возьмем функцию $y_1(x) \in W_2^1[0, 1]$ так, чтобы $|f_1(y_1)| + |f_2(y_1)| > 0$. Утверждаем, что есть $y_2(x)$ из $W_2^1[0, 1]$ такая, что

$$\det(f_i(y_j))_1^2 \neq 0. \quad (10)$$

Если бы такой $y_2(x)$ не существовало, то имели бы

$$\begin{vmatrix} f_1(y_1) & f_2(y_1) \\ f_1(y) & f_2(y) \end{vmatrix} = 0$$

для всех $y(x)$. Тогда получаем, что f_1 и f_2 линейно зависимы. Противоречие, т.е. (10) имеет в действительности место. Положим $B = (f_i(y_j))_1^2$. По доказанному B есть неособая матрица. Положим $B^{-1} = \Gamma = (\gamma_{kj})_1^2$. Тогда имеем

$$E = \Gamma B = \begin{pmatrix} \gamma_{11}f_1(y_1) + \gamma_{12}f_1(y_2) & \gamma_{11}f_2(y_1) + \gamma_{12}f_2(y_2) \\ \gamma_{21}f_1(y_1) + \gamma_{22}f_1(y_2) & \gamma_{21}f_2(y_1) + \gamma_{22}f_2(y_2) \end{pmatrix}.$$

Положим $\tilde{y}_1 = \gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2$, $\tilde{y}_2 = \gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2$. Тогда получим $f_i(y_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2$), где δ_{ij} — символ Кронекера. Отсюда, в частности, имеем $f_2(\tilde{y}_1) = 0$, $f_1(\tilde{y}_1) = 1$. Значит, $\tilde{y}_1 \in D_{A^{-1}}$, а тогда и $\tilde{y}_1 \in L$. Поэтому $f_1(\tilde{y}_1) = 0$. Противоречие. Таким образом, доказано, что f_1 и f_2 линейно зависимы. Утверждаем, что функционал $f_2(y)$ ненулевой. В противном случае $D_{A^{-1}} = W_2^1[0, 1]$, что противоречит включению $D_{A^{-1}} \subset L$. Поэтому из $\alpha f_1(y) + \beta f_2(y) = 0$ ($|\alpha| + |\beta| > 0$) получаем $\alpha\beta \neq 0$. Значит, условия $f_1(y) = 0$ и $f_2(y) = 0$ эквивалентны. Лемма доказана.

Пусть $y = R_\lambda f = (E - \lambda A)^{-1} A f$. Тогда, как и в [2], на основании леммы 2 получаем, что существует $v(x) \in C^2[0, 1]$, $v(x) \neq 0$ и $v(0) = 1$, такая, что $z(x) = v^{-1}(x)y(x)$ удовлетворяет системы

$$z'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1) + \int_0^1 a(x, t)z(t) dt - \lambda z(x) = m(x), \quad (11)$$

$$z(0) - v(1)z(1) = 0, \quad (12)$$

где $a_i(x) \in C^1[0, 1]$, $a(x, t)$ непрерывна при $t \leq x$ и $t \geq x$, $m(x) = f(x)v^{-1}(x)$.

Теорема 2 (равносходимости). Если $f(x) \in L[0, 1]$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f, x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{e^{2k\pi i x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для тех k , для которых $|2k\pi| < r$; $\|\cdot\|_{\infty}$ — норма в $L_{\infty}[0, 1]$.

Доказательство. Как и в [2], из представления (11), (12) получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [z(x, \lambda) - R_{0\lambda} m] d\lambda \right\|_{\infty} = 0, \quad (13)$$

где $z(x, \lambda) = v^{-1}(x)R_{\lambda}f$, $R_{0\lambda}$ — резольвента оператора L_0 : $z'(x)$, $z(0) - v(1)z(1) = 0$. Поэтому из (13) получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| v^{-1}(x)S_r(f, x) - \sigma_r^0(m, x) \right\|_{\infty} = 0, \quad (14)$$

где $\sigma_r^0(m, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{0\lambda} m d\lambda$.

Собственные значения L_0 есть $\lambda_k^0 = 2k\pi i - \ln a$, где $a = v(1)$. Отсюда его собственные функции есть $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k^0 x} = a^{-x} e^{2k\pi i x}$. Биортогональной к этой системе будет $\{\psi_k(x)\}$, где $\psi_k(x) = \bar{a}^x e^{2k\pi i x}$. Поэтому

$$\sigma_r^0(m, x) = a^{-x} \sigma_r(m a^x, x),$$

Значит, из (14) имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - v_1(x) \sigma_r(f v_1^{-1}, x) \right\|_{\infty} = 0, \quad (15)$$

где $v_1(x) = v(x)a^{-x}$. Так как $v_1(0) = v_1(1)$, то по теореме Штейнгауза [3, с. 111–112]

$$v_1(x) \sigma_r(f v_1^{-1}, x) = \sigma_r(f, x) + o(1). \quad (16)$$

Из (15) и (16) вытекает утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1) и РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114 (156), №3. С. 378-405.
2. Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, №11. С. 115–142.
3. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961. 936 с.

Г.В. Хромова

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В [1] автором был предложен общий подход к решению вопроса о расширении возможностей применения известных методов регуляризации для более широкого класса уравнений первого рода и более сильных метрик, нежели в классических постановках. Здесь проводится реализация указанного подхода для метода М.М. Лаврентьева [2], интегрального уравнения первого рода с инволюцией и равномерной метрики.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Au \equiv \int_0^{1-x} A(1-x, t)u(t)dt + \beta \int_0^x A(x, t)u(t)dt = f(x), \quad (1)$$

где $A(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x, t , $A(x, x) = 1$, $A_x(x, t)|_{t=x} = 0$, $\beta > 1$.

Интегральные операторы с инволюцией были введены А.П. Хромовым и исследовались в задачах спектрального анализа. Мы исследуем уравнение с таким оператором с точки зрения получения приближений к решению в равномерной метрике. Обозначим $T_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$, $\alpha > 0$, семейство операторов, соответствующих методу М.М. Лаврентьева, и поставим задачу: выяснить, для каких $u(x)$ будет иметь место сходимость:

$$\|T_\alpha Au - u\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (2)$$

Поскольку $T_\alpha A = -\lambda R_\lambda(A)|_{\lambda=-1/\alpha}$, где $R_\lambda(A)$ — резольвента Фредгольма оператора A , λ — спектральный параметр, то в соответствии с [1] для решения поставленной задачи нужно показать, что точки $\lambda = -1/\alpha$, $\alpha > 0$ — регулярные для оператора A и что на луче $\lambda = -1/\alpha$ выполняются соотношения:

$$\|R_\lambda(A)v\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad v \in C[0, 1], \quad (3)$$

$$\|-\lambda R_\lambda(A)\| \leq K, \quad (4)$$

где K не зависит от λ , а затем найти $\overline{R(A)}$ — замыкание области значений оператора A в равномерной метрике (не путать обозначение $R(A)$ с $R_\lambda(A)$).

Лемма. При $\lambda = -1/\alpha$, $\alpha > 0$, резольвента $R_\lambda(A)$ существует.

Доказательство. В соответствии с [3] исследование $R_\lambda(A)$ сводится к исследованию резольвенты $R_\lambda(A_0)$, где A_0 — оператор A с $A(x, t) \equiv 1$. В свою очередь, исследование $R_\lambda(A_0)$ приводит к решению некоторой краевой

задачи в пространстве вектор-функций размерности 2. В нашем случае эта задача имеет вид

$$v' - \lambda Dv = BF, \quad U(v) \equiv Pv(0) + Qv(1) = 0,$$

где $D = \text{diag}(d, -d)$, $d = \sqrt{\beta^2 - 1}$, $B = d(2\beta(\beta - d))^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -(\beta - d) \\ (\beta - d) & -1 \end{pmatrix}$, $P = d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \beta - d \end{pmatrix}$, $Q = d \begin{pmatrix} \beta - d & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, обозначения v, F см. в [3].

В этом можно убедиться, проделав соответствующие выкладки по аналогии с [3] (для $n = 1$).

Далее, рассмотрим определитель $\det(U(V))$, где

$$V = V(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda dx} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda dx} \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что он не может обратиться в ноль, если $\lambda = -1/\alpha$, $\alpha > 0$. Отсюда и из [3] следует утверждение леммы.

Теорема. Для любой непрерывной функции, удовлетворяющей условию

$$u(1) = \beta u(0), \tag{5}$$

имеет место сходимость (2).

Доказательство. В теореме 2 и лемме 9 из [3] приведены оценки, которые при $\text{Re } \lambda \neq 0$ будут иметь вид

$$\|R_\lambda(A_0)v\|_{C[0,1]} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\|v\|_C\right), \quad \|(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_0))\|_{C[0,1]} = O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\|u\|_C\right)$$

(оценки в [3] получены для n — четного, но можно убедиться, что они справедливы и для $n = 1$). Из оценок, очевидно, следуют соотношения (3), (4).

Для завершения доказательства осталось найти $\overline{R(A)}$. Покажем, что это множество состоит из непрерывных функций, удовлетворяющих условию (5). Из (1) $R(A) \subset M = \{f(x) \in C'[0, 1] : f(1) = \beta f(0)\}$. Докажем обратное включение. Пусть $f(x) \in M$.

Составим выражение

$$\frac{1}{\beta^2 - 1}(\beta f'(x) + f'(1 - x)) \equiv F(x). \tag{6}$$

$F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \left(\int_0^x A(x, t)\varphi(t)dt \right)',$$

где $\varphi(t)$ — непрерывна. Это следует из того, что уравнение

$$\varphi(x) + \int_0^x A_x(x, t)\varphi(t)dt = F(x)$$

имеет единственное решение.

Теперь подставим $F(x)$ в (6) и перейдем от производной по всему аргументу к производной по x . Получим

$$\frac{1}{\beta^2 - 1}(\beta f(x) - f(1 - x)) = \int_0^x A(x, t)\varphi(t)dt + C. \quad (7)$$

Запишем (7), заменив x на $1 - x$, сложим полученное равенство с равенством (7), умноженным на β , учтем, что $f(x)$ удовлетворяет краевому условию и получим, что $f(x) \in R(A)$. Отсюда и из [4] следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г.В. О сходимости методов регуляризации // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Мат-лы 8-й Межд. Казан. летней науч. шк.-конф. Казань, 2007. Т. 35. С. 264-265.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР. 1962. 92 с.
3. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 33-50.
4. Хромова Г.В. О регуляризации интегральных уравнений первого рода с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика. 1972. Т. 8 (123). С. 94-104.

УДК 518:517.948

Е.В. Шишкова

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В [1] для k раз непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $u(x)$ вводятся в рассмотрение семейства интегральных операторов с полиномиальными финитными ядрами:

$$T_{\alpha k}^l u = a_k \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{\partial^l ((t-x)^2 - \alpha^2)^k}{\partial x^l} u(t) dt, \quad (l = \overline{0, k})$$

где $\alpha > 0$ — параметр, $a_k = \frac{(-1)^k(2k+1)!}{(k!)^2 2^{2k+1}}$, позволяющие находить приближения к l -й производной функции $u(x)$ во внутренних точках отрезка $[a, b]$.

В данной статье, используя идею из [2], дается модификация этих операторов, позволяющая восстанавливать функцию вместе с производными до l -го порядка включительно на всем отрезке $[a, b]$, и находятся точные по порядку оценки решения задачи численного дифференцирования на некотором классе функций.

1. Теорема 1. Пусть $u(x) \in C^l[a, b]$, тогда для операторов

$$\widehat{T}_{\alpha k}^l u = (-1)^l a_k \int_{2\alpha \frac{a-x}{b-a} + x}^{2\alpha \frac{b-x}{b-a} + x} \frac{\partial^l \left((t - x - \frac{b-2x+a}{b-a}\alpha)^2 - \alpha^2 \right)^k}{\partial t^l} u(t) dt,$$

имеет место сходимость:

$$\left\| \widehat{T}_{\alpha k}^l u - u^{(l)} \right\|_{C[a,b]} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

Доказательство. Учитывая, что $\widehat{T}_{\alpha k}^0 1 = T_{\alpha k}^0 1 \equiv 1$, имеем

$$\left\| \widehat{T}_{\alpha k}^l u - u^{(l)} \right\| = \left\| \widehat{T}_{\alpha k}^0 u^{(l)} - u^{(l)} \right\| \leq \omega_l(2\alpha) \rightarrow 0$$

при $\alpha \rightarrow 0$, где $\omega_l(\alpha)$ — модуль непрерывности l -й производной функции $u(x)$.

Таким образом, в качестве регуляризаторов задачи численного дифференцирования на отрезке $[a, b]$ можно брать операторы $\widehat{T}_{\alpha k}^l$.

Замечание: В [3] построены расширенные операторы оператора $T_{\alpha k}^l$, восстанавливающие производные на всем отрезке, при этом на восстанавливаемую функцию и производные накладываются граничные условия. В данной статье этих ограничений удастся избежать.

2. Рассмотрим следующую постановку задачи численного дифференцирования: построить равномерное приближение к производной непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$ функции $u(x)$ по известному δ -приближению $u_\delta(x)$ функции $u(x)$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$ ($p \geq 1$): $\|u_\delta - u\|_{L_p[0,1]} \leq \delta$.

Рассмотрим оператор $\widehat{T}_{\alpha k}^l$ при $k = 1, l = 1, a = 0, b = 1$:

$$\widehat{T}_{\alpha 1}^1 u = \frac{3}{2\alpha^3} \int_{x(1-2\alpha)}^{x(1-2\alpha)+2\alpha} (t - (1-2\alpha)x - \alpha) u(t) dt.$$

Теорема 2. Пусть функция $u(x) \in C^1[0, 1] : \max_{0 \leq x \leq 1} |u''(x)| \leq H$ и $u_\delta(x) : \|u_\delta - u\|_{L_p[0,1]} \leq \delta$, тогда имеет место двусторонняя оценка:

$$\frac{1}{2} C_1 \delta^{\frac{p}{2p+1}} \leq \left\| \widehat{T}_{\alpha(\delta)1}^1 u_\delta - u' \right\|_{C[0,1]} \leq C_1 \delta^{\frac{p}{2p+1}},$$

где $\alpha(\delta) = C_2 \delta^{\frac{p}{2p+1}}$, $C_2 = \left(\frac{(p+1)B}{2pH} \right)^{\frac{p}{2p+1}}$, $C_1 = (2HC_2 + B)$, $B = \frac{3}{2^{1/p}(q+1)^{1/q}}$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Доказательство. Заметим, что

$$1) \left\| \widehat{T}_{\alpha 1}^1 \right\|_{L_p[0,1] \rightarrow C[0,1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} \left(\int_0^1 \left| \widehat{T}_{\alpha 1}^1(x, t) \right|^q dt \right)^{1/q} = B \alpha^{-1-1/p};$$

$$2) \left\| \widehat{T}_{\alpha 1}^1 u - u' \right\|_{C[0,1]} \leq \left\| \widehat{T}_{\alpha 1}^0 u' - u' \right\|_{C[0,1]} \leq 2\alpha H;$$

$$3) \text{ пусть } u_0(x) = \frac{Hx^2}{2}, \text{ тогда } \left\| \widehat{T}_{\alpha 1}^0 u' - u' \right\|_{C[0,1]} \geq \left| \widehat{T}_{\alpha 1}^1 u_0 - u'_0 \right|_{x=0} = H\alpha.$$

Учитывая 1)-3) и используя метод, описанный в [4], получаем требуемую двустороннюю оценку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г.В. О дифференцировании функций, заданных с погрешностью // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов. 1984. Вып. 6. С. 53-58.
2. Сендов Бл. Модифицированная функция Стеклова // ДБАН Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences. 1983. Т. 36, №3. С. 315-317.
3. Шишкова Е.В. Построение расширенных операторов, дающих приближение к функции и ее производным на отрезке // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2005. Вып. 3. С. 125-134.
4. Хромова Г.В. Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // ДАН. 2001. Т. 378, №5. С. 605-609.

УДК 517.984

В.А. Юрко

ОБРАТНЫЕ УЗЛОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ДЕРЕВЕ

В статье исследуется обратная узловая задача для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на звездообразном дереве со стандартными условиями склейки во внутренней вершине и условиями Дирихле в граничных вершинах. Обратная узловая задача заключается в восстановлении оператора по заданным узлам (нулям) собственных функций. Для данного класса операторов доказана теорема единственности и приведена конструктивная

процедура решения обратной узловой задачи. Отметим, что эта задача тесно связана с обратными спектральными задачами (см. [1, 2] и литературу в них).

Рассмотрим компактный звездообразный граф T в \mathbf{R}^m с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_r\}$, где v_1, \dots, v_r – граничные вершины, v_0 – внутренняя вершина, и $e_i = [v_i, v_0]$, $i = \overline{1, r}$. Не нарушая общности считаем, что длина каждого ребра равна 1. Каждое ребро $e_i \in \mathcal{E}$ параметризуем параметром $x \in [0, 1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию: $x = 0$ соответствует граничным вершинам v_1, \dots, v_r , а $x = 1$ соответствует внутренней вершине v_0 .

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y(x) = \{y_i(x)\}_{i=\overline{1, r}}$, $x \in [0, 1]$, где функция $y_i(x)$ определена на ребре e_i . Пусть $q(x) = \{q_i(x)\}_{i=\overline{1, r}}$ – интегрируемая вещественнозначная функция на T ; q называется потенциалом. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на T :

$$-y_i''(x) + q_i(x)y_i(x) = \lambda y_i(x), \quad i = \overline{1, r}, \quad (1)$$

где λ – спектральный параметр, функции $y_i(x), y_i'(x)$, $i = \overline{1, r}$, абсолютно непрерывны на $[0, 1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренней вершине v_0 :

$$y_i(1) = y_j(1), \quad i, j = \overline{1, r}, \quad \sum_{i=1}^r y_i'(1) = 0. \quad (2)$$

Условия склейки (2) называются стандартными или условиями Кирхгофа. В электрических сетях (2) выражает закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей (2) выражает баланс напряжений и т.д.

Рассмотрим краевую задачу $B = B(q)$ на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах v_1, \dots, v_r :

$$y_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (3)$$

Пусть $S_i(x, \lambda)$, $i = \overline{1, r}$, – решение уравнения (1) на ребре e_i с начальными условиями $S_i(0, \lambda) = 0$, $S_i'(0, \lambda) = 1$. При каждом фиксированном $x \in [0, 1]$ функции $S_i^{(\nu)}(x, \lambda)$, $i = \overline{1, r}$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по λ порядка $1/2$. Кроме того, функция $S_i(x, \lambda)$ является единственным решением интегрального уравнения

$$S_i(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q_i(t) S_i(t, \lambda) dt, \quad (4)$$

где $\lambda = \rho^2$. Известно (см. [2]), что имеет место представление

$$S_i(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K_i(x, t) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt, \quad (5)$$

где $K_i(x, t)$ – гладкая функция, не зависящая от λ . Используя (4) и (5), получаем асимптотические формулы для $S_i(x, \lambda)$ и $S'_i(x, \lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$:

$$S_i(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} - \frac{\cos \rho x}{2\rho^2} \int_0^x q_i(t) dt + \frac{1}{2\rho^2} \int_0^x q_i(t) \cos \rho(x - 2t) dt + O\left(\frac{\exp(|Im \rho|x)}{\rho^3}\right), \quad (6)$$

$$S'_i(x, \lambda) = \cos \rho x + \frac{\sin \rho x}{2\rho} \int_0^x q_i(t) dt - \frac{1}{2\rho} \int_0^x q_i(t) \sin \rho(x - 2t) dt + O\left(\frac{\exp(|Im \rho|x)}{\rho^2}\right). \quad (7)$$

Функция

$$\Delta(\lambda) := \sum_{i=1}^r \frac{S'_i(1, \lambda)}{S_i(1, \lambda)} \prod_{k=1}^r S_k(1, \lambda) \quad (8)$$

является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B . Подставляя (6) и (7) в (8), вычисляем

$$\Delta(\lambda) = r \left(\frac{\sin \rho}{\rho}\right)^{r-1} \cos \rho + \frac{\sin^r \rho}{2\rho^r} \int_0^1 \sum_{i=1}^r q_i(t) dt - \frac{(r-1) \sin^{r-2} \rho \cos^2 \rho}{2\rho^r} \int_0^1 \sum_{i=1}^r q_i(t) dt + o\left(\frac{\exp(r|Im \rho|)}{\rho^r}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Используя (9), известным методом (см., например, [2, гл.1]) находим, что краевая задача B имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{ni}\}_{n \geq 1, i = \overline{1, r}}$. Все собственные значения вещественны и имеют асимптотику

$$\rho_{n1} := \sqrt{\lambda_{n1}} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$\rho_{ni} := \sqrt{\lambda_{ni}} = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad i = \overline{2, r}.$$

Для определенности возьмем $\lambda_n := \lambda_{n1}$ и изучим их подробнее. Положим

$$\omega := \frac{1}{r} \int_0^1 \sum_{i=1}^r q_i(t) dt. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (9) и используя соотношение $\Delta(\lambda_n) = 0$, получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\omega}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Используя (6) и (12), вычисляем асимптотику для компонент собственных функций при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$:

$$\rho_n S_i(x, \lambda_n) = \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x - \frac{\beta_i(x)}{2\pi n} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (13)$$

где

$$\beta_i(x) = \int_0^x q_i(t) dt - \omega x. \quad (14)$$

Зафиксируем $i = \overline{1, r}$. Существует N_0 такое, что при всех $n > N_0$ функция $S_i(x, \lambda_n)$ имеет ровно $n-1$ (простых) нулей внутри интервала $(0, 1)$, а именно: $0 < x_{ni}^1 < \dots < x_{ni}^{n-1} < 1$. Точки $X_i := \{x_{ni}^j\}$ называются узловыми точками на ребре e_i относительно собственных значений $\{\lambda_n\}$.

Зафиксируем $i = \overline{1, r}$. Рассмотрим обратную узловую задачу восстановления потенциала $q_i(x)$ на ребре e_i по заданному множеству X_i узловых точек или по некоторой его части. Обозначим

$$\alpha_n^j := \frac{j}{n - 1/2}.$$

Учитывая (13), получаем следующую асимптотическую формулу для узловых точек при $n \rightarrow \infty$ равномерно по j :

$$x_{ni}^j = \alpha_n^j + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \left(\int_0^{\alpha_n^j} q_i(t) dt - \omega \alpha_n^j \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (15)$$

Отметим, что при каждом фиксированном $i = \overline{1, r}$ множество X_i является всюду плотным на $(0, 1)$. Не ограничивая общности считаем, что $\omega = 0$ (этого можно добиться сдвигом: $q_i(x) \rightarrow q_i(x) - \omega$, $\lambda \rightarrow \lambda - \omega$). Используя (15), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Зафиксируем $i = \overline{1, r}$ и $x \in [0, 1]$. Пусть $X_i^0 \subset X_i$ является всюду плотным на $(0, 1)$. Пусть $\{x_{ni}^{j_{ni}}\} \in X_i^0$ выбраны так, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni}^{j_{ni}} = x$. Тогда существует конечный предел*

$$g_i(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi^2 n \left(x_{ni}^{j_{ni}} \left(n - \frac{1}{2} \right) - j_{ni} \right), \quad (16)$$

причем

$$g_i(x) = \int_0^x q_i(t) dt. \quad (17)$$

Сформулируем теперь теорему единственности и приведем конструктивную процедуру решения обратной узловой задачи. Для этого наряду с B рассмотрим краевую задачу $\tilde{B} = B(\tilde{q})$ того же вида, но с другим потенциалом. Условимся, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся

к задаче B , то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче \tilde{B} .

Теорема 2. *Зафиксируем $i = \overline{1, r}$. Пусть $X_i^0 \subset X_i$ – всюду плотное на $(0, 1)$ подмножество узловых точек. Пусть $X_i^0 = \tilde{X}_i^0$. Тогда $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ почти всюду на $(0, 1)$. Таким образом, задание X_i^0 однозначно определяет потенциал $q_i(x)$ на ребре e_i . Функция $q_i(x)$ может быть построена по формуле*

$$q_i(x) = g_i'(x),$$

где $g_i(x)$ вычисляется по (17).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
2. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

Э.В. Антоненко, С.Ю. Аляев

**ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ
ТОНКОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА
НА ОСЕВЫЕ КРИТИЧЕСКИЕ УСИЛИЯ**

Проблеме устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии посвящены сотни публикаций [1, 2]. В их абсолютном большинстве случаев рассматривались гладкие оболочки постоянной толщины и подкреплённые оболочки. Единицы работ связаны с расчетом оболочек переменной толщины (с геометрической неоднородностью).

Ниже предлагаются результаты численного эксперимента по влиянию закона изменения толщины оболочки вдоль образующей $\delta(x)$ на величину погонных критических усилий при осесимметричной форме потери устойчивости. Вместо традиционно используемых для однородных оболочек осевых критических напряжений здесь берутся $N_* = \sigma(x)\delta(x)$. Исследования проводились с использованием прямого метода [3], построенного на законе сохранения энергии, из условия безразличного равновесия при потере устойчивости. Этот метод даёт [1]

$$N_* = \frac{\bar{E} \int_0^l \delta^3(x) [w''(x)]^2 dx + ER^{-2} \int_0^l \delta(x) w^2(x) dx}{\int_0^l [w'(x)]^2 dx} \quad (1)$$

где обозначения общепринятые: $\bar{E} = E/[12(1-\mu^2)]$, $w(x)$ – функция прогиба, зависящая от граничных условий. При шарнирном закреплении и защемлении краев оболочки принимались функции

$$w_{\text{ш}}(x) = A \sin(m\pi x/l); \quad w_{\text{з}}(x) = A \sin(m\pi x/l).$$

Закон изменения толщины оболочки представляется в виде $\delta(x) = \delta_0 \phi(x)$, где δ_0 – толщина оболочки в сечении $x = 0$. Вид функций $\phi(x)$ приведен в таблице. При $\phi(x) = 1$ имеем однородную оболочку толщиной δ_0 .

Результаты расчетов по формуле (1) для некоторых неоднородных оболочек удалось представить в виде

$$N_* = N_{*0}\alpha, \quad N_{*0} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{\delta_0^2}{R}, \quad (2)$$

где N_{*0} – осевые критические усилия шарнирно опертой одномерной однородной оболочки толщиной δ_0 , α – корректирующие функции, учитывающие закон изменения толщины оболочки. Для оболочек с защемлёнными краями $N_{*0з} = \sqrt{3}N_{*0}$.

Введем удельные критические усилия, приходящиеся на единицу массы оболочки m :

$$\bar{N}_* = \frac{N_{*0}}{m}, \quad m = 2\pi R\rho \int_0^l \delta(x)dx. \quad (3)$$

Будем сравнивать удельные критические усилия неоднородной и однородной оболочек одинаковой массы при одинаковых габаритах R и l . Для такой неоднородной оболочки, эквивалентной однородной по массе, получим

$$m = m_\delta = 2\pi R\rho\delta_\delta; \quad \delta_\delta = \delta_0\beta; \quad \beta = \int_0^l \phi(x)dx, \quad (4)$$

где δ_δ – толщина однородной оболочки с осевыми критическими усилиями $N_{*\delta} = N_{*0}$ (2), где $\delta_\delta = \delta_0$.

Эффективность оболочек будем оценивать показателем

$$\eta = \frac{N_*}{N_{*0}} = \frac{\alpha}{\beta^2} = \sqrt{\Phi_1\Phi_2}. \quad (5)$$

Корректирующие функции α , формирующие осевые критические усилия неоднородных оболочек, и эффективность оболочек η определялись для ряда законов изменения толщины оболочек (таблица). Результаты вычислительного эксперимента отражены на рис.1 – 4.

Законы изменения толщины 1-2 соответствуют составной оболочке, состоящей из двух и трех участков (рис. 1, 2). Для оболочки, состоящей из трех участков на рис. 2, диапазон для $\bar{l} = 0 \div 1$ следует заменить на диапазон $\bar{l} = 0 \div 0.5$.

Пятый закон линейного изменения толщины, обозначенный на рис. 3, 4 $\delta(x) = \text{lin}(a, x)$, потребовал для получения обозримых результатов замены линейной функции отрезком ряда степеней синусов с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа пятой степени.

Шестой закон изменения толщины, обозначенный на рис. 3, 4 $\delta(x) = \text{opt}_5(a, x)$, получен численным поиском максимума многочлена синусов 5-й степени при ограничениях, соответствующих физическому смыслу задачи.

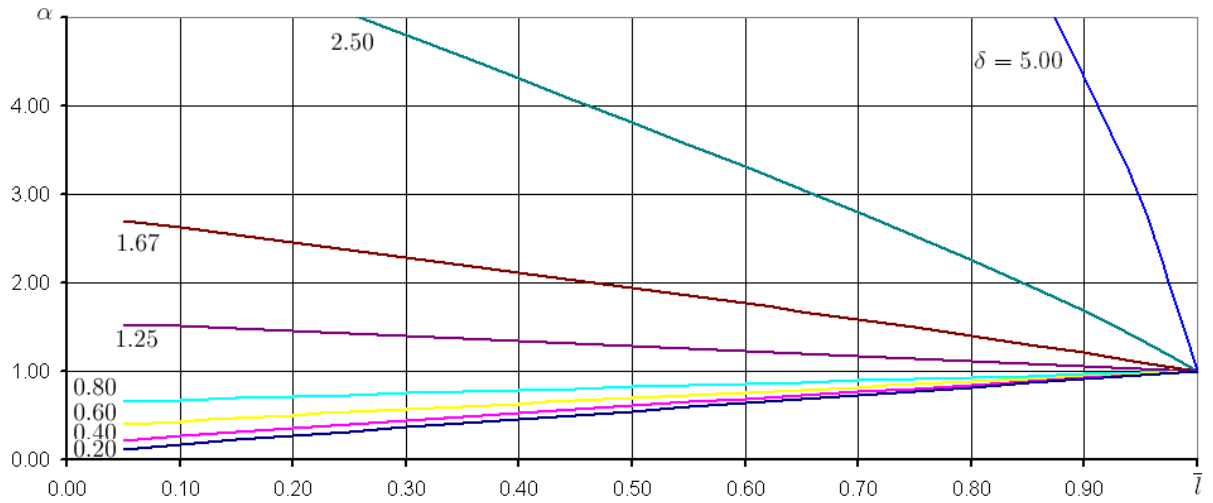


Рис. 1

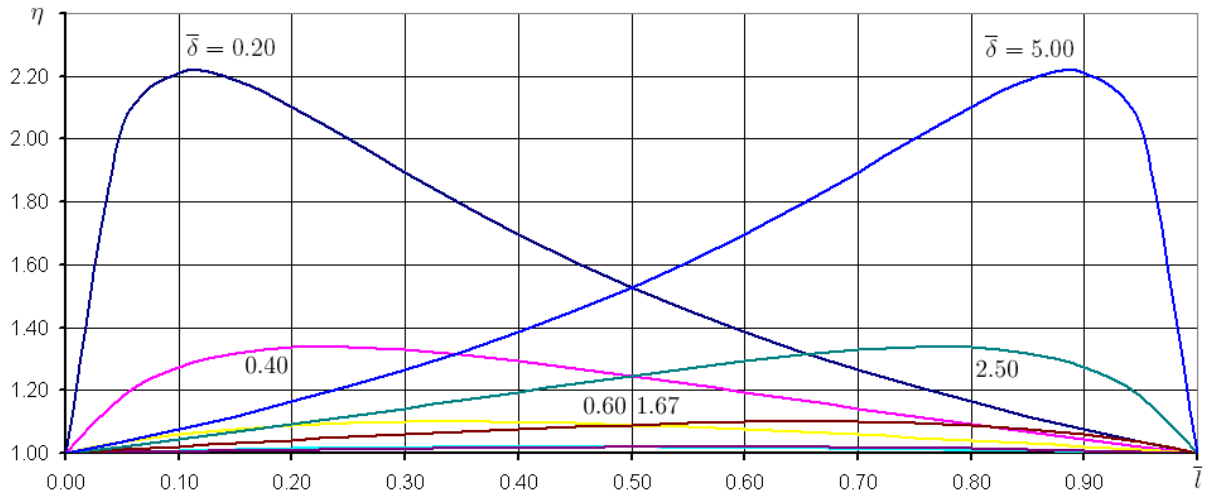


Рис. 2

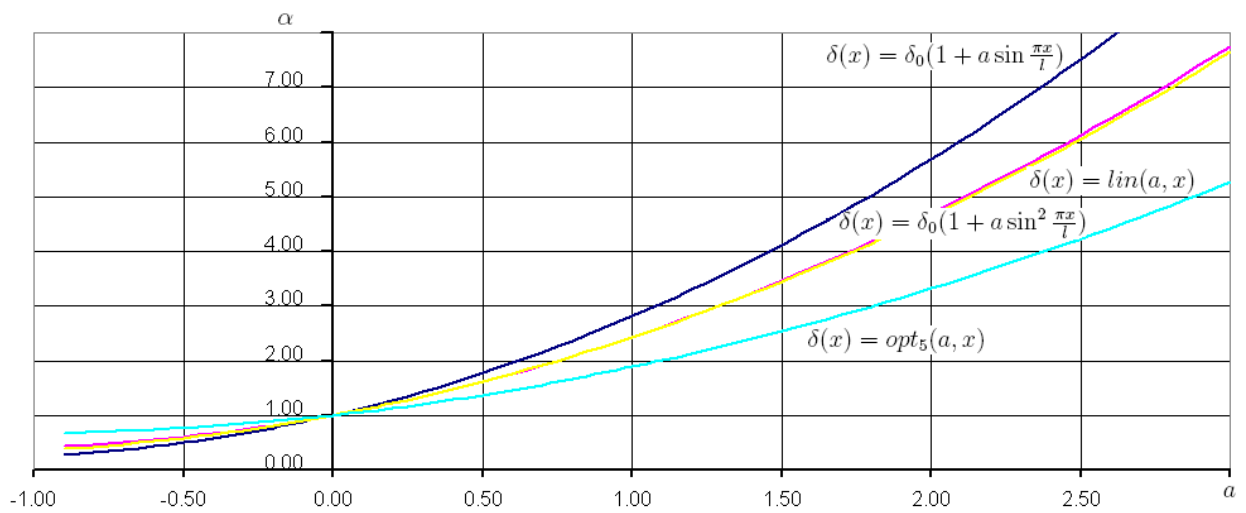


Рис. 3

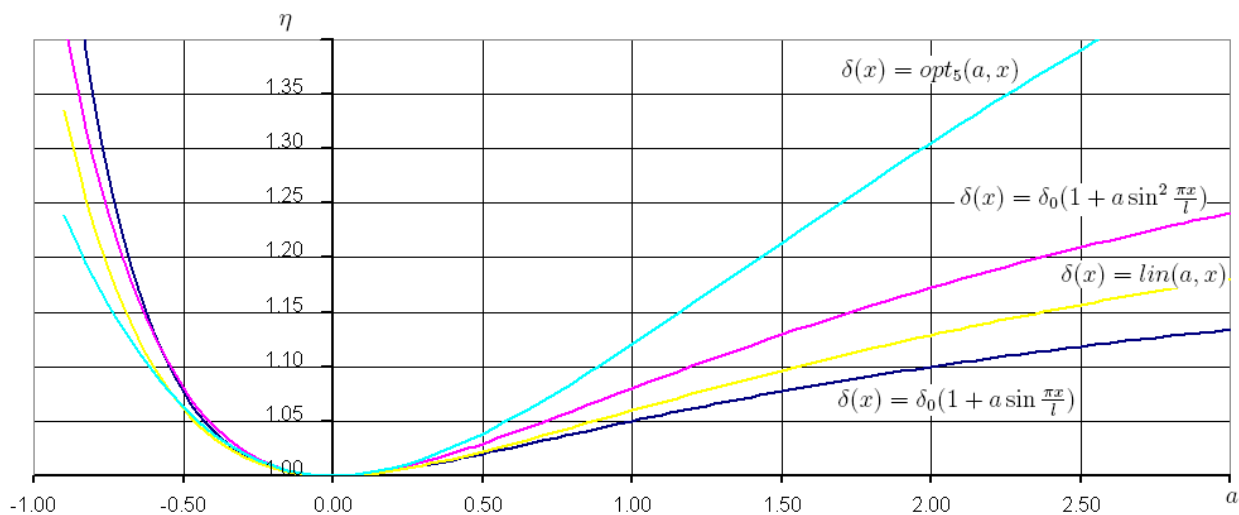


Рис. 4

Таблица

| № | $\phi(x)$ | $\beta = \delta/\delta_0$ | $\Phi_1; \Phi_2$ |
|---|--|---|---|
| 1 | $1, \quad 0 \leq x \leq l_1;$ $\bar{\delta}, \quad l_1 < x \leq l.$ | $\bar{l} + (1 - \bar{l})\bar{\delta}$ | $\Phi_1 = \bar{l}(1 - \bar{\delta}^3) + \bar{\delta}^3,$ $\Phi_2 = \bar{l}(1 - \bar{\delta}) + \bar{\delta}$ |
| 2 | $1, \quad 0 \leq x \leq l_1;$ $\bar{\delta}, \quad l_1 < x \leq l - l_1;$ $1, \quad l - l_1 < x \leq l.$ | $2\bar{l}(1 - \bar{\delta}) + \bar{\delta}$ | $\Phi_1 = 2\bar{l}(1 - \bar{\delta}^3) + \bar{\delta}^3,$ $\Phi_2 = 2\bar{l}(1 - \bar{\delta}) + \bar{\delta}$ |
| 3 | $1 + a \sin(\pi x/l)$ | $1 + 2a/\pi$ | $\Phi_1 = 1 + (6a)/\pi + (3a^2)/2 + (4a^3)/\pi,$ $\Phi_2 = 1 + (2a)/\pi$ |
| 4 | $1 + a \sin(\pi x)/l$ | $1 + a/2$ | $\Phi_1 = 1 + (3a)/2 + (9a^2)/8 + (5a^3)/16,$ $\Phi_2 = 1 + a/2$ |
| 5 | $1 + (2ax)/l, \quad 0 \leq x \leq l/2;$ $1 + 2a(1 - x/l), \quad l/2 \leq x \leq l.$ | $1 + 0.515a$ | $\Phi_1 \approx 1 + 1.546a + 1.077a^2 + 0.284a^3,$ $\Phi_2 \approx 1 + 0.515a$ |
| 6 | $1 - 0.493a \sin^3 \pi x/l +$ $+ 1.493a \sin^5 \pi x/l$ | $1 + 0.298a$ | $\Phi_1 \approx 1 + 0.893a + 0.666a^2 + 0.184a^3,$ $\Phi_2 \approx 1 + 0.298a$ |

$$\delta_0 = \delta_1, \quad \bar{\delta} = \delta_2/\delta_1, \quad \bar{l} = l_1/l.$$

Из представленных результатов следует вывод о выгодности применения неоднородных оболочек.

Замечание. Результаты получены прямым энергетическим методом расчета устойчивости с использованием правил приближенного анализа и не претендуют на высокую точность. Они могут быть полезными на этапе эскизного проектирования оболочечных конструкций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995, 308 с.
3. Канн С.Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966, 508 с.
4. Антоненко Э.В., Хлопцева Н.С. Осесимметричная форма потери устойчивости тонкостенных цилиндров переменной толщины // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов ун-та, 2006. Вып. 8. С.165-167.

В.Г. Бирюков, А.Г. Бирюков

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ
ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ
ОРИЕНТИРОВАННОГО УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ
СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Рассматривается задача оптимальной стабилизации ориентированного углового положения твердого тела, обладающего сферической симметрией. С помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина построено оптимальное управление в виде функции фазовых координат, содержащее две неизвестные скалярные величины.

1. Постановка задачи. Угловое движение сферически симметричного твердого тела описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}} = \bar{u}, \\ 2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{u} = \frac{\bar{M}}{J}$, \bar{M} — момент внешних сил, J — осевой момент инерции твердого тела, $\bar{\omega}$ — абсолютная угловая скорость, $\bar{\lambda}$ — кватернион ориентации твердого тела.

Требуется построить управление \bar{u} , переводящее твердое тело, движение которого описывается уравнениями (1), асимптотически устойчивым образом из заданого начального состояния

$$\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}^0, \bar{\omega}(0) = \bar{\omega}^0 \quad (2)$$

в конечное состояние

$$\bar{\lambda} = 1, \bar{\omega} = 0 \quad (3)$$

и при этом должен принимать наименьшее значение функционал качества переходного процесса

$$I = \int_0^{\infty} (\alpha_1 |\bar{\lambda}_v|^2 + \alpha_2 |\bar{\omega}|^2 + \alpha_3 |\bar{u}|^2),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const} > 0$ — весовые коэффициенты, $\bar{\lambda}_v$ — векторная часть кватерниона $\bar{\lambda}$.

Будем считать, что на управляющее воздействие \bar{u} не наложены никакие ограничения.

2. Метод решения задачи. Поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Составлялась функция Гамильтона – Понтрягина и система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных. Из условия максимума функции Гамильтона-Понтрягина был найден закон оптимального управления в виде функции сопряженных переменных:

$$\bar{u}^{opt} = \frac{\bar{\varphi}}{2\alpha_3}, \quad (4)$$

где $\bar{\varphi}$ – векторная сопряженная переменная, соответствующая угловой скорости твердого тела $\bar{\omega}$.

В результате задача была сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений углового движения твердого тела (1), замкнутой законом оптимального управления (4) и дополненной системой дифференциальных уравнений для сопряженных переменных

$$\begin{cases} \dot{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\varphi}}{2\alpha_3}, \\ 2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \\ \dot{\bar{\varphi}} = 2\alpha_2\bar{\omega} - \bar{p}, \\ \dot{\bar{p}} = \bar{p} \times \bar{\omega} + 2\alpha_1\lambda_0\bar{\lambda}_v, \end{cases} \quad (5)$$

где $\bar{p} = vect(\tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{\psi})$, $\bar{\psi}$ – кватернионная сопряженная переменная, соответствующая кватерниону ориентации твердого тела $\bar{\lambda}$, λ_0 – скалярная часть кватерниона $\bar{\lambda}$, волна означает сопряженный кватернион.

Были найдены первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5):

$$\alpha_2|\bar{\omega}|^2 - \frac{1}{4\alpha_3}|\bar{\varphi}|^2 - \bar{\omega} \cdot \bar{p} - 2\alpha_1\lambda_0^2 = C, \quad (6)$$

$$\bar{\omega} \times \bar{\varphi} - \bar{p} + \tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{p} \circ \bar{\lambda} = \bar{D}. \quad (7)$$

Следует отметить, что выражение (6) представляет собой скалярный первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5), а соотношение (7) – векторный первый интеграл системы (5).

Векторная постоянная \bar{D} , входящая в первый интеграл (7) определяется из конечного состояния твердого тела (3): $\bar{D} = 0$. С учетом этого первый интеграл (7) принимает вид

$$\bar{\omega} \times \bar{\varphi} - \bar{p} + \tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{p} \circ \bar{\lambda} = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим подробнее первый интеграл (8). Так как слагаемое $\tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{p} \circ \bar{\lambda}$ представляет собой операцию вращения вектора \bar{p} по конусу вокруг векторной части $\bar{\lambda}_v$ кватерниона $\bar{\lambda}$ [1], то разность $(\tilde{\bar{\lambda}} \circ \bar{p} \circ \bar{\lambda} - \bar{p})$ ортогональна

$\bar{\lambda}_v$, а следовательно, и векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{\varphi}$ ортогонально $\bar{\lambda}_v$. Учитывая, что векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varphi}$ также ортогональны векторному произведению $\bar{\omega} \times \bar{\varphi}$, приходим к выводу, что векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\varphi}$ и $\bar{\lambda}_v$ являются компланарными и могут быть связаны между собой соотношением

$$\bar{\varphi} = k_1 \bar{\omega} + k_2 \bar{\lambda}_v, \quad (9)$$

где k_1, k_2 — подлежащие определению скалярные коэффициенты, которые в общем случае зависят от фазовых координат $\bar{\lambda}$ и $\bar{\omega}$.

Учитывая соотношение (9) и конечные условия (3), найдем постоянную C , входящую в скалярный первый интеграл (6): $C = -2\alpha_1$.

Подставляя выражение (9) в формулу для оптимального управления (4), получаем закон оптимального управления в виде функции фазовых координат

$$\bar{u}^{opt} = \frac{1}{2\alpha_3} (k_1 \bar{\omega} + k_2 \bar{\lambda}_v). \quad (10)$$

Коэффициенты k_1 и k_2 являются коэффициентами усиления нелинейной обратной связи. Они должны удовлетворять двум условиям: во-первых, закон управления (10) должен обеспечивать асимптотически устойчивый перевод твердого тела из заданного начального состояния (2) в ориентированное положение (3), во-вторых, соотношение (9) должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений (5). Для определения этих коэффициентов можно воспользоваться прямым методом А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения и теоремой Н.Н. Красовского об оптимальной стабилизации [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
3. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.

УДК 550.834

В.М. Гурьянов, О.А. Воронцова

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МОНОТИПНЫХ ВОЛН

Энергетический подход [1] к получению дифференциальных уравнений нелинейных упругих волн конечных деформаций приводит к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \bar{q}_t - A(\bar{p})\bar{P}_x &= 0, \\ \bar{q}_x - \bar{P}_t &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

в которых независимые переменные: x – переменная Лагранжа, t – время $\bar{P} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\bar{q} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) = \bar{u}(x, t)$ – вектор смещения точек нелинейно-упругой среды, $A(\bar{p}) = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial p_j} \right)$, $(i, j = 1, 2, 3)$ $W = W(P, h)$ – функция энергии динамического деформирования, $P = P_1$, $h = \frac{1}{2} (p_2^2 + p_3^2)$, ρ_0 – плотность среды в недеформированном состоянии.

Матрица $A(\bar{p})$ симметричная, имеет 3 собственных вектора $\bar{l} = \bar{l}(\bar{p}) = (l_1, l_2, l_3)$ и им соответствующие 3 собственных значения $v_2(\bar{p})$, равные квадратам скоростей распространения волн $v_i^2(\bar{p})$, $(i = 1, 2, 3)$ квазипродольных (v_1), квазипоперечных (v_2) и поперечных (v_3). В общем случае все волны взаимодействуют между собой.

Для выделения волн одного типа без взаимодействия с другими типами выберем собственный вектор $\bar{l}(\bar{p})$ матрицы $A(\bar{p})$ так, чтобы он был суперпозицией функций $\bar{l}(\bar{p}(b))$. Введенная скалярная функция $b = b(x, t)$ такая, что выполняется условие существования волны выбранного типа

$$\frac{d\bar{P}}{db} = \bar{l}(\bar{p}). \quad (2)$$

Вектор \bar{q} пусть удовлетворяет условию

$$\frac{d\bar{q}}{da} = \bar{l}(\bar{p}). \quad (3)$$

Пусть $\xi = \xi(x, t) = \text{const}$, $\eta = \eta(x, t) = \text{const}$ два семейства характеристик системы уравнений (1). Переходя к характеристическим независимым переменным ξ , η вместо исходных x , t , получим следующие дифференциальные уравнения:

$$x_\xi - vt_\xi = 0, \quad x_\eta + vt_\eta = 0; \quad (4)$$

$$a_\xi - vb_\xi = 0, \quad a_\eta + vb_\eta = 0. \quad (5)$$

Здесь и далее при переходе от переменных x , t к переменным ξ , η обозначения функции от этих переменных изменять не будем. Дифференциальные уравнения характеристик (4) описывают кинематику волн, а уравнения (5) – их динамику.

Введем новую функцию $\phi = \phi(b, \xi, \eta)$ следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\phi}{db} = v(\bar{p}(b)).$$

Через введенную функцию $\phi(b)$ динамические уравнения (5) можно записать так (7):

$$\begin{aligned} (a - \phi(b))_\xi &= 0, \\ (a + \phi(b))_\eta &= 0. \end{aligned}$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим их общие решения динамических уравнений (5) в инвариантах Римана $a + \phi(b)$, $a - \phi(b)$:

$$\begin{aligned} a + \phi(b(\xi, \eta)) &= \alpha(\xi), \\ a - \phi(b(\xi, \eta)) &= \beta(\eta), \end{aligned} \quad (6)$$

не изменяющих своих значений на характеристиках ξ , η в соответствии с правыми произвольными функциями $\alpha(\xi)$, $\beta(\eta)$

Из (6) получаем (7):

$$\begin{aligned} a(\xi, \eta) &= \frac{\alpha(\xi) + \beta(\eta)}{2}, \\ \phi(b(\xi, \eta)) &= \frac{\alpha(\xi) - \beta(\eta)}{2}, \\ b(\xi, \eta) &= \phi^{-1}\left(\frac{\alpha(\xi) - \beta(\eta)}{2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь ϕ^{-1} понимается как обратная функция ϕ .

По найденным таким образом функциям $a(\xi, \eta)$, $b(\xi, \eta)$ определяются по соотношениям (2), (3)

$$\bar{P} = \bar{P}(b(\xi, \eta)), \quad \bar{q} = \bar{q}(a(\xi, \eta)).$$

Соотношения (7) представляют собой искомое общее решение динамических уравнений (5).

Кинематические уравнения (4) становятся линейными, поскольку известна функция $v(\bar{P}(b(\xi, \eta)))$. Их решение описано в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир. 1972. 184 с.
2. Гурьянов В.В. Монотипные плоские нелинейные сейсмические волны // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1992. N7. С. 81-88.

УДК 539.3

Д.В. Иванов, О.А. Фомкина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ НЕО – ГУКА И МУНИ – РИВЛИНА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ОДНООСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ

Статья посвящена исследованию механических характеристик артерий виллизиевого многоугольника [1] и позвоночных артерий человека и включает в себя испытания на одноосное растяжение образцов артерий, обработку данных и получение параметров моделей, используемых для описания поведения материала стенок артерий при численном моделировании кровеносной системы человека.

Одной из основных моделей [2], применяемых при моделировании поведения стенок артерий является модель Муни – Ривлина [3]. Приведем расчет параметров данной модели. Для этого выведем зависимость напряжение – степень удлинения для одноосного растяжения с использованием функций энергии деформации данного материала.

Рассмотрим правый и левый тензоры деформаций Коши – Грина $C = F^T F$, $B = F F^T$ соответственно, где F – тензор градиента деформации. Инварианты правого тензора C (аналогично для левого) определяются соотношениями $I_1 = tr(C)$, $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - tr(C^2))$, $I_3 = det(C)$. Материал стенки артерии принято считать несжимаемым [4], поэтому $I_3 = 1$. В случае однородной деформации тензор градиента деформации в матричной форме можно записать в виде $F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – степени удлинения. В

этом случае правый и левый тензоры деформаций Коши – Грина $C = B = F^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$. Тогда инварианты для тензора C определяются следу-

ющими выражениями: $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - tr(C^2)) = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}$, $I_3 = det(C) = det(F^2) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 = 1$. Выражая из последнего равенства λ_3 через λ_1, λ_2 , получим $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$.

Выражения для напряжений, возникающих в растягиваемом образце, через функцию энергии деформации W записываются следующим образом: $\sigma_{ii} = \lambda_i^2 \Phi - \frac{1}{\lambda_i^2} \Psi + p$, где $\Phi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}$, $\Psi = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}$ (в случае несжимаемого материала функция энергии деформации зависит только от первых двух инвариантов $W = W(I_1, I_2)$).

В случае одноосного растяжения $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$. Рассмотрим равенство $\sigma_{33} = 0$. Отсюда $\lambda_3^2 \Phi - \frac{1}{\lambda_3^2} \Psi + p = 0$, $p = \frac{1}{\lambda_3^2} \Psi - \lambda_3^2 \Phi$. Подставим полученное выражение для p в σ_{11}, σ_{22} .

$$\sigma_{11} = \lambda_1^2 \Phi - \frac{1}{\lambda_1^2} \Psi + \frac{1}{\lambda_3^2} \Psi - \lambda_3^2 \Phi = (\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_3^2} \right) \Psi,$$

$$\sigma_{22} = \lambda_2^2 \Phi - \frac{1}{\lambda_2^2} \Psi + \frac{1}{\lambda_3^2} \Psi - \lambda_3^2 \Phi = (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_3^2} \right) \Psi.$$

Заменяя $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$, получаем

$$\sigma_{11} = \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \right) \Psi,$$

$$\sigma_{22} = \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}\right) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \lambda_1^2 \lambda_2^2\right) \Psi = \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}\right) (\Phi + \lambda_1^2 \Psi).$$

Учитывая, что $\sigma_{22} = 0$, имеем $\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda_2^4 = \frac{1}{\lambda_1^2} \Leftrightarrow \lambda_2^2 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{\lambda^2}\right) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\lambda^2}{\lambda}\right) \Psi = \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) \Phi - \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right) \Psi = \\ &= \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) \left(\Phi + \frac{1}{\lambda} \Psi\right). \end{aligned}$$

Инварианты тензора примут вид $I_1 = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda^2} = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}$, $I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + \lambda + \lambda^2 \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda$. Окончательно получаем зависимость напряжения от степени удлинения в случае одноосного растяжения [5]

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2}\right),$$

где $\lambda = \frac{l}{l_0}$ – отношение длины образца к его начальной длине.

Рассмотрим функцию энергии деформации в следующем виде:

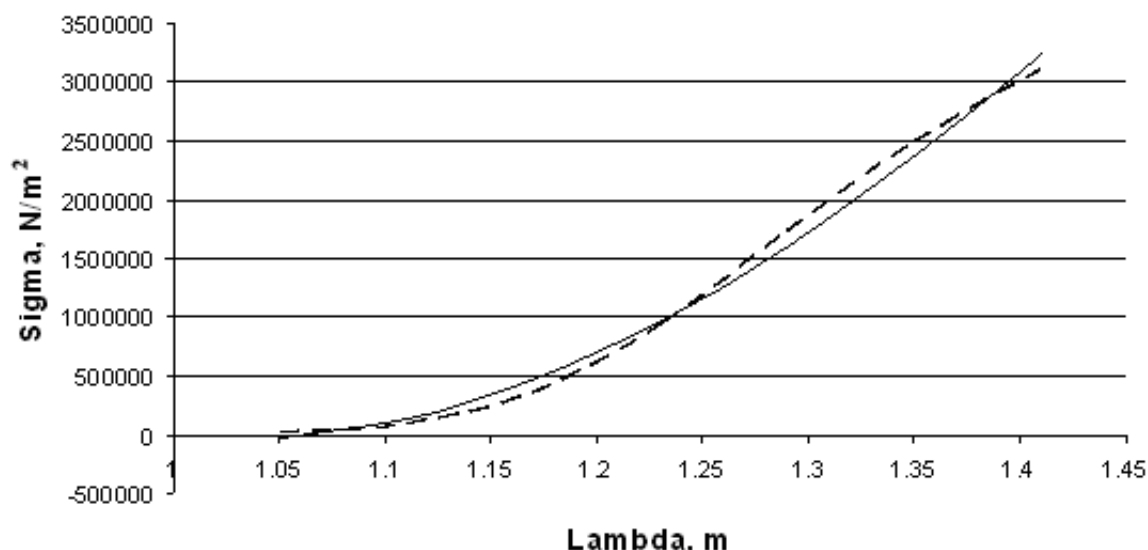
$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3).$$

Тогда

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) C_1 + 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) C_2. \quad (1)$$

Таким образом, имея данную зависимость и результаты эксперимента на одноосное растяжение, можно получить коэффициенты функции энергии деформации с помощью метода наименьших квадратов.

Расчет констант C_1, C_2 , имеющих размерность напряжений, проводился в системе компьютерной алгебры Matlab (MathWorks Inc.). Данные диаграммы $(\sigma - \lambda)$ одноосного растяжения образца базилярной артерии виллизиевого многоугольника импортировались в Matlab (MathWorks Inc.), далее по экспериментальной кривой интерполяционным методом были выбраны точки для определения констант методом наименьших квадратов. На рисунке представлены следующие кривые: пунктирная линия – экспериментальная зависимость $(\sigma - \lambda)$, построенная по интерполированным точкам экспериментальных данных, сплошная линия – зависимость $(\sigma - \lambda)$, полученная по формуле (1) с найденными константами $C_1 = 5.2 \text{ Н/м}^2$, $C_2 = -5.54 \text{ Н/м}^2$.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крылов В.В., Ткачев В.В., Добровольский Г.Ф. Микрохирургия аневризм виллизиевого многоугольника. М., 2004. 160 с.
2. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models // J. of Elasticity. 2000. V. 61. P. 1-48.
3. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., 1965, – 456 с.
4. Carew T. E., Vaishnav R. N., Pater D. J. Compressibility and Constitutive Equation for Arterial Wall // Circ. Res. 1968. V. 23. P. 61-68.
5. Пуриня Б.А., Касьянов В.А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека. Рига: Зинате, 1980. 260 с.

УДК 533.6.011

В.С. Кожанов

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА САПУНКОВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье описывается модификация метода приближенного аналитического решения задачи о сходящейся ударной волне, предложенного Я.Г. Сапунковым [1].

Чтобы описать автомодельное течение жидкости с отношением удельных теплоемкостей γ за ударной волной (УВ) в задаче о схождении цилиндрической ($\nu = 1$) или сферической ($\nu = 2$) УВ необходимо решить задачу для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{aligned} \xi V'(\xi) = \Delta_1 / \Delta_0 = -(\nu + 1)V + \kappa + (V - \alpha) \Delta_4 / \Delta_0, \\ \xi (\ln G(\xi))' = \Delta_2 / \Delta_0 = -\kappa / (V - \alpha) - \Delta_4 / \Delta_0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\xi Z'(\xi) = \Delta_3 / \Delta_0 = -Z \{ [2(V-1) + (\gamma-1)\kappa] / (V-\alpha) + (\gamma-1) \Delta_4 / \Delta_0 \},$$

$$\Delta_0 = (V-\alpha)^2 - Z, \quad \Delta_4 = \nu V^2 - [(\nu+1)\alpha + \kappa - 1]V + \kappa\alpha, \quad \kappa = 2(1-\alpha)/\gamma,$$

с граничными условиями на поверхности УВ при $\xi = 1$:

$$V(1) = V_S = \frac{2\alpha}{\gamma+1}, \quad G(1) = G_S = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad Z(1) = Z_S = \frac{2\gamma(\gamma-1)\alpha^2}{(\gamma+1)^2} \quad (2)$$

и вдали от УВ при $\xi \rightarrow \infty$: $V(\infty) = 0, Z(\infty) = 0$.

При этом само автомодельное движение представляется в форме

$$u = rt^{-1}V(\xi), \quad \rho = \rho_0 G(\xi), \quad c^2 = r^2 t^{-2} Z(\xi), \quad \xi = A^{-1} r t^{-\alpha},$$

где время t и координата r – независимые размерные переменные, ξ – независимая автомодельная переменная, а V, G и Z – автомодельные представители скорости жидкой частицы u , плотности ρ и квадрата скорости звука c^2 соответственно.

Решение поставленной задачи будет аналитическим, если функции V, G и Z будут аналитическими на предельной характеристике, ограничивающей область влияния течения за УВ на УВ. Этого можно достичь подбором показателя автомодельности α , к определению которого сводится первый этап решения. На плоскости OVZ данное требование означает, что интегральная кривая ОДУ $dZ/dV = \Delta_3/\Delta_1$, выходящая из точки $S(V_S, Z_S)$, должна проходить аналитическим образом через особую точку $B(V_B, Z_B)$:

$$V_B = \left(D \pm \sqrt{D^2 - 4\nu\kappa\alpha} \right) / (2\nu), \quad Z_B = (V_B - \alpha)^2, \quad D = (\nu+1)\alpha + \kappa - 1.$$

Система (1) является нелинейной, и к настоящему моменту получить ее аналитическое решение не удалось. Поэтому некоторые авторы проводят упрощение системы (1) с целью построения простого приближенного аналитического решения задачи.

Так, в соответствии с методом Я.Г. Сапункова необходимо в области между УВ и предельной характеристикой отношение Δ_4/Δ_0 , фигурирующее в правых частях уравнений (1), положить постоянным и равным его значению в точке S , соответствующей УВ на плоскости OVZ . Решение упрощенной таким образом системы (1), удовлетворяющее граничному условию (2), имеет вид [1]

$$V = A + (V_S - A) \xi^{-(\nu+1-K)},$$

$$\frac{G}{G_S} = \left(\frac{V - \alpha}{V_S - \alpha} \right)^{\delta_1} \left(\frac{V - A}{V_S - A} \right)^{\delta_2}, \quad \frac{Z}{Z_S} = \left(\frac{V - \alpha}{V_S - \alpha} \right)^{\beta_1} \left(\frac{V - A}{V_S - A} \right)^{\beta_2}, \quad (3)$$

$$\beta_1 = -\kappa/A_1, \quad \beta_2 = \{ A [(\gamma-1)(\nu+1)+2] - 2 \} / A_1, \quad \delta_1 = -\beta_1, \quad \delta_2 = A(\nu+1)/A_1,$$

$$A = (\varkappa - \alpha K) / (K - \alpha - 1), \quad K = \Delta_4 / \Delta_0 \Big|_{(V_S, Z_S)}, \quad A_1 = (\nu + 1) \alpha - \varkappa.$$

Для определения значения α получается нелинейное алгебраическое уравнение

$$Z_S \frac{(V_B - \alpha)^{\beta_1 - 2}}{(V_S - \alpha)^{\beta_1}} \left(\frac{V_B - A}{V_S - A} \right)^{\beta_2} - 1 = 0. \quad (4)$$

Простота допущения, лежащего в основе метода Я.Г. Сапункова, позволяет провести модификацию метода с целью увеличения точности определения приближенного значения показателя автомодельности.

Модификация заключается в замене постоянной K на функцию $K_L(\gamma) = l \cdot K$, $l = l(\gamma)$ в выражениях (3), (4). При этом параметр $0 \leq l \leq 1$ можно подобрать так, что значение α , полученное решением приближенного уравнения (4), будет равно значению показателя автомодельности, полученному при решении исходной автомодельной задачи.

Вычислительная сложность определения l для каждого конкретного значения показателя адиабаты γ сравнима со сложностью определения самого показателя автомодельности. Компромиссом между точностью и простотой вычисления α в данном случае может стать построение приближенной зависимости $l = l(\gamma)$.

Ниже представлены результаты расчетов для случая, когда особая точка $B(V_B, Z_B)$ является *седлом*. Для $\nu = 1$ это значения γ из интервала (1, 1.9092), а для $\nu = 2$ – (1, 1.8698).

Приближенные зависимости $l = l(\gamma)$ для цилиндрически и сферически симметричной УВ на установленных интервалах значений γ определяются формулами

$$\nu = 1: \quad l(\gamma) = -0.64415863\gamma^3 + 2.31048863\gamma^2 - 3.23266318\gamma + 2.44459306 + 0.03034383 \ln(\gamma - 0.999300); \quad (5)$$

$$\nu = 2: \quad l(\gamma) = -1.17563185\gamma^3 + 4.39205110\gamma^2 - 6.04678839\gamma + 3.78212186 + 0.04106372 \ln(\gamma - 0.999200). \quad (6)$$

В таблице приведены значения показателя автомодельности α , вычисленные как по оригинальному методу Я.Г. Сапункова (α_{Sap}), так и по предлагаемой модификации (α_{SapMod}) для нескольких значений γ . Приближенные значения сравниваются с точным значением α (несовпадающие цифры имеют меньший размер).

| γ | $\nu = 1$ | | | $\nu = 2$ | | |
|----------|-----------|----------------|-------------------|-----------|----------------|-------------------|
| | α | α_{Sap} | α_{SapMod} | α | α_{Sap} | α_{SapMod} |
| 1.01 | 0.9475104 | 0.94772 | 0.9475113 | 0.9018677 | 0.90240 | 0.9018662 |
| 1.05 | 0.9071206 | 0.90741 | 0.9071216 | 0.8322469 | 0.83289 | 0.8322510 |
| 1.10 | 0.8852480 | 0.88552 | 0.8852470 | 0.7959697 | 0.79655 | 0.7959667 |
| 1.20 | 0.8611630 | 0.86137 | 0.8611613 | 0.7571418 | 0.75759 | 0.7571354 |
| 9/7 | 0.8480493 | 0.84821 | 0.8480485 | 0.7365975 | 0.73695 | 0.7365947 |
| 1.30 | 0.8462231 | 0.84638 | 0.8462225 | 0.7337767 | 0.73411 | 0.7337746 |
| 7/5 | 0.8353231 | 0.83543 | 0.8353233 | 0.7171745 | 0.71742 | 0.7171754 |
| 1.50 | 0.8267475 | 0.82683 | 0.8267478 | 0.7044280 | 0.70460 | 0.7044293 |
| 1.60 | 0.8196996 | 0.81975 | 0.8196997 | 0.6941895 | 0.69430 | 0.6941898 |
| 5/3 | 0.8156249 | 0.81566 | 0.8156249 | 0.6883768 | 0.68845 | 0.6883767 |
| 1.70 | 0.8137404 | 0.81377 | 0.8137403 | 0.6857165 | 0.68577 | 0.6857163 |
| 1.80 | 0.8085999 | 0.80861 | 0.8085998 | 0.6785536 | 0.67857 | 0.6785535 |
| 1.90 | 0.8040990 | 0.80410 | 0.8040990 | — | — | — |

Максимальная относительная погрешность вычисления значения α с использованием модифицированного метода Я.Г. Сапункова, когда параметр l определяется по формуле (5) (для $\nu = 1$) или (6) (для $\nu = 2$), по сравнению со значением α , вычисляемым с использованием метода Рунге-Кутты, составляет не более $0.215 \cdot 10^{-3}\%$ (для $\nu = 1$) и $0.882 \cdot 10^{-3}\%$ (для $\nu = 2$).

Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я.Г. Приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 145-147.

УДК 533.6.011

Е.О. Кузнецова

ТРАНСЗВУКОВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗГ-РЕШЕНИЙ

В данной статье изучен вопрос построения первых двух поправок в трансзвуковых разложениях с использованием решений Заславского – Гриба (ЗГ) в качестве нулевого приближения.

В статье [1] рассмотрены трансзвуковые разложения, в которых решение уравнений газовой динамики представляется рядом по степеням малого параметра (характеризующего отклонение от однородного потока). В первом приближении решается система уравнений Кармана – Фальковича, для дальнейших приближений получают неоднородные линейные уравнения, правые части которых зависят от предшествующих слагаемых.

Основное уравнение для потенциала $\varphi(x, y)$ возмущения звукового потока в случае плоско-параллельного течения невязкого совершенного газа имеет вид

$$-(\gamma + 1)\varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\varphi_x^2 + \frac{\gamma - 1}{2}\varphi_y^2\right)\varphi_{xx} + \\ + 2(\varphi_y + \varphi_x\varphi_y)\varphi_{xy} + \left[\frac{\gamma + 1}{2}\varphi_y^2 + \frac{\gamma - 1}{2}(2\varphi_x + \varphi_x^2)\right]\varphi_{yy}.$$

Решение ищется в виде ряда (черточки далее опущены):

$$\bar{\varphi} = \varphi_0(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2\varphi_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^4\varphi_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots,$$

где

$$\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon}, \bar{y} = y, \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\varepsilon^3}.$$

В [1] найдено выражение первой и второй поправок φ_1, φ_2 для потенциала скорости через нулевое приближение φ_0 , в частности, φ_1 совпадает с поправкой Хейза:

$$\varphi_1(x, y) = \frac{2\gamma + 5}{10}y\varphi_{0x}\varphi_{0y} + \frac{-2\gamma + 5}{10}\varphi_0\varphi_{0x}. \quad (1)$$

Основная система трансзвуковых уравнений для нулевого приближения получается в форме

$$-(\gamma + 1)u_0(x, y)u_{0x} + v_{0y} = 0, \\ u_{0y} - v_{0x} = 0. \quad (2)$$

Класс решений ЗГ имеет вид (здесь u_0, v_0 – нулевые приближения скорости, $y = t, s$ – параметр)

$$x = x_0(s) + st^2, \\ u_0(s, t) = u_{00}(s) + u_{02}(s)t^2, \\ v_0(s, t) = v_{01}(s)t + v_{03}(s)t^3. \quad (3)$$

Сделаем замену переменных в системе (2) от x, y к s, t , используя выражение для x из (3), затем подставим u_0, v_0 из (3), соберем коэффициенты при степенях t и получим систему для коэффициентов в представлении ЗГ для нулевого приближения u_0, v_0 :

$$(x_0)_s = \frac{u_{00}(\gamma + 1)}{\gamma u_{02} + u_{02} - 4s^2}, \quad (u_{00})_s = \frac{v_{01}}{\gamma u_{02} + u_{02} - 4s^2}, \\ (u_{02})_s = -\frac{-3v_{03} + 4su_{02}}{\gamma u_{02} + u_{02} - 4s^2}, \quad (v_{01})_s = \frac{2(-sv_{01} + \gamma u_{00}u_{02} + u_{00}u_{02})}{\gamma u_{02} + u_{02} - 4s^2}, \\ (v_{03})_s = \frac{2(-3sv_{03} + \gamma u_{02}^2 + u_{02}^2)}{\gamma u_{02} + u_{02} - 4s^2}. \quad (4)$$

Поскольку

$$\varphi_{0x} = u_0(x, y), \quad \varphi_{0y} = v_0(x, y),$$

то можно, учитывая (4), получить зависимость φ_0 от коэффициентов из (3):

$$\varphi_0(s, t) = \varphi_{00} + \left(\frac{1}{2}v_{01} + u_{00}s \right) t^2 + \left(\frac{1}{4}v_{03} + \frac{1}{2}su_{02} \right) t^4,$$

где

$$\varphi_{00} = \int \frac{u_{00}^2(\gamma + 1)}{\gamma u_{02} + u_{02} - 4s^2} ds + C. \quad (5)$$

Теперь получим u_1, v_1 через коэффициенты в представлении u_0, v_0 .

Продифференцируем по x выражение (1), подставим вместо производных от φ_0 по $x - u_0, \varphi_0$ по $y - v_0$, сделаем замену переменных по (3), подставим u_0, v_0 из (3), подставим (4) и (5), соберем коэффициенты при степенях t в числителе и знаменателе, в итоге получаем следующее:

$$\begin{aligned} u_1 &= \Delta \cdot (K_{16}t^6 + K_{14}t^4 + K_{12}t^2 + K_{10}), \\ K_{16} &= 84\gamma sv_{03}u_{02} + 120s^2u_{02}^2 - 75v_{03}^2 - 48\gamma s^2u_{02}^2 + \\ &\quad + 190sv_{03}u_{02} - 18\gamma v_{03}^2 - 8\gamma^2u_{02}^3 - 68\gamma u_{02}^3 - 60u_{02}^3, \\ K_{14} &= 240s^2u_{00}u_{02} + 36\gamma su_{02}v_{01} + 72\gamma su_{00}v_{03} - \\ &\quad - 148\gamma u_{00}u_{02}^2 - 115v_{01}v_{03} - 8\gamma^2u_{02}^2u_{00} - 96\gamma s^2u_{00}u_{02} + 150su_{02}v_{01} - \\ &\quad - 140u_{00}u_{02}^2 + 60su_{00}v_{03} - 18\gamma v_{01}v_{03}, \\ K_{12} &= -60v_{03}\varphi_{00} + 24\gamma^2v_{03}\varphi_{00} + 24\gamma su_{00}v_{01} + 8\gamma^2u_{00}^2u_{02} - \\ &\quad - 32\gamma s^2u_{00}^2 + 80s^2u_{00}^2 - 92\gamma u_{00}^2u_{02} - 100u_{00}^2u_{02} - 4\gamma v_{01}^2 + \\ &\quad + 20su_{00}v_{01} - 32\gamma su_{02}\varphi_{00} - 30v_{01}^2 + 80su_{02}\varphi_{00}, \\ K_{10} &= -20u_{00}^3 + 8\gamma^2u_{00}^3 - 8\gamma v_{01}\varphi_{00} - 20v_{01}\varphi_{00} - 12\gamma u_{00}^3; \\ v_1 &= \Delta \cdot (M_{17}t^7 + M_{15}t^5 + M_{13}t^3 + M_{11}t), \\ M_{17} &= 50\gamma su_{02}^3 + 30su_{02}^3 - 93\gamma u_{02}^2v_{03} + 75sv_{03}^2 + 110s^2v_{03}u_{02} - \\ &\quad - 75u_{02}^2v_{03} + 20\gamma^2su_{02}^3 - 12\gamma s^2u_{02}v_{03} - 18\gamma^2u_{02}^2v_{03} + 18\gamma sv_{03}^2, \\ M_{15} &= -60u_{02}^2v_{01} + 140s^2u_{00}v_{03} + 18\gamma sv_{01}v_{03} - \\ &\quad - 125u_{02}v_{03}u_{00} + 115sv_{01}v_{03} - 24\gamma s^2u_{00}v_{03} - 30\gamma^2u_{00}v_{03}u_{02} - \\ &\quad - 68\gamma u_{02}^2v_{01} + 44\gamma^2su_{02}^2u_{00} - 8\gamma^2u_{02}^2v_{01} - 4\gamma s^2u_{02}v_{01} - \\ &\quad - 155\gamma u_{02}v_{03}u_{00} + 50su_{00}u_{02}^2 + 90s^2u_{02}v_{01} + 94\gamma su_{02}^2u_{00}, \\ M_{13} &= 8\gamma^2u_{02}^2\varphi_{00} + 24\gamma su_{00}^2u_{02} + 44\gamma su_{00}^2u_{02} - 8\gamma s^2u_{00}v_{01} - \\ &\quad - 24\gamma sv_{03}\varphi_{00} - 102\gamma u_{02}v_{01}u_{00} - 12\gamma^2u_{00}v_{01}u_{02} - 50u_{00}^2v_{03} + 30sv_{01}^2 - \\ &\quad - 20u_{02}^2\varphi_{00} + 4\gamma sv_{01}^2 + 100s^2u_{00}v_{01} - 90u_{02}v_{01}u_{00} - 60sv_{03}\varphi_{00} - \\ &\quad - 62\gamma u_{00}^2v_{03} - 12\gamma u_{02}^2\varphi_{00} + 20su_{00}^2u_{02} - 12\gamma^2u_{00}^2v_{03}, \\ M_{11} &= 20sv_{01}\varphi_{00} - 4\gamma^2u_{00}^2v_{01} - 8\gamma sv_{01}\varphi_{00} - 30u_{00}^2v_{01} - \\ &\quad - 34\gamma u_{00}^2v_{01} + 8\gamma^2u_{02}u_{00}\varphi_{00} - 12\gamma u_{02}u_{00}\varphi_{00} - 20u_{02}u_{00}\varphi_{00}; \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 / [(80s^2 - 20\gamma u_{02} - 20u_{02}) t^2 - 20\gamma u_{00} - 20u_{00}] .$$

Таким образом, решив систему (4) и подставив в (3) для получения нулевого приближения, можно найти первую поправку (u_1, v_1) , а также (u_2, v_2) , которая имеет весьма громоздкий вид. Поправки описываются рациональными функциями параметра t , тогда как нулевое приближение – полиномиальное.

Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Брежнев А.Л., Чернов И.А.* О трансзвуковых разложениях // ПММ. 1987. Т. 51. С. 708-710.

УДК 624.131+539.215

А.Г. Маркушин

ОБ ОСНОВНЫХ ДЕТАЛЯХ ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ИСТЕЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО ТЕЛА С ТВЕРДЫМ ЗЕРНОМ

При решении инженерных задач, связанных с конструированием бункерного оборудования для хранения и переработки сыпучих материалов, необходимо иметь математическую модель движения сыпучих сред, которая позволяла бы делать количественные оценки их поведения и функционирования конструктивных элементов этого оборудования в процессе его эксплуатации. Последнее невозможно без создания теории движения сыпучей среды, адекватно описывающей ее главные свойства, проявляющиеся при истечении из бункерных устройств. К числу таких свойств сыпучего тела относится, прежде всего, свойство образования запирающих динамических сводов, полностью прекращающих истечение или ответственных за явление пульсации при истечении [1].

Сыпучее тело, отдельные зерна которого не испытывают пластических деформаций ни при каких обстоятельствах его переработки, будем называть твердозерненным сыпучим материалом или сыпучим телом с твердым зерном. Понятно, что предел текучести отдельных зерен подобного сыпучего тела должен быть во много раз (в десятки раз) большим предела пропорциональности самого сыпучего материала. К таким материалам относятся все каменные и рудные породы мелкой фракции, пески, металлическая и стеклянная крошка и т.д.

Построение указанной теории начато в работах [2, 3]. Приведем здесь основные детали построения, опираясь на теорию пластического течения сплошной среды при переменных нагружениях [4-6], в силу того, что именно она положена в основу развиваемой в [2, 3, 7-13, 14] теории. Составными элементами этой теории являются соотношения и уравнения равновесия теории

упругости, условие пластичности, условие упрочнения при сжатии, законы пластического течения и сохранения массы элемента сыпучего тела. Под элементом сыпучего материала понимается достаточно большая совокупность отдельных его зерен.

Центральным звеном предлагаемой теории движения сыпучей среды является диаграмма учета истории нагружения элемента сыпучего материала и алгоритм ее реализующий [3, 8]. Главная из гипотез (N 1), лежащих в основе теории пластического течения, несколько меняется: предполагается пропорциональность компонент тензора приращений пластических деформаций компонентам тензора напряжений. Кроме того, вводится гипотеза N 3 о динамическом уплотнении сыпучего материала для элементов, пришедших в движение и затем замедливших его по причине ограниченности расхода материала при истечении через отверстие. Для элементов, покинувших бункер и достаточно от него удалившихся, вводится гипотеза N 4 о свободном их падении.

Интенсивности напряжений σ_i , деформаций ε_i , приращений пластических деформаций $\Delta\varepsilon_i^p$ функционально определяются как $I = (I_1^2 - 2I_2)^{0.5}$, где I_j — инварианты соответствующего тензора. Причем величина I может быть интерпретирована для напряжений в главных осях как модуль вектора полного напряжения.

Численное решение задач проводится поэтапно применением метода переменных параметров упругости [4-6], дискретизация краевых задач осуществляется методом конечных разностей, решение систем алгебраических уравнений проводится итерационными методами [14].

Закон пластического течения в осесимметричном случае может быть представлен с учетом гипотезы N 1, подобно тому, как это сделано в [4, 5], в следующем виде:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r &= [d\sigma_{rr} - \mu(d\sigma_{\phi\phi} + d\sigma_{zz})]/E + F(\sigma_i)\sigma_{rr}d\sigma_i, \\ d\varepsilon_\phi &= [d\sigma_{\phi\phi} - \mu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{rr})]/E + F(\sigma_i)\sigma_{\phi\phi}d\sigma_i, \\ d\varepsilon_z &= [d\sigma_{zz} - \mu(d\sigma_{rr} + d\sigma_{\phi\phi})]/E + F(\sigma_i)\sigma_{zz}d\sigma_i, \\ d\gamma_{zr} &= 1/Gd\sigma_{zr} + F(\sigma_i)\sigma_{zr}d\sigma_i, \end{aligned} \quad (9)$$

где функция $F(\sigma_i)$ предполагается одной и той же для любого напряженно-деформированного состояния и может быть определена по кривой деформирования при сжатии сыпучего материала в цилиндре с идеально гладкими поверхностями, диаметр которого, по крайней мере, на порядок больше, чем средний размер зерен материала. При этом предполагается, что начальный линейный участок диаграммы сжатия может быть продолжен в область малых деформаций растяжения.

При сжатии сыпучего тела в цилиндре, ось которого совпадает с осью

z , при весьма ограниченном ходе поршня, можно считать, исходя из кинематических соображений, что отличным от нуля будет только одно деформационное перемещение w (вдоль оси z) и, исходя из характера силового воздействия, можно предположить, что касательные напряжения будут равны нулю. Поэтому $d\varepsilon_r = d\varepsilon_\phi = d\gamma_{zr} = d\sigma_{zr} = \sigma_{zr} = 0$, и тогда из соотношений (1) нетрудно получить

$$F(\sigma_i) = (1 - \mu)/((1 + \mu)\sigma_i)(1/E_k - (1 - 2\mu^2/(1 - \mu))/E), \quad E_k = \partial\sigma_i(\varepsilon_i)/\partial\varepsilon_i,$$

в предположении, что $\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{zz} = \sigma_0 \equiv \sigma_i$. Здесь E_k — касательный модуль для кривой деформирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Богомяжик В.А.* Теория и расчет бункеров для зернистых материалов. Ростов/НД: Изд-во Рост. ун-та, 1973.
2. *Маркушин А.Г.* К построению модели истечения сыпучего материала // Математика, механика и их приложения: Материалы науч.-практ. конф., Саратов, октябрь 1997. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998. с. 58.
3. *Маркушин А.Г.* Об алгоритме учета истории нагружения в задаче истечения сыпучего материала // Математика, механика и их приложения: Материалы науч.-практ. конф., Саратов, октябрь 1997. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998. с. 56.
4. *Биргер И.А.* Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. Сер. механика и машиностроение, 1964, №1. С. 193.
5. *Биргер И.А.* Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Сер. механика. 1965, №2. С. 113.
6. *Шевченко Ю.Н.* Термопластичность при переменных нагружениях. Киев: Наук. думка. 1970.
7. *Горюшинский И.В., Горюшинский В.С., Маркушин А.Г., Третьяков Г.М.* К разработке теоретической основы проектирования осесимметричных бункеров для хранения сыпучих материалов // Механизация и автоматизация технологических процессов на транспорте и в агропромышленном комплексе. Самара: Самарский институт инженеров железнодорожного транспорта, ОАО «САМНИТ». 1998. Вып.16. С. 45-48.
8. *Горюшинский И.В., Горюшинский В.С., Маркушин А.Г., Третьяков Г.М.* К разработке теоретической основы исследования движения сыпучего материала в бункерах и бункерных устройствах // Механизация и автоматизация технологических процессов на транспорте и в агропромышленном комплексе. Самара: Самарский институт инженеров железнодорожного транспорта, ОАО «САМНИТ». 1998. Вып.16. С. 48-52.
9. *Контарев А.А., Маркушин А.Г., Садовничая Е.В.* Алгоритм решения задачи истечения сыпучего материала // Математика, механика, математическая кибернетика. Саратов: Изд. Сарат. ун-та, 1999. С. 88-93.
10. *Маркушин А.Г.* К построению модели истечения сыпучего материала с твердым зерном // Материалы межвузовской научной конференции «Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами»: март 2000, Саратов. 2000. С. 74-82.
11. *Контарев А.А., Королева О.А., Маркушин А.Г.* Об уравнениях движения сыпучего тела и их решении средствами теории пластичности при переменных нагружениях // Материалы межвузовской научной конференции «Современные проблемы нелинейной

механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами»: март 2000, Саратов. 2000. С. 82-89.

12. *Контарев А.А., Маркушин А.Г., Садовническая Е.В.* Метод дополнительных деформаций в решении задачи истечения сыпучего тела // Материалы межвузовской научной конференции «Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами»: март 2000, Саратов. 2000. С. 89-102.

13. *Маркушин А.Г.* К разработке динамической теории сыпучего тела с твердым зерном // *Аэродинамика*. Вып. 15 (18). Саратов: Изд. Саратов. ун-та. 2001. С. 96.

14. *Маркушин А.Г.* Квазистатический подход в решении задачи истечения сыпучего тела с твердым зерном // Межвуз. научн. сб. «Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред». Саратов: Изд. СГТУ, 2004. С. 136

УДК 531.381

531.395

В.Ю. Ольшанский, Д.С. Степаненко

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАДРАТИЧНОГО ИНТЕГРАЛА И ПРИВОДИМОСТЬ ИЗМЕНЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Рассматривается движение механической системы постоянного состава и изменяемой конфигурации в центральном поле. Если размеры системы значительно меньше расстояния до центра поля, то для описания движения можно использовать систему [1]

$$y^{\bullet} = y \times x + pg_3 \times Jg_3, \quad g_i^{\bullet} = g_i \times (x - \Omega), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь $J(t)$ — оператор инерции системы в ее центре масс, $()^{\bullet}$ — производная по времени в главной системе отсчета, $y = Jx + K$, x — угловая скорость главной системы отсчета, $K(t)$ — кинетический момент движения относительно главной системы отсчета, g_1, g_2, g_3, Ω — орты и угловая скорость орбитальной системы отсчета, $\Omega = k_2g_2 + k_3g_3$, $p = p(r)$.

При изучении движения системы изменяемой конфигурации и состава без динамической симметрии в центральном поле получены [1] необходимые и достаточные условия существования квадратичного интеграла. Показано, в частности, что для существования интеграла необходимо, чтобы траектория центра масс находилась на поверхности некоторого фиксированного в инерциальном пространстве кругового конуса с вершиной в центре силового поля.

Для случая динамической симметрии $A_1 = A_2 \neq A_3$ (A_i — собственные значения оператора J) доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для существования квадратичного интеграла необходимо, чтобы траектория центра масс находилась на поверхности кругового конуса с вершиной в центре поля. В случае, когда траектория не совпадает*

с образующей конуса и кинетический момент K не коллинеарен оси динамической симметрии, может существовать только один квадратичный интеграл при выполнении необходимых и достаточных условий:

- 1) $k_3 = c_1 k_2$, 2) $k_2 = \text{const} p^{1/2}$, 3) $J = (p_0/p)^{1/2} J_0$,
- 4) $K_1 = K_3 \cos \theta$, $K_2 = K_3 \sin \theta$, $K_3 = \text{const}$,
- 5) $\theta^\bullet = A_3^{-1} K_3 + \text{const}/p^{1/2}$.

Здесь J_0 — постоянный в главной системе отсчета оператор, K_i — компоненты K в главной системе отсчета. Квадратичный интеграл в данном случае можно записать в одной из форм:

$$p^{-1/2}[(Jx, x) - 2(Jx + K, \Omega) + p(g_3, Jg_3) + 2\theta^\bullet A_3 x_3 + A_3(\theta^\bullet)^2] = \text{const}; \quad (2)$$

$$p^{-1/2}[A_1(x_1^2 + x_2^2) + A_3(x_3 + \theta^\bullet)^2 - 2(Jx + K, \Omega) + p(g_3, Jg_3)] = \text{const}. \quad (3)$$

Доказательство. Произвольный квадратичный интеграл ОДС можно записать в виде

$$(y, Fy) + \sum_{i=1}^3 [(g_i, P_i g_i) + (Q_i y, g_i) + (n_i, g_i)] + (m, y) + h(t) + \Sigma(R_i g_j, g_k) = \text{const}. \quad (4)$$

Дифференцируя интеграл (4) в силу системы (1) получим тождество, приведенное в [1]. Как и прежде (см. [1]), проверяем утверждение: операторы P_1, P_2, R_i ($i = 1, 2, 3$) пропорциональны тождественному оператору E , $Q_i = \nu_i E$, $\nu_1 = 0$. Интеграл (4) записывается в виде

$$(y, Fy) + (g_3, P_3 g_3) + (y, \nu_2 g_2 + \nu_3 g_3) + \Sigma(n_i, g_i) + (m, y) + h = \text{const} \quad (5)$$

Основное тождество принимает вид

$$(2Fy + m, y \times x + p g_3 \times J g_3) + p \nu_2 (g_1, J g_3) + (2P_3 g_3 + n_3, g_3, x) + k_2 (2P_3 g_3 + n_3, g_1) + (n_2, g_2, x) - k_3 (n_2, g_1) - (n_1, g_1, x) - k_2 (n_1, g_3) + k_3 (n_1, g_2) + (\nu_3 k_2 - \nu_2 k_3)(y, g_1) +$$

$$(y, F^\bullet y) + (g_3, P_3^\bullet g_3) + (y, \nu_2^\bullet g_2 + \nu_3^\bullet g_3) + \Sigma(n_i^\bullet, g_i) + (m^\bullet, y) + h^\bullet \equiv 0. \quad (6)$$

Выделяя в тождестве слагаемые с x_3 , получим, что оператор F должен иметь вид $F = \psi_1 J^{-1} + \psi_2 E$; выделяя слагаемые с $x g_3^2$, получим, что оператор P_3 можно представить в виде $P_3 = p(\psi_1 J - \psi_2 A_1 A_2 A_3 J^{-1})$. Анализ членов с g_3^2 приводит к необходимости постоянства оператора P_3 в базисе E_3 и представлению параметра m в виде $m = -2FK + \lambda e_3$. Слагаемые в тождестве

(6), содержащие g_1g_3 , обращаются в ноль только при выполнении условий $\nu_2 = -2k_2\psi_1$, $k_2\psi_2 = 0$. Требуя обращения в ноль свободного члена в тождестве (6), покажем, что справедливо следующее представление

$$(y, Fy) + (m, y) + h(t) = (Jx, FJx) + \lambda A_3 x_3 + \int_0^t \lambda K_3^\bullet d\xi + \text{const.} \quad (7)$$

Анализ слагаемых с $g_i x$ приводит к необходимости условий

$$n_1 = 0, \quad k_3\nu_2 = k_2\nu_3, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0, \quad \nu_2^\bullet = 0, \quad \nu_3^\bullet = 0.$$

Случай $k_2 \equiv 0$ соответствует движению центра масс по прямой, проходящей через центр поля, исключая здесь этот случай, при $k_2 \neq 0$ получим

$$\nu_i = -2k_i\psi_1, \quad k_i\psi_1 = \text{const}, \quad i = 2, 3, \quad k_3 = c_1 k_2.$$

Отсюда следует (см. [1]), что $\Omega = k_2 a$, $(a)_0^\bullet = 0$ и траектория центра масс должна находиться на круговом конусе. Тождество (6) при учете полученных условий записывается в виде

$$(y, (\psi_1 J^{-1})^\bullet y) + \lambda(K, x, e_3) + ((-2\psi_1 J^{-1} K + \lambda e_3)^\bullet, y) + h^\bullet \equiv 0. \quad (8)$$

Выделив слагаемые с x^2 , получим условия

$$\psi_1 = c_2 p^{-1/2}, \quad J = (p_0/p)^{1/2} J_0, \quad k_2 = \text{const} p^{1/2}.$$

Приравнивая нулю слагаемые с x , получим условия $\lambda^\bullet A_3 = 2\psi_1 K_3^\bullet$, $\lambda K_2 + 2\psi_1 K_1^\bullet = 0$, $\lambda K_1 - 2\psi_1 K_2^\bullet = 0$. Отсюда следует, что $(K_1)^2 + (K_2)^2 = (K_3)^2 = \text{const}$ и можно положить $K_1 = K_3 \cos\theta$, $K_2 = K_3 \sin\theta$. При $K_3 \neq 0$ получаем условие 5 теоремы. Свободный член в тождестве (8) обращается в ноль. Пусть $K_3 \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda K_3^\bullet d\xi &= \int_0^t \lambda \lambda^\bullet / (2\psi_1) A_3 d\xi = \\ &= A_3 / (4\psi_1) \int_0^t (\lambda^\bullet)^2 d\xi = A_3 \lambda^2 / (4\psi_1) + C = A_3 \psi_1 (\theta^\bullet)^2 + C. \end{aligned} \quad (10)$$

Интеграл (5) при учете представления (7) теперь можно представить в одной из форм (2) или (3). Теорема доказана.

Отметим, что переходя к переменным $d\tau = p^{1/2} dt$, $x = p^{1/2} z$, систему (1) можно привести к виду

$$dy/d\tau = y \times z + (p_0)^{1/2} g_3 \times J_0 g_3, \quad dg_i/d\tau = g_i \times (x - \Omega_a),$$

$$\Omega_a = c_3(g_2 + c_1 g_3), i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

Здесь $y = Jx + K = (p_0)^{1/2} J_0 z + K$, и при $K = \text{const}$ система (9) становится автономной [2-4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ольшанский В.Ю.* Квадратичные интегралы и приводимость уравнений движения сложной механической системы в центральном поле // Прикладная математика и механика. Т.65, вып. 1. 2001. С. 36-50.
2. *F.de Brun.* Rotation kring en fix punkt. Ofversigt of Kongl Svenska Vetenskaps — Akademiens Vorhandlingar. Stookholm. 1893.
3. *Koob G.* Sur le probleme de la rotation d un corps autour d un point fixe. Bulletin de la Societe Mathematique. 1895. V. 23.
4. *Харламова Е.И.* О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сибир. отд. АН СССР. 1959. №6.

УДК 629

И.А. Панкратов, Ю. Н. Челноков

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ В СМЫСЛЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В [1] было показано, что в случае переориентации круговой орбиты космического аппарата (КА) исходная дифференциальная краевая задача оптимального управления, имеющая размерность, равную 10, может быть сведена (в случае быстрогодействия) к краевой задаче размерности 3, описываемой дифференциальными уравнениями линии переключения

$$\frac{d\nu_1}{d\varphi} = \nu_2, \quad \frac{d\nu_2}{d\varphi} = -\nu_1 + \kappa\nu_3, \quad \frac{d\nu_3}{d\varphi} = -\kappa\nu_2, \quad (1)$$

где $\kappa = \frac{r^2}{c}u$, $r = p_{or} = \text{const}$.

В уравнениях (1) r — модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА, c — постоянная площадей, φ — истинная аномалия, p_{or} — параметр орбиты, управление u — алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА ($-u_{max} \leq u \leq u_{max}$); ν_j — переменные, связанные с фазовой кватернионной переменной λ и сопряжённой кватернионной переменной μ соотношением $\nu = \text{vect}(\tilde{\lambda} \circ \mu)$.

Так как переменные $\nu_k, k = 1, 2, 3$ есть функции сопряжённых переменных, то их начальные значения ν_{k0} неизвестны. Для их нахождения было проанализировано аналитическое решение системы (1) на различных участках управляемого движения. Был найден период T функции переключения управления:

$$T = 2[\pi \pm 2 \arcsin(-D/a)]/k,$$

где $a = [(\nu_{10} - D)^2 + (\nu_{20}/k)^2]^{\frac{1}{2}}$, $D = \kappa/(1 + \kappa^2)(\nu_{30} + \kappa\nu_{10})$, $\nu_{i0} = \nu_i(t_0)$, $k = (1 + \kappa^2)^{\frac{1}{2}}$.

Верхний знак берётся, если на первом активном участке движения КА управление $u = -u_{max}$, нижний — в противном случае. Можно убедиться, что с учётом знака управления, фигурирующего в выражении для D , получается одно и то же значение периода T .

Следуя [1], была построена система трёх нелинейных алгебраических уравнений для нахождения значений переменных ν_1 , ν_2 в начальный момент времени и "длительности" управляемого движения φ_1 . В безразмерных переменных эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} A(\varphi_1)\bar{\nu}_{10} + B(\varphi_1)\bar{\nu}_{20} + C_{11} \sin \varphi_1 + C_{12} \cos \varphi_1 &= 1, \\ \alpha\bar{\nu}_{10}^2 + \beta\bar{\nu}_{10}\bar{\nu}_{20} + \gamma\bar{\nu}_{10} + \delta\bar{\nu}_{20} + \epsilon\bar{\nu}_{20}^2 + \\ &+ C_{21} \sin^2 \varphi_1 + C_{22} \sin(2\varphi_1) = \zeta, \\ D_{31}\bar{\nu}_{10}^2 + D_{32}\bar{\nu}_{10}\bar{\nu}_{20} + D_{33}\bar{\nu}_{10} + D_{34}\bar{\nu}_{20} + D_{35}\bar{\nu}_{20}^2 + \\ &+ C_{31} \sin^2 \varphi_1 + C_{32} \sin(2\varphi_1) = R. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, C_{ij}, D_{km}, \zeta, R$ — величины, выражаемые через известные параметры задачи, $\nu_{1,2} = 2c/(\pm u_{max}r)\bar{\nu}_{1,2}$, $A(\varphi_1), B(\varphi_1)$ — линейные комбинации тригонометрических функций от φ_1 .

В системе (2) можно перейти к новым независимым переменным N_1, N_2, N_3 , связанным с неизвестными ν_1, ν_2, ν_3 соотношениями

$$\nu_1 = N_1 \cos \varphi_1 + N_2 \sin \varphi_1, \quad \nu_2 = -N_1 \sin \varphi_1 + N_2 \cos \varphi_1, \quad \nu_3 = N_3.$$

Это приводит к некоторому упрощению коэффициентов при неизвестных. Вид системы остаётся прежним.

Система (2) решалась с использованием программы, разработанной на языке C++ для операционной системы Linux. Использовался метод градиентного спуска решения системы нелинейных уравнений. Рассматривались два варианта: с малым и большим отклонениями между начальной и конечной ориентациями орбит. Лучшая сходимость метода была отмечена для малых отклонений. При большом отклонении вначале минимизировался функционал $L_1 = \sum_{i=1}^3 f_i^2$. Здесь $f_i, i = 1, 2, 3$ — левые части уравнений системы (2), записанных в виде $f_i = 0$. Затем найденные значения $\bar{\nu}_{10}, \bar{\nu}_{20}, \varphi_1$ использовались в качестве начальных при минимизации функционала $L_2 = \sum_{i=1}^3 |f_i|$. При малом отклонении сразу минимизировался функционал L_2 . Примеры результатов численного решения приведены в таблицах. (В них Ω_0, I_0 —

долгота восходящего узла и наклонение орбиты КА для начального момента времени; Ω_1, I_1 — для конечного.) Основными трудностями являются неединственность решения системы (2), периодичность по "времени" φ_1 .

Характерные величины: $p_{max} = 0.101907 \text{ м/с}^2$, $r = 26000000 \text{ м}$, $\Omega_0 = 87^\circ$, $I_0 = 80^\circ$.

Малое отклонение орбит: $\Omega_1 = 85^\circ, I_1 = 79^\circ$.

| ν_{10} | ν_{20} | ν_{30} | φ_1 , рад | L_1 | L_2 |
|------------|------------|------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1.0060 | 3.4664 | -19.488 | 3.7377 | $6 \cdot 10^{-8}$ | $3 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.3866 | -1.4883 | 28.392 | 3.1623 | 10^{-9} | $3 \cdot 10^{-5}$ |
| -0.6671 | -1.6384 | 44.512 | 3.0834 | 10^{-9} | $2 \cdot 10^{-6}$ |
| -0.7127 | -1.6445 | 45.215 | 3.0820 | 10^{-9} | $1 \cdot 10^{-6}$ |

Большое отклонение орбит: $\Omega_1 = 94^\circ, I_1 = 65^\circ$.

| ν_{10} | ν_{20} | ν_{30} | φ_1 , рад | L_1 | L_2 |
|------------|------------|------------|-------------------|-----------|-------------------|
| -0.2882 | 1.1601 | -0.2499 | 3.0880 | 10^{-9} | $3 \cdot 10^{-5}$ |
| 0.5492 | 0.8975 | -0.2410 | 3.8456 | 10^{-9} | $2 \cdot 10^{-5}$ |
| 0.1172 | 1.1234 | -0.2840 | 3.4032 | 10^{-9} | $2 \cdot 10^{-5}$ |
| -0.2712 | 3.0525 | -1.1231 | 4.4617 | 10^{-9} | $6 \cdot 10^{-6}$ |

На рисунке приведены законы изменения сопряжённых переменных ν_i для их начальных значений, приведённых в четвёртой строке второй таблицы. (Кривая $\nu_1 = \nu_1(\varphi)$ — линия переключения управления.)

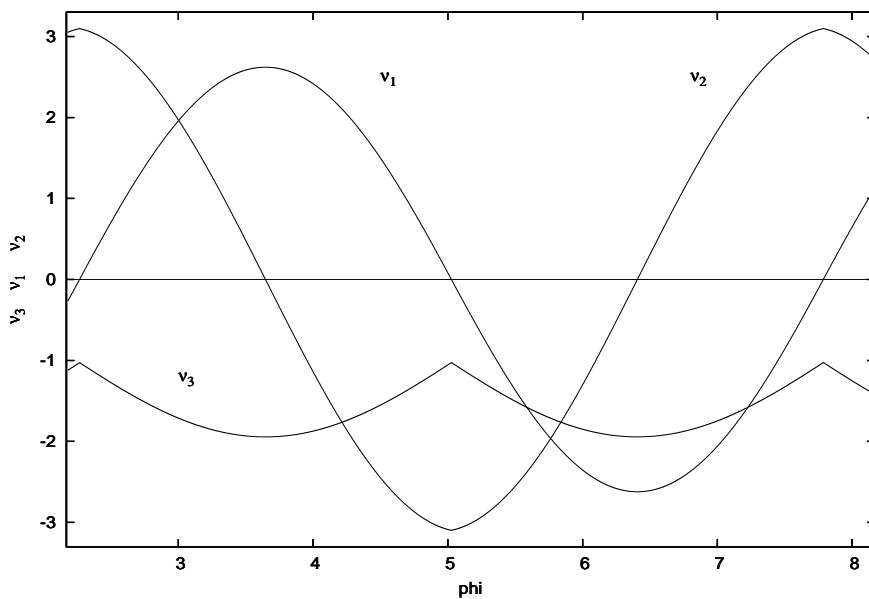


Рис. 1. Законы изменения сопряжённых переменных

Закключение. В работе продолжены исследования, начатые в [1], предложен алгоритм нахождения начальных условий интегрирования сопряжённых дифференциальных уравнений краевой задачи переориентации круговой орбиты КА. Выявлены основные трудности численного решения задачи: периодичность по "времени" φ_1 , неоднозначность нахождения начальных условий. Эти проблемы требуют дальнейшего изучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-01-00 310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231-234.

УДК 533.6.011

Я.Г. Сапунков

ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье получено аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне во втором приближении в области между поверхностью ударной волны и предельной характеристикой. Приводятся значения показателей автомодельности в зависимости от отношения теплоемкостей, полученных на основе полных уравнений и первых двух приближенных решений.

1. В работе [1] показано, что уравнения движения идеального совершенного газа в задаче о сходящейся ударной волне в безразмерных автомодельных переменных могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d \ln \lambda} &= - \left[(\nu + 1) V - \frac{2}{\gamma} (1 - \alpha) \right] + (V - \alpha) \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\ \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} &= - \frac{2(1 - \alpha)}{\gamma(V - \alpha)} - \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\ \frac{dZ}{d \ln \lambda} &= -Z \left\{ \frac{2}{V - \alpha} \left[V - \frac{1 + \alpha(\gamma - 1)}{\gamma} \right] + (\gamma - 1) \frac{\Delta_4}{\Delta_0} \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Delta_4(V) = \nu V^2 - \left[(\nu + 1) \alpha + \frac{2}{\gamma} (1 - \alpha) - 1 \right] V + 2 \frac{\alpha}{\gamma} (1 - \alpha)$, $\Delta_0 = (V - \alpha)^2 - Z$. Здесь γ — отношение теплоемкостей, α — показатель автомодельности в законе движения ударной волны, $\nu = 1$ соответствует цилиндрической симметрии, $\nu = 2$ — сферической симметрии. Размерные переменные связаны с автомодельными переменными соотношениями

$$\lambda = \frac{r}{A(-t)^\alpha}, \quad v = \frac{r}{t} V, \quad \rho = \rho_0 R, \quad p = \frac{\rho_0 r^2}{\gamma t^2} Z R.$$

Закон движения сходящейся ударной волны $r = r_s(t) = A(-t)^\alpha$, $t < 0$. Начальная плотность газа $\rho_0 = \text{const}$. Граничные условия для автомодельных переменных на поверхности ударной волны

$$V(1) = V_s = \frac{2\alpha}{\gamma + 1}, \quad R(1) = R_s = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad Z(1) = Z_s = \frac{2\alpha^2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}. \quad (2)$$

2. Для упрощения системы (1) отношение Δ_4/Δ_0 в первом приближении в [1] полагалось постоянной величиной, во втором приближении положим линейной функцией V в окрестности точки S , соответствующей на плоскости OVZ ударной волне, т. е.:

$$\frac{\Delta_4}{\Delta_0} = K + a(V - V_s), \quad K = -\frac{2}{\alpha(\gamma - 1)} \left[\left(2 - \frac{1}{\gamma}\right) (1 - \alpha) - \nu\alpha \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right],$$

$$a = \frac{1}{\Delta_{0s}} \left\{ 2\nu V - \left[(\nu + 1)\alpha + \frac{2}{\gamma}(1 - \alpha) \right] - K \left[2(V - \alpha) - \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \right] \right\}_s.$$

Решение упрощенных уравнений, с учетом условий (2) имеет вид

$$V = c_1 + c_2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{V_s - c_1}{c_2} + c_2 a \ln \lambda \right),$$

$$R = R_s \left[\frac{(V - c_1)^2 + c_2^2}{(V_s - c_1)^2 + c_2^2} \right]^{0.5M_1} \left(\frac{V - \alpha}{V_s - \alpha} \right)^{N_0}$$

$$\exp \left(\frac{1}{c_2} (M_0 + M_1 c_1) \operatorname{arctg} \frac{c_2 (V - V_s)}{c_2^2 + (V - c_1)(V_s - c_1)} \right),$$

$$Z = Z_s \left[\frac{(V - c_1)^2 + c_2^2}{(V_s - c_1)^2 + c_2^2} \right]^{0.5D_1} \left(\frac{V - \alpha}{V_s - \alpha} \right)^{E_0}$$

$$\exp \left(\frac{1}{c_2} (D_0 + D_1 c_1) \operatorname{arctg} \frac{c_2 (V - V_s)}{c_2^2 + (V - c_1)(V_s - c_1)} \right),$$

$$c_1 = \frac{1}{2a} [\nu + 1 + a(V_s + \alpha) - K], \quad c_2 = \sqrt{\frac{1}{a} \left[\frac{2}{\gamma} (1 - \alpha) - \alpha(K - aV_s) \right] - c_1^2},$$

$$N_0 = -\frac{2(1 - \alpha)}{a\gamma [(\alpha - c_1)^2 + c_2^2]}, \quad M_1 = -1 - N_0,$$

$$M_0 = \alpha M_1 + 2N_0 c_1 - \frac{K}{a} + (V_s + \alpha), \quad E_0 = -N_0,$$

$$D_1 = \gamma + 1 - E_0, \quad D_0 = \alpha D_1 + 2E_0 c_1 - \frac{1}{a} [2 + (\gamma - 1)(K - a(V_s + \alpha))].$$

3. Координаты особой точки B , соответствующей предельной характеристике, в которой $\Delta_0 = 0$, $\Delta_4 = 0$, имеют вид

$$V_B = \frac{1}{2\nu} \left(\left(\nu + 1 - \frac{2}{\gamma} \right) \alpha + \frac{2}{\gamma} - 1 \pm \sqrt{\left[\left(\nu + 1 - \frac{2}{\gamma} \right) \alpha + \frac{2}{\gamma} - 1 \right]^2 - 8\nu \frac{\alpha}{\gamma} (1 - \alpha)} \right), \quad (11)$$

$$Z_B = (V_B - \alpha)^2. \quad (3)$$

Для определения α вместе с соотношениями (3) служит уравнение

$$Z_B = Z_s \left[\frac{(V_B - c_1)^2 + c_2^2}{(V_s - c_1)^2 + c_2^2} \right]^{0.5D_1} \left(\frac{V_B - \alpha}{V_s - \alpha} \right)^{E_0} \times \exp \left(\frac{1}{c_2} (D_0 + D_1 c_1) \operatorname{arctg} \frac{c_2 (V_B - V_s)}{c_2^2 + (V_B - c_1)(V_s - c_1)} \right). \quad (4)$$

Уравнение (4) решается численно методом Ньютона. Начальное приближение значения показателя автомодельности α_0 определялось из условия, что корни уравнения $\Delta_4(V) = 0$ являются кратными. Расчеты для цилиндрической симметрии показывают, что для $\gamma = 1.4$ значение показателя автомодельности, полученного на основе полных уравнений, $\alpha = 0.835306$, на основе аналитического решения в первом приближении $\alpha = 0.835440$, во втором приближении $\alpha = 0.835321$. Для случая сферической симметрии расчеты показывают, что для $\gamma = 1.4$ значение показателя автомодельности, полученного на основе полных уравнений, $\alpha = 0.717146$, на основе аналитического решения в первом приближении $\alpha = 0.717423$, во втором приближении $\alpha = 0.717179$. Проводились расчеты для различных значений отношения теплоемкостей от $\gamma = 1.1$ до $\gamma = 1.8$. Расчеты показали, что приближенные значения показателей автомодельности обладают достаточной точностью. При этом с увеличением значения отношения теплоемкостей и в первом и во втором приближении точность определения показателя автомодельности возрастает. Начальное приближение для α в случае цилиндрической симметрии

$$\alpha_0 = \frac{2 - \gamma + \gamma\sqrt{2\gamma + \gamma^2}}{2(1 + \gamma^2)},$$

в случае сферической симметрии

$$\alpha_0 = \frac{4 + 4\gamma\sqrt{2\gamma + 3\gamma^2}}{4 + 4\gamma + 9\gamma^2}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я.Г. Приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 145-147.

УДК 629.78

Я.Г. Сапунков, А.В. Молоденков, А.Н. Державина

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫВОД ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ НА ПРОГРАММНОЕ ДВИЖЕНИЕ С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

Решение задачи оптимального управления о выводе твердого тела с одной неподвижной точкой на программное движение с учетом момента сопротивления принципом максимума Понтрягина сводится к решению краевой задачи, которая решается методом Ньютона. Приводятся результаты численного решения задачи с учетом и без учета сопротивления среды.

1. Вращательное движение твердого тела с одной неподвижной точкой под действием управляющего момента \mathbf{M} и момента сил сопротивления $-(\beta_1 + \beta_2|\omega|)\omega$, ($\beta_i = \text{const} \geq 0$, $i = 1, 2$) описывается системой уравнений [1]:

$$\frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = \frac{1}{2}L(\mathbf{\Lambda})\omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = R_0\mathbf{M} - R_1(\omega)\omega \quad (1)$$

где t — время; $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ — кватернион положения тела; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости и его проекции на оси подвижной системы координат, оси которой совпадают с главными осями инерции для неподвижной точки тела; A, B, C — главные моменты инерции, $L(\mathbf{\Lambda})$, R_0 , $R_1(\omega)$ — матрицы, определенные в [1]. На управляющий момент наложено ограничение

$$|\mathbf{M}| \leq M_*. \quad (2)$$

Вращательное программное движение тела описывается кватернионным соотношением $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_{pr}(t)$, $0 \leq t < \infty$. Вектор угловой скорости программного движения $\omega_{pr}(t)$ связан с $\mathbf{\Lambda}_{pr}(t)$ уравнением

$$\frac{d\mathbf{\Lambda}_{pr}}{dt} = \frac{1}{2}L(\mathbf{\Lambda}_{pr})\omega_{pr}(t).$$

Начальные условия для управляемого тела при $t=0$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_N, \quad \omega = \omega_N. \quad (3)$$

Условие вывода управляемого тела на программное движение при $t = t_T = ?$

$$\text{vect} \left(\mathbf{\Lambda}(t_T) \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{pr} \right) = 0, \quad \omega = \omega_{pr}. \quad (4)$$

Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t)$, удовлетворяющее ограничению (2), которое выводит управляемую систему (1) из начального состояния (4) на программное движение и сообщает минимальное значение функционалу качества

$$I = \int_0^{t_T} (\alpha_1 + \alpha_2 |\mathbf{M}|) dt, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0.$$

2. Для решения задачи с помощью принципа максимума составляется функция Гамильтона – Понтрягина с сопряженными переменными \mathbf{p} , ψ :

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 |\mathbf{M}|) + \frac{1}{2} (\mathbf{p}, L(\mathbf{\Lambda}) \omega) + (\psi, R_0 \mathbf{M} - R_1(\omega) \omega), \\ \mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3), \quad \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3).$$

Сопряженные переменные удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2} L(\mathbf{p}) \omega, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{2} L^T(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{p} + R_2(\omega) \psi, \quad (5)$$

где $L^T(\mathbf{\Lambda})$ – транспонированная матрица, $R_2(\omega)$ – матрица.

Из условия максимума для функции Гамильтона – Понтрягина следует, что оптимальное управление $\mathbf{M}_{opt}(t)$ определяется по формуле

$$\mathbf{M}_{opt} = \frac{R_0 \psi(t)}{|R_0 \psi(t)|} M_*, \quad |R_0 \psi(t)| \geq \alpha_2, \quad \mathbf{M}_{opt} = 0. \quad (6)$$

Согласно условию (4) правый конец траектории в фазовом пространстве $\mathbf{\Lambda} \times \omega$ должен находиться на перемещающемся многообразии и, следовательно, на нем должны выполняться условия трансверсальности

$$(\mathbf{p}, \mathbf{\Lambda}_{pr}) = 0, \quad H = \frac{1}{2} (\mathbf{p}, L(\mathbf{\Lambda}) \omega_{pr}) + \left(\psi, \frac{d\omega_{pr}}{dt} \right). \quad (7)$$

Решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (1), (5) с учетом (6) с граничными условиями (3) при $t=0$, условиями (4), (7) при $t = t_T$.

3. Для проведения расчетов вводятся безразмерные переменные по формулам $\tau = tT^{-1}$, $\mathbf{r} = \omega T$, $\mathbf{u} = \mathbf{M} M_*^{-1}$, $a = A I_*^{-1}$, $b = B I_*^{-1}$, $c = C I_*^{-1}$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 M_*$, $\bar{\beta}_1 = \beta_1 T I_*^{-1}$, $\bar{\beta}_2 = \beta_2 I_*^{-1}$, $I_* = \sqrt{\frac{1}{3} (A^2 + B^2 + C^2)}$, $T = \sqrt{\frac{I_*}{M_*}}$.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\bar{\beta}_1 = 0.25$, $\bar{\beta}_2 = 0.125$, $\alpha_1 = 0.25$, $\bar{\alpha}_2 = 0.35$, $a = 1.4324$, $b = 0.7358$, $c = 0.6377$.

Начальное состояние управляемого тела определяется значениями кватерниона положения и вектора угловой скорости в безразмерных переменных $\Lambda_0 = 0.7898$, $\Lambda_1 = 0.2468$, $\Lambda_2 = -0.5528$, $\Lambda_3 = 0.0987$; $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.75$, $r_3 = -0.75$.

Начальное состояние для программного движения тела определяется значениями кватерниона положения и вектора угловой скорости в безразмерных переменных $\Lambda_{0pr} = 0.0$, $\Lambda_{1pr} = 0.6$, $\Lambda_{2pr} = 0.8$, $\Lambda_{3pr} = 0.0$, $r_{1pr} = 0.1$, $r_{2pr} = -0.15$, $r_{3pr} = 0.1$.

Угловое ускорение для программного движения тела постоянное и в безразмерных переменных определяется координатами $\varepsilon_1 = 0.02$, $\varepsilon_2 = 0.01$, $\varepsilon_3 = -0.02$.

Общее безразмерное время движения до вывода на программное движение составляет $\tau_k = 3.5435$. На промежутке $1.3379 \leq \tau \leq 3.0759$ управляющий момент равен нулю. На двух других промежутках времени модуль управляющего момента принимает постоянное максимальное значение. Результаты расчета без учета сопротивления показывают, что в этом случае общее безразмерное время движения $\tau_k = 3.3682$, причем на промежутке $0.5384 \leq \tau \leq 2.2954$ управляющий момент равен нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект №08-01-00310).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я.Г., Молоденков А.В., Глазков К.А. Оптимальное управление угловым движением твердого тела с учетом сил сопротивления // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 216-219.

УДК 539.3

Р.А. Сафонов

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПАРАЛЛЕЛОГРАММНЫХ ПЛАСТИН

Элементы, имеющие форму тонких пластинок, работающих на изгиб, являются составными частями многих конструкций и механизмов. Напряженно-деформированное состояние таких объектов можно исследовать методом сеток, вариационными методами, методом приведения, методом конечных элементов и другими методами. Одним из наиболее эффективных является метод сплайн-коллокации, в ходе которого двумерная задача сводится к одномерной и последняя решается численно [1]. Чаще всего для этого применяются методы Абрамова, Годунова или Виноградова [2, 3].

В статье рассматриваются тонкие пластинки, сечение которых срединной плоскостью имеет форму параллелограмма со сторонами a и b (рис. 1).

Разрешающее уравнение для определения прогиба пластинки имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2w(x, y, t) = q(x, y, t). \quad (1)$$

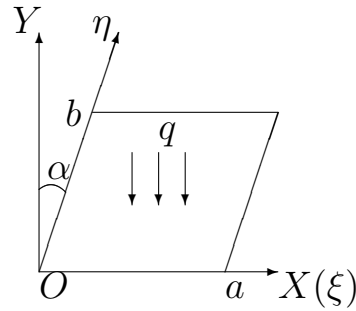


Рис. 1

Оно решается в косоугольной безразмерной системе координат (ξ, η) , связанной с декартовыми координатами (x, y) формулами

$$\xi = \frac{x}{a} - \frac{y \operatorname{tg} \alpha}{b} \cdot \eta = \frac{y}{\cos \alpha}$$

В соответствии с методом сплайн-коллокации функция прогиба w ищется в виде

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=-2}^{N+2} B_{5,i}(\eta) W_i(\xi), \quad (3)$$

где $B_{5,i}(\eta)$ — система базисных сплайнов (Б-сплайнов), а $W_i(\xi)$ — неизвестные функции, подлежащие определению. В классическом методе сплайн-коллокации [1] предлагается выбрать функции $W_{-2}, W_{-1}, W_{N+1}, W_{N+2}$ таким образом, чтобы удовлетворить граничные условия при $\eta = 0$ и $\eta = 1$. В этом случае вместо (3) будем иметь

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \varphi_i(\eta) W_i(\xi).$$

Такой выбор указанных функций возможен только для довольно узкого класса граничных условий. Так, для параллелограммной пластинки он может применяться только в случае, когда края $\eta = 0$ и $\eta = 1$ заделаны жестко [4]. С целью расширения области применения метода сплайн-коллокации была произведена его модификация.

Представление функции прогиба сохраняет вид (3). Подстановка (3) в (1) при $\eta = \eta_i^*$ позволяет получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующую исходное уравнение в частных производных. Для замыкания этой системы к ней добавляются дополнительные уравнения, представляющие собой подстановку (3) в выражения граничных условий на краях $\eta = 0$ и $\eta = 1$, продифференцированные вдоль края несколько раз с тем, чтобы они включали в себя старшие производные искомых функций. Полученная система приводится к нормальной форме Коши

$$Y' = AY + B, \quad (4)$$

где Y — вектор-столбец неизвестных функций и их производных.

Подстановка (3) в условия закрепления краев $\xi = 0$ и $\xi = 1$, записанные в точках коллокации $\eta = \eta_i^*$, дает $4N + 4$ граничных условия. Для корректной постановки краевой задачи необходимо добавить дополнительные граничные условия, получаемые из рассмотрения угловых точек пластинки [5].

С помощью такой модификации метода сплайн-коллокации были решены задачи статического изгиба параллелограммной пластинки с равномерно распределенной поперечной нагрузкой $q(x, y) = q_0 = \text{const}$ при следующих условиях закрепления краев.

1. Жестко заделанный контур. На всех краях пластинки выполняются условия

$$w = 0, \frac{dw}{dn} = 0. \quad (5)$$

2. Консольная пластинка (рис. 2). Один из краев заделан жестко (5), а остальные свободны от нагрузки:

$$M_n = 0, N^* = 0. \quad (6)$$

3. Свободная от заделки пластинка с шарнирным подкреплением в углах (рис. 3). На всех краях пластинки ставятся граничные условия (6), а в угловых точках требуется выполнение условий

$$w = 0, M_n = 0. \quad (7)$$

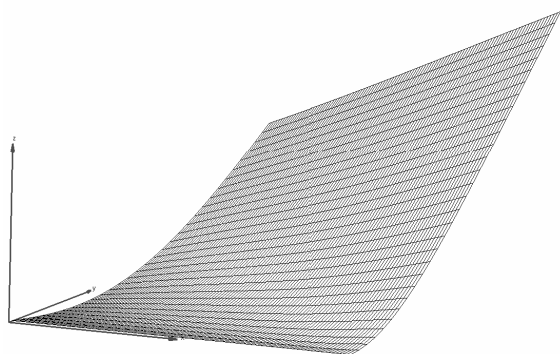


Рис. 2.

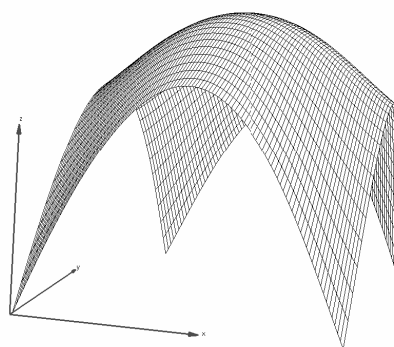


Рис. 3.

В таблице приведены значения величин wE/q_0 для пластинок с различными углами наклона α для трех указанных выше случаев и значения, приведенные в [4] для случая пластинки с жестко заделанным контуром. Для расчетов использовались значения $a = b = 10\text{м}$, $h = 0.1\text{м}$, $\nu = 0.3$.

| α | $W_1 E/q_0, \text{ м}$ | $W_{[4]} E/q_0, \text{ м}$ | $W_2 E/q_0, \text{ м}$ | $W_3 E/q_0, \text{ м}$ |
|------------|------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|
| 1° | $1.381 \cdot 10^5$ | - | $1.411 \cdot 10^7$ | $2.783 \cdot 10^6$ |
| 15° | $1.226 \cdot 10^5$ | $1.224 \cdot 10^5$ | $1.450 \cdot 10^7$ | $2.418 \cdot 10^6$ |
| 30° | $0.840 \cdot 10^5$ | $0.8405 \cdot 10^5$ | $1.348 \cdot 10^7$ | $1.622 \cdot 10^6$ |

Сравнивая приведенные значения, можно заметить хорошее совпадение результатов расчета для первого случая со значениями, приведенными в [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) // Прикладная механика. 1995. Т. 31, вып 6. С. 3-27.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. XVI. Вып. 3 (99). С. 171-174.
3. Виноградов Ю.И., Виноградов А.Ю., Гусев Ю.А. Численный метод переноса краевых условий для жестких дифференциальных уравнений строительной механики. // Математическое моделирование. 2002. Т. 14, вып. 9. С. 3-8.
4. Крюков Н.Н. Расчет косоугольных и трапециoidalных пластин с помощью сплайн-функций // Прикладная механика. 1997. Т. 33, вып. 5. С. 77-81.
5. Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. Пер. с англ. / Под ред. Э.И. Григальюка. М.: Наука. 1982. 568 с.

УДК 533.6.011:632.529

Г.Д. Севостьянов

МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯРНОГО ОТРАЖЕНИЯ КОСОГО СКАЧКА ОТ СТЕНКИ

В статье предложен метод расчета параметров течения газа при регулярном отражении косоугольного скачка от плоской стенки на основе уравнений Чаплыгина. Сравнение вычисленных параметров с экспериментальными удовлетворительно для числа Маха ($1 \div 3$).

Уравнения Чаплыгина [1, §16, 17] для плоского безвихревого установившегося течения идеального газа

$$\varphi_\theta = -\psi_\sigma, \varphi_\sigma = K(\sigma)\psi_\theta \quad (1)$$

(где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, θ — угол наклона вектора скорости к оси x ; K, σ — функции Чаплыгина) приводятся к нелинейной системе в дивергентной форме

$$k(u)u_\varphi = (L(u))_\varphi = v_\psi, v_\varphi = u_\psi, u = -c\sigma, v = c\theta, k(u) = -K(\sigma), \quad (2)$$

$$c = (\gamma + 1) \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{3}{\gamma - 1}}, k(0) = 0, k'(0) = 1,$$

где $\gamma > 1$ — отношение теплоемкостей для газа.

Из (2) на скачке уплотнения имеем условия $([f] = f_+ - f_-)$ - разрыв функции f на скачке) и уравнение ударной поляры

$$\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)_c = -\frac{[v]}{[u]} = -\frac{[L]}{[v]}, \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)_c^2 = \frac{[L]}{[u]}, [v]^2 = [L][u]. \quad (3)$$

Система Чаплыгина (1) в переменных v, u имеет вид

$$\varphi_v = \psi_u, \varphi_u = k(u)\psi_v. \quad (4)$$

Тогда вдоль скачка (индекс “+” для величин на задней стороне скачка)

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_c = k_+\psi_v + \left(\frac{dv}{du}\right)_c \psi_u = \pm \sqrt{\frac{[L]}{[u]}} \left\{ \psi_u + \left(\frac{dv}{du}\right)_c \psi_v \right\}. \quad (5)$$

т.е. на ударной поляре имеем из (5) условие косой производной для ψ

$$a\psi_u + b\psi_v = 0. \quad (6)$$

Для криволинейного скачка в однородном потоке Л. Крокко (L. Crocco) в 1937 г. ввел понятие “ежевидной” поляры. Для наклона “иголки” на поляре в плоскости vu

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_{\text{иГ}} = -\frac{\psi_u}{\psi_v} = \frac{b}{a}.$$

Для плоской твердой стенки ($dv = 0$) $b = 0$, т.е. имеем точку Крокко Q поляры с условием

$$2b = \frac{[L]}{[u]} + 3k_+ = 0, u = u_Q < 0. \quad (7)$$

Функции u и L можно представить интегралами по $\tau = V^2 V_{\max}^{-2} < 1$:

$$u = c \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau} d\tau, L = c \int_{\tau_*}^{\tau} \frac{-1 + (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} d\tau \geq 0, \quad (8)$$

$$\tau_* = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} > 0, 0 < \tau < 1, \beta = \frac{1}{\gamma - 1} > 0.$$

Пусть в однородном сверхзвуковом потоке (число Маха $M_\infty > 1$) косой скачок АО под неизвестным углом падения ω достигает плоской стенки (оси x) в точке O и регулярно отражается от нее под неизвестным углом отражения ω' в виде косога скачка ОВ. Обозначим числа Маха в области АОВ и за ОВ через $M_1 > 1$ и $M_Q < 1$. По величине τ_∞ надо определить τ_1 и τ_Q ,

$\theta_1 < 0$, ω , ω' и интенсивности двух скачков $1 > \xi = \frac{p_\infty}{p_1}$, $1 < \xi' = \frac{p_Q}{p_1}$ (p_∞ , p_1 , p_Q - давления в трех областях). Из (7), (3), (8) имеем два уравнения для τ_1 и τ_Q , записав условия на скачках АО и ОВ:

$$\int_{\tau_Q}^{\tau_1} \frac{-1 + (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} d\tau = 3 \frac{1 - (2\beta + 1)\tau_Q}{(1 - \tau_Q)^{2\beta+1}} \int_{\tau_Q}^{\tau_1} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau} d\tau,$$

$$\theta_1^2 = \left(\frac{v_1}{c}\right)^2 = \int_{\tau_1}^{\tau_\infty} \frac{-1 + (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau_\infty} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau} d\tau =$$

$$= 3 \frac{1 - (2\beta + 1)\tau_Q}{(1 - \tau_Q)^{2\beta+1}} \left\{ \int_{\tau_Q}^{\tau_1} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau} d\tau \right\}^2.$$

Так как $\gamma = 1 + \frac{2}{m}$ (m - число степеней свободы молекулы газа без учета ее колебаний), то все интегралы вычисляются аналитически. Углы падения и отражения определяются по формулам ($h_{1\infty} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_\infty}}$, $h_{Q\infty} = \sqrt{\frac{\tau_Q}{\tau_\infty}}$)

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1 - h_{1\infty} \cos |\theta_1|}{h_{1\infty} \sin |\theta_1|}, \operatorname{tg} \omega' = \frac{h_{1\infty} \cos |\theta_1| - h_{Q\infty}}{h_{1\infty} \sin |\theta_1|}, \quad (9)$$

полученным из рисунка двух ударных размерных поляр на декартовой плоскости годографа скорости (см. [1]) (вершиной малая поляра лежит на большой и пересекает ее ось в точке Q).

Интенсивности косых скачков АО и ОВ найдем по формулам соотношений на косом скачке (см. [1])

$$\xi = \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_\infty^2 \sin^2 \omega - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{-1}, \xi' = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 \sin^2 (\omega' + |\theta_1|) - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (10)$$

Связь τ и M определяется формулой, получаемой из интеграла Бернулли

$$(\gamma - 1) M^2 = \frac{2\tau}{1 - \tau}. \quad (11)$$

Для околосвукового случая ($M_\infty \geq 1$) формулы упрощаются и переходят непрерывно в формулы околосвуковой теории [2, 3]: $L(u) = u^2/2$, $u_Q = -u_1/7$, $v_Q = 0$, $k(u) = u$.

Результаты вычислений Е.А. Лунёва и автора (ξ) приведены в таблице для $\gamma = 7/5$.

| M_∞ | τ_∞ | τ_1 | τ_Q | $\omega, ^\circ$ | $\omega', ^\circ$ | ξ |
|------------|---------------|----------|----------|------------------|-------------------|-------|
| 1,02 | 1,172 | 0,170 | 0,166 | 79,8 | 84,15 | 0,991 |
| 1,20 | 0,223 | 0,199 | 0,161 | 60,64 | 71,48 | 0,901 |
| 1,50 | 0,310 | 0,244 | 0,152 | 49,29 | 60,69 | 0,745 |
| 2,00 | 0,444 | 0,307 | 0,138 | 41,92 | 48,61 | 0,522 |
| 2,50 | 0,555 | 0,356 | 0,116 | 39,27 | 39,30 | 0,363 |
| 3,00 | 0,642 | 0,395 | 0,098 | 38,65 | 31,13 | 0,255 |

Найденные зависимости $\omega'(\omega)$, $\omega(\xi)$ достаточно близки к полученным экспериментально ([4, рис. 8.6, а; 5, фиг. 15 на с. 461] во всем диапазоне чисел Маха ($1 < M_\infty \leq 3$)).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. Изд. 4-е. М.: ГИФМЛ. 1963.
2. Севостьянов Г.Д. Регулярное отражение околзвучкового скачка от стенки. // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во. Саратов. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 181-184.
3. Китанин В.А., Севостьянов Г.Д. Расчет регулярного отражения околзвучкового скачка от плоской стенки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во. Саратов. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 187-190.
4. Баженова Т.В., Гвоздева Л.Т. Нестационарные взаимодействия ударных волн. М.: Наука. 1977.
5. Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во. иностр. лит. 1963.

УДК 533.6

И.А. Чернов

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ БЕЗ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

В статье представлен ряд новых автомодельных решений. Они описываются нелинейными уравнениями второго порядка, в коэффициенты которых входит параметр — показатель автомодельности. Решения являются формальными, их физическая интерпретация в теории вязко-невязкого взаимодействия, в частности, при рассмотрении вопросов об отрыве и о смещении потоков не обсуждается.

1. Плоско-параллельный случай.

Уравнения движения и неразрывности для компонент вектора скорости (u, v) имеют вид (ν — коэффициент вязкости) [1]

$$uu_x + vv_y = \nu u_{yy}, \quad u_x + v_y = 0.$$

С учетом уравнения неразрывности компоненты скорости выражаются через автомодельный представитель $\Phi(\zeta)$ функции тока (далее $\zeta = y/x^n$)

$$u(x, y) = x^{1-2n} \Phi'(\zeta), \quad v(x, y) = -[(1-n)\Phi(\zeta) - n\zeta\Phi'(\zeta)]x^{-n}.$$

Для $\Phi(\zeta)$ имеется обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) третьего порядка, которое введением переменных ($a = \Phi(\zeta)$, $b(a) = \Phi'(\zeta)$) сводится к ОДУ второго порядка

$$\nu [b(a) b'(a)]' + (1 - n) ab'(a) - (1 - 2n) b(a) = 0. \quad (1)$$

Изучаются решения вида

$$b(a) = Aa^2 + Ba + C + \sqrt{D_0 + D_1a + D_2a^2 + D_3a^3}. \quad (2)$$

Найдены решения для случаев:

а) задача о затопленной струе $n = 2/3$

$$b(a) = -a^2/6\nu + C + \sqrt{D_0};$$

б) задача о пристеночной струе $n = 3/4$

$$b(a) = -a^2/6\nu + \sqrt{D_1a};$$

в) $n = 0$ общий интеграл

$$b(a) = Ba + \nu (B^2 + D_2) + \sqrt{4\nu^2 B^2 D_2 + 4\nu B D_2 a + D_2 a^2};$$

г) $n = 1$ общий интеграл

$$b(a) = -a^2/6\nu + Ba - 3\nu (B^2 + D_2)/2 + \sqrt{9\nu^2 B^2 D_2 - 6\nu B D_2 a + D_2 a^2};$$

5) $n = -1$ интеграл

$$b(a) = 3\nu D_3 a + 27\nu^3 D_3^2 / 4 + \sqrt{729\nu^6 D_3^4 + 648\nu^4 D_3^3 a + 180\nu^2 D_3^2 + 16 D_3 a^3} / 4.$$

2. Осесимметричный случай.

2.1. Пограничный слой вдоль оси симметрии.

Система уравнений в цилиндрических координатах имеет вид [1]

$$uu_x + vu_y = \nu (yu_y)_y / y, \quad (yu)_x + (yv)_y = 0.$$

Функция тока $\Psi(x, y)$ связана со скоростями формулами

$$u(x, y) = \Psi_y / y, \quad v(x, y) = -\Psi_x / y.$$

Автономные решения имеют функцию тока вида $\Psi = x^n \Phi(\zeta)$.

Для дальнейшего введем переменную $z = \ln \zeta$, а затем переменные ($a = \Phi(z)$, $b(a) = \Phi'(z)$), в результате получим ОДУ второго порядка

$$\nu [b(a) b'(a)]' + ab'(a) - 4\nu b'(a) - (1 - 2n) b(a) - 2a + 4\nu = 0.$$

Укажем два решения.

1) n – любое:

$$b(a) = a/n + \nu(1 - 2n)/n^2, \quad (3)$$

2) $n = 1$, C – любое:

$$b(a) = -a^2/2\nu + 2a + C.$$

Решения вида (2) представлены в табл. 1.

2.2. Пограничный слой вдоль плоскости, перпендикулярной оси симметрии.

Система уравнений в цилиндрических координатах имеет вид [1]

$$uu_x + vv_y = \nu u_{yy}, \quad (xu)_x + (xv)_y = 0.$$

С учетом уравнения неразрывности компоненты скорости выражаются через автомодельный представитель $\Phi(\zeta)$ функции тока следующим образом:

$$u(x, y) = x^{1-2n}\Phi'(\zeta), \quad v(x, y) = -[(2-n)\Phi(\zeta) - n\zeta\Phi'(\zeta)]x^{-n}.$$

Вместо уравнения (1) имеем

$$\nu [b(a) b'(a)]' + (2-n)ab'(a) - (1-2n)b(a) = 0.$$

Решения вида (2) записаны в табл. 2.

Таблица 1

| n | A | B | C | D_0 | D_1 | D_2 | D_3 |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|---------------------------------|---------------------------|-----------------------|----------------------|
| $\frac{1}{4}$ | 0 | 4 | 8ν | $2\nu D_1$ | D_1 | 0 | 0 |
| $\frac{3}{2}$ | $-\frac{2}{3\nu}$ | $\frac{10}{3}$ | $-\frac{8\nu}{3}$ | $-\nu D_1$ | D_1 | 0 | 0 |
| $-\frac{1}{4}$ | 0 | 2 | 2ν | ν^2 | 3ν | 3 | $\frac{1}{\nu}$ |
| $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{56\nu}{25}$ | $-\frac{3584\nu^2}{625}$ | $\frac{1152\nu}{125}$ | $-\frac{24}{5}$ | $\frac{4}{5\nu}$ |
| $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{8\nu}{9}$ | $-\frac{64\nu^2}{243}$ | $\frac{32\nu}{27}$ | $-\frac{16}{9}$ | $\frac{8}{9\nu}$ |
| $-\frac{23}{22}$ | $\frac{2}{11\nu}$ | $-\frac{254}{11}$ | $\frac{5100\nu}{11}$ | $\frac{2332800\nu^2}{11}$ | $-\frac{222912\nu}{11}$ | $\frac{6984}{11}$ | $-\frac{72}{11\nu}$ |
| $-\frac{23}{22}$ | $\frac{2}{11\nu}$ | $\frac{26}{11}$ | $\frac{24\nu}{11}$ | $\frac{64\nu^2}{33}$ | $\frac{64\nu}{11}$ | $\frac{64}{11}$ | $\frac{64}{33\nu}$ |
| $-\frac{23}{22}$ | $\frac{2}{11\nu}$ | $\frac{12}{11}$ | $-\frac{80\nu}{99}$ | $-\frac{400\nu^2}{891}$ | $\frac{200\nu}{99}$ | $-\frac{100}{33}$ | $\frac{50}{33\nu}$ |
| $-\frac{23}{22}$ | $\frac{2}{11\nu}$ | $-\frac{4}{143}$ | $-\frac{2176\nu}{1859}$ | $-\frac{10058560\nu^2}{942513}$ | $\frac{371520\nu}{24167}$ | $-\frac{13580}{1859}$ | $\frac{490}{429\nu}$ |

Таблица 2

| n | A | B | C | D_0 | D_1 | D_2 | D_3 |
|---------------|-------------------|-----------|---------------------------|----------------------------|-------------------------|--------------------------|-------|
| $\frac{5}{4}$ | $-\frac{1}{2\nu}$ | 0 | 0 | 0 | D_1 | 0 | 0 |
| 1 | $-\frac{1}{2\nu}$ | 0 | C | D_0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | $-\frac{1}{2\nu}$ | B | $-\frac{\nu(B^2+D_2)}{2}$ | $\nu^2 B^2 D_2$ | $-2\nu B D_2$ | D_2 | 0 |
| -1 | 0 | B | $\frac{\nu(B^2+D_2)}{3}$ | $\frac{4\nu^2 B^2 D_2}{9}$ | $\frac{4\nu B D_2}{3}$ | D_2 | 0 |
| -4 | 0 | νD_3 | $\frac{\nu^3 D_3^3}{4}$ | $\frac{\nu^6 D_3^4}{16}$ | $\frac{\nu^4 D_3^3}{2}$ | $\frac{5\nu^2 D_3^2}{4}$ | D_3 |

Пример гидродинамической интерпретации решения (3) был дан в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
2. Чернов И.Я. Автомодельное решение о круглой эжектирующей струе факельного типа // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2007. Вып. 9. С. 199-203.

УДК 517.984

Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

О ЗАКОНАХ ПОДОБИЯ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗОВЫХ И ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ

Для различных режимов нелинейной рефракции ударной волны (УВ) AR(BR)- RR — регулярной (рис.1, а); NR — нерегулярной (рис.1, в); RW — с отраженной УВ (рис.1, с) установлены основные параметры (параметры подобия), определяющие основные характеристики ($q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0)$, $q^- = (p_A - p_0)/(p_1 - p_0)$; p_A - в т. А на АВ и ударно-волновую структуру течения (β, ω, δ УВ-АВ).

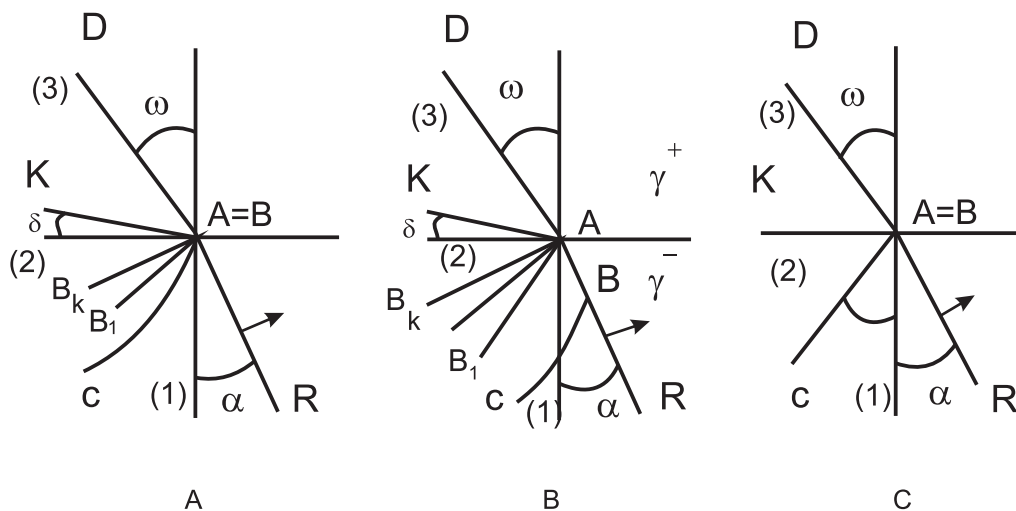


Рис. 1

При падении УВ AR(BR) относительной интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0^-$, $B_0^- = \rho_0^- c_0^{-2}$ под углом α к вертикали на свободную поверхность АЕ, разделяющую различные газожижкостные среды (ГАЗ/ГЖС, ГАЗ/ГАЗ, ГЖС/ГЖС) с газосодержаниями γ^+, γ^- возникают различные режимы рефракции (рис.1), характеризующиеся фронтами УВ (AR — падающий, AD — преломленной, AC — отраженной, АВ — фронт Маха), волной разряжения B_1AB_K и изломом свободной поверхности АК. Параметр q^+ , характеризующий интенсивность волны разряжения или отраженной УВ, $p_3 = p_2$.

Анализ задач рефракции УВ при относительно малой интенсивности падающей УВ (AR, BR) ($\bar{\epsilon} \ll 1$, $\bar{\epsilon} = R_0(\gamma^-)P_{10} = L_0(\gamma^-)\epsilon_{10}$; $\epsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$), характерных для ГЖС пузырькового типа, как и для других случаев взаимодействия УВ, может быть проведен на трех различных уровнях точности: точных соотношений на фронтах УВ и решений для волны разряжения (модель Эйлера); адиабатических потенциальных течений (обобщенная на ГЖС модель Лайтхилла с точностью до P_{10}^2 включительно; асимптотической теории коротких волн (ТКВ) до P_{10} включительно) [1, 2].

1. Проведем анализ нелинейной рефракции RW с отраженной ударной волной на основе модели Эйлера, используя точные соотношения на фронтах УВ (AR, AC, AD) и свободной поверхности АК, разделяющей различные ГЖС с газосодержаниями γ^+ , γ^- (рис.1, с). Для элемента фронта УВ в автомодельных переменных $\xi = x/c_0t$, $\eta = y/c_0t$, описываемого уравнением $\xi = \xi(\eta)$, интенсивности $P_{ji} = (p_j - p_i)/B^\pm$, $B^\pm = \rho_0^\pm c_0^{\pm 2}$ (i — соответствует значениям перед фронтом, j — за фронтом) имеем (см. [1, 2]) условия динамической совместности:

$$\frac{\rho_i}{\rho_0} \frac{\left[(\xi - \eta\xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right]}{1 + \xi'^2} = N(P_{ji}); \quad \frac{\rho_i}{\rho_0} = \frac{N(P_{ji}) - P_{ji}}{N(P_{ji})},$$

$$P_{ji} = \frac{\rho_i}{\rho_0} \left[(\xi - \eta\xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right] \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right), \quad (1)$$

$$\xi' \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right) = \frac{v_i}{c_0} - \frac{v_j}{c_0}; \quad N(P_{ji}) = \frac{1 + 2a(d_1 + P_{ji})(d_2 + P_{ji})}{2(d_3 + aP_{ji})}.$$

Коэффициенты a , d_1 , d_2 , d_3 зависят от газосодержания сред γ^+ или γ^- (см. [1, 2]).

На фронте AR в точке A ($\eta_A = 0$) $\xi'_1 = \text{tg } \alpha$, $P_{ji} = P_{10}$ имеем

$$\xi_A^- = \frac{N^{1/2}(P_{10})}{\cos \alpha}; \quad \rho_1 = \rho_0^- \frac{N(P_{10})}{N(P_{10}) - P_{10}}; \quad u_1 = c_0^- \frac{P_{10}}{\xi_A^-}; \quad v_1 = c_0^- \text{tg } \alpha \quad u_1 \quad (2)$$

На фронте AC в т.А $\xi'_2 = \text{tg } \beta$, $P_{ji} = P_{21} = P_{20} - P_{10}$, $P_{20} = \frac{(p_2 - p_0)}{B_0^-}$

$$\text{tg } \beta = \frac{U_1 V_1 - (N(P_{21})\rho_0^-/\rho_0)^{1/2} (U_1^2 + V_1^2 - N(P_{21})\rho_0^-/\rho_1)^{1/2}}{V_1^2 - N(P_{21})\rho_0^-/\rho_1},$$

$$U_1 = \frac{u_1}{c_0^-} - \xi_A^-; \quad V_1 = \frac{v_1}{c_0^-} - \eta_A^-; \quad \eta_A^- = 0; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{N(P_{21})}{N(P_{21}) - P_{21}}, \quad (3)$$

$$\frac{u_2}{c_0^-} = \frac{u_1}{c_0^-} + \frac{P_{21} \cos \beta (\rho_0^-/\rho_0)}{N^{1/2}(P_{21})}; \quad \frac{v_2}{c_0^-} = \frac{v_1}{c_0^-} + \frac{P_{21} \sin \beta (\rho_0^-/\rho_0)^{1/2}}{N^{1/2}(P_{21})}.$$

На фронте AD в точке A $\xi_3^{\pm} = -\operatorname{tg} \omega$, $P_{ji} = P_{30} = (p_3 - p_0)/B_0^+$, $B_0^+ = \rho_0^+ c_0^{+2}$

$$\xi_A^+ = \frac{N^{1/2}(P_{30})}{\cos \omega}; \quad \rho_3 = \rho_0^+ \frac{N(P_{30})}{N(P_{30}) - P_{30}}; \quad u_3 = c_0^+ \frac{P_{30}}{\xi_A^+}; \quad v_3 = \operatorname{tg} \omega u_3. \quad (4)$$

Условие совместности течений на свободной поверхности (в верхней и нижней областях) в точке A ($\eta_A^+ = \eta_A^- = 0$, $x_A/t = c_0 \xi$) приводит к I инварианту

$$c_0^+ \xi_A^+ = c_A^- \xi_A^-,$$

или

$$\frac{c_0^+ N^{1/2}(P_{30})}{\cos \omega} = \frac{c_0^- N^{1/2}(P_{30})}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

Условия на свободной поверхности АК в т.А ($p_3 = p_2$, $u_{3n} = u_{2n} = u_n$) приводят (см. [1,2]) к записи ($\eta_A^{\pm} = 0$, $\xi_{KA}^{\pm} = -1/\operatorname{tg} \delta$)

$$\frac{v^{\pm} - c_0^{\pm} \eta_A^{\pm}}{u^{\pm} - c_0^{\pm} \xi_A^{\pm}} = \frac{1}{\xi_{KA}^{\pm}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{v^{\pm}}{c_0^{\pm} \xi_A^{\pm}}. \quad (6)$$

Для относительно слабых УВ при $P_{10} \ll 1$, $|u^{\pm}| \ll C_0^{\pm} \xi_A^{\pm}$ условия (6) приводят ко II инварианту рефракции:

$$v^+ = v^-. \quad (7)$$

Инварианты I, II имеют место для всех режимов рефракции (RR, NR, RW). Однако для рефракции NR необходимо знать значения в точке A на фронте Маха AB (ξ_a^{\pm} , v_a^{\pm}), что связано с построением решения в области возмущения за фронтом AB (в приближении ТКВ [3]).

Инварианты I (5) и II (7) при подстановке $v^+ = v_3$, $v^- = v_2$ согласно (3), (4) приводит к записи двух уравнений относительно ω , q^+/P_{10} , α , γ^+ , γ^- . При этом для RR, NR, RW при $q^- = 1$ имеем $P_{30} = q^+ \bar{B} P_{10}$, $P_{21} = (q^+ - 1) P_{10}$, $\bar{B} = B^-/B^+$. Исключая ω из уравнений для инвариантов I, II, получим уравнение для нахождения q^+ , определяющей результирующую интенсивность рефракции (интенсивность преломленной УВ) $\bar{c} = c_0^-/c_0^+$:

$$\bar{c}^2 \frac{N(P_{30})}{P_{30}^2} \left[\frac{P_{10} \sin \alpha}{N^{1/2}(P_{10})} + \frac{P_{21} \sin \beta}{(\rho_1/\rho_0^-)^{1/2} N^{1/2}(P_{21})} \right]^2 = 1 - \frac{N(P_{30})}{\bar{c}^2 N(P_{10})} \cos^2 \alpha. \quad (8)$$

Здесь ρ_1/ρ_0^- , β определяются согласно (2), (3). В целом (8) представляет зависимость q^+/P_{10} , \bar{c} , \bar{B} , где P_{10} , α характеризуют интенсивность и наклон падающей УВ, а a , \bar{c} , \bar{B} — относительные характеристики газожидкостных сред, определяемые газосодержаниями γ^+ , γ^- . Эти характеристики являются параметрами подобия в задачах рефракции УВ.

2. При анализе нелинейной рефракции RR с волной разряжения B_1AB_K исследования проводятся аналогично п. 1. Однако вместо условий (3) на УВ АС берутся условия на центрированной волне разряжения B_1AB_K , описываемые на уровне модели потенциальных адиабатических течений (модели Лайтхилла с точностью до P_{10}^2) (см. [1, 2]) решением уравнения для потенциала скоростей:

$$\Phi(x, y, t) = c_0^2 t f(\xi, \eta), \quad c^* = c/c_0, \quad \frac{u}{c_0} = f_\xi, \quad \frac{v}{c_0} = f_\eta,$$

$$c^* (f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta}) = (f_\xi - \xi)^2 f_{\xi\xi} + 2(f_\xi - \xi)(f_\eta - \eta) + (f_\eta - \eta)^2 f_{\eta\eta}, \quad (9)$$

$$c^{*2} = 1 + 2(1 - R_0(\gamma))G, \quad G = f - \xi f_\xi - \eta f_\eta + \frac{1}{2}(f_\xi^2 + f_\eta^2).$$

Решение (9) для центрированной волны разряжения ($\text{tg } Q = (\eta - \eta_A)/(\xi - \xi_A)$) имеет вид [1, 4]. Постоянные С, D для решения находятся из условий на переднем $Q = Q_1$ и заднем $Q = Q_K$ фронтах волны разряжения, что позволяет определить параметры u_2, v_2 за волной разряжения. Инварианты I, II (5), (7) также имеют место. Расчет параметров с помощью модели RR для случая ГАЗ/ГЖС приведен в [4].

3. Для анализа физической адекватности используемых математических моделей приведем сравнение результатов вычислений с помощью модели RR с волной разряжения (п. 2) с экспериментальными результатами [5] Abd-El-Fattah, Henderson. На рис. 2 приведено сравнение результатов расчета для случая ГАЗ/ГАЗ (CH_4/CO_2) по теории RR (п. 2) в соответствии с формулами (5), (7), (10) зависимости ω/α при $\epsilon_{10} = 0.28(\xi = 0.78)$, $\epsilon_{10} = 1/\xi - 1$. Для газов: $R_0(\gamma) = \frac{\kappa+1}{2}$, $L_0(\gamma) = \frac{\kappa+1}{2\kappa}$, $B_0 = p_0\kappa$,

$$\text{CO}_2 : \kappa = 1.3, \quad \rho_0^- = 1.976 \left(\frac{kg}{m^3} \right), \quad c_0^- = 256 \left(\frac{m}{c} \right);$$

$$\text{CH}_4 : \kappa = 1.28, \quad \rho_0^- = 0.717 \left(\frac{kg}{m^3} \right), \quad c_0^- = 423 \left(\frac{m}{c} \right).$$

$$\text{Параметры подобия: } \bar{\epsilon} = 0.25; \quad \bar{B} = 1.0; \quad \bar{L} = 1.0; \quad \bar{c} = 0.60.$$

Сравнение показывает, что теоретические результаты настоящих исследований достаточно хорошо согласуются с экспериментальными результатами во всем диапазоне изменения угла падения α при регулярном режиме рефракции RR с волной разряжения.

В работе [5] для случая ГАЗ/ГАЗ отмечается также существование режимов рефракции: NR, RW и других, характерных для рефракции при падении УВ со стороны более плотной среды, описываемых настоящей теорией.

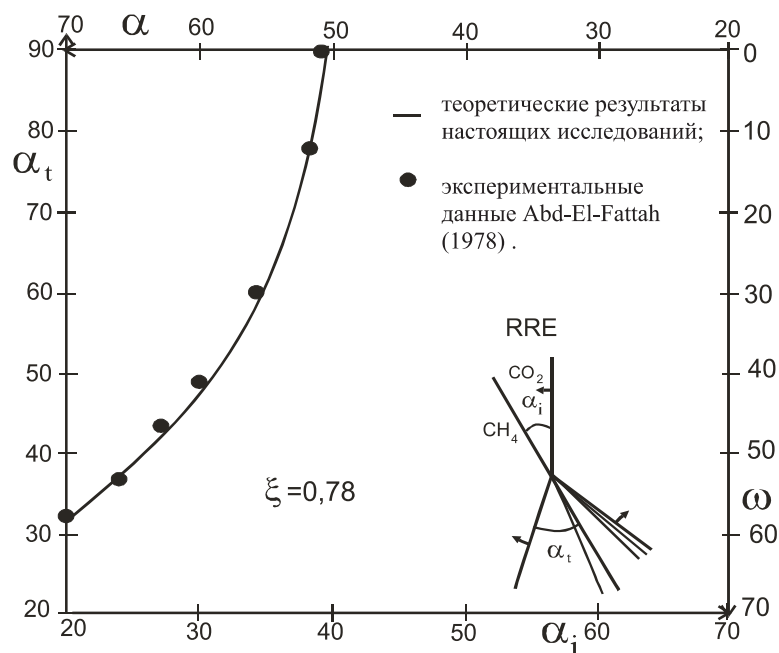


Рис. 2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г.П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1997. 104 с.
2. Шиндяпин Г.П., Ковалев А.Д. Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред. В 2 ч. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. Ч. II. 108 с.
3. Матутин А.А., Шиндяпин Г.П. Анализ нерегулярного режима рефракции ударной волны с образованием волны разрежения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 139-142.
4. Маркушин А.Г., Шиндяпин Г.П. Рефракция ударной волны на свободной поверхности в газожидкостной среде с образованием волны разрежения // Аэродинамика: Межвуз. сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1991. Вып. 12 (15). С. 24-39.
5. Abd-El-Fattah A.M., Henderson L.F. Shock waves at a slow-fast gas interface // J. Fluid Mech. 1978. V. 89, part 1. P. 79-95.

УДК 517.984

Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН МЕТОДАМИ АССИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОРОТКИХ ВОЛН

Проведем асимптотический анализ [1] процессов нелинейной рефракции (режимы RR, NR, RW [2]) относительно слабых ударных волн (УВ) ($\bar{\epsilon} \ll 1$; $\bar{\epsilon} = R_0(\gamma)P_{10}$, $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0$, $B_0 = \rho_0 C_0^2$). Получены аналитические выражения для основных характеристик ($q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0)$, $q^- = (p_A - p_0)/(p_1 - p_0)$, p_A - в точке А в режиме NR) в пространстве параметров подобия задач.

1. При падении УВ AR(BR) относительно малой интенсивности P_{10} под углом α к вертикали на свободную поверхность АЕ, разделяющую различные газожидкостные среды (ГАЗ/ГЖС, ГАЗ/ГАЗ, ГЖС/ГЖС) с газосодержаниями γ^+, γ^- возникают различные режимы рефракции (см. [2]), характеризующиеся фронтами УВ (AR – падающий, AD – преломленный, AC – отраженный, AB – фронт Маха), волной разряжения B_1AB_k и изломом свободной поверхности АК. Параметр q^+ , характеризующий интенсивность преломленной волны, в целом характеризует и весь процесс рефракции, т.е. интенсивность разряжения или нарастания давления в случае RW ($p_3 = p_2$).

В [2] было установлено, что для процессов рефракции относительно слабых УВ ($P_{10} \ll 1$) имеют место условия совместности течений на свободной поверхности (в верхней и нижних областях) в точке А – инвариант рефракции: (Индексы +, - соответствуют областям):

$$\text{I: } c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-; \quad (1)$$

$$\text{II: } v^+ = v^-. \quad (2)$$

В [2] приведен общий анализ (1), (2) для параметров ω, q^+ в рамках модели Эйлера и Лайтхилла.

2. Проведем анализ (1), (2) с помощью асимптотической теории коротких волн (ТКВ) (см. [1]). Вводя асимптотическое разложение для области больших градиентов (области коротких волн) в окрестности точки А

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \bar{\epsilon}X, \eta = \bar{\epsilon}^{1/2}Y; R_0/c_0t = 1 + \bar{\epsilon}\delta, \theta = \bar{\epsilon}^{1/2}Y, \\ \delta &= X + 1/2Y^2, \frac{u}{c_0} = P_{10} \frac{u^{(1)}}{c_0} + \dots, \frac{v}{c_0} = P_{10}^{3/2} R_0^{1/2} \frac{v^{(1)}}{c_0} + \dots; \\ \frac{p - p_0}{B_0} &= P_{10}P^{(1)} + \dots, \frac{u}{c_0} = \bar{\epsilon} \frac{\mu}{R_0} + \dots, \frac{v}{c_0} = \bar{\epsilon}^{3/2} \frac{\nu}{R_0}; \\ \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} &= P_{10}H^{(1)}; \bar{\epsilon} = R_0P_{10} = L_0\epsilon_{10}, \epsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0, \end{aligned} \quad (3)$$

получим решение для волны разряжения в виде

$$\mu = -1/2z^2 + \delta_A, \nu = 1/3z^3 - \mu Y + d, z = (X - X_A)/Y. \quad (4)$$

Условия динамической совместности на фронтах УВ $X=X^*(Y)$ имеют вид (см. [1]) (μ', ν' - значения перед фронтом)

$$\begin{aligned} X - \psi^\nu Y &= 1/2(\psi^{\nu^2} + \mu + \mu'), \psi^\nu = \frac{dX^*}{dY}, (\psi^\nu = \frac{d\xi^*}{d\eta}/\bar{\epsilon}^{1/2}), \\ (\mu - \mu') \cdot (\psi^\nu + Y) &= \nu' - \nu, P^{(1)} = H^{(1)} = \mu. \end{aligned} \quad (5)$$

За фронтом AR(BR) падающей УВ с масштабами интенсивности $P_{10}, \bar{\epsilon}$, наклоненной под углом α , (обл.(1)) в точке А (режимы RR, RW)

$$\psi^\nu = -\alpha^\nu = -\operatorname{tg} \alpha / \bar{\epsilon}^{1/2}, \mu_1 = 1, \nu_1 = \alpha^\nu, X_A = 1/2(\alpha^{\nu^2} + 1), Y_A = 0. \quad (6)$$

Значения $\bar{\epsilon}, P_{10}$ вычисляются с помощью $R_0(\gamma^-), B_0(\gamma^-)$. При нерегулярной рефракции NR на фронте УВ Маха АВ в точке А ($p = p_A$) $q^- = (p_A - p_0)/(p_1 - p_0)$. Это значение находится [3] $q^- = q^-(\alpha^\nu)$ при использовании точного частного решения системы уравнений коротких волн при интегрировании первого уравнения (5) для фронта АВ. Аналогично (6) для NR имеем в точке А

$$\psi^\nu = -\alpha_A^\nu = -\operatorname{tg} \alpha_A / \bar{\epsilon}^{1/2} = -(q^-)^{1/2}, \mu_A = q^-, \nu_A = (q^-)^{3/2}, X_A = q^-. \quad (7)$$

В дальнейшем целях общности построений будем для различных режимов рефракции брать в точке А значения $\mu_A = q^-$, при переходе от NR к RR при $\alpha^\nu = \alpha_A^\nu = 1$ значение $q^- = 1$. При $\alpha^\nu \geq 1$ для режимов RR, RW $q^- = 1$.

За фронтом АД преломленной УВ интенсивности P_{30}^+ , наклоненной под углом ω , (обл. (3) с $\gamma = \gamma^+$) в точке А, вводя свои масштабы $P_{30}^+, \bar{\epsilon}^+$, получим согласно (3), (5)

$$\psi^\nu = -\omega^{+\nu} = -\operatorname{tg} \omega / \bar{\epsilon}^{+1/2}, \mu_3^+ = 1, \nu_3^+ = \omega^{+\nu}, X_A^+ = 1/2(\omega^{+\nu^2} + 1), Y_A^+ = 0. \quad (8)$$

На волне разрежения $B_1 AB_k$ в среде с газосодержанием γ^- имеем на переднем фронте AB_1 в точке А параметры течения (6) или (7) и согласно (4) выражения для режимов RR, RW принимают вид

$$\beta_1^\nu = z_1 = \sqrt{\alpha^{\nu^2} - 1}, d = \alpha^\nu - 1/3(\alpha^{\nu^2} - 1)^{3/2}, \alpha^\nu \geq 1. \quad (9)$$

Для режима NR

$$\beta_1^\nu = z_1 = 0, d = (q^-)^{3/2}, \alpha^\nu \leq 1. \quad (10)$$

На заднем фронте волны разрежения AB_k для параметров в обл. (2) $\mu_2 = q^+$ в точке А согласно (4) получим выражения, общие для режимов RR, RW, NR

$$\beta_k^\nu = z_k = \sqrt{2X_A - 2q^+}, \nu_2 = \frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{3/2} + d. \quad (11)$$

Совместимость течений в нижней (2) и верхней (3) областях на свободной поверхности АК осуществляется с помощью инвариантов (1), (2).

Записывая I инвариант $c_0^- \xi_A^- = c_0^+ \xi_A^+$ с помощью точных соотношений ударного перехода [2], получим выражение:

$$c_0^- N^{1/2}(q^- P_{10}) / \cos \alpha = c_0^+ N^{1/2}(P_{30}) / \cos \omega. \quad (12)$$

В ТКВ при $\alpha, \omega \bar{\epsilon}^{1/2}$, ограничиваясь в (12) членами первого порядка $\bar{\epsilon}$, при $p_3 = p_2$:

$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^{\nu^2}\bar{\epsilon}$, $\cos \omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^{\nu^2}\bar{\epsilon}$, $N(P_{10}) = 1 + q^-\bar{\epsilon}$, $N(P_{30}) = 1 + (q^+/\bar{L})\bar{\epsilon}$
получим в линейном приближении I инвариант ($\bar{\epsilon} = L_0(\gamma)\epsilon_{10}$, $\epsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$)

$$\omega^{\nu^2} = 2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - q^+/\bar{L} + q^-; \omega^\nu = \text{tg } \omega/\bar{\epsilon}^{1/2}, c_\gamma = \frac{c_0^+ - c_0^-}{c_0^-\bar{\epsilon}}, (\bar{L}) = L_0^-/L_0^+ \quad (13)$$

Второй инвариант II $v_0^- = v_0^+$, записанный для различных сред γ^+, γ^- с различными масштабами переменных в соответствии с (3), приводит к условию

$$\nu^+ = \frac{\bar{c}\bar{L}^{1/2}}{q^{+(3/2)}\bar{B}}\nu^-; \bar{B} = \frac{B_0^-}{B_0^+}, \bar{c} = \frac{c_0^-}{c_0^+}. \quad (14)$$

При $\nu^+ = \mu_3^+\omega^{\nu^+} = \text{tg } \omega/\bar{\epsilon}^{+1/2} = \omega^\nu \frac{\bar{L}^{1/2}}{q^{+1/2}}$; $\nu^- = \nu_2$ получим II инвариант в виде

$$\frac{q^+\bar{B}}{\bar{c}}\omega^\nu = 1/3(2X_A - 2q^+)^{3/2} + d, \frac{\bar{B}}{\bar{c}} = \bar{\rho}\bar{c}. \quad (15)$$

Исключая ω^ν из (13), (15), получим выражение для нахождения параметра q^+ для режимов RR, NR

$$q^{+2}\bar{\rho}^2\bar{c}^2(2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - q^+/\bar{L} + q^-) = [1/3(2X_A - 2q^+)^{3/2} + d]^2. \quad (16)$$

Здесь параметры $\alpha^\nu, C_\gamma, \bar{L}, \bar{\rho}\bar{C}$ являются параметрами подобия задачи.

В случае рефракции RW с отраженной УВ АС условия на волне разряжения (9)-(11) заменяются условиями ударного перехода через фронт УВ АС (для обл.(2)):

$$\mu_2 = q^+, \nu_2 = \alpha^\nu - (q^+ - 1)\sqrt{\alpha^{\nu^2} - q^+}, \quad (17)$$

т.е. правые части (15),(16) заменяются правой частью (17).

Следует отметить, что согласно (3) для параметра μ_3 (за фронтом АД) в различных системах с масштабными параметрами $P_{10}, \bar{\epsilon}$ и $P_{30}^+, \bar{\epsilon}^+$ имеем связь $\mu_3^- = q^+\bar{\rho}\bar{c}\mu_3^+, \mu_3^+ = 1$. С другой стороны, в силу существования интегралов (5) $\mu^\pm = P^{\pm(1)}$ имеем $\mu_3^- = q^+, \mu_3^+ = 1$, т.е. для ТКВ характерны условия, соответствующие слабому отклонению $\bar{\rho}, \bar{c}$ от 1:

$$\bar{\rho}\bar{c} = 1, \bar{c} = 1 + c_\gamma\bar{\epsilon}. \quad (18)$$

В качестве примера приложения настоящей теории в условиях (18) укажем случаи рефракции на поверхности, разделяющей газы (ГАЗ/ГАЗ).

1. Воздух $\rho^+ = 1.293(kg/m^3)$, $c^+ = 330(m/c)$, $\bar{c} = 0.880$, $\bar{\rho}\bar{c} = 1.05$; сероводород $\rho^+ = 1.539(kg/m^3)$, $c^+ = 291(m/c)$, $\bar{c} = 1.293$, $\bar{\rho}\bar{c} = 1.035$.

2) Азот $\rho^+ = 1.251(kg/m^3)$, $c^+ = 334(m/c)$, $\bar{c} = 0.870$, $\bar{\rho}\bar{c} = 1.07$; сероводород $\rho^+ = 1.539(kg/m^3)$, $c^+ = 291(m/c)$, $\bar{c} = 1.230$, $\bar{\rho}\bar{c} = 1.032$.

3) Азот $\rho^+ = 1.251(kg/m^3)$, $c^+ = 334(m/c)$, $\bar{c} = 0.937$, $\bar{\rho}\bar{c} = 1.08$; Кислород $\rho^+ = 1.429(kg/m^3)$, $c^+ = 313(m/c)$, $\bar{c} = 1.161$, $\bar{\rho}\bar{c} = 1.000$.

В [4] построено решение (16) при $\bar{\rho}\bar{c} = 1$ для q^+ в пространстве параметров подобия c_γ, L, α^ν , отмечены характерные особенности поведения границ областей существования RR, NR, RW. В частности, граница между RW и RR, NR при $q^+ = 1.0, q^- = 1.0$ не зависит от α^ν и дается уравнением $2c_\gamma = 1/\bar{L} - 1$. Характерная точка на линии раздела $q^+ = 1.0$ есть $c_\gamma = 0, \bar{L} = 1$. Приведенные примеры газовых сред имеют значения \bar{L} вблизи характерной точки.

Однако расчет параметров для всех режимов зависит от α^ν и все поверхности $\alpha^\nu = \text{const}$ ($\alpha^\nu \geq 1$ RR, $\alpha^\nu \leq 1$ NR) проходят через линию раздела режимов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г.П., Ковалев А.В. Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред: В 2 ч. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. Ч.2. 108 с.
2. Шиндяпин Г.П., Матутин А.А. О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10.
3. Шиндяпин Г.П. Об особенности "сверхзвукового" взаимодействия слабых ударных волн и задач преломления слабой ударной волны в воде на свободной поверхности // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 3 (6). С. 24-36.
4. Матутин А.А., Шиндяпин Г.П. К теории нелинейной рефракции ударной волны // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 199-203.

УДК 539.3

О.А. Торопова

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ГЛУБОКОВОДНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Потребность в новых источниках энергии привела к необходимости добычи нефти из новых нефтяных месторождений, расположенных под океанским дном. В связи с этим актуальной является задача определения равновесных конфигураций вертикальных нефтеподъемников (райзеров), соединенных нижним концом с помощью сферического шарнира с устьем буровой скважины. Будем считать, что райзер расположен в вертикальной плоскости одномерного потока подводных течений, возможно отклонение верхнего конца райзера на заданную величину в горизонтальном направлении $\vec{u}_s = u_{sx} \vec{i}_1$. В этом случае модель райзера будет иметь вид

$$\varepsilon \frac{dQ_1}{dt} = (1 - \gamma_1 T)(H_3 P_4 - \text{tg } \varphi) - H_3 T / \cos \varphi + P_3(1 - \gamma_1 T/2);$$

$$\varepsilon \frac{dH_3}{dt} = -\frac{1+2\gamma_1 T}{\cos \varphi} Q_1; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{H_3}{\cos \varphi}; \quad \frac{du_x}{dt} = \gamma_6 \operatorname{tg} \varphi; \quad (1)$$

$$u_x(0) = 0; \quad H_3(0) = 0; \quad u_x(1) = u_{sx}; \quad H_3(1) = 0. \quad (2)$$

Для глубоководных нефтеподъемников параметр ε , входящий в систему уравнений статического равновесия, имеет порядок $10^{-4} - 10^{-3}$, что дает возможность для построения решения использовать метод пограничных функций. В этом случае в системе (1) введем следующие обозначения:

$$F = ((1-\gamma_1 T)(H_3 P_4 - \operatorname{tg} \varphi) - H_3 T / \cos \varphi + P_3(1-\gamma_1 T/2), -(1+2\gamma_1 T)Q_1 / \cos \varphi)^T;$$

$$f = (H_3 / \cos \varphi, \gamma_6, \operatorname{tg} \varphi)^T; \quad z = (Q_1, H_3)^T; \quad y = (\varphi, u_x)^T.$$

Выражения для собственных чисел λ_1, λ_2 якобиана

$$\overline{F}_z = F_z(\bar{z}(t), \bar{y}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & (1-\gamma_1 T_0)P_4^0 - T_0 / \cos \varphi_0 \\ -(1+2\gamma_1 T_0) / \cos \varphi_0 & 0 \end{pmatrix}$$

получим из характеристического уравнения $\operatorname{Det}\{\partial F / \partial z - \lambda E\} = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{((1+2\gamma_1 T_0)(1-\gamma_1 T_0)P_4^0 \cos \varphi - T_0) / \cos \varphi_0}. \quad (3)$$

Анализ формулы (3) показывает, что собственные числа являются вещественными и имеют разные знаки, поэтому рассматриваемую краевую задачу следует отнести к классу условно устойчивых краевых задач, решение которых, как известно, имеет два пограничных слоя в окрестностях граничных точек $t = 0$ и $t = 1$.

Получим главные члены асимптотического разложения. С этой целью рассмотрим вырожденную краевую задачу, т.е. случай, когда $\varepsilon = 0$:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{\varphi(1-\gamma_1 T) - P_3^0(1-0,5\gamma_1 T)}{(1-\gamma_1 T)P_4^0 - T};$$

$$\frac{du_{x0}}{dt} = -\gamma_6 \varphi_0; \quad u_{x0}(0) = 0; \quad u_{x0}(1) = -\gamma_6 \varphi_0.$$

Она может быть решена, например, методом пристрелки. Ее решение позволяет построить члены регулярного ряда $\bar{y}_0 = (\varphi^0, u_x^0)^T$ и $\bar{z}_0 = (Q_{10}, H_{30})^T = (0, \frac{\varphi_0(1-\gamma_1 T) - P_4^0(1-\gamma_1 T/2)}{(1-\gamma_1 T)P_4^0 - T})^T$.

Дифференциальные уравнения относительно погранслойных функций в окрестности нуля $\Pi_0 z = (\Pi_0 Q_1, \Pi_0 H_3)^T$ имеют вид

$$\frac{d\Pi_0 Q_1}{d\tau_0} = -a_1 \Pi_0 H_3; \quad \frac{d\Pi_0 H_3}{d\tau_0} = -a_2 \Pi_0 Q_1,$$

где $\tau_0 = t/\varepsilon$; $F_1(t) = T(t) - (1-\gamma_1 T(1))P_4(t)$; $F_2(t) = 1 + 2\gamma_1 T(t)$; $a_1 = F_1(0)$; $a_2 = F_2(0)$.

Решая эту систему, получим окончательно выражения для $\Pi_0 Q_1$ и $\Pi_0 H_3$:

$$\Pi_0 H_3(t) = -H_{30}(0) \exp(-\sqrt{a_1 a_2} t / \varepsilon),$$

$$\Pi_0 Q_1(t) = -\sqrt{a_1/a_2} H_{30}(0) \exp(-\sqrt{a_1 a_2} t / \varepsilon).$$

Аналогичные выражения имеют погранслойные функции в окрестности точки $t = 1$

$$Q_0 z = (Q_0 Q_1, Q_0 H_3); \quad Q_0 Q(t) = \sqrt{b_1/b_2} H_{30}(1) \exp(\sqrt{b_1 b_2} (t-1)/\varepsilon);$$

$$Q_0 H_3(t) = -H_{30}(1) \exp(-\sqrt{b_1 b_2} (t-1)/\varepsilon); \quad b_i = F_i(1) (i = 1, 2).$$

Таким образом, решение краевой задачи (1) в нулевом приближении имеет вид

$$\Pi_0 H_3(t) = -H_{30}(0) \exp(-\sqrt{a_1 a_2} t / \varepsilon);$$

$$\Pi_0 Q_1(t) = -\sqrt{a_1/a_2} H_{30}(0) \exp(-\sqrt{a_1 a_2} t / \varepsilon);$$

$$H_3(t) = H_{30}(t) - H_{30}(0) \exp(-\sqrt{a_1 a_2} t / \varepsilon) - H_{30}(1) \exp(\sqrt{b_1/b_2} (t-1)/\varepsilon);$$

$$Q_1(t) = -\sqrt{a_1/a_2} H_{30}(0) \exp(-\sqrt{a_1 a_2} t / \varepsilon) + \sqrt{b_1/b_2} H_3^0(1) \exp((b_1 b_2)(t-1)/\varepsilon);$$

$$\varphi(t) = \varphi^0(t); \quad u_x(t) = u_{x0}.$$

Дифференциальные уравнения относительно погранслойных функций в первом приближении в общем случае являются неоднородными (в отличие от аналогичных уравнений нулевого приближения):

$$\frac{d\Pi_1 Q_1}{d\tau_0} = -a_1 \Pi_1 H_3 - (1 - \gamma_1 T) \Pi_1 \varphi; \quad \frac{d\Pi_1 H_3}{d\tau_0} = -a_2 \Pi_1 Q_1.$$

Определяя константы интегрирования с помощью граничных условий (2), получим окончательно выражения для погранслойных функций в окрестности точки $t = 0$:

$$\Pi_1 H_3(t) = \left(\frac{a_5}{2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{t}{\varepsilon} - H_{31}(0) \right) \exp(-\sqrt{a_1 a_2} t / \varepsilon);$$

$$\Pi_1 Q_1(t) = \left(\frac{a_5}{2} \frac{t}{\varepsilon} - \sqrt{a_1/a_2} H_{31}(0) - \frac{a_5}{2\sqrt{a_1 a_2}} \right) \exp(-\sqrt{a_1 a_2} t / \varepsilon),$$

где $a_5 = F_3(0)$; $F_3(t) = (1 - \gamma_1 T(t)) H_{30}(t) \sqrt{a_1 a_2}$.

Аналогично могут быть получены выражения для погранслойных функций в окрестности точки $t = 1$.

Таким образом решение задачи будет иметь вид

$$H_3(t) = H_{30}(t) + \Pi_0 H_3(t) + Q_0 H_3(t) + \varepsilon (H_{31}(t) + \Pi_1 H_3(t) + Q_1 H_3(t)) + O(\varepsilon^2);$$

$$Q_1(t) = \Pi_0 Q_1(t) + Q_0 Q_1(t) + \varepsilon(Q_1^1(t) + \Pi_1 Q_1(t) + Q_1 Q_1(t)) + O(\varepsilon^2);$$

$$u_x(t) = u_{x0}(t) + \varepsilon(u_{x1}(t) + \Pi_1 u_x(t) + Q_1 u_x(t)) + O(\varepsilon^2);$$

$$\varphi(1) = \varphi_0(t) + \varepsilon(\varphi_1(t) + \Pi_1 \varphi(t) + Q_1 \varphi(t)) + O(\varepsilon^2).$$

Поскольку в окрестности точки $t = 1$ нулевое и первое приближения практически совпадают, приведем таблицу их сравнения в окрестности нуля. Из таблицы видно, что в диапазоне изменения длин от 1000 до 2000 м значения таких статических характеристик райзера, как кривизна осевой линии райзера H_3 , угол отклонения касательной к осевой линии райзера от вертикали φ , существенно уточняются. Для $l_0 \geq 2000$ м разница между нулевым и первым приближениями не превышает 2%, что позволяет упростить расчеты, используя только главные члены асимптотического разложения.

| l_0 (м) | ε | H_3^* | | $\varphi(0)$ | |
|-----------|---------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| | | В нулевом приближении | В первом приближении | В нулевом приближении | В первом приближении |
| 1000 | 0.0095 | 0.3399 | 0.3400 | -0.1316 | -0.1176 |
| 1500 | 0.0052 | 0.450064 | 0.450082 | -0.1314 | -0.1239 |
| 2000 | 0.0034 | 0.47729 | 0.487737 | -0.1314 | -0.1265 |
| 3000 | 0.0018 | 0.537563 | 0.537565 | -0.1312 | -0.1285 |
| 4000 | 0.0012 | 0.577410 | 0.577411 | -0.1311 | -0.1293 |
| 5000 | 0.00085 | 0.587633 | 0.587633 | -0.1309 | -0.1297 |
| 6000 | 0.00064 | 0.589008 | 0.589008 | -0.1308 | -0.1299 |
| 6500 | 0.00051 | 0.588739 | 0.588739 | -0.1307 | -0.12998 |

Данный подход может быть широко использован в задачах расчета характеристик установившегося движения глубоководных нефтесъемников и длинномерных элементов морских геологоразведочных комплексов.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----------|
| СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ | 3 |
| БРЕДИХИН Д.А. О многообразии дистрибутивных решеток с операциями цилиндрификации | 3 |
| БУТЕРИН С.А. Обратная задача для дифференциальных пучков второго порядка с условиями Дирихле | 6 |
| ВОДОЛАЗОВ А.М. Алгебры целозначных функций для алгебраических торов малой размерности | 9 |
| ВЫГОДЧИКОВА И.Ю. Об условной задаче наилучшего приближения сегментной функции алгебраическим полиномом | 12 |
| ГОЛУБЬ А.В. Теорема равномерности разложений по собственным функциям интегрального оператора специального вида | 15 |
| ГУДОШНИКОВА Е.В. Конструкции линейных положительных операторов и их аппроксимативные свойства | 18 |
| ДУДОВ С.И., СОРИНА Е.В. Критерий решения задачи наилучшего приближения сегментной функции полиномиальной полосой | 20 |
| ИГНАТЬЕВ М.Ю. Восстановление дифференциального оператора 4-го порядка по нулям собственных функций | 23 |
| ИОФИНА Т.В. Сходимость рядов Фурье и их линейных средних по мультипликативным системам в пространствах Липшица | 24 |
| КЛЯЕВА И.А. Гомологии приведенных толерантных кубических сингулярных цепей различной вырожденности | 27 |
| КОРНЕВ В.В. О равномерной сходимости разложений по собственным функциям дифференциального оператора с инволюцией | 29 |
| КОРОЛЁВА О.А. Об одном интегральном операторе с ядром, разрывным на ломаных линиях | 31 |
| КУЗНЕЦОВА И.А. Об одном классе бескоалиционных иерархических игр трех лиц | 34 |
| КУРДЮМОВ В.П., ХРОМОВ А.П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциальных операторов переменной структуры | 37 |
| КУРЫШОВА Ю.В. Решение обратной узловых задачи для интегродифференциальных операторов | 40 |
| ЛУКАШОВ А.Л. Оценка констант Лебега интерполяционных процессов на нескольких отрезках | 44 |
| ЛУНЬКОВ А.Д. Регрессионные методы панельных данных для демографических показателей российских регионов | 45 |
| МЕЩЕРЯКОВА Е.А. О двух задачах по оценке выпуклого компакта шаром | 48 |
| МОЛЧАНОВ В.А. Алгебраическое описание логически определяемых языков | 50 |
| НОВИКОВ В.Е. Функциональные зависимости в формальном контексте | 53 |
| ОРЕЛ А.А. О преобразовании моделей бизнес-процессов, основанных на сетях Петри, к SADT-моделям | 55 |
| РАЗУМОВСКАЯ Е.В., ВОЛОДЧЕНКО А.В. Об одном коэффициентном функционале на классах однолистных ограниченных функций | 59 |
| РОЗЕН В.В. Решетка мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного множества | 63 |
| РЫХЛОВ В.С. О свойствах собственных функций дифференциального пучка второго порядка, корни характеристического уравнения которого лежат на прямой | 66 |
| РЫХЛОВ В.С., ШИГАЕВА О.В. Теорема о кратной неполноте комбинации экспонент с показателями, лежащими на одной прямой, и ее применение к пучкам дифференциальных операторов | 69 |

| | |
|--|------------|
| СИДОРОВ С.П. Теорема типа Коровкина для класса операторов, обладающих свойством формосохранения | 72 |
| СОРИНА Е.В. Условия единственности решения задачи о внешней оценке сегментной функции полиномиальной полосой | 76 |
| ТРЫНИН А.Ю. Существование систем Чебышева с ограниченными константами Лебега интерполяционных процессов | 79 |
| ФАДЕЕВ Р.Н. О некоторых условиях абсолютной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам | 81 |
| ХАРЛАМОВ А.В. Географические модели в случае пространственной нестационарности | 84 |
| ХВОРОСТУХИНА Е.В. О конкретной характеристике универсальных гиперграфических автоматов | 87 |
| ХРОМОВ А.А. Приближение решений интегрального уравнения первого рода с помощью сумм Фейера | 89 |
| ХРОМОВ А.П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с периодическими краевыми условиями | 93 |
| ХРОМОВА Г.В. Регуляризация интегрального уравнения первого рода с инволюцией | 97 |
| ШИШКОВА Е.В. Регуляризация задачи численного дифференцирования | 99 |
| ЮРКО В.А. Обратные узловыe задачи для операторов Штурма – Лиувилля на дереве | 101 |
| СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ | 105 |
| АНТОНЕНКО Э.В., АЛЯЕВ С.Ю. Влияние неоднородности тонкостенного цилиндра на осевые критические усилия | 106 |
| БИРЮКОВ В.Г., БИРЮКОВ А.Г. Исследование задачи оптимальной стабилизации ориентированного углового положения сферически симметричного твердого тела | 110 |
| ГУРЬЯНОВ В.М., ВОРОНЦОВА О.А. Общее решение динамических уравнений монотипных волн | 112 |
| ИВАНОВ Д.В., ФОМКИНА О.А. Определение постоянных для моделей Нео – Гука и Муни – Ривлина по результатам экспериментов на одноосное растяжение | 114 |
| КОЖАНОВ В.С. Модификация метода Сапункова решения задачи о сходящейся ударной волне | 117 |
| КУЗНЕЦОВА Е.О. Трансзвуковые разложения с использованием ЗГ-решений | 120 |
| МАРКУШИН А.Г. Об основных деталях построения теории истечения сыпучего тела с твердым зерном | 123 |
| ОЛЬЩАНСКИЙ В.Ю., СТЕПАНЕНКО Д.С. Условия существования квадратичного интеграла и приводимость изменяемой системы с динамической симметрией в центральном поле | 126 |
| ПАНКРАТОВ И.А., ЧЕЛНОКОВ Ю.Н. К задаче оптимальной в смысле быстрогодействия переориентации круговой орбиты космического аппарата | 129 |
| САПУНКОВ Я.Г. Второе приближение решения задачи о сходящейся ударной волне | 132 |
| САПУНКОВ Я.Г., МОЛОДЕНКОВ А.В., ДЕРЖАВИНА А.Н. Оптимальный вывод твердого тела с одной неподвижной точкой на программное движение с учетом сопротивления среды | 135 |
| САФОНОВ Р.А. Некоторые задачи статического изгиба параллелограммных пластин | 137 |
| СЕВОСТЬЯНОВ Г.Д. Метод расчета параметров регулярного отражения косога скачка от стенки | 140 |

| | |
|--|-----|
| ЧЕРНОВ И.А. Новые решения уравнений пограничного слоя без градиента давления | 143 |
| ШИНДЯПИН Г.П., МАТУТИН А.А. О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах | 146 |
| ШИНДЯПИН Г.П., МАТУТИН А.А. Анализ нелинейной рефракции ударных волн методами асимптотической теории коротких волн | 150 |
| ТОРОПОВА О.А. Асимптотическое интегрирование уравнений статического равновесия глубоководных стержневых систем | 154 |

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

В Ы П У С К 1 0

Ответственный за выпуск *С. П. Сидоров*
Технический редактор *Л. В. Агальцова*
Корректор *Е. Б. Крылова*

Оригинал-макет подготовлен в пакете $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$

Подписано в печать 18.12.08. Формат 60× 84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Компьютер Модерн. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,76(10,5). Уч.-изд. л. 8,8. Тираж 200. Заказ 2

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.