

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 7

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2005

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. М34 ун-та, 2005. – Вып. 7. – 216 с.: ил.

Настоящий сборник содержит труды сотрудников механико-математического факультета Саратовского государственного университета. Представлены исследования по алгебре, геометрии, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории игр, теории приближений, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук Г. В. Хромова (отв. редактор),
доктор физ.-мат. наук Г. П. Шинолягин (зам. отв. редактора),
доктор физ.-мат. наук Д. В. Прохоров,
доктор физ.-мат. наук А. П. Хромов,
доктор техн. наук П. Ф. Недорезов,
кандидат физ.-мат. наук С. П. Сидоров (отв. секретарь)

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 7

Ответственный за выпуск С. П. Сидоров
Технический редактор Л. В. Агалъцова
Корректор Е. Б. Крылова
Оригинал-макет подготовлен О. Л. Багаевой

Подписано в печать 28.11.2005.

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12,55(13,5). Уч.-изд. л. 11,6. Тираж 200 экз. Заказ 238.

Издательство Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.

ISSN 1609-4751

© Саратовский государственный
университет, 2005

УДК 519.4

С. А. Акимова

**ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ УПОРЯДОЧЕННЫХ АВТОМАТОВ
ПОЛУГРУППАМИ ИХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ^{*}**

В статье найдены необходимые и достаточные условия, при которых универсальные упорядоченные автоматы определяются своими полугруппами входных сигналов.

Под упорядоченным автоматом будем понимать, следуя [1], алгебраическую систему вида $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, где X – упорядоченное множество состояний автомата, S – полугруппа входных сигналов, Y – упорядоченное множество выходных сигналов, $\delta : S \times X \rightarrow X$ – функция переходов и $\lambda : S \times X \rightarrow Y$ – выходная функция, удовлетворяющие условиям: $\delta(s_1 s_2, x) = \delta(s_2, \delta(s_1, x))$ и для любого $s \in S$, $\delta(s, x)$ является эндоморфизмом X , $\lambda(s, x)$ – гомоморфизмом X в Y .

Для произвольных упорядоченных множеств X, Y алгебраическая система $Atm(X, Y) = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ с полугруппой $S = End X \times Hom(X, Y)$ и функциями $\delta((\phi, \psi), x) = \phi(x)$, $\lambda((\phi, \psi), x) = \psi(x)$ является упорядоченным автоматом, который называется универсальным упорядоченным автоматом.

Автомат $Atm(X, Y)$ обладает определенным универсальным свойством [1], а именно для всякого полугруппового упорядоченного автомата $A = (X, S, Y)$ существует и притом единственный гомоморфизм по входным сигналам этого автомата в $Atm(X, Y)$.

Из работы Л.М. Глускина [2] следует, что полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств X, Y изоморфны в том и только том случае, если упорядоченное множество X изоморфно упорядоченному множеству Y или двойственному для него упорядоченному множеству \breve{Y} . Это означает, что универсальные упорядоченные автоматы без выходных сигналов вполне определяются своими полугруппами входных сигналов.

* Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 99-1224).

Мы распространяем этот результат на универсальные упорядоченные автоматы общего вида.

ТЕОРЕМА. Для универсальных упорядоченных автоматов $Atm(X, Y)$, $Atm(X_1, Y_1)$ следующие условия:

- (1) полугруппы входных сигналов автоматов изоморфны;
- (2) упорядоченные множества X, Y изоморфны соответственно упорядоченным множествам X_1, Y_1 или упорядоченным множествам $\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{Y}_1$

эквивалентны.

Для доказательства теоремы отметим следующие свойства.

ЛЕММА 1. Одноместный предикат теории полугрупп $\Phi(x) = (\forall y)(yx = x)$ определяет в полугруппе $S = EndX \times Hom(X, Y)$ множество всех ее элементов, являющихся парами постоянных преобразований множеств X, Y соответственно.

ЛЕММА 2. Одноместный предикат теории полугрупп $\Psi(x) = (\forall y)(xy = y)$ определяет в полугруппе $S = EndX \times Hom(X, Y)$ множество пар вида (I_X, ψ) , где I_X – тождественное преобразование множества X и $\psi \in Hom(X, Y)$.

Обозначим Z множество правых нулей полугруппы S , U – множество левых единиц полугруппы S .

На множестве Z определим отношение эквивалентности ε :

$$x \equiv y(\varepsilon) \Leftrightarrow (\forall e \in U)(x \cdot e = y \cdot e).$$

ЛЕММА 3. Пусть пары (c_a, c_b) , (c_{a_1}, c_{b_1}) – правые нули полугруппы S . Пара (c_a, c_b) эквивалентна паре (c_{a_1}, c_{b_1}) по отношению эквивалентности ε в том и только том случае, если $a = a_1$.

Пусть $Atm(X, Y)$, $Atm(X_1, Y_1)$ – универсальные упорядоченные автоматы, $S = EndX \times Hom(X, Y)$, $S_1 = EndX_1 \times Hom(X_1, Y_1)$ и π – изоморфизм полугруппы S на S_1 .

Так как изоморфизм $\pi: S \cong S_1$ сохраняет все вышеуказанные формулы и конструкции, то π индуцирует биекции $f: X \rightarrow X_1$, и $g_a: Y \rightarrow Y_1$, ($a \in X$) по формулам:

$$f(a) = b \Leftrightarrow \pi(c_a, c_y) = (c_b, c_z)$$

для произвольных $y \in Y, z \in Y_1$,

$$g_a(y) = z \Leftrightarrow \pi(c_a, c_y) = (c_{f(a)}, c_z).$$

ЛЕММА 4. Для любого преобразования $(\phi, \psi) \in S$ выполняется

$$\pi(\phi, \psi) = (f^2(\phi), \psi^\varphi),$$

где $\psi^\varphi(f(a)) = g_{\phi(a)}(\psi(a))$ для любого $a \in X$.

ЛЕММА 5. Биективные отображения $f:X \rightarrow X_1$ и $g_a:Y \rightarrow Y_1$, ($a \in X$) являются изоморфизмами (или соответственно антиизоморфизмами) упорядоченных множеств X, X_1 на упорядоченные множества $\overset{\circ}{Y}, \overset{\circ}{Y}_1$ (или двойственные им упорядоченные множества $\overset{\circ}{Y}, \overset{\circ}{Y}_1$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Вышш. шк., 1994.
2. Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // УМН. 1961. Т. 16, вып. 5. С. 157 – 162.

УДК 519.853.3

А. В. Белгородский

О МОДИФИКАЦИИ ОДНОФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ДОХОДНОСТИ АКТИВОВ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРНАЦИОНАЛЬНОЙ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ВЛОЖЕНИЯ

1. Предположим, что инвестору разрешено вкладывать часть своего капитала в ценные бумаги компаний других стран. Тогда однофакторная модель доходности активов [1, с. 238] может быть модифицирована с учетом того, что для вычисления коэффициента “бета” каждого иностранного актива будет использоваться соответствующий рыночный индекс. Ковариационная матрица \bar{V} в этом случае будет скорректирована очевидным образом ввиду присутствия корреляции между доходностью индексного портфеля внутреннего и иностранного рынков.

Пусть для актива i , эмитентом которого является местная компания, его доходность R_i связана с доходностью эталонного (индексного) портфеля R_m моделью простой линейной регрессии вида

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i,$$

где $\{\alpha_i, \beta_i\}$ – параметры модели: α_i – свободный член, β_i – коэффициент регрессии. Относительно случайных отклонений $\{e_i\}$ доходностей активов от ожидаемых в соответствии с моделью значений выполняются традиционные предположения “рыночной модели” [1, с. 238].

Аналогично для доходностей ценных бумаг компаний, относящейся к другой стране, имеем

$$R_j = \alpha_j + \beta_j R_f + e_j,$$

здесь R_f – эффективность иностранного рыночного индекса (например, CAC, DAX, Dow-Jones, Nikkei и т.д.).

Предположим, что

$$R_m = B_m R_g + \eta_m, \quad R_f = B_f R_g + \eta_f,$$

где B_m, B_f – “глобальные бета” и R_g – доходность глобального рынка (например, если бы только европейские страны были включены в рассмотрение, это мог бы быть какой-то европейский индекс рынка); η_m, η_f – компоненты доходности рыночных индексов, не зависящие от доходности глобального рынка. Будем считать, что η, e некоррелированы и $E(\eta_m) = 0, E(\eta_f) = 0$.

Тогда ковариация эффективностей любых двух активов вычисляется по формуле

$$V_{ij} = \beta_i \beta_j B_m B_f \sigma_g^2 + \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \delta_{mf} + \sigma_{ei}^2 \delta_{ij}, \quad (1)$$

где $\sigma_g^2 = E(R_g - E(R_g))^2$, $\sigma_m^2 = E(\eta_m^2)$, $\sigma_{ei}^2 = E(e_i^2)$.

Отметим, что иерархические модели подобного рода могут использоваться не только в условиях интернациональной диверсификации вложения, но и, например в условиях распределения капитала между различными секторами в рамках одной страны. Преимущество такого подхода заключается в том, что доходности акций “схожих” компаний могут быть более коррелированы, чем доходности “несхожих” компаний. Таким образом, риск капиталовложения в целом может быть существенно уменьшен путем выбора компаний из различных секторов и стран.

В общем случае будем предполагать, что инвестор осуществляет свой выбор между ценными бумагами p видов, относящимся к n странам.

Далее попытаемся найти ответ на следующий вопрос: Возможно ли найти оптимальную структуру портфеля, руководствуясь известной схемой решения Марковица [2, с. 200], в случае использования иерархического моделирования?

Пусть R_F – ставка доходности по “безрисковому” активу, \bar{R}_i – ожидаемая доходность актива i -го вида, Z_i – величина, пропорциональная количеству денежных средств, инвестируемых в бумаги i -го вида. Иными словами, если обозначить через x_i долю капитала, вложенного в ценную бумагу вида i , то имеет место соотношение $x_i = Z_i / \sum_{i=1}^p Z_i$. Тогда для определения структуры наиболее эффективного вложения необходимо решить систему совместных уравнений

$$\bar{R}_i - R_F = Z_i V_{ii}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p Z_j V_{ij}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (2)$$

Введем обозначения

$$D_m = \sum_{j \in m} \beta_j Z_j, \quad C = \sum_{m=1}^n B_m D_m, \quad (3)$$

здесь $j \in m$ означает, что суммирование идет по всем компаниям, относящимся к стране m .

Перепишем выражение (2) в обозначениях D_m и C , предварительно подставив (1) в (2), получим

$$\bar{R}_i - R_F = \sigma_{ei}^2 Z_i + \beta_i \sigma_m^2 D_m + \sigma_g^2 B_m \beta_i C.$$

Откуда следует, что Z_i определяется по формуле

$$Z_i = \frac{\bar{R}_i - R_F - \sigma_g^2 B_m \beta_i C - \beta_i \sigma_m^2 D_m}{\sigma_{ei}^2}. \quad (4)$$

С целью упрощения дальнейших вычислений введем обозначения

$$S_m = \sum_{j \in m} \frac{(\bar{R}_j - R_F) \beta_j}{\sigma_{ej}^2}, \quad W_m = \sum_{j \in m} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{ej}^2}.$$

Тогда, используя выражение (4), получим

$$D_m = \frac{S_m - \sigma_g^2 C B_m W_m}{1 + \sigma_m^2 W_m}. \quad (5)$$

Затем, подставляя (5) в (3), найдем C :

$$C = \frac{\sum_{m=1}^n \frac{S_m B_m}{1 + \sigma_m^2 W_m}}{1 + \sigma_g^2 \sum_{m=1}^n \frac{B_m^2 W_m}{1 + \sigma_m^2 W_m}}.$$

Итак, показано, что аналитическое решение поставленной задачи может быть найдено и дисперсия всего портфеля $\bar{x}^T V \bar{x}$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$, определяется соотношением

$$\sigma_P^2 = \bar{x}^T V \bar{x} = \sum_{i=1}^p \sigma_{ei}^2 x_i^2 + \sum_{m=1}^n \sigma_m^2 (\sum_{i \in m} \beta_i x_i)^2 + \sigma_g^2 (\sum_{m=1}^n B_m \sum_{i \in m} \beta_i x_i)^2.$$

2. Предположим, вложенный капитал S_0 превратился в S_1 к концу инвестиционного периода, эффективность подобного вложения $R = \log(S_1 / S_0)$. Если инвестиции осуществляются в иностранной валюте, то имеем $R' = \log(S_1 E_1 / S_0 E_0)$, где E_0 и E_1 – обменные курсы в начале и в конце инвестиционного периода соответственно. Следовательно, $R' = R + \log(E_1 / E_0)$. Если поведение обменного курса может быть описано как случайное блуждание, $E(R') = E(R)$, то влияние вариации обменного курса заключается в добавлении в выражении для ковариации (1) слага-

мого $v_m^2 \delta_{mf}$, где v_m^2 – волатильность обменного курса (по отношению к местной валюте) страны m . Кроме того, предположим, что изменения обменных курсов по отношению к местной валюте некоррелированы.

Тогда ковариация доходностей любых двух ценных бумаг будет иметь вид

$$V_{ij} = \beta_i \beta_j B_m B_f \sigma_g^2 + \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \delta_{mf} + \sigma_{ei}^2 \delta_{ij} + v_m^2 \delta_{mf}.$$

Для нахождения оптимальной структуры портфеля необходимо решить систему совместных уравнений (2).

Введем дополнительные обозначения:

$$G_m = \sum_{j \in m} \frac{\beta_j}{\sigma_{ej}^2}, \quad N_m = \sum_{j \in m} \frac{\bar{R}_j - R_F}{\sigma_{ej}^2}, \quad I_m = \sum_{j \in m} \frac{1}{\sigma_{ej}}.$$

Рассуждая аналогичным предыдущему случаю образом, получим, что решение имеет следующий вид:

$$Z_i = \frac{\bar{R}_i - R_F - \sigma_g^2 B_m \beta_i C - \beta_i \sigma_m^2 D_m - v_m^2 E_m}{\sigma_{ei}^2}, \quad (6)$$

где

$$D_m = \frac{S_m - B_m \sigma_g^2 W_m C - v_m^2 E_m G_m}{1 + \sigma_m^2 W_m}, \quad (7)$$

$$E_m = \frac{\frac{1}{1 + v_m^2 I_m} \left[N_m - B_m \sigma_g^2 C G_m - \frac{\sigma_m^2 G_m S_m + \sigma_m^2 G_m B_m \sigma_g^2 W_m C}{1 + \sigma_m^2 W_m} \right]}{1 - \frac{\sigma_m^2 v_m^2 G_m^2}{(1 + v_m^2 I_m)(1 + \sigma_m^2 W_m)}}, \quad (8)$$

$$C = \frac{\sum_{m=1}^n \frac{B_m S_m}{1 + \sigma_m^2 W_m} - \sum_{m=1}^n \frac{v_m^2 G_m}{1 + \sigma_m^2 W_m} \times \frac{N_m + N_m \sigma_m^2 W_m - \sigma_m^2 G_m S_m}{(1 + v_m^2 I_m)(1 + \sigma_m^2 W_m) - \sigma_m^2 v_m^2 G_m^2}}{1 + \sigma_g^2 \sum_{m=1}^n \frac{B_m^2 W_m}{1 + \sigma_m^2 W_m} - \sum_{m=1}^n \frac{v_m^2 G_m^2 B_m \sigma_g^2}{1 + \sigma_m^2 W_m} \times \frac{1 + 2 \sigma_m^2 W_m}{(1 + v_m^2 I_m)(1 + \sigma_m^2 W_m) - \sigma_m^2 v_m^2 G_m^2}}. \quad (9)$$

Формулы (6) – (9) на первый взгляд имеют достаточно сложный вид, однако это лишь набор математических операций, они включены в данную статью с той целью, чтобы показать, что аналитическое решение может быть найдено даже в том случае, когда проблема нестабильности обменного курса рассматривается в дополнение к задаче интернациональной диверсификации. В этом случае к дисперсии всего портфеля активов

$\sigma_p^2 = \bar{x}^T V \bar{x}$ добавится слагаемое $\sum_{m=1}^n \left(\sum_{i \in m} x_i \right)^2 v_m^2$. Предложенная модификация базовой однофакторной модели с интернациональной диверсификацией вложения могла бы существенно повысить эффективность прини-

маемых решений, так как распределение капитала между активами компаний, относящихся к различным странам, уменьшает риск (дисперсию портфеля). Доходности по ценным бумагам, относящимся к одной стране, могут быть более коррелированы, поэтому риск вложения в целом можно существенно уменьшить путем выбора компаний из различных стран.

Более того, в случае если интернациональная диверсификация разрешена, инвестиции осуществляются в иностранной валюте, и волатильность обменного курса влияет на вариацию портфеля. Таким образом, дальнейшая модификация предложенного подхода, когда ставка обменного курса включена в рассмотрение, может существенно улучшить применимость модели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Малюгин В. И. Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа. Минск, 2001.
2. Edwin J., Elton P., Martin J., Gruber T. Modern portfolio theory and investment analysis-6 ed. N.Y., 2003.

УДК 519.4

Д. А. Бредихин

О ДИОФАНТОВЫХ РЕДУКТАХ АЛГЕБР ОТНОШЕНИЯ ТАРСКОГО

Статья содержит обзор и новые результаты, касающиеся описания диофантовых редуктов алгебр отношений Тарского.

Множество бинарных отношений Φ , замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую *алгеброй отношений*. Основы алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1, 2]. Им были рассмотрены алгебры отношений вида $(\Phi, \circ, ^{-1}, \Delta, \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, U)$, где $\circ, ^{-1}$ – операции умножения и обращения отношений; $\cup, \cap, \bar{\cdot}$ – булевы операции объединения, пересечения и дополнения; Δ, \emptyset, U – тождественное, пустое и универсальное отношения, рассматриваемые как нульевые операции. Алгебра отношений (Φ, Ω) называется редуктом алгебры отношений Тарского, если $\Omega \subset \{\circ, ^{-1}, \Delta, \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, U\}$. Обзор некоторых результатов, посвященных редуктам алгебр отношений Тарского, можно найти в [3].

Операция над отношениями называется *диофантовой* [4], если она может быть задана с помощью формулы исчисления предикатов первого порядка с равенством, содержащей в своей записи лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. К числу диофантовых операций алгебр

отношения Тарского относятся операции $\circ, \circ^{-1}, \Delta, \cap, U$. Мы сосредоточим свое внимание на редуктах с множеством операций Ω , удовлетворяющим условию $\{\circ\} \subset \Omega \subset \{\circ, \circ^{-1}, \Delta, \cap, U\}$.

Обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношения с операциями из Ω . Пусть $Q\{\Omega\}$ – квазимногообразие и $V\{\Omega\}$ – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$. Перечислим ряд проблем, обычно рассматриваемых при изучении алгебр отношений:

- (1) найти систему элементарных аксиом для класса $R\{\Omega\}$;
- (2) выяснить, является ли класс $R\{\Omega\}$ конечно аксиоматизируемым;
- (3) выяснить, является ли класс $R\{\Omega\}$ квазимногообразием;
- (4) найти базис тождеств квазимногообразия $Q\{\Omega\}$;
- (5) выяснить, является ли квазимногообразие $Q\{\Omega\}$ конечно базируемым;
- (6) выяснить, является ли квазимногообразие $Q\{\Omega\}$ многообразием;
- (7) найти базис тождеств многообразия $V\{\Omega\}$;
- (8) выяснить, является ли многообразие $V\{\Omega\}$ конечно базируемым.

В следующей таблице приводится сводка результатов, касающихся указанной проблематики [4–15], где символы +, – означают соответственно позитивное и негативное решения проблемы, а символ ? означает тот факт, что проблема остается открытой.

Проблемы	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$\{\circ\}; \{\circ, \Delta\}; \{\circ, \cap\}$	+	+	+	+	+	+	+	+
$\{\circ, \cap, \Delta\}$?	–	+	?	–	?	?	?
$\{\circ, \circ^{-1}\}; \{\circ, \circ^{-1}, \Delta\}$	+	–	+	+	–	–	+	+
$\{\circ, \circ^{-1}, \cap\}; \{\circ, \circ^{-1}, \cap, \Delta\}$	+	–	+	+	–	–	+	–
$\{\circ, U\}$	+	?	–	+	?	–	+	+
$\{\circ, \Delta, U\}$?	?	–	?	?	–	+	+
$\{\circ, \cap, U\}$	+	+	–	+	+	+	+	+
$\{\circ, \cap, \Delta, U\}$?	?	–	?	?	?	?	?
$\{\circ, \circ^{-1}, U\}; \{\circ, \circ^{-1}, \Delta, U\}$?	–	–	?	–	–	+	–
$\{\circ, \circ^{-1}, \cap, U\}; \{\circ, \circ^{-1}, \cap, \Delta, U\}$?	–	–	+	–	–	+	–

Ниже приводятся новые результаты, дающие решение проблем (7) и (8) для классов $R\{\circ, \circ^{-1}, U\}$ и $R\{\circ, \circ^{-1}, \Delta, U\}$.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – переменные. Для любых двух различных натуральных чисел $i, j \leq n$ положим $[x_i, x_j] = x_i x_{i+1} \dots x_j$, если $i < j$, и $[x_i, x_j] = x_i^{-1} x_{i-1}^{-1} \dots x_j^{-1}$, если $i > j$. Чередующейся последовательностью назо-

вем последовательность натуральных чисел $(i_1, i_2, \dots, x_{2m-1})$, удовлетворяющую условиям $i_{2k} < x_{2k-1}$ и $i_{2k} < x_{2k+1}$ для $k = 1, \dots, m-1$.

ТЕОРЕМА 1. Многообразие $V\{\circ, ^{-1}, U\}$ не является конечно базируемых. Алгебра $(A, \cdot, ^{-1}, u)$ типа $(2,1,0)$ принадлежит многообразию $V\{\circ, ^{-1}, U\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам:

$(xy)z = x(yz)$, $(x^{-1})^{-1} = x$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $u^2 = u$, $u^{-1} = u$,
и для каждой чередующейся последовательности $(i_1, i_2, \dots, x_{2m-1})$ – тождество
и $u[x_1, x_n] = u[x_1, x_{i_1}][x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2m-1}}, x_1][x_1, x_n]$, где $n = \max\{i_1, i_2, \dots, x_{2m-1}\}$.

ТЕОРЕМА 2. Многообразие $V\{\circ, ^{-1}, \Delta, U\}$ не является конечно базируемых. Алгебра $(A, \cdot, ^{-1}, e, u)$ типа $(2,1,0,0)$ принадлежит многообразию $V\{\circ, ^{-1}, \Delta, U\}$ тогда и только тогда, когда алгебра $(A, \cdot, ^{-1}, u)$ принадлежит многообразию $V\{\circ, ^{-1}, U\}$ и выполняется тождество $xe = ex = x$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 6. P. 73 – 89.
2. Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. P. 188 – 189.
3. Schein B. M. Representation of reducts of Tarski relation algebras // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1991. Vol. 54. P. 379 – 394.
4. Бредихин Д. А. Абстрактная характеристика некоторых классов алгебр бинарных отношений // Алгебра и теория чисел. Нальчик, 1977. Вып. 2. С. 3 – 19.
5. Bredikhin D. A., Schein B. M. Representations of ordered semigroups and lattices by binary relations // Colloq. Math. 1978. Vol. 49. P. 2 – 12.
6. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. 1991. Vol. 54. P. 111 – 124.
7. Бредихин Д. А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. Математика. 1993. № 3. С. 23 – 30.
8. Andreka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. Vol. 33. P. 516 – 532.
9. Бредихин Д. А. О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29 – 41.
10. Бредихин Д. А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН, 1998. Т. 360. С. 594 – 595.
11. Бредихин Д. А. О редуктах алгебр отношений Тарского // Алгебра и логика. 1998. № 1. С. 3 – 16.
12. Bredikhin D. A. On classes of Omega-semigroups // Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings / St.-Petersburg State University of Technology. St.-Petersburg, 1999. P. 59 – 62.
13. Бредихин Д. А. U -полугруппы отношения // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. № 1. С. 51 – 56.
14. Haiman M. Arguesian lattices are not type I // Alg. Univers. 1991. Vol. 28. P. 191 – 199.
15. Schein B. M. Representation of involuted semigroups by binary relations // Fundamenta Math. 1974. Vol. 82. P. 121 – 141.

**О ДОПУСТИМОЙ КЕЛЕРОВОЙ СТРУКТУРЕ
НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ
К НЕГОЛОННОМНУМ МНОГООБРАЗИЮ**

В работе [1] было введено понятие неголономного многообразия с допустимой финслеровой структурой. При этом под неголономным многообразием понимается неинволютивное подрасслоение (X_n^m, π, X_n) касательного расслоения. Финслерова структура определяется как функция $L: X_n^m \rightarrow R$, удовлетворяющая стандартным для финслерова многообразия условиям [2].

В настоящей статье неголономное многообразие (X_n^{n-1}, π, X_n) задается на гладком n -мерном многообразии X_n вместе со своим оснащением X_n^1 . Последнее означает, что касательное пространство $T_x(X_n)$ к многообразию X_n в каждой его точке x раскладывается в прямую сумму $T_x(X_n) = (X_n^{n-1})_x \oplus (X_n^1)_x$. Обозначим через $F_q^p(X_n)$ модуль тензорных полей типа (p, q) , заданных над кольцом гладких функций на X_n . Интерпретируя тензорное поле t как поле полилинейных форм, назовем его допустимым (к многообразию X_n^{n-1}), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются векторы из X_n^1 или сопряженного к нему $(X_n^1)^*$. Множество допустимых тензорных полей типа (p, q) является модулем, обозначаемым нами $F_q^p(X_n^{n-1})$. Модуль тензорных полей типа (p, q) , заданных на тотальном пространстве X_n^{n-1} расслоения (X_n^{n-1}, π, X_n) , обозначим $F_q^p(T(X_n^{n-1}))$. На многообразии X_n^{n-1} естественным образом возникает гладкое распределение $X_{2n-1}^{2n-2} = \pi_*^{-1}(X_n^{n-1})$. Будем говорить, что в неголономном многообразии X_n^{n-1} задана инфинитезимальная связность (в [3] такая связность называется связностью, заданной над распределением), если распределение X_{2n-1}^{2n-2} раскладывается в прямую сумму вида $X_{2n-1}^{2n-2} = HX_n^{n-1} \oplus VX_n^{n-1}$, где HX_n^{n-1} – горизонтальное распределение, а VX_n^{n-1} – вертикальное распределение. В частности, мы имеем изоморфное соответствие $\pi_*: (HX_n^{n-1})_{\bar{u}} \rightarrow (X_n^{n-1})_{\pi(\bar{u})}$. Пользуясь

инволютивностью оснащения X_n^1 , ограничимся на X_n системами координат $\chi(x^\alpha)$ такими, что $\partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \in F_0^1(X_n^1)$. Две такие карты $\chi(x^\alpha)$, $\chi'(x'^\alpha)$ связаны между собой следующим законом преобразования:

$$x^{a'} = x^{a'}(x^\alpha), \quad x^{n'} = x^{n'}(x^\alpha, x^n) \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n; \quad a, b, c = 1, \dots, n-1).$$

Пусть $\bar{e}_a = \hat{\partial}_a - \Gamma_a^n \partial_n$ – поле векторов, допустимых для X_n^{n-1} . Тогда $[e_a, e_b] = M_{ab}^n \partial_n$. Карта χ определяет на X_n^{n-1} карту $\tilde{\chi}(\tilde{\xi}) = (x^\alpha, x^{n+a})$, где $\tilde{\xi} = x^{n+a} \bar{e}_a$. Если на многообразии X_n^{n-1} задана допустимая финслерова структура, то в многообразии X_n^{n-1} возникает инфинитезимальная связность, порожденная распределением

$$HX_n^{n-1} = \langle \bar{e}_a \rangle,$$

где $\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}$, $G_{bc}^a = G_{b\cdot c}^a = \partial_{n+b} \partial_{n+c} G^a$,

$$G^a = g^{ab} (\partial_c L_{\cdot b}^2 x^{n+c} - \bar{e}_b L^2), \quad g_{ab} = \frac{1}{2} L_{\cdot a \cdot b}^2 [1].$$

Определим на многообразии X_n^{n-1} поле $J \in F_1^1(X_{2n-1}^{2n-2})$, полагая $J(\bar{e}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\bar{e}_a$. В результате на многообразии X_n^{n-1} возникает f -структур [4], т.е. тензорное поле типа (1,1), удовлетворяющее условию $f^3 + f = 0$. Поле f однозначно определяется следующими условиями: $f(\bar{e}_a) = J(\bar{e}_a)$, $f(\partial_{n+a}) = J(\partial_{n+a})$, $f(\partial_n) = 0$. С помощью равенств $\tilde{g}(\bar{u}^h, \bar{v}^h) = \tilde{g}(\bar{u}^v, \bar{v}^v) = g(\bar{u}, \bar{v})$, $\tilde{g}(\bar{u}^h, \bar{v}^v) = 0$ на многообразии X_{2n-1}^{2n-2} определяется допустимая риманова метрика [1], [4]. Обобщая на неголономный случай определение эрмитова пространства [5] и учитывая равенство $\tilde{g}(J(\bar{u}), J(\bar{v})) = \tilde{g}(\bar{u}, \bar{v})$, получаем теорему 1.

ТЕОРЕМА 1. Пара допустимых структур (J, \tilde{g}) определяет на неголономном многообразии X_{2n-1}^{2n-2} допустимую эрмитову структуру.

Назовем допустимую эрмитову структуру допустимой келеровой структурой, если $\nabla J = 0$, где ∇ – метрическая связность с нулевым кручением в неголономном многообразии [4]. Для определения условий, при которых пара (J, \tilde{g}) образует допустимую келерову структуру, введем два объекта: $R_{ba}^c = 2(\bar{e}_{[b} G_{a]}^c - G_{[a}^d G_{b]}^c)$, $B_{ba}^c = G_{b\cdot a}^c - \tilde{\Gamma}_{ba}^c$, где коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ba}^c$ определяются из соотношения $\tilde{\nabla}_{\bar{e}_a} \partial_{n+b} = \tilde{\Gamma}_{ab}^c \partial_{n+c}$. Проводя необходимые вычисления, получаем теорему 2.

ТЕОРЕМА 2. Допустимая почти эрмитова структура (J, \tilde{g}) является келеровой тогда и только тогда, когда $R_{ba}^c = 0$ и $B_{abc} = \tilde{g}_{ad}B_{bc}^d$ симметричен по всем индексам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галаев С. В., Чельщев В. Т. О допустимых тензорных структурах на неголономном многообразии // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 19 – 21.
2. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
3. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.
4. Вагнер В. В. Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173 – 225.
5. Яно К., Кон М. CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях. М.: Наука, 1990.

УДК 517.984

С. А. Бутерин

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА СВЁРТКИ ПО СПЕКТРУ ЕГО НЕГЛАДКОГО ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ*

Зафиксируем $n \geq 1$. Пусть Λ – совокупность всех характеристических чисел λ_k интегрального оператора $A = A(M, g, v)$ вида

$$Af = Mf + g(x) \int_0^T f(t)v(t)dt, \quad Mf = \int_0^x M(x-t)f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq T, \quad (1)$$

где $M(x) \in W_2^{n+1}[0, T]$, $M^{(j)}(0) = \delta_{j, n-1}$, $j = \overline{0, n}$, $\delta_{j, n-1}$ – символ Кронекера, $g(x), v(x) \in L_2(0, T)$. Пусть также существуют a, b , $0 \leq a < b \leq T$, такие, что

$$\int_a^{a+\varepsilon} g(x)dx > 0, \quad \int_b^{b-\varepsilon} v(x)dx > 0 \quad (2)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Будем рассматривать следующую обратную задачу.

ЗАДАЧА 1. По характеристическим числам Λ оператора A вида (1) найти функцию $M(x)$ в предположении, что функции $g(x), v(x)$ известны априори.

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376), РФФИ (проект 04-01-00007) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

Для случая $g(x), v(x) \in W_2^1[0, T]$, $g(0)v(\pi) \neq 0$ в [1] доказана единственность решения задачи 1, а в [2] получены условия, необходимые и достаточные для ее разрешимости. В [1, 2] обратная задача сводится к так называемому основному нелинейному интегральному уравнению, для вывода которого требуется гладкость функций $g(x), v(x)$. В настоящей работе доказывается единственность решения задачи 1 при более слабых и в определенном смысле минимальных требованиях на функции $g(x), v(x)$. Для этого используется иная идея, основанная на применении теоремы Е. Титчмарша о свёртке [3].

Наряду с оператором A будем рассматривать оператор $\tilde{A} = A(\tilde{M}, g, v)$ с теми же функциями $g(x), v(x)$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к оператору A , то символ $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, соответствующий оператору \tilde{A} , и $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\Lambda = \tilde{\Lambda}$, то $M(x) = \tilde{M}(x)$ на $[0, b-a]$. В частности, если $a=0, b=T$, то задание Λ однозначно определяет оператор $A(M, g, v)$ в предположении, что функции $g(x), v(x)$ известны априори.

Замечание 1. В теореме 1 не исключен случай $\Lambda = \emptyset$.

Характеристические числа λ_k оператора A вида (1) совпадают с нулями его характеристической функции:

$$L(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^T v(x)g(x, \lambda)dx, \text{ где } g(x, \lambda) = (E - \lambda M)^{-1}g, \quad (3)$$

E – твёрдственный оператор. Согласно теореме Л.А. Сахновича об извлечении корня из оператора [4, 5], существует функция $M_1(x) \in W_2^2[0, T]$,

$M_1(0) = 1, M'_1(0) = 0$, такая, что $M = M_1^n$, где $M_1 f = \int_0^x M_1(x-t)f(t)dt$. Обозначим $M_1(x-t, \lambda)$ – ядро оператора $R_\lambda(M_1) = (E - \lambda M_1)^{-1}M_1$, тогда имеем

$$M_1(x, \lambda) = \exp(\lambda x) + \int_0^x K(x, t)\exp(\lambda t)dt \quad (4)$$

с некоторой суммируемой с квадратом функцией $K(x, t)$ [4]. Положим

$$\mu_0(x) = \int_x^T v(t)g(t-x)dt, \quad \mu(x) = \mu_0(x) + \int_x^T K(t, x)\mu_0(t)dt.$$

Пусть $L_1(\lambda)$ – характеристическая функция оператора $A_1 = A(M_1, g, v)$.

ЛЕММА 1. Имеют место формулы:

$$L_1(\lambda) = 1 - \mu_0(0)\lambda - \lambda^2 \int_0^T \mu(x)\exp(\lambda x)dx, \quad (5)$$

$$L(\lambda) = 1 - \mu_0(0)\lambda - \frac{\rho^{n+1}}{n} \int_0^T \mu(x) \sum_{j=1}^n \exp(\rho R_j x) dx, \quad (6)$$

где $\rho^n = \lambda$, $R_j^n = 1$, $R_j \neq R_k$ при $j \neq k$.

ЛЕММА 2. Справедливо представление

$$L(\lambda) = \exp(-\delta_{1,n}\mu_0(0)\lambda) \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \exp\left(\delta_{1,n} \frac{\lambda}{\lambda_k}\right). \quad (7)$$

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $n=1$. Тогда $M = M_1$. Так как $(E - \lambda M_1)^{-1} = E + \lambda R_\lambda(M_1)$, то в силу (3) имеем

$$\hat{L}(\lambda) = -\lambda^2 \langle v, \hat{M}_1 g \rangle - \lambda^3 \langle v, (M_1 R_\lambda(M_1) - \tilde{M}_1 R_\lambda(\tilde{M}_1))g \rangle, \quad (8)$$

где $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^T f_1(x) f_2(x) dx$. Поскольку $M_1 R_\lambda(M_1) - \tilde{M}_1 R_\lambda(\tilde{M}_1) = \hat{M}_1 G_\lambda$, где

$G_\lambda = R_\lambda(M_1) + R_\lambda(\tilde{M}_1) + \lambda R_\lambda(M_1) R_\lambda(\tilde{M}_1)$, то (8) примет вид

$$\hat{L}(\lambda) = -\lambda^2 \langle v, \hat{M}_1 g \rangle - \lambda^3 \langle v, \hat{M}_1 G_\lambda g \rangle. \quad (9)$$

Обозначим $G(x-t, \lambda)$ – ядро оператора G_λ . Тогда

$$\langle v, \hat{M}_1 G_\lambda g \rangle = \int_0^T N(x) G(x, \lambda) dx, \quad N(x) = \int_x^T v(t) dt \int_x^t \hat{M}_1(t-\tau) g(\tau-x) d\tau. \quad (10)$$

Без ущерба для общности можно считать, что $g(x)=0$ п. в. на $(0, a)$, и $v(x)=0$ п. в. на (b, T) . Иначе мы могли бы “подвинуть” точки a , b ближе к 0, T соответственно, отчего утверждение теоремы только усилится. Положим $v_1(x)=v(b-x)$, $x \in (0, b)$, $g_1(x)=g(x+a)$, $x \in (0, T-a)$. Тогда

$$N(b-a-x) = \int_0^x \hat{M}_1(x-t) dt \int_0^t v_1(t-\tau) g_1(\tau) d\tau, \quad x \in [0, b-a]. \quad (11)$$

Так как $G(x, \lambda) = M_1(x, \lambda) + \tilde{M}_1(x, \lambda) + \lambda \int_0^x M_1(x-t, \lambda) \tilde{M}_1(t, \lambda) dt$, то формула

$$\langle v, \hat{M}_1 G_\lambda g \rangle = \eta + \lambda \int_0^T \left(x N(x) + \int_x^T V(x, t) N(t) dt \right) \exp(\lambda x) dx \quad (12)$$

следует из (4), (10). Здесь $\eta = \text{const}$, $\mathcal{Q}(x, t) = K(x, t) + \tilde{K}(x, t)$,

$$V(x, t) = \int_{t-x}^t \mathcal{Q}(\tau, \tau-t+x) d\tau + \int_0^x \int_\tau^{t-x+\tau} K(s, \tau) \tilde{K}(t-s, x-\tau) ds d\tau + 2 + \int_x^t \mathcal{Q}(t, \tau) d\tau.$$

В силу (7), (9), (11), (12) из условия теоремы следует

$$\int_0^x \hat{M}_1(x-t) dt \int_0^t v_1(t-\tau) g_1(\tau) d\tau = 0, \quad x \in [0, b-a].$$

Тогда с учетом (2) и определения функций $g_1(x)$, $v_1(x)$ теорема Е. Титчмарша о свёртке дает $\hat{M}_1(x)=0$ при $x \in [0, b-a]$. Пусть теперь

$n > 1$. Согласно (6), (7) $\mu(x) = \tilde{\mu}(x)$, и в силу (5) $\hat{L}_1(\lambda) \equiv 0$. По первой части доказательства будем иметь $M_1(x) = \tilde{M}_1(x)$ при $x \in [0, b-a]$ и, следовательно, $M(x) = \tilde{M}(x)$ при $x \in [0, b-a]$. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Нетрудно увидеть, что если $g(x) = 0$, $v(x) = 0$ п. в. на $(0, a)$, (b, T) соответственно, то никакая вариация функции $M(x)$ на промежутке $(b-a, T]$ не изменит функцию $L(\lambda)$, а значит, и Λ .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутерин С. А. О единственности восстановления одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 15 – 18.

2. Бутерин С. А. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 8 – 10.

3. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Гостехиздат, 1951.

4. Сахнович Л. А. Спектральный анализ операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)K(x-t)dt$ //

Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1958. Т. 22. С. 299 – 308.

5. Юрко В. А. О порождающих элементах операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)K(x-t)dt$ //

// Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 79 – 102.

УДК 517.51

P. P. Васюков

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КАНОНИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

В книге [1] проводится восстановление вероятностной меры в случае 2-периодической последовательности канонических моментов меры на некотором отрезке. В данной статье решена задача восстановления в случае m -периодической последовательности канонических моментов. Пусть

$$c_k = c_k(\mu) = \int_a^b x^k d\mu(x), \quad k \geq 1,$$

– последовательность обычных моментов меры μ на отрезке $[a, b]$.

Для меры μ с моментами c_k , $k \geq 1$, положим

$$c_k^- = c_k^-(\mu) = \min_{\eta} c_k(\eta), \quad c_k^+ = c_k^+(\mu) = \max_{\eta} c_k(\eta),$$

где минимум и максимум берутся по вероятностным мерам, моменты которых до порядка $k-1$ совпадают с моментами меры μ . Тогда величины

$$p_k = \frac{c_k^- - c_k^+}{c_k^+ - c_k^-}, \quad k \geq 1,$$

называются каноническими моментами меры μ .

Основными инструментами для исследования свойств меры являются здесь прямое и обратное преобразования Стильеса.

Прямое преобразование Стильеса для вероятностной меры на отрезке $[0,1]$ – это аналитическая вне отрезка $[0,1]$ функция:

$$S(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(x)}{z-x} = \frac{1}{|z|} - \frac{p_1}{|1|} - \frac{q_1 p_2}{|z|} - \frac{q_2 p_3}{|1|} - \dots,$$

где $q_0 = 1$, $q_k = 1 - p_k$.

Можно показать (используя свойства непрерывных дробей), что преобразование Стильеса представляется и в другой (более удобной в дальнейшем) форме. А именно

$$S(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(x)}{z-x} = \frac{1}{|z-\xi_1|} - \frac{\xi_1 \xi_2}{|z-\xi_2-\xi_3|} - \frac{\xi_3 \xi_4}{|z-\xi_4-\xi_5|} - \dots,$$

где $\xi_k = q_{k-1} p_k$.

Такой вид функции $S(z)$ выбирается из тех соображений, что он близок к виду непрерывной дроби, рассмотренной в [2].

Свойства преобразования Стильеса меры μ , как известно, позволяют найти все компоненты меры. Таким образом, для того чтобы восстановить меру по каноническим моментам, достаточно найти ее преобразование Стильеса.

В [2] рассматривается непрерывная дробь следующего вида:

$$K(z) = \frac{\lambda_1}{|z-\alpha_1|} - \frac{\lambda_2}{|z-\alpha_2|} - \dots,$$

где $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $\{\lambda_k\}_1^\infty \neq 0$ – произвольные действительные числа.

Последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ берутся m -периодическими.

В нашем случае имеем

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{k+1} = \xi_{2k-1} \xi_{2k}, \quad \alpha_1 = \xi_1, \quad \alpha_{k+1} = \xi_{2k} + \xi_{2k+1}.$$

Отсюда следует, что если период последовательности канонических моментов меры четный, то последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ имеют половинный период, в случае нечетного периода последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ имеют тот же период.

Таким образом, пользуясь результатами [2], получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть для некоторой вероятностной меры μ на отрезке $[a, b]$ выполняется условие m -периодичности канонических моментов:

$$p_n = p_k, \quad n - s \equiv k \pmod{m}; \quad k = 1 \dots m, \quad n > s, \quad s \geq 0.$$

Тогда мера μ состоит из двух компонент:

$$d\mu(x) = d\mu_1(x) + d\mu_2(x),$$

где мера μ_1 абсолютно непрерывна на множестве E , состоящем из конечного числа отрезков. При этом имеем

$$d\mu_1(x) = p(x)dx, \quad p(x) = \frac{\sqrt{4l - \{P_m(x) - R_{m-2}(x)\}^2}}{C(x)},$$

где $P_m(x)$ – ортогональные относительно меры μ многочлены с единичным старшим коэффициентом, многочлен $R_n(x)$ удовлетворяет трехчленному рекуррентному соотношению с коэффициентами рекуррентного соотношения, записанного для многочлена $P_{n+1}(x)$, с начальными условиями:

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \quad R_{-1}(x) = 1, \quad R_0(x) = 0.$$

Константа l равна:

$$l = \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_{m/2} = p_1 q_1 p_2 q_2 p_3 \cdots q_{m-1} p_m \text{ в случае четного периода,}$$

$$l = \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_m = p_1 q_1 p_2 q_2 p_3 \cdots q_{2m-2} p_{2m-1} \text{ в случае нечетного периода.}$$

Множество E – это система отрезков таких, что выполняется неравенство

$$F(x) = 4l - \{P_m(x) - P_{m-2}(x)\}^2 > 0.$$

Многочлен $C(x)$ имеет вид

$$C(x) = P_{m+1-s}(x)P_s(x) - P_{m+s}(x)P_{s-1}(x).$$

Вторая компонента μ_2 имеет финитный (т.е. содержащий конечное число точек) носитель; причем он состоит из тех корней x_v многочлена $C(x)$, для которых выполняется неравенство

$$|P_{k+m}(x_v)| < \sqrt{l}|P_k(x_v)|, \quad \forall k \geq s-1;$$

$$\text{массы точек } x_v \text{ равны } \mu_v = 2 \lim_{x \rightarrow x_v} |p(x)(x - x_v)|.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Deine H., Studden W. The Theory of Canonical Moments with Applications in Statistics, Probability, and Analysis. N. Y., 1997. 324 p.*
2. Геронимус Я. Л. О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных многочленов // Зап. НИИ математики и механики и Харьк. мат. о-ва. Харьков, 1938. Т. 15, вып. 2. С. 57 – 64.

А. М. Водолазов, О. А. Королева

АЛГЕБРА ЦЕЛОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ КВАЗИРАЗЛОЖИМЫХ ТОРОВ

Пусть O -коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, k – это поле частных, G – линейная алгебраическая группа, определенная над k . Целой формой группы G будем называть групповую O -схему X такую, что существует групповой изоморфизм k -групп $X \otimes_O k \cong G$. Изучение свойств целых форм необходимо для различных задач арифметики и анализа на группе G .

Нас будет интересовать случай алгебраических торов. Линейная алгебраическая группа T является алгебраическим тором, определенным над полем k , если T – форма тривиального тора $G_{m,L}^d$, т. е. $T \otimes_k L \cong G_{m,L}^d$, где $d = \dim T$, а L – минимальное поле разложения тора T . Дальше везде предполагается, что k – поле p -адических чисел, а O – кольцо целых p -адических чисел поля k и O^* – группа обратимых элементов в кольце O .

Пусть X групповая O -форма тора T (стандартная целая модель из работы [1]), $X = \text{Spec } A$, $A \subset k[T]$. Рассмотрим группу точек $X(O) = \text{Hom}(A, O)$. Для классификации различных целых форм важной задачей является изучение алгебры целозначных функций на торе

$$A_* = \{f \in k[T] \mid (\forall u \in X(O)) f(u) \in O\}.$$

Алгебра A_* в общем случае не является алгеброй конечного типа, т.е. у нее существует бесконечное число образующих. В работе [2] была поставлена задача нахождения образующих алгебры A_* в случае разложимых торов $T \cong G_{m,k}^d$. Они были найдены в [3]. Разложимые торы являются первым этапом при изучении алгебраических торов. Следующим важным классом алгебраических торов являются квазиразложимые торы. В этой статье строятся образующие для алгебры A_* в случае квазиразложимых торов. Определим квазиразложимый тор T . Пусть Π – группа Галуа расширения поля L над k , а \hat{T} – Π модуль рациональных характеров тора T и существует базис $\hat{T}_{\chi_1, \dots, \chi_d}$, на котором Π действует перестановками. Пусть Π_1 – стабилизатор χ_1 -характера, тогда

$$\hat{T} \cong Z \otimes_{\Pi_1} Z[\Pi],$$

а тор $T \cong R_{F/k}(G_m)$, где $F = L^{\Pi_1}$ – расширение поля k с целым базисом $e_1 = 1, e_2, \dots, e_d$ и кольцом целых O_F [4]. Для χ_1 имеем разложение

$$\chi_1 = x^{(1)}e_1 + \dots + x^{(d)}e_d.$$

В [1] для стандартной целой модели квазиразложимого тора получено представление

$$A = O[x^{(1)}, \dots, x^{(d)}, y^{-1}],$$

где $\chi = \chi_1, \dots, \chi_d = ye_1$, и там же вычислена группа точек $X(O)$:

$$X(O) = \text{Hom}(A, O) = O_F^*.$$

Нашей задачей является нахождение образующих алгебры

$$A_* = \{f \in k[T] \mid f \otimes_O A \mid f(u) \in O \quad \forall u \in O_F^*\}.$$

$$\text{ЛЕММА. } A_* \cong \{f \in k[x^{(1)}, \dots, x^{(d)}, y^{-1}] \mid f(u) \in O \quad \forall u \in O_F^*\}.$$

Доказательство следует из того, что y является норменным отображением, которое на элементах из O_F^* принимает значения в множестве единиц кольца O .

Для O_F^* удобно следующее представление:

$$O_F^* = \{(x_1, \dots, x_d) \mid \forall i \quad x_i \in O, \quad \exists i_0 \quad x_{i_0} \in O^*\}.$$

Используя это представление и результаты работы [3], в которой были найдены образующие для алгебры

$$A_1 = \left\{ f \in k[x^{(1)}, \dots, x^{(d)}] \mid f : (O^*)^d \mapsto O \right\},$$

сформулируем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА. Многочлены

$$H_{n_j}(x_j) = \frac{1}{p^{s_{n_j}}} \prod_{i=0}^{p^{k_j}-1} (x_j - i) \prod_{p^{k_j} \leq i_n \leq n_j} (x_j - i_n^*),$$

где $j = 1, \dots, d$, x_j является переменой, а

$$n_j = n_j^{(k_j)} p^{k_j} + \dots + n_j^{(1)} p + n_j^{(0)}, \quad 0 \leq n_j^{(m)} < p, \quad (1 \leq m \leq k_j - 1), \quad n_j^{(k_j)} \neq 0,$$

$$s_{n_j} = n_j^{(k_j)} \alpha_{k_j} + \dots + n_j^{(1)} \alpha_1, \quad \alpha_i = \frac{p^i - 1}{p - 1}$$

принадлежат A_* и являются образующими вместе с многочленами

$$\tilde{H}_{(k)}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^d \left(\prod_{\substack{i=1 \\ (i,p)=1}}^{p^k-1} (x_j - i) \right) \frac{1}{p^{\alpha_k}}.$$

Замечание. Элементы t_i^* в теореме являются константами, которые выбираются специальным образом, и процедура их выбора аналогична процедуре выбора соответствующих элементов из работы [3].

Доказательство теоремы следует схеме работы [3]. Принадлежность многочленов $H_{n_j}(x_j)$ алгебре A_* получается из ключения $O^* \subset O$, а многочлены $H_{n_j}(x_j)$ целозначны на O . Необходимость добавить многочлены $\tilde{H}_{(k)}(x_1, \dots, x_d)$ к образующим алгебры A_* получается из представления для $u \in O_F^*$ в виде

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_d e_d,$$

где $u_i \in O$ и существует i_0 , такое что $u_{i_0} \in O^*$. Поэтому, когда i будет пробегать приведенную систему вычетов по модулю p , для переменной x_{i_0} , найдется элемент, который попадет в один класс с u_{i_0} . Следовательно, произведение

$$\prod_{\substack{i=1 \\ (i,p)=1}}^{p-1} (x_{i_0} - i)$$

делится на p . Далее, рассматривая приведенные системы по модулю p^k , мы находим точные значения показателя α_k .

Результаты доказанной теоремы позволяют перейти к описанию алгебр целозначных функций для произвольных алгебраических торов, так как хорошо известно [4], что любой алгебраический тор вкладывается в квазиразложимый тор. Нахождение образующих алгебр целозначных функций является важным для задач классификаций целых форм алгебраических торов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов С. Ю. Стандартная целая модель алгебраического тора // Вестн. Самар. ун-та, 2001. № 4(22). С. 20 – 54.
2. Kunyavskii B. E., Moroz B. Z., Voskresenskii V. E. On integral models of an algebraic torus / Max – Planck – Institut fur Mathematic. Preprint Series. Bonn, 2001. № 12.
3. Водолазов А. М. Целые модели разложимых алгебраических торов бесконечного типа // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 11 – 19.
4. Воскресенский В. Е. Алгебраические торы. М.: Наука, 1977.

С. С. Волосивец, Н. Ю. Агафонова

**О ПРЕОБРАЗОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ
ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ
КЛАССОВ ОРЛИЧА***

Пусть $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел таких, что $2 \leq p_j \leq N$ при всех $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Каждое $x \in [0,1]$ имеет разложение $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$, где $x_j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_j < p_j$ (для $x = k/m_n$ берем разложение с бесконечным числом $x_j \neq 0$). Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad 0 \leq k_j < p_j,$$

то по определению полагаем для $x \in [0,1]$

$$\chi_k(x) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – ортонормированная, полная в $L[0,1]$ система [1, §1.5]. По определению $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_k(t)} dt$, а $S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \chi_k(x)$.

Особенно хорошими аппроксимативными свойствами обладает сумма $S_{m_n}(f, x)$, которая активно используется в данной статье.

Пусть $\Phi(u)$ – непрерывная на $[0, +\infty)$, выпуклая функция такая, что $\lim_{u \rightarrow 0+0} \Phi(u)/u = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u)/u = +\infty$. Пусть $\Psi(u)$ – сопряженная к $\Phi(u)$ по

Юнгу функция. Пространством $L_{\Phi}^*[0,1]$ назовем множество измеримых на $[0,1]$ функций $f(x)$ таких, что для любой функции $g(x)$ со свойством $\int_0^1 |\Psi(g(x))| dx \leq \infty$ интеграл $\int_0^1 f(x) g(x) dx$ конечен. Нормой в этом пространстве является

$$\|f\|_{\Phi} = \sup \left\{ \left| \int_0^1 f(x) g(x) dx \right| : \int_0^1 |\Psi(g(x))| dx \leq 1 \right\}.$$

По поводу этих определений см. [2].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00390), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.374).

Пусть X и Y – два функциональных пространства на $[0,1]$.

Если последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ такова, что для любой $f \in X$ ряд $\sum_{n=0}^\infty \lambda_n \hat{f}(n) \chi_n(x)$ является рядом Фурье (по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$) функции $g \in Y$, то по определению $\{\lambda_n\} \in (X, Y)$.

Пусть $B[0,1]$ – пространство ограниченных на $[0,1]$ функций.

ТЕОРЕМА 1. Условие $\{\lambda_k\} \in (L_\Phi^*, B)$ равносильно существованию $g \in L_\Psi^*[0,1]$ такой, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$.

Введем теперь класс $V(1,\Phi)$ функций $\phi \in L_\Phi^*[0,1]$ таких, что для некоторой константы $C > 0$ и любого конечного набора попарно непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^n \subset [0,1]$ верно неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^n (\phi(\beta_i \Theta t) - \phi(\alpha_i \Theta t)) \right\|_\Phi \leq C.$$

Здесь Θ – P -личная разность чисел из $[0,1]$ [1, §1.5].

Пусть $V[0,1]$ – пространство функций ограниченной вариации на $[0,1]$.

ТЕОРЕМА 2. Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ принадлежит классу (L_Φ^*, V) тогда и только тогда, когда существует $\phi \in V(1,\Phi)$ такая, что $\lambda_k = \hat{\phi}(k)$.

ТЕОРЕМА 3. Условие $\{\lambda_k\} \in (L, L_\Phi^*)$ равносильно существованию $\phi \in L_\Phi^*[0,1]$ такой, что $\hat{\phi}(k) = \lambda_k$.

В тригонометрическом случае аналогичные результаты были получены в [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. Красносельский М. А., Рутинский Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

3. Скворцова М. Г. Свойства мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье // Мат. зап. Уральск. ун-та. 1972. Т. 8, тетр. 2. С. 91 – 107.

**ОБ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА КРАЙНИХ ТОЧЕК МНОЖЕСТВА
РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ
МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛИНОМОМ***

1. Рассматривается задача [1]:

$$\rho(A) := \max_{k \in [0:N]} f(A, k) \longrightarrow \inf_{A \in R^{n+1}}, \quad (1)$$

где $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$, $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$,

$$f(A, k) := \max \{y_{2,k} - p_n(A, t_k), p_n(A, t_k) - y_{1,k}\}, \quad y_{2,k} \geq y_{1,k}, k \in [0:N].$$

Обозначим через $\rho^* := \inf_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$, $\mathfrak{R} := \{A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\}$,

$$m := \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}, \quad M := \left\{k \in [0:N] : \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = m\right\}.$$

Считаем, что $N \geq n$. В таком случае \mathfrak{R} – выпуклый многогранник, натянутый на свои крайние точки [1–4]. Будем считать также, что решение задачи (1) не единственno. Тогда имеем $\rho^* = m$ [1].

Требуется оценить число крайних точек множества \mathfrak{R} .

2. Приведём вспомогательные факты [3].

Выборкой назовем упорядоченное подмножество из $(n+1)$ узлов сетки T вида $\Delta = \{t_{q_0} < t_{q_1} < \dots < t_{q_n}\} \subset T$, и пусть $I(\Delta) := \{q_k, k \in [0:n]\}$.

Обозначим через $|M|$ число элементов множества M .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $|\mathfrak{R}| > 1$. Вектор $A \in R^{n+1}$ является крайней точкой множества \mathfrak{R} тогда и только тогда, когда существуют выборка $\Delta \subset T$: $M \subset I(\Delta)$ и числа $\xi_k \in 0:1$, $k \in [0:n]$, $q_k \notin M$, такие, что выполняются равенства

$$\xi_k(p_n(A, t_{q_k}) - y_{1,q_k}) + (1 - \xi_k)(y_{2,q_k} - p_n(A, t_{q_k})) = m, \quad \forall k \in [0:n], \quad (2)$$

и

$$\rho(A) = m. \quad (3)$$

Замечание 1. Если выполняется равенство (3), то левая часть равенства (2) совпадает с $f(A, q_k)$.

Замечание 2. Если $q_k \in M$, то левая часть равенства (3) не зависит от ξ_k .

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ – 1295.2003.1).

Следствие 1. Пусть $|\mathfrak{R}| > 1$. При $N = n$ множество крайних точек множества решений задачи (1) представляет собой совокупность решений систем (2) при всех наборах параметров $\xi_k \in 0:1$, $k \in [0:n]$, $q_k \notin M$. Таких решений $2^{n+1-|M|}$.

3. Пусть далее $N \geq n+1$. Обозначим $f_i(A, k) := (-1)^i (y_{i,k} - p_n(A, t_k))$, $i=1,2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $|\mathfrak{R}| > 1$. Тогда существует $A \in \mathfrak{R}$ такое, что

$$f(A, k) = m \quad \forall k \in M \quad \text{и} \quad f(A, k) < m \quad \forall k \in [0:N] \setminus M. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим множество крайних точек множества \mathfrak{R} через $E(\mathfrak{R})$ и возьмём $\bar{A} \in \mathfrak{R} \setminus E(\mathfrak{R})$. Пусть $f(\bar{A}, k) = m$, $\forall k \in M \cup \bar{\Xi}$. Поскольку $\bar{A} \notin E(\mathfrak{R})$, то ввиду теоремы 1 имеем $q := |M \cup \bar{\Xi}| < n+1$. Так как $p^* = m$, то $f(A, k) < m$, $\forall k \in [0:N] \setminus \{M \cup \bar{\Xi}\}$. Возьмём $\tilde{\Xi} \subset [0:N] \setminus \{M \cup \bar{\Xi}\}$, $|\tilde{\Xi}| = n+1-q$. Пусть A_ε – решение следующей системы:

$$p_n(A_\varepsilon, t_k) = p_n(\bar{A}, t_k) + \mu_k \cdot \varepsilon, \quad \text{где } \mu_k = \begin{cases} 0, & k \in M \cup \tilde{\Xi} \\ (-1)^i, & f_i(\bar{A}, k) > f_{3-i}(\bar{A}, k), k \in \bar{\Xi}. \end{cases}$$

По непрерывности при малом $\varepsilon > 0$ вектор A_ε будет удовлетворять условию (4). Теорема доказана.

ЛЕММА 1. Пусть $-\infty < x_1 < \dots < x_n < \infty$, $\tilde{A} \in E(\mathfrak{R})$. Тогда $|\Omega| \leq 2$, где $\Omega := \{A \in E(\mathfrak{R}): p_n(A, x_k) = p_n(\tilde{A}, x_k), \forall k \in [1:n]\}$.

Доказательство. Пусть в множестве Ω присутствуют 3 элемента. Тогда значение одного из полиномов в любой точке $x \neq x_k$, $k \in [1:n]$ лежит между двумя другими. А поскольку значения этих полиномов совпадают в n различных точках x_k , то один из них является выпуклой комбинацией двух других, то есть не может быть крайней точкой. Лемма доказана.

Поскольку \mathfrak{R} является выпуклым многогранником, то имеет не менее двух крайних точек. Применяя лемму 1, получаем следующий факт.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N \geq n$, $|\mathfrak{R}| > 1$ и $|M| = n$. Тогда $|E(\mathfrak{R})| = 2$.

Обозначим символами $\theta_0 := n + 2 - |M|$, $\theta_1 := 2^{n+1-|M|} \cdot C_{N+1-|M|}^{n+1-|M|}$,

$$\theta_2 := \frac{2^{n+1-|M|}}{n+1-|M|} \cdot C_{N+1-|M|}^{n-|M|}. \quad \text{Ясно, что } \theta_2 = \frac{\theta_1}{N+1-n} \leq \theta_1.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $N \geq n$, $|\mathfrak{R}| > 1$. Тогда $\theta_0 \leq |E(\mathfrak{R})| \leq \theta_2$.

Доказательство. 1. Поскольку задача (1) имеет не единственное решение, то $|M| \leq n$ [3]. Ввиду теоремы 3 можно считать $|M| < n$. Ясно, что

$$f(A, k) = m, \quad \forall k \in M, \quad \forall A \in \mathfrak{R}.$$

2. Построим попарно различные крайние точки $A^k \in E(\mathfrak{R})$, $k \in [1:\theta_0]$.

Возьмём произвольно $A^1 \in E(\mathfrak{R})$.

По теореме 1 существует, по крайней мере, $\theta_0 - 1$ индексов: $\bar{M} := \{w_1 < \dots < w_{\theta_0-1}\} \subset [0:N] \setminus M$ таких, что $f(A^1, k) = m, \forall k \in \bar{M}$.

Возьмём вектор $\tilde{A} \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющий условию (4), положим $j := 1$ и переходим к п. 3 доказательства.

3. Положим $\beta := 1, l := j, D := M \cup \bar{M} \setminus \{w_j\}, \tilde{A} := \tilde{A}$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ условию (4) будет удовлетворять решение A_ε следующей системы:

$$\begin{aligned} p_n(A_\varepsilon, t_k) &= p_n(\tilde{A}, t_k), \quad \forall k \in D, \\ p_n(A_\varepsilon, t_{w_j}) &= p_n(\tilde{A}, t_{w_j}) + \beta \mu_{w_j} \varepsilon, \end{aligned} \quad \text{где } \mu_{w_j} = \begin{cases} -1, & p_n(\tilde{A}, t_{w_j}) < p_n(A^1, t_{w_j}), \\ 1, & p_n(\tilde{A}, t_{w_j}) > p_n(A^1, t_{w_j}), \end{cases} \quad (5)$$

причём $p_n(A_\varepsilon, t_{w_j}) \neq p_n(A^1, t_{w_j})$.

4. По непрерывности найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $A_\varepsilon \in \mathfrak{R}$ и

$$f(A_\varepsilon, s_k) = m \quad \forall k \in [1:r], \text{ где } S := \{s_1, \dots, s_r\} \subset [0:N] \setminus M, r \geq 1.$$

Если $|M| + r \geq n+1$, то по теореме 1 вектор $A^{j+1} := A_\varepsilon$ будет крайней точкой множества \mathfrak{R} . Если при этом $j = \theta_0 - 1$, то переходим к п. 6; если же $j < \theta_0 - 1$, то полагаем $j := j + 1$ и возвращаемся к п. 3.

Если $|M| + r < n+1$, то берём $i := \max\{1, 3-j\}$ и переходим к п. 5.

$$5. \text{ Обозначим } \hat{S} := \{\hat{s}_1 < \dots < \hat{s}_{n-r-|M|} : t_{\hat{s}_k} > t_N, k \in [1:n-r-|M]\}$$

(если $|M| + r = n$, то $\hat{S} = \emptyset$), $\bar{A} := A_\varepsilon$.

Пусть $\beta := -1, l := i, D := M \cup S \cup \hat{S}, \tilde{A} := \bar{A}$. Снова берём достаточно малое $\varepsilon > 0$ и решаем относительно A_ε систему (5). Тогда $A_\varepsilon \in \mathfrak{R}$, причём

$$p_n(A_\varepsilon, t_{w_i}) \neq p_n(A^k, t_{w_i}), k \in [2:j].$$

$$f(A_\varepsilon, k) = m, \forall k \in M \cup S \text{ и } f(A_\varepsilon, k) < m, \forall k \in [0:N] \setminus \{M \cup S\}.$$

Продолжаем увеличивать $\varepsilon > 0$, пока не получим $A_\varepsilon \in \mathfrak{R}$ такое, что $f(A_\varepsilon, s_k) = m, \forall k \in \bar{S}$, где $\bar{S} := \{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{\bar{r}}\} \subset [0:N] \setminus M, \bar{r} \geq 1$.

Пусть далее $S := S \cup \bar{S}, r := r + \bar{r}$.

Если $|M| + r \geq n+1$, то по теореме 1 вектор A_ε будет крайней точкой множества решений задачи (1). Полагаем $A^{j+1} := A_\varepsilon$. Если $j = \theta_0 - 1$, то переходим к п. 6, если $j < \theta_0 - 1$, то полагаем $j := j + 1$ и переходим к п. 3.

Если $|M| + r < n+1$, то берём $i := \max\{i+1, j+1\}$ и переходим к п. 5.

6. Таким образом будет построено θ_0 попарно различных крайних точек $A^1, A^1, \dots, A^{\theta_0}$. Оценка $\theta_0 \leq |E(\mathfrak{R})|$ получена. Переходим к п. 7.

7. Покажем, что $|E(\mathfrak{R})| \leq \theta_2$. Все крайние точки множества решений задачи (1) можно отыскать, решая систему (2) для различных выборок из

$(n+1)$ узлов сетки T , перебирая на каждой выборке двоичные наборы параметров ξ_k , $k \in [0:n]$, $q_k \notin M$, и проверяя каждый раз равенство (3). Таких решений системы (2) конечное число, следовательно, множество \mathfrak{Y} имеет конечное число крайних точек: $|E(\mathfrak{Y})| \leq \theta_1$. По лемме 1 для каждого фиксированного набора из n узлов сетки T (их $C_{N+1-|Z|}^{n-|Z|}$) существует не более двух крайних точек. Учитывая теперь, что каждая точка подсчитана $n+1-|M|$ раз, получаем нужную оценку. Теорема доказана.

Пример. Пусть $n = 2$, $N = 3$, $T = \{0 < 1 < 2 < 3\}$, $|M| = 1$. В таком случае $\theta_0 = 3$, $\theta_2 = 6$. Если $\Phi(0) = [-1; 1]$, $\Phi(1) = [-1; 0]$, $\Phi(2) = \Phi(3) = [0; 1]$, то число крайних точек множества решений задачи (1) есть 3 и достигается оценка θ_0 . Если же $\Phi(0) = [-1; 1]$, $\Phi(1) = \Phi(2) = \Phi(3) = \{0\}$, то число крайних точек равно 6 и достигается оценка θ_2 .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении дискретного мультиограждения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 25 – 27.
2. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
3. Выгодчикова И. Ю. О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 15 – 18.
4. Выгодчикова И. Ю. Процедура решения задачи приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 12-й Сарат. зимней мат. шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 48 – 50.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

УСЛОВИЕ МЕТРИЗУЕМОСТИ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ В НЕГОЛОННОМНОМ МНОГООБРАЗИИ X_3^2

Проблема метризуемости аффинной связности ∇ , заданной на гладком многообразии X_n , была обозначена в работе [1]. Эта проблема сводится к интегрируемости системы дифференциальных уравнений в полных дифференциалах. Условия метризуемости аффинной связности, заданной на двумерном многообразии, получены в [2]. Как показано в [3], задача о метризуемости аффинной связности в неголономном многообразии [4] является весьма актуальной с точки зрения применения дифференциальной геометрии к изучению движения точки переменной массы. В настоящей

статье находятся условия метризуемости аффинной связности, заданной в оснащенному неголономном многообразии X_3^2 .

1. Пусть X_n – гладкое класса C^∞ многообразие, на котором задано вместе со своим оснащением X_n^1 неголономное многообразие X_n^{n-1} [4]. Мы полагаем, что многообразие X_n^{n-1} задается фиксированной дифференциальной 1-формой λ . Задание оснащения позволяет ограничиться рассмотрением на X_n специальных систем координат

$$(x^\alpha) = (x^a, x^n) (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n-1).$$

Для таких систем всегда $\hat{\partial}_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \in F_0^1(X_n^1)$, где $F_0^1(X_n^1)$ – модуль

векторных полей, принимающих значения в распределении X_n^1 . Допустимые векторные поля $\bar{e}_a = pr_1(\hat{\partial}_a) = \partial_a - \Gamma_a^n \hat{\partial}_n$, где $pr_1: F_n^1(X_n) \rightarrow F_n^1(X_n^{n-1})$ – естественный оператор проектирования, линейно независимы в каждой точке и определяют в X_n^{n-1} линейную систему координат [4]. Имеет место равенство $[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = M_{ab}^n \hat{\partial}_n$, где M_{ab}^n – тензор неголономности многообразия X_n^{n-1} . Пусть далее ∇ – симметричная аффинная связность с коэффициентами Γ_{bc}^a в неголономном многообразии X_n^{n-1} . Связность ∇ определяет два допустимых тензорных поля, которые, следуя [4], будем называть соответственно первым и вторым тензорами кривизны Схоутена. Их координатные представления имеют вид $K_{abc}^d = 2\bar{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d, P_{abc}^a = \hat{\partial}_n \Gamma_{bc}^a$.

Будем искать условия, при которых существует поле допустимого метрического тензора g такого, что $\nabla g = 0, |g| \neq 0$. В случае, когда эти условия выполняются, будем называть связность ∇ и пространство X_n^{n-1} метризуемыми. Уравнение $\nabla g = 0$ в координатах примет вид

$$\bar{e}_a g_{bc} - \Gamma_{ab}^d g_{dc} - \Gamma_{ac}^d g_{bd} = 0. \quad (1)$$

2. Система (1) не является системой уравнений в полных дифференциалах. Для того чтобы получить систему дифференциальных уравнений в полных дифференциалах, построим связность

$$\tilde{\nabla}: F_0^1(X_n) \times F_0^1(X_n^{n-1}) \rightarrow F_0^1(X_n^{n-1}),$$

осуществляющую параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия X_n . Потребуем от связности $\tilde{\nabla}$, чтобы системы уравнений $\tilde{\nabla}g = 0, \nabla g = 0$ были равносильны.

Пусть $n=3$. Дифференцируя (1) повторно, а затем альтернируя, получаем

$$M_{da}^3 \hat{\partial}_3 g_{bc} = g_{fc} K_{dab}^f + g_{fb} K_{dac}^f. \quad (2)$$

Форма λ , определяющая многообразие $X_2^3 : \lambda|_{X_2^3} = 0$, в специальных координатах имеет вид $\lambda = \lambda_3(dx^3 + \Gamma_a^3 dx^a)$, где λ_3 – гладкая на многообразии X_3 функция. Имеет место равенство $M_{ab}^3 \lambda_3 = \omega_{ba}$, где $\omega = d\lambda$, используя которое, приводим (2) к виду

$$\partial_3 g_{bc} = g_{fc} P_{3b}^f + g_{fb} P_{3c}^f, \quad (3)$$

где $P_{3b}^f = \frac{\lambda_3}{2} \omega^{da} K_{dab}^f$. Мы воспользовались здесь тем, что $d\lambda \neq 0$ и $\omega_{ab} \omega^{bc} = \delta_a^c$. Собирая вместе (1) и (3), получаем систему уравнений в полных дифференциалах. Условия интегрируемости такой системы имеют вид

$$\begin{cases} R_{tab}^d g_{dc} + R_{iac}^d g_{bd} = 0, \\ g_{dc} R_{3bc}^d + g_{bd} R_{3ac}^d = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $R_{abc}^d = K_{abc}^d - 2M_{ab}^3 P_{3c}^d$, $R_{3ac}^d = P_{3ac}^d - \nabla_a P_{3c}^d$. Учитывая, что $R_{abc}^d = 3K_{abc}^d$, перепишем систему (4) в виде

$$\begin{cases} K_{iab}^d g_{dc} + K_{iac}^d g_{bd} = 0, \\ g_{dc} R_{3bc}^d + g_{bd} R_{3ac}^d = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) дает условия интегрируемости системы уравнений $\tilde{\nabla}g = 0$. Коэффициенты связности ∇ , $\tilde{\nabla}$ связаны соотношениями $\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a$, $\tilde{\Gamma}_{3b}^a = P_{3b}^a$. Функции R_{abc}^d , R_{3bc}^d являются компонентами тензора кривизны R связности $\tilde{\nabla}$ в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \partial_3)$.

Матрица системы (5) имеет восемь строк, первые три из которых образуют матрицу вида

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a+d & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}, \quad (6)$$

$K_{121}^1 = a$, $K_{121}^2 = b$, $K_{122}^1 = c$, $K_{122}^2 = d$. Определитель D матрицы (6) равен

$$D = (a+d)(ad - bc). \quad (7)$$

Введем два комитанта тензора K :

$$V_{ab} = K_{abd}^d, \quad K_{ab} = K_{cab}^c. \quad (8)$$

Пусть $\hat{D} = \det \|K_{ab}\|$. Тогда можно проверить справедливость следующего равенства:

$$\hat{D}' = \hat{D} \det \left\| \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \right\|, \quad (9)$$

где $\hat{D} = \det \|K_{a'b'}\|$. Вводя обозначения $\check{D} = V_{12}$, получаем аналогичное равенство

$$\check{D}' = \check{D} \det \left\| \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \right\|. \quad (10)$$

Из (7) следует, что $D = \hat{D}\check{D}$. Равенства (9), (10) указывают на то, что D – комитант связности ∇ .

Пусть r – ранг матрицы системы (5). Если $r = 0$, то система (1) вполне интегрируема, и, следовательно, ∇ – метризуемая связность. Легко убедиться в том, что случай $r = 1$ невозможен. Если $r = 3$, то система (5) имеет единственное нулевое решение и, таким образом, ∇ – не метризуема. Рассмотрим случай $r = 2$. Пусть \tilde{r} – ранг матрицы (6). Если $\tilde{r} = 0$, то, как показано в [5], связность ∇ не метризуема. Случай $\tilde{r} = 1$ невозможен при любом r , а случай $\tilde{r} = 3$ невозможен при условии, что $r = 2$. Пусть

$$\tilde{r} = 2 \text{ и } \hat{D} \neq 0. \text{ Тогда либо } \operatorname{rank} \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a+d & b \end{vmatrix} = 2, \text{ либо } \operatorname{rank} \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & c & d \end{vmatrix} = 2.$$

Введем обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} = \begin{vmatrix} b & 0 \\ a+d & b \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & c \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a+d \end{vmatrix}, \\ B_{11} = \begin{vmatrix} b & 0 \\ c & d \end{vmatrix}, \quad B_{12} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{vmatrix}, \quad B_{22} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

В первом случае $g_{cb} = kA_{cb}$, k – любое, во втором – $g_{cb} = kB_{cb}$. Вычисляя, получим

$$\begin{aligned} A_{11}A_{22} - A_{12}^2 &= b^2 \hat{D}, \\ B_{11}B_{22} - B_{12}^2 &= -ad\hat{D}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, если связность $\tilde{\nabla}$ с отличным от нуля тензором кривизны метризуема, то должны выполняться условия $r = \tilde{r} = 2, D \neq 0$.

3. Пусть r' – ранг системы, которая получается из системы (5) добавлением уравнений вида

$$g(\tilde{\nabla}R(\bar{u}, \bar{y})\bar{z}, \bar{w}) + g(\tilde{\nabla}R(\bar{u}, \bar{y}), \bar{w}, \bar{z}) = 0.$$

Если $r' = 3$, то ∇ – не метризуема. Если $r' = 2$, то согласно общей теории [1], система уравнений $\tilde{\nabla}g = 0$ ($\nabla g = 0$) имеет решение, зависящее от одного параметра, т.е., другими словами, среди решений этой системы есть ненулевые, что приводит к теореме.

ТЕОРЕМА. Связность ∇ метризуема тогда и только тогда, когда $r = 0$ или $r = \tilde{r} = r' = 2$ и $\hat{D} \neq 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Eisenhart L. P., Veblen D. The Riemannian geometry and its generalization // Proc. Nat. Acad. Sc. 1922. Vol. 8. P. 19 – 23.
2. Golab S. Über die Metrisierbarkeit der Affinzusammenhängenden Räume // Tensor. 1959. Vol. 9. P. 1 – 7.
3. Галаев С. В., Гохман А. В. К геометрии динамики со связями одного класса точек переменной массы // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 18 – 22.
4. Wagner B. V. Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173 – 225.
5. Галаев С. В., Гохман А. В. О метризуемости аффинной связности в неголономном многообразии X_3^2 // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 34 – 37.

УДК 517.984

О. Б. Горбунов

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА*

Рассмотрим краевую задачу $L = L(p_1(x), p_2(x), v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ вида

$$y''(x) + \left(p^2 + p \left(\frac{v_1}{x - \gamma} + p_1(x) \right) + \frac{v_2}{(x - \gamma)^2} + p_2(x) \right) y(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} U(y) &:= y'(0) - (\alpha_1 p + \alpha_2) y(0) = 0, \\ V(y) &:= y'(\pi) + (\beta_1 p + \beta_2) y(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma \in (0, \pi)$, $p_k(x)$ – комплекснозначные функции, v_k – комплексные числа. Пусть для определенности $\operatorname{Re} v > 0$, $2v \notin \mathbb{N}$, где $v^2 = 1/4 - v_2$, и пусть $|x - \gamma|^{\min\{0, 1 - 2\operatorname{Re} v\}} |p_k(x)| \in L(0, \pi)$, $p_1(x) \in W_1^1(0, \pi)$, $k = 1, 2$, $|\operatorname{Im} v_1| < 1$.

Пучки дифференциальных операторов без особенности изучены достаточно полно [1 – 3]. В данной статье производится постановка обратной спектральной задачи по функции Вейля и доказывается теорема единственности решения поставленной задачи. Эти результаты являются обобщением [3].

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376), РФФИ (проект 04-01-00007), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

При изучении дифференциальных операторов с неинтегрируемыми особенностями важную роль играет исследование фундаментальной системы решений (ФСР) для склейки в особой точке. В [4] построена и изучена ФСР $\{S_1(x, \rho), S_2(x, \rho)\}$ со степенной особенностью в точке:

$$S_j(x, \rho) = c_j^0(x - \gamma)^{\mu_j}, \mu_j = 0.5 + (-1)^j v, j = 1, 2. \text{ При } |(x - \gamma)\rho| \geq 1, S_j^{(m)}(x, \rho) = \\ = \beta_j^0 \rho^{-\mu_j} e^{2i\pi\mu_j k_1} \left(\Gamma(\mu_j - iv_1/2) e^{\pi v_1(k_1+k_2)/2} (i\rho)^m (2(x - \gamma)\rho)^{iv_1/2} e^{i\rho(x-\gamma)+iq_1(x)} [1]_\gamma + \right. \\ \left. + \Gamma(\mu_j + iv_1/2) e^{i\pi\mu_j k_2} e^{-\pi v_1(k_1+k_2)/2} (-i\rho)^m (2(x - \gamma)\rho)^{-iv_1/2} e^{-i\rho(x-\gamma)-iq_1(x)} [1]_\gamma \right),$$

где $[1]_\gamma = (1 + O(|(x - \gamma)\rho|^{-1}))$, $|\rho| \rightarrow \infty$ равномерно по x , $q_1(x) = \int_y^x p_1(t) dt / 2$,

$$l_1 = \begin{cases} 1, & \rho \in \Pi_1, x < \gamma, \\ -1, & \rho \in \Pi_{-1}, x > \gamma, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad l_2 = \begin{cases} -1, & (x - \gamma)\rho \in \Pi_0, \\ 1, & (x - \gamma)\rho \in \Pi_{-1} \cup \Pi_1, \end{cases} \quad k_1 = \begin{cases} 0, & x > \gamma, \\ 1, & x < \gamma, \end{cases}$$

$$\Pi_k = \{z : \arg z \in (\pi(5k - 3)/(6 - 2k), \pi(5k + 3)/(6 + 2k))\}, k = 0, \pm 1,$$

$$k_2 = \{j | \rho \in \Pi_j\}, \quad \beta_1^0 \beta_2^0 = -\frac{e^{\pi v_1/2}}{2\pi i \sin 2\pi v} \cos\left(\pi v - \frac{i\pi v_1}{2}\right) \cos\left(\pi v + \frac{i\pi v_1}{2}\right).$$

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\varphi_1(x, \rho) = S_1(x, \rho)S'_2(0, \rho) - S'_1(0, \rho)S_2(x, \rho),$$

$$\varphi_2(x, \rho) = S_1(0, \rho)S_2(x, \rho) - S_1(x, \rho)S_2(0, \rho),$$

$$\Phi_2(x, \rho) = \varphi_1(x, \rho) + (\alpha_1 \rho + \alpha_2) \varphi_2(x, \rho),$$

$$\Delta(\rho) = V(\Phi_2),$$

$$\Phi_1(x, \rho) = (\Delta(\rho))^{-1} (S_1(x, \rho)S'_2(\pi, \rho) - S'_1(\pi, \rho)S_2(x, \rho) - \\ - (\beta_1 \rho + \beta_2)(S_1(\pi, \rho)S_2(x, \rho) - S_1(x, \rho)S_2(\pi, \rho))),$$

$$M(\rho) = \Phi_1(0, \rho).$$

Из построения следует:

$$\varphi_1(0, \rho) = 1, \varphi'_1(0, \rho) = 0, \quad \varphi_2(0, \rho) = 0, \varphi'_2(0, \rho) = 1,$$

$$U(\Phi_2) = 0, \quad U(\Phi_1) = 1, \quad V(\Phi_1) = 0,$$

$$\Phi_1(x, \rho) = \varphi_2(x, \rho) + M(\rho)\Phi_2(x, \rho). \quad (3)$$

Функция $\Delta(\rho)$ называется характеристической функцией задачи L , ее нули совпадают с собственными значениями L , $M(\rho)$ называется функцией Вейля задачи L .

Обратная задача. По функции Вейля $M(\rho)$ найти коэффициенты пучка (1), (2).

Условимся, что наряду с задачей L будем рассматривать задачу $\tilde{L} = L(\tilde{p}_1(x), \tilde{p}_2(x), \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$. Если некоторый символ a обозначает объект, относящийся к задаче L , то \tilde{a} – аналогичный объект задачи \tilde{L} .

ТЕОРЕМА 1. Если $M(\rho) \equiv \tilde{M}(\rho)$, то $L = \tilde{L}$.

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие функции:
 $P_j(x, \rho) = \Phi_2(x, \rho)\tilde{\Phi}_1^{(j-1)}(x, \rho) - \tilde{\Phi}_2^{(j-1)}(x, \rho)\Phi_1(x, \rho)$, $j=1,2$. Воспользуемся (3), будем иметь $P_j(x, \rho) = \Phi_2(x, \rho)\tilde{\Phi}_2^{(j-1)}(x, \rho) - \tilde{\Phi}_2^{(j-1)}(x, \rho)\phi_2(x, \rho) + (\tilde{M}(\rho) - M(\rho))\tilde{\Phi}_2^{(j-1)}(x, \rho)\Phi_2(x, \rho)$, следовательно, в условиях теоремы $P_j(x, \rho)$ будут целыми по ρ при фиксированном $x \neq \gamma$.

Далее, используя асимптотику специальной ФСР, можно получить
 $M(\rho) = -\frac{1}{i\rho(1 \pm i\alpha_1)} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$, $|\arg \rho| \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon)$, (знак «+» при $\operatorname{Im} \rho > 0$), значит, $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1$. Последнее равенство и асимптотика решений (1) позволяют получить

$$P_1(x, \rho) = O(\rho^{-1}),$$

учитывая аналитические свойства $P_1(x, \rho)$, заключаем, что $P_1(x, \rho) \equiv 0$, то есть $\Phi_1(x, \rho)\tilde{\Phi}_2(x, \rho) = \tilde{\Phi}_1(x, \rho)\Phi_2(x, \rho)$ или $\frac{\Phi_1(x, \rho)}{\tilde{\Phi}_1(x, \rho)} = \frac{\Phi_2(x, \rho)}{\tilde{\Phi}_2(x, \rho)}$. Но при $\arg \rho \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon)$

$$\frac{\Phi_1(x, \rho)}{\tilde{\Phi}_1(x, \rho)} = \exp(iq_1(x) - i\tilde{q}_1(x))[1]_\gamma, \quad \frac{\Phi_2(x, \rho)}{\tilde{\Phi}_2(x, \rho)} = \exp(i\tilde{q}_1(x) - iq_1(x))[1]_\gamma,$$

следовательно, $q_1(x) = \tilde{q}_1(x)$. Теперь можно получить следующую асимптотику:

$$P_2(x, \rho) = 1 + O(\rho^{-1}).$$

Значит, $P_2(x, \rho) \equiv 1$, тогда $\Phi_2(x, \rho)\tilde{\Phi}'_1(x, \rho) - \tilde{\Phi}'_2(x, \rho)\Phi_1(x, \rho) = 1$. Отсюда выводим

$$\tilde{\Phi}'_2 = \tilde{\Phi}_2(\Phi_2\tilde{\Phi}'_1 - \tilde{\Phi}'_2\Phi_1) = \tilde{\Phi}_2\Phi_2\tilde{\Phi}'_1 - \tilde{\Phi}'_2(\tilde{\Phi}_2\Phi_1) = \tilde{\Phi}_2\Phi_2\tilde{\Phi}'_1 - \tilde{\Phi}'_2(\Phi_2\tilde{\Phi}_1) = \Phi_2.$$

Аналогично $\tilde{\Phi}'_1 = \Phi'_1$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11 – 14.
2. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190 – 229.
3. Юрко В. А. О восстановлении пучков дифференциальных операторов на полуоси // Мат. заметки. 2000. Т. 67, вып. 2, С. 316 – 319.
4. Горбунов О. Б. О пучках дифференциальных операторов с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 27 – 29.

Л. Л. Громова

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В статье изучается функционал

$$M_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\phi})|^{\lambda_1} |f'(re^{i\phi})|^{\lambda_2} d\phi, \quad (1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $z = re^{i\phi}$, $0 < r < 1$, а $f(z)$ – аналитическая функция в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. При дополнительных условиях на $f(z)$ получены точные оценки сверху для $M_f(r)$ при некоторых λ_1 и λ_2 .

К вопросу об оценке интегральных средних (1) обращались многие авторы. Подробный список литературы приведен, например, в статье [1].

Метод, который используется в данной статье, основан на следующих предложениях. Для классов аналитических функций, допускающих представление интегралом Стильбеса, вводится всюду плотный подкласс в Δ , позволяющий получать оценки с помощью известных неравенств. Затем, используя свойства функций – перестановок [2], удается завершить вывод точной оценки сверху для (1) в подклассе и, следовательно, во всем классе для $f(z)$. Более подробно эта методика изложена в [3].

Перейдем к формулировке результатов. Обозначим через S класс регулярных и однолистных в Δ функций $f(z), f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Подкласс функций из S , отображающих Δ на выпуклую область, обозначим через K , а подкласс функций из S , отображающих Δ на область, звездообразную относительно точки $w = 0$, – через S^* .

ТЕОРЕМА 1. Если $f(z) \in K$, то

$$M_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(z)|^p d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K'_1(z)|^p d\phi,$$

где $z = re^{i\phi}$, $0 < r < 1$, $p > 0$, $K_1(z) = \frac{ze^{i\gamma}}{1 - ze^{i\gamma}}$, $\gamma \in [-\pi; \pi]$.

Доказательство. Если $f(z) \in K$, то $zf'(z) \in S^*$. Используя интегральное представление для функций класса S^* , имеем $f'(z) = \exp\{-2 \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - ze^{i\theta}) d\mu(\theta)\}$, где $\mu(\theta)$ – неубывающая для $\theta \in [-\pi, \pi]$ с нормировкой $\mu(\pi) - \mu(-\pi) = 1$. Считая $\mu(\theta)$ ступенчатой функцией, переходим в подкласс $\{f_n(z)\}$, где

$$f'_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{|1 - ze^{i\theta_k}|^{2\alpha_k}}, \quad \alpha_k \geq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \theta_k \in [-\pi, \pi], \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1.$$

Применяя неравенство Гёльдера [2] и воспользовавшись периодичностью подынтегральной функции, получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$ – аналитическая функция в Δ и $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, $z \in \Delta$. Тогда

$$M_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(z)|^{\lambda_1} |f''(z)|^{\lambda_2} d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1+ze^{i\gamma}}{1-ze^{i\gamma}} \right|^{\lambda_1} \frac{2}{(1-ze^{i\gamma})^2}^{\lambda_2} d\phi,$$

где $z = re^{i\phi}$, $0 < r < 1$, $\lambda_1 \geq 1$, $\lambda_2 \geq 1$, $\gamma \in [-\pi, \pi]$.

Доказательство. Заметим, что в этом случае $f(z)$ является почти выпуклой в Δ . Для функций с положительной вещественной частью имеем представление $f'(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z} d\mu(\theta)$, где снова $\mu(\theta)$ определена как в

теореме 1. Считая $\mu(\theta)$ ступенчатой, переходим в подкласс функций вида

$$f'_n(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1+ze^{i\theta_k}}{1-ze^{i\theta_k}} \quad (\text{см. теорему 1.}). \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} M_{f_n}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'_n(z)|^{\lambda_1} |f''_n(z)|^{\lambda_2} d\phi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \left| \frac{1+ze^{i\theta_k}}{1-ze^{i\theta_k}} \right|^{\lambda_1} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{2e^{i\theta_j}}{(1-ze^{i\theta_j})^2} \right|^{\lambda_2} \right)^{\lambda_1} d\phi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} \alpha_k^{\lambda_1} \left| \frac{1+ze^{i\theta_k}}{1-ze^{i\theta_k}} \right|^{\lambda_1} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{2e^{i\theta_j}}{(1-ze^{i\theta_j})^2} \right|^{\lambda_2} d\phi \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \right\}^{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Мы применили неравенство Минковского [2], так как $\lambda_1 \geq 1$. Легко видеть, что в первом сомножителе последнего интеграла, не нарушая общности, можно положить $\theta_k = 0$. Иначе сделаем замену $\phi = u - \theta_k$ и используем периодичность подынтегральной функции. Тогда

$$\begin{aligned}
M_{f_n}(r) &\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{|1+z|^{\lambda_1}}{|1-z|^{\lambda_2}} \frac{2e^{i\theta_j}}{(1-ze^{i\theta_j})^2} \right|^{\lambda_2} d\phi \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \right\}^{\lambda_1} \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{|1+z|^{\lambda_1}}{|1-z|^{\lambda_2}} \frac{2e^{i\theta_j}}{(1-ze^{i\theta_j})^2} \right|^{\lambda_2} d\phi \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \right\}^{\lambda_1}.
\end{aligned}$$

Еще раз применили неравенство Минковского. Заметим, что функции $\phi_1(\phi) = \frac{|1+z|}{|1-z|}$ и $\psi_1(\phi) = \frac{1}{|1-z|^2}$ четны, периодичны с периодом 2π , положительны и не убывают на $[-\pi, 0]$. Применяя свойство функций перестановок. Тогда верхняя граница $M_{f_n}(r)$ достигается при $\theta_j = 0$. Отсюда следует утверждение теоремы.

В заключение рассмотрим класс A аналитических в Δ функций, определяемых формулой

$$f_v(r) = z \exp(-2v \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - e^{i\theta} z) d\mu_1(\theta)) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + e^{i\theta} z}{1 - e^{i\theta} z} d\mu_2(\theta). \quad (2)$$

Здесь $v > 0$, $z = re^{i\phi}$, $0 < r < 1$, $\mu_1(\theta)$, $\mu_2(\theta)$ определены как в теореме 1.

Очевидно, при $v=1$ первый сомножитель является звездообразной функцией, а второй принадлежит известному классу Каратеодори. Заметим, что функции из класса A не обязаны быть однолистными в Δ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f_v(z) \in A$. Тогда

$$M_{f_v}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_v(z)|^\lambda d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{ze^{i\gamma}}{(1-ze^{i\gamma})^{2v}} \right|^\lambda \left| \frac{1+ze^{i\gamma}}{1-ze^{i\gamma}} \right|^\lambda d\phi$$

при $\lambda > 0$ и $v \geq \frac{1}{\lambda} - 1$, $\gamma \in [-\pi, \pi]$.

Доказательство. Считая $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$ ступенчатыми, получаем

$$f_{v,n,m}(z) = z \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1-ze^{i\theta_k})^{2\alpha_k v}} \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{1+ze^{i\theta_j}}{1-ze^{i\theta_j}},$$

$$\alpha_k \geq 0, k = \overline{1, n}, \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, \beta_j \geq 0, j = \overline{1, m}, \sum_{j=1}^m \beta_j = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{v,n,m}(z)|^\lambda d\varphi = \\
 & = \frac{r^\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1 - ze^{i\theta_k})^{2v}} \right|^{\alpha_k \lambda} \left| \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{1 + ze^{i\theta_j}}{1 - ze^{i\theta_j}} \right|^\lambda d\varphi = \\
 & = \frac{r^\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^n \left\{ \left| \frac{1}{(1 - ze^{i\theta_k})^{2\lambda v}} \right| \left| \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{1 + ze^{i\theta_j}}{1 - ze^{i\theta_j}} \right|^\lambda \right\}^{\alpha_k} d\varphi \leq \\
 & \leq \frac{r^\lambda}{2\pi} \prod_{k=1}^n \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{(1 - ze^{i\theta_k})^{2\lambda v}} \right| \left| \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{1 + ze^{i\theta_j}}{1 - ze^{i\theta_j}} \right|^\lambda d\varphi \right\}^{\alpha_k}.
 \end{aligned}$$

Мы применили неравенство Гёльдера. Производя замену $\tau = \varphi + \theta_k$ и воспользовавшись периодичностью подынтегральной функции, имеем

$$M_{f_{v,n,m}}(r) \leq \frac{r^\lambda}{2\pi} \prod_{k=1}^n \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{(1 - z)^{2\lambda v}} \right| \left| \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{1 + ze^{i\theta'_j}}{1 - ze^{i\theta'_j}} \right|^\lambda d\varphi \right\}^{\alpha_k}, \text{ где } \theta'_j = \theta_j - \theta_k.$$

Дальнейшие рассуждения используют известный результат [4], в котором надо положить $\lambda v = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda = \lambda_2$ и наложить условия $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 1 - 2\lambda_2$. Отсюда видим, что $\lambda v \geq 1 - \lambda$ и, так как $\lambda > 0$, то $v \geq \frac{1}{\lambda} - 1$. Тогда верхняя грань интеграла имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{z}{(1 - z)^{2v}} \right|^\lambda \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^\lambda d\varphi,$$

что завершает доказательство теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Gromova L. L., Vasil'ev A. On integral means of starlike functions // Proc. Indian Acad. Sci. Ser. Math. Sci. 2002. Vol. 112, № 3. P. 1 – 8.
2. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
3. Вардамова Е. В., Громова Л. Л. Об интегральных средних для звездообразных функций порядка α // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 17 – 20.
4. Громова Л. Л., Зыбина Т. Г. Об интегральных средних для звездообразных функций // Учен. зап. Сарат. гос. пед. ин-та. 1968. Вып. 46. С. 6 – 12.

Е. В. Гудошникова

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ ОПЕРАТОРОВ*

Рассмотрим следующую конструкцию.

По линейным положительным операторам [1], которые определены на $[0, \infty)$ для $f : R \rightarrow R$ и являются обобщением ряда хорошо известных операторов, имеющим вид

$$l_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{u_{n,k}(x)}{v_n(x)} x^k,$$

где $u_{n,k}$ и v_n – функции, удовлетворяющие условиям:

$$1) u_{n,k}(x) \geq 0, v_n(x) > 0 \text{ для } x \geq 0 \text{ и } v_n(0) = 1;$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}(x) \cdot x^k = v_n(x);$$

$$3) \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}(x) \cdot (-x)^k = \frac{v_n(x)}{v_n(2x)};$$

$$4) \text{для } q_{n,k}(x) = \frac{u_{n,k}(x)}{v_n(x)} x^k \text{ выполняется соотношение}$$

$$q'_{n,k}(x) = \frac{k - nx}{w(x)} q_{n,k}(x),$$

где $w(x)$ – дважды дифференцируемая функция, не имеющая нулей на $(0, \infty)$,

для $f : R_r \rightarrow R$ строятся операторы

$$L_n(f; \bar{x}) = \sum_{\bar{k}=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2^r-1} (-1)^{\langle \bar{m}, \bar{k} \rangle} f(\bar{k}_{n,m}) \cdot p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m),$$

$$\text{где } p_{n,\bar{k}}(\bar{x}) = \prod_{i=1}^r \frac{u_{n,k_i}(|x_i|)}{z_n(x_i)} x_i^{k_i};$$

$$z_n(x) = v_n(|x|) + \frac{v_n(|x|)}{v_n(2|x|)};$$

$$m = m_1 + m_2 \cdot 2 + m_3 \cdot 2^2 + \dots + m_r \cdot 2^{r-1}, \quad m_k \in \{0;1\};$$

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_r);$$

$$\bar{k}_{n,m} = \left(\frac{k_1}{n} (-1)^{m_1}, \frac{k_2}{n} (-1)^{m_2}, \dots, \frac{k_r}{n} (-1)^{m_r} \right), \text{ где } k_j \in N_0, \quad n \in N;$$

$$\langle \bar{m}, \bar{k} \rangle = m_1 k_1 + \dots + m_r k_r.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №04-01-00060).

Если в операторах L_n в качестве исходных взять операторы Саса-Мирацьяна, то при $r=1$ получим операторы, введенные в рассмотрение Грофом [2]. Для произвольного r , для операторов, построенных также по операторам Саса-Мирацьяна, в работах [3 – 5] доказаны теоремы, указывающие порядок приближения операторами L_n непрерывных, дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций, а также доказывается теорема, являющаяся аналогом теоремы Вороновской [6].

В работе [6] приводятся аналогичные результаты для операторов L_n в общем виде.

Из этих теорем видно, что порядок приближения операторами L_n дифференцируемых функций по сути $n^{-1/2}$, дважды дифференцируемых – n^{-1} , и, как следует из теоремы типа Вороновской, порядок приближения для трижды и более раз дифференцируемых функций не улучшается. Таким образом, класс насыщения для рассматриваемых операторов – дважды дифференцируемые функции. Аналогичная ситуация имеет место и для исходных линейных положительных операторов.

Для p раз дифференцируемых функций рассмотрим операторы

$$\Lambda_{n,0}(f; \bar{x}) = \Lambda_{n,1}(f; \bar{x}) = L_n(f; \bar{x}),$$

и для $p \geq 2$

$$\Lambda_{n,p}(f; \bar{x}) = L_n(f; \bar{x}) - \sum_{k=2}^p \sum_{\alpha=k}^* \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} S_n^\alpha(\bar{x}) \Lambda_{n,p-k}(F_\alpha^k; \bar{x}),$$

где $S_n^\alpha(\bar{x}) = L_n(\prod_{i=1}^r (t_i - x_i)^{\alpha_i}; \bar{x})$, \sum^* берется по всем наборам целых не-

отрицательных чисел α_i , $i = 1, \dots, r$, таким, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k$,

$$F_\alpha^k = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}.$$

Если взять $r=1$, а вместо операторов L_n операторы Бернштейна, то получим конструкцию, которая при $p=3$ была указана самим Бернштейном, а для любого p построена и изучена В. С. Виденским [7].

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Если функция $f: R_r \rightarrow R$ p раз дифференцируема, то

$$|\Lambda_{n,p}(f; \bar{x}) - f(\bar{x})| \leq \frac{c(r, p)}{n^{p/2}} (1 + \prod_{i=1}^r |w(x_i)|^{\alpha_i/2}) \sum_{\alpha=p}^* \omega(F_\alpha^p; \bar{h}),$$

где $c(r, p)$ – константа, зависящая только от r и p ,

$$\omega(f, \bar{h}) = \sup_{\delta \in Q(\bar{h})} \sup_{x \in R_r} |f(\bar{x} + \bar{\delta}) - f(\bar{x})|, \quad Q(\bar{h}) = [0, h_1] \times [0, h_2] \times \cdots \times [0, h_r],$$

$$\bar{h} = \left(\sqrt{\frac{|w(x_1)|}{n}}, \sqrt{\frac{|w(x_2)|}{n}}, \dots, \sqrt{\frac{|w(x_r)|}{n}} \right).$$

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме.

Применяя формулу Тейлора, получаем неравенство

$$|\Lambda_{n,p}(J, \bar{x}) - f(\bar{x})| \leq \sum_{k=2}^p \sum_{\alpha=k}^* \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} |F_\alpha^k(\bar{x}) - \Lambda_{n,p-k}(F_u^k; \bar{x})| \cdot |S_n^\alpha(\bar{x})| +$$

$$+ \left| \sum_{\alpha=p}^* \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} L_n \left([F_u^p(\bar{\xi}) - F_u^p(\bar{x})] \prod_{i=1}^r (t_i - x_i)^{\alpha_i}; \bar{x} \right) \right| \quad (*)$$

где $S_n^\alpha(\bar{x}) = L_n \left(\prod_{i=1}^r (t_i - x_i)^{\alpha_i}; \bar{x} \right)$; $\sum_{i=1}^r \alpha_i = \alpha$; $\bar{\xi} = \bar{x} + \theta(\bar{t} - \bar{x})$; $\theta \in [0; 1]$.

Несложно показать, что $L_n(t^k; x) \rightarrow x^k$, и, находя порядок этого приближения, получаем оценку для выражения $|S_n^\alpha(\bar{x})|$. Аналогично, используя модуль непрерывности, получаем оценку для последнего слагаемого в (*). И после этого доказательство теоремы завершаем по индукции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коровкин П. П. Линейные положительные операторы и теория приближений. М., 1959.
2. Grof J. Függvényapproximáció az egész számegyensen, súlyozott hatványsorokkal // Mat. Lapok. 1977 – 1981. Vol. 29, № 1 – 3. P. 161 – 170.
3. Гудошникова Е. В. Приближение непрерывных функций многих переменных. Саратов, 2001. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 03.10.2001, № 2083-В2001.
4. Гудошникова Е. В. Апроксимативные свойства многомерных аналогов операторов Саса-Миракъяна. Саратов, 2001. 24 с. Деп. в ВИНИТИ 20.11.2001, № 2412-В2001.
5. Гудошникова Е. В. Приближение дифференцируемых функций многих переменных комбинациями многомерных аналогов операторов Саса-Миракъяна. Саратов, 2002. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 25.03.02, № 530-В2002.
6. Гудошникова Е. В. Конструкции линейных операторов для функций многих переменных // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 40 – 42.
7. Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Л., 1990.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА*

1. Пусть D – приближаемый выпуклый компакт из конечномерного пространства R^P , $n(\cdot)$ – некоторая норма на R^P ,

$$\rho(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} n(a - b),$$

$h(A, B) = \max \{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$ – уклонение множества A от множества B и расстояние Хаусдорфа между A и B соответственно,

$$Bn(x, r) = \{y \in R^P : n(x - y) \leq r\} –$$

шар с центром в точке x и радиусом r .

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении заданного выпуклого компакта D шаром фиксированного радиуса r в метрике Хаусдорфа:

$$\phi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in R^P}. \quad (1)$$

Основная цель статьи – установить связь задачи (1) с задачами о внешней, внутренней и равномерной оценке компакта D шаром нормы $n(\cdot)$:

$$R(x) \equiv \max_{y \in D} n(x - y) \rightarrow \min_{x \in R^P}, \quad (2)$$

$$\rho_\Omega(x) \equiv \min_{y \in \Omega} n(x - y) \rightarrow \max_{x \in D}, \quad \Omega = \overline{R^P \setminus D}, \quad (3)$$

$$\phi(x, r) \rightarrow \min_{x \in R^P, r \geq 0}. \quad (4)$$

Далее будем пользоваться обозначениями: $P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x)$,

$$R^* = \min_{x \in R^P} R(x), \quad P^* = \min_{x \in R^P} P(x), \quad f(r) = \min_{x \in R^P} \phi(x, r),$$

$$C_R = \operatorname{Arg} \min_{x \in R^P} R(x), \quad C_P = \operatorname{Arg} \min_{x \in R^P} P(x), \quad C(r) = \operatorname{Arg} \min_{x \in R^P} \phi(x, r),$$

$$R^\pm = \max_{x \in C_P} (\min) R(x), \quad P^\pm = \max_{x \in C_R} (\min) P(x),$$

$$r_R^\pm = \frac{R^* - P^\mp}{2}, \quad r_P^\pm = \frac{R^\pm - P^*}{2}.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

2. Ниже устанавливается, что задачи (2) – (4) являются частными случаями задачи (1) в зависимости от значений параметра r на положительной полуоси, разделенной точками

$$0 < r_R^- \leq r_R^+ \leq r_P^- \leq r_P^+ < \infty.$$

В [1] доказано, что при всех $x \in R^P$ и $r \geq 0$ выполняется

$$\phi(x, r) = \max \{R(x) - r, r + P(x)\}. \quad (5)$$

Известно [2], что $R(x)$ и $P(x)$ являются выпуклыми конечными на R^P функциями. Поэтому из (5) следует, что $\phi(x, r)$ является выпуклой по совокупности переменных (x, y) на $R^P \times R$. В соответствии с субдифференциальным исчислением для выпуклых функций [3] субдифференциал функции $\phi(x, r)$ по x выражается через субдифференциалы функций $R(x)$ и $P(x)$ следующим образом:

$$\partial_x \phi(x, r) = \begin{cases} \partial R(x), & \text{если } R(x) - r > P(x) + r, \\ \partial P(x), & \text{если } R(x) - r < P(x) + r, \\ co\{\partial R(x), \partial P(x)\}, & \text{если } R(x) - r = P(x) + r. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $co A$ – выпуклая оболочка множества A .

ТЕОРЕМА. Имеет место формула

$$C(r) = \begin{cases} C_R \cap \{x \in R^P : R^* - r \geq P(x) + r\}, & \text{если } r \in [0, r_R^+], \\ C_P \cap \{x \in R^P : R(x) - r \leq R^* + r\}, & \text{если } r \in [r_P^-, \infty), \end{cases} \quad (7)$$

$$f(r) = \begin{cases} R^* - r, & \text{если } r \in [0, r_R^+], \\ P^* + r, & \text{если } r \in [r_P^-, \infty). \end{cases} \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $r \in [0, r_R^+]$ и, следовательно, $R^* - r \geq \min_{x \in C_R} P(x) + r$. Поэтому существует $x \in C_R$, для которого

$R^* - r \geq P(x) + r$, то есть множество

$$\tilde{C}(r) = C_R \cap \{x \in R^P : R^* - r \geq P(x) + r\} \neq \emptyset.$$

Возьмем произвольный элемент $x \in \tilde{C}(r)$. С одной стороны, то, что $x \in C_R$, то есть x является точкой минимума выпуклой функции $R(x)$ на R^P , в соответствии с известным фактом выпуклого анализа [3, с. 142] означает, что выполняется включение $0_P \in \partial R(x)$. (9)

С другой стороны, имеем

$$R(x) - r = R^* - r \geq P(x) + r. \quad (10)$$

Из (9), (10) и (6) получаем $0_P \in \partial_x \varphi(x, r)$, то есть точка x является точкой минимума выпуклой по x функции $\varphi(x, r) : x \in C(r)$ [3, с. 142]. Тем самым мы показали, что

$$\tilde{C}(r) \subset C(r). \quad (11)$$

Из (10), (11) и (5) следует

$$f(r) = R^* - r. \quad (12)$$

то есть формула (8) в рассматриваемом случае.

Теперь докажем обратное к (11) включение. Допустим противное, и тогда найдется точка $x \in C(r)$ и $x \notin \tilde{C}(r)$. Это означает, что либо $x \notin C_R$ и поэтому

$$\varphi(x, r) \geq R(x) - r > R^* - r,$$

либо $x \in C_R$, но $R^* - r < P(x) + r$, и, следовательно,

$$\varphi(x, r) \geq P(x) + r > R^* - r.$$

В обоих случаях ввиду (12) получаем противоречие с тем, что $x \in C(r)$. Таким образом, в рассматриваемом случае справедливость формул (7), (8) доказана. Случай $r \in [r_P^-, \infty)$ рассматривается аналогично. \square

Непосредственно из доказанной теоремы получаем

Следствие 1.

$$C(r) = \begin{cases} C_R, & r \in [0, r_R^-], \\ C_P, & r \in [r_P^+, \infty), \end{cases}$$

то есть задача (1) становится эквивалентной задаче (2) или задаче (3) при соответствующих значениях r .

Нетрудно доказать, что функция $f(r)$ является выпуклой на R_+ , поэтому формула (8) влечет

Следствие 2.

$$\operatorname{Arg} \min_{r \in R_+} f(r) \equiv [r_-^*, r_+^*] \subset [r_R^+, r_P^+].$$

Поэтому множество центров шаров наилучшего приближения в задаче (4) выражает формула

$$C = \bigcup_{r \in [r_-^*, r_+^*]} C(r).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Dudov S. I., Zlatorunska I. V. Best approximation of a compact convex set by a ball in an arbitrary norm // Advances in Math. Research. 2003. Vol. 2. P. 81 – 114.
2. Дудов С. И., Златорунская И. В. Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. № 10. С. 13 – 38.
3. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

А. С. Дудова

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА МНОГОГРАННИКОМ

1. Пусть D – выпуклый телесный компакт из R^P с диаметром d содержит точку x_0 вместе с шаром радиуса $\rho : B(x_0, \rho) \subset D$ и $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число. Обозначим через $\{l_i\}, i \in I_\varepsilon$, где $\|l_i\| = 1$, – ε -сеть единичной сферы, то есть

$$\min_{i \in I_\varepsilon} \|l - l_i\| \leq \varepsilon, \quad \forall l \in R^P : \|l\| = 1,$$

и $\{y_i\}, i \in I_\varepsilon$, – множество точек, получаемых как пересечение лучей $\{x_0 + \alpha l_i : \alpha > 0\}, i \in I_\varepsilon$ с границей компакта D .

Многогранник D_ε^- , являющийся выпуклой оболочкой точек $\{y_i\}, i \in I_\varepsilon$, содержится в компакте D и рассматривается как его внутренняя аппроксимация. Многогранник D_ε^+ , образованный опорными к D гиперплоскостями в точках $\{y_i\}, i \in I_\varepsilon$, является внешней аппроксимацией к D . Цель статьи – дать оценку погрешности аппроксимации компакта D многогранниками D_ε^- и D_ε^+ . Отметим, что другой способ аппроксимации рассматривался в [1], где ε -сеть $\{l_i\}, i \in I_\varepsilon$, использовалась в качестве множества нормалей опорных к D гиперплоскостей, которые порождали аппроксимации D многогранником.

2. Нетрудно доказать, что справедлива

ЛЕММА 1. Если точка $y_0 \in D$, то $co\{y_0, B(x_0, \rho)\} \subset D$. Причем, если некоторая точка $y \in R^P$ удовлетворяет неравенству

$$\|y - x_0 - \beta(y_0 - x_0)\| < (1 - \beta)\rho$$

при некотором значении $\beta \in [0, 1]$, то $y \in \text{int } D$.

Здесь $co A, \text{int } A$ – соответственно выпуклая оболочка и внутренность множества A .

ЛЕММА 2. Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{\rho}{d - \rho})$, а x и y – граничные точки компакта D такие, что

$$\left\| \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} - \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right\| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Тогда выполняется неравенство

$$\|x - y\| \leq \varepsilon(d - \rho) \left(1 + \frac{d - \rho}{\rho - \varepsilon(d - \rho)} \right). \quad (2)$$

Доказательство. 1. Рассмотрим случай, когда $\|y - x_0\| < \|x - x_0\|$.

Из (1) имеем

$$\left\| y - x_0 - \frac{\|y - x_0\|}{\|x - x_0\|}(x - x_0) \right\| \leq \|y - x_0\|\varepsilon. \quad (3)$$

Поскольку точка y является для D граничной, то из леммы 1 следует

$$\|y - x_0 - \beta(x - x_0)\| \geq (1 - \beta)\rho, \quad \forall \beta \in [0, 1]. \quad (4)$$

Тогда, взяв в качестве $\beta = \frac{\|y - x_0\|}{\|x - x_0\|}$, из (3), (4) получаем неравенство $\varepsilon\|y - x_0\| \geq (1 - \frac{\|y - x_0\|}{\|x - x_0\|})\rho$, простое преобразование которого приводит к

$$\|y - x_0\| \geq \rho\|x - x_0\|(\rho + \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1} \equiv \alpha^+. \quad (5)$$

2. Пусть теперь $\|y - x_0\| > \|x - x_0\|$. Аналогичное применение леммы 1 дает неравенство $\|x - x_0\| \geq \rho\|y - x_0\|(\rho + \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1}$, откуда следует

$$\|y - x_0\| \leq \rho\|x - x_0\|(\rho - \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1} \equiv \alpha^-. \quad (6)$$

В рассмотренных случаях из (5), (6) вытекает, что $y - x_0 \in [\alpha^+(y - x_0)\|y - x_0\|, \alpha^-(y - x_0)\|y - x_0\|]$ и поэтому

$$\|x - y\| = \|x - x_0 - (y - x_0)\| \leq \max \begin{cases} \|x - x_0 - \alpha^+(y - x_0)\|y - x_0\|^{-1}\|, \\ \|x - x_0 - \alpha^-(y - x_0)\|y - x_0\|^{-1}\|. \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая, что

$$\|x - x_0 - \alpha^\pm(y - x_0)\|y - x_0\|^{-1} = \varepsilon\|x - x_0\|(1 + \|x - x_0\|(\rho \pm \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1}),$$

из (7) получаем

$$\|x - y\| \leq \varepsilon\|x - x_0\|(1 + \|x - x_0\|(\rho - \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1}). \quad (8)$$

А поскольку $\|x - x_0\| \in [\rho, d - \rho]$, то из (8) следует (2). \square

3. Обозначим через $h(A, B)$ расстояние Хаусдорфа между множествами A и B из R^p . Очевидным следствием леммы 2 является неравенство

$$h(D, D_\varepsilon^-) \leq \varepsilon(d - \rho)(1 + (d - \rho)(\rho - \varepsilon(d - \rho))^{-1}), \quad \varepsilon \in (0, \rho(d - \rho)^{-1}). \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что точное значение диаметра d в правой части (9) можно заменить на его вычисляемую оценку сверху:

$$d_\varepsilon = 2\rho R_\varepsilon (\rho - \varepsilon R_\varepsilon)^{-1},$$

где $R_\varepsilon = \max_{i \in I_\varepsilon} \|y_i - x_0\|$, следующую из неравенства (6), полученного в процессе доказательства леммы 2. Ясно также, что ρ можно заменить на вычисляемую оценку снизу

$$\rho_\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \min_{i \in I_\varepsilon} \|y_i - x_0\|^2}.$$

Легко видеть, что d_ε является оценкой сверху и для диаметра многоугранника D_ε^+ . А поскольку $h(D, D_\varepsilon^+) \leq h(D_\varepsilon^-, D_\varepsilon^+)$ и D_ε^- является одновременно внутренней аппроксимацией для D_ε^+ , то приходим в итоге к выводу, что справедлива

ТЕОРЕМА. При $\varepsilon \in (0, \rho_\varepsilon(d_\varepsilon - \rho_\varepsilon)^{-1})$ справедлива следующая оценка погрешности аппроксимаций:

$$h(D, D_\varepsilon^\pm) \leq \varepsilon(d_\varepsilon - \rho_\varepsilon)(1 + (d_\varepsilon - \rho_\varepsilon)(\rho_\varepsilon - \varepsilon(d_\varepsilon - \rho_\varepsilon))^{-1}).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., 2004.

УДК 517.95

М. Ю. Игнатьев

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ НА ПОЛУОСИ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ*

Рассмотрим смешанную задачу

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = a, \quad u_{xx}(0, t) = b, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = q(x), \quad (3)$$

где a, b – вещественные константы. Известно, что задача (1) – (3) имеет бесконечно много интегралов движения и высших симметрий [1, 2]. Важный частный случай $a = b = 0$ подробно изучен в работах [3, 4], где построена процедура интегрирования такой задачи с помощью некоторой модификации метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Случай ненулевых a, b изучался в [2], где построены и исследованы конечнозонные, солитонные и некоторые другие частные решения уравнения КдФ, удовлетворяющие

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376) и РFFИ (проект 04-01-00007).

творяющие краевым условиям (2). В настоящей статье предлагается способ применения к задаче (1) – (3) при ненулевых a, b схемы МОЗР, позволяющий свести решение данной задачи к решению ряда классических обратных задач Штурма – Лиувилля. Ключевым здесь является соотношение ("global relation" в терминах работы [5] и ряда других работ А. Фокаса), связывающее спектральные характеристики двух операторов Штурма – Лиувилля, построенных по начальным и соответственно граничным значениям решения задачи (1) – (3).

Пусть $u(x,t)$ – (вещественное) решение задачи (1) – (3) такое, что производные $u_t, u_{xt}, \partial^j u / \partial x^j, j = \overline{1,3}$, непрерывны в первой четверти $x \geq 0, t \geq 0$ и для каждой из функций $u_t, \partial^j u / \partial x^j, j = \overline{0,3}$, выполнено условие

$$\max_{t \in [t_1, t_2]} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |F(x,t)| dx < \infty \text{ для любых } t_1, t_2 : 0 \leq t_1 < t_2 < \infty \quad (4)$$

(мы априори предполагаем, что такое решение существует, подробное изучение вопросов существования решения задачи (1) – (3) выходит за рамки настоящей статьи).

Введем в рассмотрение оператор Штурма – Лиувилля

$$L(t)y := -y'' + u(x,t)y. \quad (5)$$

Пусть $e(x,t,\rho), \operatorname{Im} \rho \geq 0$ – решения Йоста для уравнения $L(t)y = \rho^2 y$. Тогда при выполнении указанных выше условий для функции $\Psi(x,t,\rho) := e(x,t,\rho) \exp(-4i\rho^3 t)$ справедливо соотношение

$$\Psi_t = u_x \Psi - (4\lambda + 2u)\Psi, \lambda = \rho^2. \quad (6)$$

На прямой $x = 0$ при выполнении краевых условий (2) получается уравнение

$$\Psi_{tt} = (p(t) - \mu)\Psi, \quad (7)$$

где $\mu = 16\lambda^3 - 4(3a^2 - b)\lambda$, $p(t) = (u_x^2 + u_{xt}) \Big|_{x=0} + 4a^3 - 2ab$ [2]. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $3a^2 - b = 4c^2, c > 0$.

Пусть $D = \{\lambda = \sigma + i\tau : \tau^2 < 3\sigma^2 - c^2, \sigma \in (-\infty, -c/\sqrt{3}) \setminus [-c, -c/\sqrt{3}]\}$.

Рассмотрим в D функцию $f(\lambda) := 16(\lambda^3 - c^2\lambda)$. Нетрудно видеть, что $f(\lambda)$ конформно отображает область D на плоскость с разрезом по $[0, +\infty)$, обозначим через $f^{-1}(\mu)$ функцию, осуществляющую обратное отображение.

Введем далее в рассмотрение оператор Штурма – Лиувилля

$$\ell z := -\ddot{z} + p(t)z. \quad (8)$$

Обозначим через $M(\mu)$ функцию Вейля оператора ℓ на полуоси $t \geq 0$ с краевым условием $z(0) = 0$, через $m(\lambda)$ – функцию Вейля оператора $L(0)$ с краевым условием $y(0) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Если функция $p(t)$ ограничена снизу при $t \geq 0$, то при $\mu \in C \setminus [0, +\infty)$ справедливо соотношение

$$M(\mu) = u_x(0, 0) - (4\lambda + 2a)m(\lambda), \text{ где } \lambda = f^{-1}(\mu).$$

Доказательство. Пусть $\mu \in C \setminus [0, +\infty)$, $\lambda = f^{-1}(\mu)$, $\rho^2 = \lambda$, $\operatorname{Im} \rho > 0$, $k^2 = \mu$, $\operatorname{Im} k > 0$. Определим $\psi(t, \mu) := \Psi(0, t, \rho)$. По построению $\psi(t, \mu)$ – решение уравнения $\ell\psi = \mu\psi$, голоморфное по μ в области $C \setminus [0, +\infty)$. Рассмотрим асимптотику при $\mu \rightarrow \infty$ функции $\exp(-ikt)\psi(t, \mu)$. Заметим, что в силу $\lambda \in D$ k может быть представлен в виде $k = -4\rho f_0(\lambda)$, где для функции $f_0(\lambda) := \sqrt{\lambda^2 - c^2}$ берется регулярная ветвь, выделяемая в $C \setminus [-c, c]$ условием $f_0(\lambda) \in (0, +\infty)$ при $\lambda \in (c, +\infty)$. Тогда из очевидного $f_0(\lambda) = \lambda + O(\lambda^{-1})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ получаем при $\mu \rightarrow \infty$ (и соответственно $\lambda \rightarrow \infty$) $k = -4\rho^3 + O(\rho^{-1})$. Теперь имеем $\exp(-ikt)\psi(t, \mu) = \exp(-ikt - 4i\rho^3 t)e(0, t, \rho) = 1 + o(1)$ при $\mu \rightarrow \infty$ и, применяя теорему 2(S) из [6], заключаем, что $\psi(t, \mu)$ пропорциональна решению Вейля. Тогда функция Вейля есть $M(\mu) = \psi(0, \mu)/\psi(0, \mu) = \Psi_t(0, 0, \rho)/\Psi(0, 0, \rho)$, откуда с учетом (6), (2) и равенства $e_x(0, 0, \rho)/e(0, 0, \rho) = m(\lambda)$ получаем требуемое. Теорема доказана.

С учетом установленного в теореме 1 "global relation" решение задачи (1) – (3) сводится к выполняемым последовательно: нахождению из начальных условий функций Вейля $m(\lambda), M(\mu)$, восстановлению по $M(\mu)$ оператора ℓ и восстановлению при каждом фиксированном $t > 0$ оператора $L(t)$ по следам решений Йоста $e(0, t, \rho)$, которые могут быть подсчитаны, например, из уравнения (7).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Adler V., Gürel B., Gürses M., Habibullin I. Boundary conditions for integrable equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. Vol.30. P. 3505 – 3513.
2. Адлер В. Э., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б. Краевая задача для уравнения КdФ на полуоси // ТМФ. 1997. Т. 110, вып. 1. С. 98 – 113.
3. Хабибуллин И. Т. Начально-краевая задача для уравнения КdФ на полуоси с однородными краевыми условиями // ТМФ. 2002. Т. 130, вып. 1. С. 31 – 53.
4. Habibullin I.T. Integrable initial-boundary value problems // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. 2002. Vol.9, № 2. P. 261 – 267.
5. Fokas A. S. Lax pairs and a new spectral method for linear and integrable nonlinear PDEs // Sel. Math. New. ser. 1998. Vol. 4. P. 31 – 68.
6. Marchenko V. A. Characterization of the Weyl solutions // Letters in Mathematical Physics. 1994. Vol. 31. P. 179 – 193.

И. А. Кляева

ГОМОЛОГИИ ТОЛЕРАНТНЫХ СФЕР

В статье произведены вычисления групп гомологий толерантных сфер.

Толерантные пространства [1] – это пары вида (X, τ) , где X – множество, а $\tau \in X \times X$ – отношение толерантности на нем, то есть рефлексивное и симметричное бинарное отношение. Отношение толерантности интерпретируется как наиболее общая математическая модель понятия схожести.

В гомотопической теории толерантных пространств роль единичного отрезка играют толерантные пространства (I_n, ι_n) , где $I_n = \left\{ \frac{k}{n} / k = 0, n \right\}$ – множество точек деления единичного отрезка $[0,1]$ на n частей, а толерантность ι_n задается условием $\frac{k}{n}, \frac{l}{n} \Leftrightarrow |k-l| \leq 1$.

Пусть m – натуральное число. Рассмотрим m -ю декартову степень толерантного отрезка $X = \left(\times I_n, \times \iota_n \right)^m$. Возьмем «границу» пространства X :

$$DX = \left\{ \left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_m}{n} \right) / \exists k_i \in \{0, n\} \right\},$$

отождествим все эти точки между собой, и класс этих отождествленных точек обозначим символом O .

Определение 1. Толерантной сферой будем называть множество $S_n^m = (X \setminus DX) \cup O$ с толерантностью τ , определенной следующим образом:

$$\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_m}{n} \right) \tau \left(\frac{k'_1}{n}, \dots, \frac{k'_m}{n} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \left| k_i - k'_i \right| \leq 1 \ (\forall i = 1, m), \\ \text{если } k_i = \overline{1, n-1}, k'_i = \overline{1, n-1}; \\ \exists k'_i \in \{0, 1, n-1, n\}, \\ \text{если } \exists k_i \in \{0, n\}, \text{ т.е. } \left(\frac{k_i}{n}, \dots, \frac{k_m}{n} \right) = O. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА. Пусть m – натуральное число и $n \geq 4$, тогда

$$H_q(S_n^m) = \begin{cases} \mathbb{Z}, q = 0, m, \\ 0, q \neq 0, q \neq m. \end{cases}$$

Пусть $n < 4$, тогда

$$H_q(S_m^n) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & q = 0, \\ 0, & q > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем эту теорему индукцией по m с использованием последовательности Майера – Виеториса [2] для пары подпространств $X_1 = \{x \in S_n^m / k_m > 2\}$, $X_2 = \{x \in S_n^m / k_m < n-2\}$ и $X_1 \cup X_2 = S_n^m$. Сначала покажем толерантную стягиваемость пространств X_1, X_2 [2].

Для пространства X_2 определим отображение $F : X_1 \times I_{n-2} \rightarrow X_2$ следующей формулой:

$$\begin{aligned} & (\forall i = \overline{1, m-1}) (\forall l_i = \overline{0, n}) (\forall l_m = \overline{0, n-2}) (\forall k = \overline{0, n-2}) \\ & F\left(\frac{l_1}{n}, \dots, \frac{l_{m-1}}{n}, \frac{l_m}{n}, \frac{k}{n-2}\right) = \left(\frac{l_1}{n}, \dots, \frac{l_{m-1}}{n}, \frac{\min\{l_m, n-2-k\}}{n}\right). \end{aligned}$$

Проверяется, что F – толерантное отображение, осуществляющее толерантную гомотопию между тождественным отображением 1_{X_2} и постоянным отображением пространства X_2 в точку O [2]. Это говорит о стягиваемости X_2 к точке O .

Аналогично показывается стягиваемость пространства X_1 к точке O .

Подобным образом доказывается толерантная гомотопическая эквивалентность пространств:

$$X_1 \cap X_2 \text{ и } A = \left\{ \left(\frac{l_1}{n}, \dots, \frac{l_{m-1}}{n}, \frac{2}{n} \right) / (\forall i = \overline{1, m-1}) l_i = \overline{0, n} \right\}.$$

Из гомотопической теории толерантных пространств [2] известен факт, что толерантно гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий. Таким образом, $H_q(X_1 \cap X_2) \cong H_q(A)$. А так как имеется очевидный толерантный гомеоморфизм $\phi : A \rightarrow S_n^{m-1}$, то

$$(\forall q \geq 0) \quad H_q(X_1 \cap X_2) \cong H_q(S_n^{m-1}). \quad (1)$$

Кроме того, для толерантно стягиваемых пространств $X_i (i = 1, 2)$ имеем

$$H_q(X_i) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & q = 0; \\ 0, & q > 0. \end{cases} \quad (2)$$

При $n > 4$ для пары X_1, X_2 выполняются аксиомы соединения и вырезания [2], что позволяет выписать точную гомологическую последовательность Майера – Виеториса:

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{j_*} \\ \xrightarrow{j_*} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} \dots$$

Для $m = 1$ и $k = 1$, согласно (1) и (2), перепишем последовательность Майера – Виеториса:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j_*} H_1(S_n^1) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{j_*} \dots \quad (3)$$

Рассмотрим S_n^1 . Это отрезок, концы которого отождествлены в одну точку O , тогда $X_1 = \left[\frac{2}{n}, 1 \right]$, $X_2 = \left[0, \frac{n-2}{n} \right]$. В этом случае $X_1 \cap X_2 = \left[\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n} \right] \cup O$. Множество $\left[\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n} \right]$ стягиваемо к одной точке B . Тогда $X_1 \cap X_2$ толерантно гомотопически эквивалентно множеству $\{B, O\}$, которое представляет собой S_n^0 . Так как $H_0(S_n^0) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, то (3) можно переписать как

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j_*} H_1(S_n^1) \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{j_*} \dots$$

где $i_*(m_1, m_2) = (m_1 + m_2, -(m_1 + m_2))$. Согласно точности в члене $H_1(S_n^1)$, $\text{Ker } \partial_* = \{0\}$ и ∂_* является изоморфизмом. Следовательно, по теореме об изоморфизме

$$H_1(S_n^1) \cong \text{Im } \partial_* = \text{Ker } i_*,$$

где $\text{Ker } i_* = \{(m, -m) \mid m \in \mathbf{Z}\} \cong \{m \mid m \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}$.

$$\text{Значит, } H_1(S_n^1) = \mathbf{Z}.$$

Для $m = 1$ и $q > 1$ запишем последовательность Майера – Виеториса:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j_*} H_q(S_n^1) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(S_n^0) \xrightarrow{i_*} 0 \rightarrow \dots \quad (4)$$

Точность последовательности (4) дает изоморфизм

$$\partial_*: H_q(S_n^1) \cong H_q(S_n^0) = 0 \quad (\forall q > 1).$$

Таким образом, имеется база индукции.

Пусть $m > 1$ и утверждение теоремы справедливо при $m = 1$. Докажем его для m .

При $q = 1$, используя предположение индукции, будем иметь

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j_*} H_1(S_n^m) \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} \dots,$$

где $\text{Ker } i_* = \{0\}$, следовательно, из точности последовательности $\text{Im } \partial_* = 0$ и $H_1(S_n^m) = 0$.

При $q > 1$ имеем

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j_*} H_q(S_n^m) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(S_n^{m-1}) \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{j_*} \dots$$

Откуда делаем вывод, что

$$H_q(S_n^m) \cong H_{q-1}(S_n^{m-1}).$$

При $n = 4$ эта теорема доказывается с помощью стандартного агебротопологического алгоритма.

При $n < 4$ пространства S_n^m толерантно стягиваются, поэтому их группы гомологий совпадают с гомологиями точки.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zeeman E.C. The topology of brain and visual perception // The topology of 3-Manifolds. N. Y., 1962. P. 240 – 256.
2. Небалуев С.И. Гомологическая теория толерантных пространств: Учеб. пособие. Саратов, 2004. 120 с.

УДК 519.984

А. В. Кожевникова

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА ВСЕМ ОТРЕЗКЕ $[0,1]^*$

В настоящей статье исследуется вопрос о разложении по собственным функциям дифференциального уравнения

$$y''' + \lambda y = 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y(1) = 0 \quad (2)$$

на всем отрезке $[0,1]$. Известно, что задача разложения по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) для нашего случая и даже для более общего была рассмотрена в [1]. Теорема равносходимости в [1] была получена на любом отрезке $[0, \alpha] \in [0,1]$. В данной статье подобный результат получен для сходимости на всем отрезке $[0,1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

1. Пусть $\lambda = -\rho^3$. Тогда, если ρ пробегает сектор S с вершиной в начале координат, определяемый неравенствами $-\frac{\pi}{3} \leq \arg \rho \leq \frac{\pi}{3}$, $0 \leq |\rho| \leq \infty$, то λ пробегает всю комплексную плоскость. В дальнейшем будем предполагать, что $\rho \in S$. Далее, через S_j ($j=1, 2$) обозначим части сектора S , для которых $\frac{\pi}{3}(j-2) \leq \arg \rho \leq \frac{\pi}{3}(j-1)$. Ясно, что $S = S_1 + S_2$.

Введем следующие обозначения:

$$\omega_k = e^{-\frac{(2k-1)\pi i}{3}}, k = \overline{1, 3}; \quad y_k = e^{\rho \omega_k x}, k = \overline{1, 3};$$

$$U_0(y) = y(0); \quad U_1(y) = y'(0); \quad U_3(y) = y(1);$$

$$\Delta(\rho) = \det \|U_j(y_k)\|, \quad j = \overline{0, 2}, k = \overline{1, 3};$$

T_1 – правильный треугольник с центром в начале координат и одной из вершин в точке $(1, 0)$ комплексной плоскости;

λ_k – собственные числа краевой задачи (1), (2);

ρ_k – числа, удовлетворяющие соотношению $\lambda_k = -\rho_k^3$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Для резольвенты $R_\lambda f$ краевой задачи (1), (2) имеет место представление

$$R_\lambda f = \frac{f(x)}{\rho^3} + \int_0^1 G_1(x, t, \rho) f'(t) dt,$$

где функция f дифференцируема на $[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ и

$$G_1(x, t, \rho) = \begin{cases} -\frac{1}{3\rho^3} \sum_{j=1}^3 e^{\rho \omega_j(x-t)} + \frac{\sum_{k=1}^3 a_k \rho e^{\rho \omega_k x}}{3\rho^2 \Delta(\rho)} \sum_{j=1}^3 e^{\rho \omega_j(1-t)}, & t \leq x; \\ \frac{\sum_{k=1}^3 a_k \rho e^{\rho \omega_k x}}{3\rho^2 \Delta(\rho)} \sum_{j=1}^3 e^{\rho \omega_j(1-t)}, & x \leq t. \end{cases}$$

2. Обозначим через $\phi_k(x)$ собственные функции краевой задачи (1), (2), соответствующие собственным значениям λ_k .

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x)$ равномерно сходится на $[0, 1]$,

тогда функция $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x)$ имеет аналитическое продолжение в T_1 и удовлетворяет функциональным соотношениям

$$f(-\omega^2 z) + f(-z) + f(\omega z) = 0, \quad \omega f(-\omega^2 z) - f(-z) - \omega^2 f(\omega z) = 0,$$

где $\omega = e^{\frac{\pi i}{3}}$ в круге, вписанном в область T_1 .

3. Изложим основной результат.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f(z)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, тогда справедлива асимптотическая формула:

$$\int_{\Gamma_I x}^1 \int G_1(x,t,\rho) f'(t) dt 3\rho^2 d\rho = o(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

равномерно по $x \in [0,1]$.

Введем следующие обозначения:

$$M_j(x,\rho) = \begin{vmatrix} e^{\rho \omega_j x} & e^{\rho \omega_1 x} & e^{\rho \omega_2 x} & e^{\rho \omega_3 x} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \rho \omega_1 & \rho \omega_2 & \rho \omega_3 \\ e^{\rho \omega_j} & e^{\rho \omega_1} & e^{\rho \omega_2} & e^{\rho \omega_3} \end{vmatrix}, \quad \tilde{M}_j(x,\rho) = -\frac{M_j(x,\rho)}{\rho^3 \Delta(\rho)},$$

$$\Omega_1(x,\rho) = \begin{vmatrix} e^{\rho \omega_1 x} & e^{\rho \omega_2 x} & e^{\rho \omega_3 x} \\ \rho \omega_1 & \rho \omega_2 & \rho \omega_3 \\ e^{\rho \omega_1} & e^{\rho \omega_2} & e^{\rho \omega_3} \end{vmatrix}, \quad \Omega_2(x,\rho) = \begin{vmatrix} e^{\rho \omega_1 x} & e^{\rho \omega_2 x} & e^{\rho \omega_3 x} \\ 1 & 1 & 1 \\ e^{\rho \omega_1} & e^{\rho \omega_2} & e^{\rho \omega_3} \end{vmatrix}.$$

Тогда справедлива

ЛЕММА 2. Имеют место следующие представления:

$$G_1(x,t,\rho) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \tilde{M}_j(x,\rho) e^{-\rho \omega_j t}$$

и

$$G_1(x,t,\rho) = -\frac{1}{3\rho^3 \Delta(\rho)} \sum_{j=1}^3 (\Omega_1(x,\rho) - \rho \omega_j \Omega_2(x,\rho)) e^{-\rho \omega_j t}.$$

Может быть получена также

ЛЕММА 3. Пусть функция $f(z)$:

1) непрерывно дифференцируема на отрезках $[0, x_1]$ и $[0, x_3]$,

2) удовлетворяет функциональному соотношению

$$f(-\omega^2 x) + (1-\omega)f(\omega x) = 0 \text{ для } x \in [0,1],$$

тогда справедливо следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^3 \tilde{M}_j(x,\rho) \int_0^{x_j} e^{-\rho \omega_j t} f'(t) dt = \tilde{M}_2(x,\rho) \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-\rho t} \phi(t) dt,$$

где $\phi(t) = -\omega^2 f'(-\omega^2 t) + \omega f'(\omega t)$.

С помощью этих лемм получается следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f(x)$:

1) является аналитической в области T , образованной четырехугольником с вершинами в точках $0, x_1, x_3, 1$;

2) непрерывно дифференцируема на отрезках $[0, x_1]$ и $[0, x_3]$;

3) дважды непрерывно дифференцируема на отрезках $[x_1, 1]$, $[x_3, 1]$ и $[0, 1]$;

4) удовлетворяет соотношению $f(1) = 0$;

5) удовлетворяет функциональному соотношению

$$f(-\omega^2 x) + (1 - \omega)f(\omega x) = 0 \text{ для } x \in [0, 1],$$

тогда

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - S_q(f)| = 0,$$

где $S_q(f)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям краевой задачи (1), (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Вычислительные методы и программирование для ЭВМ Урал-2, Урал-4. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1966. С. 82 – 100.

УДК 531.38

В. В. Корнев

КВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА*

Любой поворот твердого тела вокруг неподвижной точки представим в виде трех последовательных поворотов вокруг ортогональных осей, жестко связанных с твердым телом. Математическая постановка задачи нахождения этих трех поворотов на языке кватернионов имеет следующий вид.

Пусть задан кватернион

$$\bar{m} = m_0 + m_1 \bar{i} + m_2 \bar{j} + m_3 \bar{k}, \quad \|m\| = m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1.$$

Требуется найти кватернионы $\bar{a} = a_0 + a_1 \bar{i}$, $\bar{b} = b_0 + b_2 \bar{j}$ и $\bar{c} = c_0 + c_3 \bar{k}$ такие, что

$$\bar{b} \circ \bar{a} \circ \bar{c} = \bar{m}, \quad \|\bar{a}\| = \|\bar{b}\| = \|\bar{c}\| = 1. \quad (1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

Рассмотрим вспомогательную задачу: по заданному кватерниону $\bar{n} = n_0 + n_1\bar{i} + n_2\bar{j} + n_3\bar{k}$, $\|\bar{n}\|=1$, найти кватернионы $\bar{a} = a_0 + a_1\bar{i}$ и $\bar{b} = b_0 + b_2\bar{j}$, такие, что

$$\bar{b} \circ \bar{a} = \bar{n}, \quad \|\bar{a}\| = \|\bar{b}\| = 1. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы задача (2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$n_0n_3 + n_1n_2 = 0. \quad (3)$$

Если решение существует, то оно единственno с точностью до знака.

Доказательство. Необходимость проверяется непосредственно. Для доказательства достаточности уравнение (2) надо записать в виде системы четырех скалярных уравнений, которая имеет следующее решение:

а) если $n_0^2 + n_1^2 \neq 0$, то

$$a_0 = n_0 / N, \quad a_1 = n_1 / N, \quad N = \pm \sqrt{n_0^2 + n_1^2},$$

$$b_0 = N, \quad b_2 = \begin{cases} n_2N/n_0, & \text{если } n_0 \neq 0; \\ -n_3N/n_1, & \text{если } n_0 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

б) если $n_0 = n_1 = 0$, то $\bar{a} = n_2 - n_3\bar{i}$, $\bar{b} = \bar{j}$.

Для решения исходной задачи (1) введем обозначения

$$A = m_0m_3 + m_1m_2, \quad B = m_0^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_3^2.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $A \neq 0$, то задача (1) имеет два решения: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и

$$\bar{j} \circ \bar{a} \circ \bar{k}, \quad \bar{b} \circ \bar{j}, \quad \bar{k} \circ \bar{c}, \quad (5)$$

где \bar{c} определяется по формулам

$$c_0 = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + D^2}}, \quad c_3 = \operatorname{sgn} A \frac{D}{\sqrt{A^2 + D^2}}, \quad D = \frac{1}{2} \left(-B \pm \sqrt{B^2 + 4A^2} \right), \quad (6)$$

а кватернионы \bar{a}, \bar{b} – по формулам (4), в которых $\bar{n} = \bar{m}_0 \circ (c_0 - c_3\bar{k})$.

Если $A = 0$ и $B \neq 0$, то задача (1) имеет два решения: первое решение определяется по формулам (4), в которых $\bar{n} = \bar{m}$, $\bar{c} = 1$, а второе решение получается из первого по формулам (5).

Если $A = B = 0$, то задача (1) имеет бесконечно много решений: $\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \bar{i})$, $\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{m} \circ (c_0 - c_3\bar{k}) \circ (1 \mp \bar{i})$, $\bar{c} = c_0 + c_3\bar{k}$ – произвольный кватернион (верхний знак соответствует случаю $m_0 = m_1$, нижний знак – случаю $m_0 = -m_1$).

Доказательство. Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – решение задачи (1). Тогда

$$\bar{b} \circ \bar{a} = \bar{n},$$

где $\bar{n} = \bar{m} \circ \bar{c}^{-1}$. Отсюда по теореме 1 следует, что c_0 и c_3 являются решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax^2 - Bxy - Ay^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (7)$$

С другой стороны, если x, y – решение (7), $\bar{c} = x + y\bar{k}$, $\bar{n} = \bar{m} \circ \bar{c}^{-1}$, то, решив задачу (2), мы получим решение задачи (1). Таким образом, решая систему (7), мы получаем полное решение исходной задачи (1), сформулированное в теореме.

Эти теоремы дают полный алгоритм решения задачи (1).

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕГОВОРОВ

В данной статье исследуется задача нахождения компромисса в конфликтной ситуации со многими участниками [1]. Для моделирования процесса переговоров построена игра n лиц в нормальной форме, которая при определенных условиях имеет единственную ситуацию равновесия. Основой построения служит модель двусторонних переговоров, разработанная в [2].

Пусть имеются n игроков, которые путем совместных действий могут получить любой исход из множества P , где P – замкнутое выпуклое подмножество R^n (координатами исходов являются выигрыши игроков). Если же игроки не договорятся о совместных действиях, то ни один из них не может гарантированно получить результат лучший, чем ему дает точка $p_0 \in R^n$, называемая конфликтным исходом. Будем считать, что у игроков имеются непрерывные функции $f_i(p_1, p_2)$, $i=1, \dots, n$, выраждающие степень предпочтения одного исхода другому, более того, эти функции для различных игроков сравнимы.

Условимся об обозначениях. Вычисления для точек p_1 и p_2 с координатами $(x_1^1, \dots, x_i^1, \dots, x_n^1)$ и $(x_1^2, \dots, x_i^2, \dots, x_n^2)$ соответственно неравенства $x_i^1 \leq x_i^2$ будем записывать в виде $p_1 \underset{(i)}{\leq} p_2$. Аналогично объясняются обозначения $p_1 \underset{(i)}{<} p_2$, $p_1 \underset{(i)}{\approx} p_2$, $p_1 \underset{(ij)}{\approx} p_2$. Через P^* обозначим множество оптимальных по Парето элементов множества P , удовлетворяющих условию $p \geq p_0$, $i=1, \dots, n$. Предполагается, что $p_0 \notin P^*$.

Построим игру, моделирующую процесс переговоров между игроками. Стратегией каждого игрока является выдвижение своего предложения, т.е. указание в множестве P^* исхода, который он хотел бы иметь в качестве результата игры. После выдвижения каждым игроком своего предложе-

ния переговоры происходят следующим образом. Каждый игрок ведет двусторонние переговоры со всеми остальными игроками. Результатом двусторонних переговоров может быть либо принятие предложения одного из игроков, либо (при отсутствии договоренности) конфликтный исход. После независимого проведения всех двусторонних переговоров их результаты анализируются, и некоторое предложение принимается в том и только том случае, если на него при двусторонних переговорах согласился каждый игрок.

Таким образом, если двусторонние переговоры между игроками i и j моделируются игрой $\Gamma_{ij} = (P^*, P^*, \varphi_{ij})$, где φ_{ij} – сопоставляет паре предложений игроков (p_i, p_j) точку из $\{p_i, p_j, p_0\}$, то моделью переговоров между n игроками является игра $\Gamma = (P^*, \dots, P^*, \dots, P^*, \varphi)$, где функция φ определяется так:

$$\varphi(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) = \begin{cases} p, & \text{если } \exists k = 1, \dots, n \left(p = p_k \text{ и } \forall j \neq k \varphi_{kj}(p_k, p_j) = p_k \right) \\ & \quad \text{при } p \neq p_0, \\ p_0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

Равенство (1) позволяет строить модель многосторонних переговоров на основе данной модели двусторонних переговоров. Мы будем пользоваться моделью двусторонних переговоров, разработанной в [2]. В основу определения отображения φ_{ij} в игре Γ_{ij} положены следующие принципы.

1. $\varphi_{ij}(p_i, p_j) \in \{p_i, p_j, p_0\}$.
 2. Несоглашение игроков влечет за собой появление в качестве результата переговоров конфликтного исхода p_0 .
 3. Если предложения игроков совпали, то результатом переговоров является предложенный исход.
 4. Уступает тот игрок, который больше теряет от появления в качестве результата переговоров p_0 .
 5. Если оба игрока теряют от появления в качестве результата переговоров конфликтного исхода p_0 одинаково, то никто из них не уступает.
 6. Если для каждого игрока предложение противника выгоднее, чем его собственное (при независимом выдвижении игроками своих предложений такое возможно), то в процессе переговоров предложения игроков как бы меняются местами: игрок i будет вести себя так, как будто он выдвинул предложение p_j , а игрок j – предложение p_i (то есть выполняется равенство $\varphi_{ij}(p_i, p_j) = \varphi_{ij}(p_j, p_i)$).
- На основе этих принципов функция φ_{ij} в игре $\Gamma_{ij} = (P^*, P^*, \varphi_{ij})$ определяется так:

$\varphi_{ij}(p_i, p_j) = p_i \Leftrightarrow \{(p_i \underset{(ij)}{\neq} p_j \text{ при } p_i \neq p_j) \text{ и } ((p_i \underset{(i)}{\geq} p_j, p_i \underset{(j)}{\geq} p_j) \text{ или}$

$(p_i \underset{(i)}{\geq} p_j, p_i \underset{(j)}{\leq} p_j, f_i(p_j, p_0) < f_j(p_i, p_0)) \text{ или}$

$(p_i \underset{(i)}{\leq} p_j, p_i \underset{(j)}{\geq} p_j, f_i(p_i, p_0) > f_j(p_j, p_0))\},$

$\varphi_{ij}(p_i, p_j) = p_i \Leftrightarrow \{(p_i \underset{(ij)}{\neq} p_j \text{ при } p_i \neq p_j) \text{ и } ((p_j \underset{(i)}{\geq} p_i, p_j \underset{(j)}{\geq} p_i) \text{ или}$

$(p_j \underset{(i)}{\geq} p_i, p_j \underset{(j)}{\leq} p_i, f_i(p_i, p_0) < f_j(p_j, p_0)) \text{ или}$

$(p_j \underset{(i)}{\leq} p_i, p_j \underset{(j)}{\geq} p_i, f_i(p_j, p_0) > f_j(p_i, p_0))\},$

$\varphi_{ij}(p_i, p_j) = p_0$ в остальных случаях.

Основной результат статьи состоит в следующем.

При наложении некоторых формальных условий на множество исходов P игра Γ имеет единственную ситуацию равновесия, которая имеет вид $(\bar{p}, \dots, \bar{p}, \dots, \bar{p})$ и может находиться из условия

$$\min_{1 \leq i \leq n} f_i(\bar{p}, p_0) = \max_{p \in P} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(p, p_0).$$

При $f_i(p, p_0) = \frac{x_i^i - x_i^0}{r_i}$, где $r_i = \max_{\substack{p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in P \\ x_j \geq x_j^0, j \neq i}} x_i - x_0$, $i = 1, \dots, n$,

данная точка равновесия является решением арбитражной схемы Гермейера – Бутрима [3]. Если $f_i(p, p_0) = k_i(x_i^i - x_i^0)$, где $k_i, i = 1, \dots, n$, не зависят от p и p_0 , то получим решение аналога арбитражной схемы Райфы [4] для игр n лиц.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Харшаны Дж., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. СПб.: Эконом. шк., 2001.
- Шолло И. А. Решения арбитражных схем как точки равновесия бескоалиционных игр в нормальной форме // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1978. № 5. С. 13 – 19.
- Бутрим Б. И. Модифицированное решение задачи торга // ЖВМ и МФ. 1976. № 2. С. 16.
- Льюис Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

**О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ
ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ***

В [1] установлена базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора L :

$$Ly = by'(x) + y'(1-x), \quad x \in [0,1], \quad (1)$$

$$\int_0^1 y(t) d\sigma(t) = 0 \quad (2)$$

в том случае, когда $\sigma(t)$ является ступенчатой функцией. Теперь этот результат распространяется на случай, когда $\sigma(t)$ является произвольной функцией ограниченной вариации. Предполагаем, что выполняются условия

$$\beta^2 \neq 1, \quad \alpha\beta \neq 0, \quad (\gamma^2\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2\beta^2 - \alpha^2) \neq 0, \quad (3)$$

где $\alpha = \sigma(+0) - \sigma(0)$, $\beta = \sigma(1) - \sigma(-0)$, $\gamma = d(1+bd)^{-1}$, $d = (b^2 - 1)^{-1/2}$.

Введем в рассмотрение операторы:

$$\begin{aligned} A_1^0 f &= \int_0^{1-x} f(x+\tau) d\sigma(\tau), & A_2^0 f &= \int_0^{1-x} f(1-x-\tau) d\sigma(\tau), \\ A_3^0 f &= \int_x^1 f(\tau-x) d\sigma(\tau), & A_4^0 f &= \int_x^1 f(1+x-\tau) d\sigma(\tau), \end{aligned}$$

где $f(x) \in C[0,1]$. Так как $\|A_j^0 f\| \leq \|f\|_0^V(\sigma)$, где норма берется в $L_2[0,1]$, то эти операторы могут быть продолжены по непрерывности на все $L_2[0,1]$ и эти продолжения будем обозначать A_j . Далее, для определенности будем считать, что $\operatorname{Re} \lambda d \geq 0$.

ЛЕММА 1. Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр). Тогда, если $f(x) \in L_2[0,1]$, то $R_\lambda f$ представляет собой линейную комбинацию операторов $\int_x^1 e^{\lambda d(x-t)} \Phi(t) dt$ и $\int_0^x e^{-\lambda d(x-t)} \Phi(t) dt$ с постоянными коэффициентами и операторов $e^{-\lambda dx} F_j(f, \lambda)$, $e^{\lambda d(x-1)} F_j(f, \lambda)$ с коэффициентами, представи-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

мыми в виде произведения постоянных чисел на элементы матрицы $\Delta^{-1}(\lambda)$. Здесь $\Phi(x)$ есть линейные комбинации $f(x)$ и $f(1-x)$ с постоянными коэффициентами,

$$F_j(f, \lambda) = \int_0^1 e^{-\lambda dt} A_j f(t) dt,$$

$$\Delta(\lambda) = \int_0^1 S(\Gamma V(\tau, \lambda)) d\sigma(\tau), \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad V(x, \lambda) = \text{diag}\left(e^{\lambda d(x-1)}, e^{-\lambda dx}\right),$$

S – оператор, определяемый по формуле

$$\begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(1-x) & p_4(1-x) \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 2. Собственные значения λ_k оператора L находятся в некоторой полосе $|\operatorname{Re} \lambda d| \leq h$, причем в любом прямоугольнике $c \leq \operatorname{Im} \lambda d \leq c+1$ этой полосы их число ограничено постоянной, не зависящей от c .

Лемма 2 и условие (3) позволяют представить всю полосу $|\operatorname{Re} \lambda d| \leq h$ [1, с. 81] в виде объединения конечного числа различных групп прямоугольников, границы которых Γ_m состоят из отрезков, лежащих на прямых $\operatorname{Re} \lambda d = \pm h$ и отрезков, параллельных вещественной оси длины $2h$. При этом $\inf_{z \in \Gamma_m, k, m} \|z - \lambda_k d\| > 0$ и, кроме того, каждая группа состоит из равных между собой прямоугольников, и для каждого прямоугольника конкретной группы существует целое t_m , что $\Gamma_m = \Gamma + it_m$, Γ – граница некоторого фиксированного прямоугольника из этой группы.

ЛЕММА 3. Пусть J – любой конечный набор целых чисел. Тогда имеет место оценка

$$\left\| \sum_{m \in J} \int_{\Gamma_m} R_{\lambda/d} d\lambda \right\| \leq c,$$

равномерная по J .

ЛЕММА 4. Система с.п.ф. оператора L полна в $L_2[0,1]$.

Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. Система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2[0,1]$. При этом в скобки нужно объединить те с.п.ф., которые отвечают λ_k , для которых $\lambda_k d$ попали в контуры Γ_m .

Доказательство. Обозначим $E(m) = -\frac{1}{2\pi i d} \int_{\Gamma_m} R_{\lambda/d} d\lambda$ и покажем,

что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} E(m_k) f(x)$ сходится к $f(x)$, где m_1, m_2, \dots – какой-то наперед заданный порядок целых чисел. По лемме 4 система с.п.ф. $\{\varphi_k(x)\}$ опера-

тора L полна в $L_2[0,1]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда существует номер r и числа α_k , $k = 1, 2, \dots, r$, такие, что $\left\| f - \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi_k \right\| \leq \varepsilon$. Пусть $S_q = \sum_{k=1}^q E(m_k)$. Тогда по лемме 3 при q достаточно больших

$$\begin{aligned} \left\| f - S_q f \right\| &\leq \left\| f - \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi_k - S_q \left(\sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi_k \right) \right\| + \\ &+ \left\| S_q \left(f - \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi_k \right) \right\| \leq \varepsilon + c\varepsilon. \end{aligned}$$

Единственность разложения очевидна. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80 – 82.

УДК 517.5

С. Ф. Лукомский

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ – УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА, БЛИЗКИХ К L_∞ ^{*}

Пусть $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – функция Орлича, т.е. возрастающая выпуклая непрерывная функция, такая, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)/t = +\infty$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)/t = 0$, и пусть $L(\varphi)$ – пространство Орлича, порожденное этой функцией, т.е.

$$L(\varphi) = \left\{ f \in L(0,1) : \|f\|_{L(\varphi)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^1 \varphi \left(\frac{|f(t)|}{\lambda} \right) dt \leq 1 \right\} \right\}.$$

Если φ удовлетворяет Δ_2 условию, т.е. $\exists t_0, C > 0$, что $\forall t \geq t_0$ $\varphi(2t) \leq C \cdot \varphi(t)$, то [1] для частичных сумм $S_m(f)$ рядов Фурье – Уолша функции $f \in L(\bar{\varphi})$ при некоторой постоянной $C_1(\varphi)$ справедливо неравенство

$$\|S_m(f)\|_{L(\varphi)} \leq C_1(\varphi) \cdot \|f\|_{L(\bar{\varphi})}, \text{ где } \bar{\varphi}(x) = x \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00390), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.374).

Нас будет интересовать случай, когда φ не удовлетворяет условию Δ_2 .

Пусть $\psi : (0,1] \rightarrow (0,+\infty)$ – функция Лоренца, т.е. непрерывная убывающая функция такая, что $\lim_{t \rightarrow 0+0} \psi(t) = +\infty$ и $\varphi \circ \psi \in L(0,1)$. Определим пространства $L(\varphi, \psi)$, состоящие из тех $f \in L[0,1]$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L(\varphi, \psi)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi \left(\|f\|_n \psi(2^{-n}) \frac{1}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. 1) $L(\varphi, \psi)$ есть банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{L(\varphi, \psi)}$;

2) если $\varphi \in \Delta_2$, то $L(\varphi, \psi)$ – сепарабельно.

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in L\left(\varphi, \log \frac{2}{x}\right)$, то существует постоянная $C(\varphi, \psi) > 0$, что $\|S_m(f)\|_{L(\varphi)} < C(\varphi, \psi) \|f\|_{L(\varphi, \psi)}$, где $\psi(x) = \log \frac{2}{x}$.

Доказательство теоремы 1. При доказательстве вместо $\|\cdot\|_{L(\varphi, \psi)}$ будем писать просто $\|\cdot\|$. Стандартным образом [2, с. 150] и используя выпуклость функции φ , убеждаемся, что $\|\cdot\|$ есть норма и $L(\varphi, \psi)$ есть линейное пространство. Для доказательства полноты достаточно [2, с. 142] проверить выполнение следующих свойств:

(B): если $0 \leq f_n(t) \uparrow f(t)$ и $\sup \|f_n\| < +\infty$, то $f \in L(\varphi, \psi)$;

(C): если $0 \leq f_n(t) \uparrow f(t) \in L(\varphi, \psi)$, то $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$.

Проверим условие (B). Можно считать, что $\sup \|f_n\| = 1$. Из определения нормы $\|\cdot\|$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\|f_m\|_n \psi(2^{-n})) 2^{-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi \left(\|f_m\|_n \psi(2^{-n}) \frac{1}{\|f_m\|} \right) 2^{-n} \leq 1. \quad (1)$$

Поэтому $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\varphi(\|f_m\|_n \psi(2^{-n})) \leq 2^n \text{ т.е. } \|f_m\|_n \leq \varphi^{-1}(2^n) / \psi(2^{-n}).$$

Отсюда по теореме Леви

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_m(t)|^n dt = \int_0^1 |f_m(t)|^n dt \leq (\varphi^{-1}(2^n) / \psi(2^{-n}))^n,$$

т.е. $f \in L_n(0,1)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а значит, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_n = \|f\|_n$. Из (1) следует,

что $\sum_{n=1}^N \varphi(\|f_m\|_n \psi(2^{-n})) 2^{-n} \leq 1$ ($N \in \mathbb{N}$). Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$ и учитывая произвольность N , имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\|f\|_n \psi(2^{-n})) 2^{-n} \leq 1.$$

Отсюда следует, что $f \in L(\varphi, \psi)$ и $\|f\| \leq 1$, а значит, и

$$\|f\| \leq \sup_m \|f_m\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|.$$

Проверим условие (C). Пусть $0 \leq f_m(t) \uparrow f(t) \in L(\varphi, \psi)$. Можно считать, что $\|f\| = 1$. Тогда $\|f_m\| \leq 1$. Значит, выполнено условие (B), и потому $\|f\| \leq \lim \|f_m\|$. Но ввиду монотонности верно и обратное неравенство $\|f\| \geq \lim \|f_m\|$. Таким образом, условие (C) выполнено, и пространство $L(\varphi, \psi)$ – полное.

Пусть теперь $\varphi \in \Delta_2$. Для доказательства сепарабельности достаточно [2, с. 142] проверить выполнение условия

(A): если $f_m(t) \downarrow 0$, то $\|f_m\| \downarrow 0$.

Для этого отметим, что при $\lambda = \|f_1\|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\|f_m\|_n \psi(2^{-n}) \frac{1}{\lambda}\right) 2^{-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\|f_1\|_n \psi(2^{-n}) \frac{1}{\lambda}\right) 2^{-n} \leq 1.$$

Но тогда $\|f_m\|_n \leq \varphi^{-1}(2^n) \|f_1\| / \psi(2^{-n})$, и по теореме Лебега о предельном переходе $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Снова применяя теорему Лебега, находим, что при любом $\lambda > 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\|f_m\|_n \psi(2^{-n}) \frac{1}{\lambda}\right) 2^{-n} = 0.$$

Если выберем $\lambda = \frac{1}{2^p}$ ($p \in \mathbb{N}$), то из $\varphi \in \Delta_2$ следует, что $\exists m \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\|f_m\|_n \psi(2^{-n}) \frac{1}{\lambda}\right) 2^{-n} \leq C^p \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\|f_m\|_n \psi(2^{-n})) 2^{-n} \leq 1$$

при $m \geq m_0$. Это означает, что $\forall m \geq m_0 \|f_m\| \leq \frac{1}{2^p}$, т.е. $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\| = 0$, и

теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Заметим, прежде всего, что норму $\|\cdot\|_{L(\varphi, \psi)}$ можно определить и для случая $\psi(t) \equiv 1$. Будем обозначать эту норму через $\|\cdot\|_{L(\varphi, 1)}$. Покажем, что $\|f\|_{L(\varphi)} \leq 4 \|f\|_{L(\varphi, 1)}$. Для этого проверим вначале, что $f^*(2^{-n}) \leq 4 \|f\|_n$. В самом деле

$$\|f\|_n^n = \int_0^1 |f^*(t)|^n dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} |f^*(t)|^n dt \geq \frac{2^{-n}}{2^{-n-1}} \int_0^1 |f^*(2^{-n}t)|^n dt = 2^{-n-1} \|f^*(2^{-n})\|^n,$$

откуда и следует требуемое неравенство. Но тогда при $\lambda = 4 \|f\|_{L(\phi,1)}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi\left(\frac{f^*(t)}{\lambda}\right) dt &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \phi\left(f^*(2^{-n-1}) \frac{1}{\lambda}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(f^*(2^{-n}) \frac{1}{\lambda}\right) 2^{-n} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(\frac{4\|f\|_n}{\lambda}\right) 2^{-n} \leq 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|f\|_{L(\phi)} \leq 4 \|f\|_{L(\phi,1)}$. Отметим, наконец [3, с. 123], что частичные суммы $S_m(f)$ ряда Фурье – Уолша удовлетворяют неравенству

$$\|S_m(f)\|_p \leq Ap \|f\|_p \quad (p \geq 2).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(\|S_m(t)\| \frac{1}{n\lambda}\right) 2^{-n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi\left((n+1)A \frac{\|f\|_{n+1}}{\lambda}\right) 2^{-n} \leq \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(\|f\|_n \psi(2^{-n}) \frac{A}{\lambda}\right) 2^{-n} \leq 1 \text{ при } \lambda = 2A \|f\|_{L(\phi, \psi)}, \end{aligned}$$

где $\psi(x) = \log \frac{2}{x}$. Это означает, что $\|S_m(f)\|_{L(\phi,1)} \leq A \|f\|_{L(\phi, \psi)}$, отсюда с учетом ранее доказанного неравенства $\|g\|_{L(\phi)} \leq 4 \|g\|_{L(\phi,1)}$ следует

$$\|S_m(f)\|_{L(\phi)} \leq 8A \|f\|_{L(\phi, \psi)} \quad \left(\psi(x) = \log \frac{2}{x} \right),$$

и теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Finet C., Tkebuchavu G. E. Walsh – Fourier series and their generalizations in Orlicz spaces // J. Mat. Anal. Appl. 1998. Vol. 221. P. 405 – 418.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
3. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.

А. С. Луконина

**О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ
ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЁННЫМ ФУНКЦИЯМ
ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ***

В статье рассматривается оператор L :

$$l(y) = \beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x) \quad (1)$$

с интегральным граничным условием:

$$U(y) = \int_0^1 p(t)y(t)dt = 0, \quad p(t) = \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2)$$

где $\beta^2 \neq 1$, $p_i(x) \in C^1[0,1]$, ($i=1,2$); на $k(t)$ накладываются условия:

a) $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$;

б) $k^2(1) - \gamma^2 k^2(0) \neq 0$, $k^2(0) - \gamma^2 k^2(1) \neq 0$, где $\gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$.

Границное условие схожего с (2) вида: $\int_{-1}^1 \frac{k(t)}{(1-|t|)^\alpha} y(t)dt = 0$ для опе-

ратора $y'(x)$ было впервые рассмотрено А. М. Седлецким. Оператор (1), (2) при $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$ был подробно изучен А. П. Хромовым [1].

Для оператора (1), (2) устанавливается равносходимость разложений по собственным и присоединённым функциям (в дальнейшем – с.п.ф.) и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также аналог теоремы Жордана – Дирихле из теории тригонометрических рядов.

1. Резольвента оператора (1), (2). Обозначим через $R_\lambda f = (L - \lambda E)^{-1}f$, где E – единичный оператор, λ – спектральный параметр, резольвенту оператора L . Тогда $R_\lambda f$ есть первая компонента вектора $\Gamma z(x)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $z(x)$ – решение следующей краевой задачи в пространстве вектор-функций размерности два:

$$z'(x) + P_1(x)z(x) = \lambda Dz(x) + F_1(x), \quad \widetilde{U}(z) = \int_0^1 \begin{pmatrix} p(t) & 0 \\ 0 & p(1-t) \end{pmatrix} \Gamma z(t)dt = 0, \quad (3)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 03-01-000169).

$$\text{где } D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad P_1(x) = D \Gamma^{-1} \tilde{P}(x) \Gamma,$$

$$\tilde{P}(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(1-x) & p_1(1-x) \end{pmatrix}, \quad F_1(x) = D \Gamma^{-1} \tilde{F}(x), \quad \tilde{F}(x) = (f(x), f(1-x))^T.$$

Присутствие ненулевой матрицы $P_1(x)$ является серьёзным препятствием в исследовании асимптотического поведения решения данной краевой задачи. Проведём преобразование системы (3), заменяющее $P_1(x)$ на матрицу с элементами $O(\frac{1}{\lambda})$: $H(x, \lambda) = H_0(x) + \frac{1}{\lambda} H_1(x)$, где $H_0(x)$ – диагональная матрица с элементами $h_{ii}(x) = \exp\left(-\int_0^x p_{ii}(t) dt\right)$, $p_{ii}(x)$ ($i=1, 2$) – диагональные элементы матрицы $P_1(x)$, $H_1(x)$ – кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения $H'_0(x) + P_1(x)H_0(x) + (H_1(x)D - DH_1(x)) = 0$.

ЛЕММА 1. При больших $|\lambda|$ неособое преобразование $z = H(x, \lambda)v$ приводит (3) к следующей краевой задаче:

$$v'(x) + P_\lambda(x)v(x) = \lambda Dv(x) + F_\lambda(x), \quad \tilde{U}(v) = \tilde{U}(H(x, \lambda)v) = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } P_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} H^{-1}(x, \lambda)[H'_1(x) + P_1(x)H_1(x)], \quad F_\lambda(x) = H^{-1}(x, \lambda)F_1(x).$$

Обозначим через S_{δ_0} область, получающуюся из полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda, d \geq 0$ удалением всех нулей функции $a_0 + a_1 e^{-\lambda d} + a_2 e^{-2\lambda d}$, где

$$\begin{aligned} a_0 &= h_{11}(1) \cdot h_{22}(0) \cdot (k^2(1) - \gamma^2 k^2(0)), \\ a_1 &= (-1)^{\alpha-1} (1 - \gamma^2) k(0) \cdot k(1) (h_{11}(0) \cdot h_{22}(0) + h_{11}(1) \cdot h_{22}(1)), \\ a_2 &= (-1)^{2(\alpha-1)} h_{11}(0) \cdot h_{22}(1) \cdot (k^2(0) - \gamma^2 k^2(1)), \end{aligned}$$

вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0 .

ЛЕММА 2. Пусть $w(x, \lambda) = R_{1\lambda}\Phi$ – решение краевой задачи: $w'(x) = \lambda Dw(x) + \Phi(x)$, $\tilde{U}(w) = 0$, где $\Phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))^T$, $\phi_i(x) \in L[0, 1]$, ($i=1, 2$). Тогда в области S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ справедливы оценки:

$$\|R_{1\lambda}\Phi\|_\infty = O(\|\Phi\|_1), \quad \|R_{1\lambda}\Phi\|_1 = O(\psi(\lambda)\|\Phi\|_1),$$

где $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ – нормы в пространстве вектор-функций размерности два $L_1[0, 1]$ и $L_\infty[0, 1]$ соответственно,

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda d} \left(1 - |e^{-\lambda d}|\right), \quad \|R_{1\lambda}\Phi\|_{C[\delta, 1-\delta]} = O\left(e^{-\lambda d \delta} \|\Phi\|_1\right) \text{ для любого } \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Элементы матрицы P_λ допускают оценку $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, следовательно, с учетом леммы 2 оператор $E + R_{1\lambda} P_\lambda$ обратим, а тогда краевая задача (4) в области S_{δ_0} имеет и притом единственное решение $v = (E + R_{1\lambda} P_\lambda)^{-1} R_{1\lambda} F_\lambda$. Окончательно получаем, что $R_\lambda f$ есть первая компонента вектора $\Gamma H(x, \lambda)(E + R_{1\lambda} P_\lambda)^{-1} R_{1\lambda} F_\lambda$.

2. Равносходимость разложений по с.п.ф. оператора L и в тригонометрический ряд Фурье. С использованием оценок для $R_{1\lambda} \Phi$ устанавливается утверждение, которое является ключевым моментом в доказательстве как теоремы равносходимости, так и аналога теоремы Жордана – Дирихле:

ЛЕММА 3. Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int \Gamma H(x, \lambda) \left[(E + R_{1\lambda} P_\lambda)^{-1} R_{1\lambda} F_\lambda(x) - R_{1\lambda} H_0^{-1}(x) F_1(x) \right] d\lambda \right\|_\infty = 0.$$

Следствие. Если обозначить через $I(\lambda)$ первую компоненту вектора

$$\Gamma H(x, \lambda) R_{1\lambda} H_0^{-1}(x) F_1(x), \text{ то } \lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int (R_\lambda(L)f - I(\lambda)) d\lambda \right| = 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ и для любого $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq x \leq 1-\delta} |S_r(f, x) - \sigma_{r|d|}(f, x)| = 0,$$

где $S_r(f, x)$ – частная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора L для собственных значений, попавших в круг $|\lambda| < r$, $\sigma_{r|d|}(f, x)$ – частная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{\exp 2k\pi i x\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, для тех k , для которых $2|k|\pi < r|d|$, $d = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$.

3. Аналог теоремы Жордана – Дирихле о сходимости разложений по с.п.ф. оператора L . Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Для $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ и удовлетворяющей краевому условию $U(f) = 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda \right| = 0.$$

$$\text{Соотношение } \lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} I(\lambda) d\lambda \right| = 0 \text{ доказывается, как и}$$

теорема 2 в [1], а из него и следствия к лемме 3 вытекает утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАН. 2004. № 4. С. 80 – 87.

УДК 517.5

О. А. Лукьяненко

О КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВИЛЕНКИНА

Пусть $P = \{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность простых чисел, $m = \{m_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность целых чисел, где $m_0 = 1$, $m_{i+1} = p_i m_i$. Будем рассматривать функции Виленкина $V_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, на группе G_m [1], элементами которой являются бесконечные последовательности $x = (x_0, x_1, \dots)$, $0 \leq x_k < p_k$, $x_k \in \mathbb{N}$ с групповой операцией $x \oplus y = ((x_0 + y_0) \bmod p_0, (x_1 + y_1) \bmod p_1, \dots)$, $x, y \in G_m$. Группа G_m может быть отображена на отрезок $[0, 1]$ при помощи отображения $x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{m_{j+1}}$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in G_m$ определим функции Радемахера равенством $r_k(x) = \exp(2\pi i x_k / p_k)$, $0 \leq x_k < p_k$. Если $n \in \mathbb{N}_0$, тогда для него существует единственное представление

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k m_k, \quad 0 \leq a_k < p_k, \quad a_k \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (1)$$

В этом случае $V_n(x) = \prod_{K=0}^{\infty} r_k^{a_k}(x)$. Пусть $D_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} V_i(x)$ – ядро Дирихле

[1, с. 98], $D_n^*(x) = V_{n^*}(x) D_n(x)$ – модифицированное ядро Дирихле, где

$$n^* = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^* m_i \text{ – дополнительное число для } n \text{ и } a_i^* = (p_i - a_i) \bmod m_i.$$

Будем рассматривать представление числа $n \in \mathbb{N}_0$ в виде

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^s (a_{k_{2i-1}-1} m_{k_{2i-1}-1} + a_{k_{2i-1}-2} m_{k_{2i-1}-2} + \dots + a_{k_{2i}} m_{k_{2i}}), \\ a_j &= p_j - q_i, \quad j = k_{2i-1} - 1, k_{2i-1} - 2, \dots, k_{2i}. \end{aligned} \quad (2)$$

В этом случае дополнительное число принимает вид

$$n^* = \sum_{i=1}^s (q_i m_{k_{2i-1}-1} + q_i m_{k_{2i-1}-2} + \dots + q_i m_{k_{2i-1}-1}), \quad (3)$$

а для модифицированного ядра Дирихле можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} D_n^*(x) = & \sum_{i=1}^s \left(D_{m_{k_{2i-1}}}(x) - D_{m_{k_{2i-1}-1}}(x) \sum_{v=0}^{p_{k_{2i-1}-1} - a_{k_{2i-1}-1} - 1} r_{k_{2i-1}-1}^v(x) + \right. \\ & \left. + D_{m_{k_{2i+1}}}(x) - D_{m_{k_{2i}}}(x) \sum_{v=0}^{p_{k_{2i}} - a_{k_{2i}} - 1} r_{k_{2i}}^v(x) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

При $q_i = 1$, $i = 1, \dots, s$ равенство (4) принимает вид

$$D_n^*(x) = D_{m_{k_1}}(x) - D_{m_{k_2}}(x) + \dots + D_{m_{k_{2s-1}}}(x) - D_{m_{k_{2s}}}(x). \quad (5)$$

ТЕОРЕМА. Пусть число n имеет вид (2), $L_n = \int_0^1 |D_n(t)| dt$ – константы

Лебега для системы Виленкина [1, с. 98], тогда

$$\sum_{i=1}^s \left(\frac{2q_i}{p_{k_{2i-1}-1} p_{k_{2i}}} + (q_i - 1) q_i \sum_{j=k_{2i-1}-1}^{k_{2i}} \frac{1}{p_j^2} \right) \leq L_n \leq V(n), \quad (6)$$

где $V(n) = a_0^* + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^* + a_{i-1}^*) \text{mod } 2d_i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^* (a_i^* - 1)$, $d_i = \max\{a_{i-1}^*, a_i^*\}$ (если $d_i = 0$, то $(a_i^* + a_{i-1}^*) \text{mod } 2d_i = (a_i^* + a_{i-1}^*)$).

Если последовательность $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ограничена числом p сверху, то

$$\frac{V(n)}{p^2} \leq L_n \leq V(n). \quad (7)$$

Доказательство. Учитывая свойства ядра Дирихле, оценим L_n сверху.

$$\begin{aligned} L_n = & \int_0^1 |D_n^*(t)| dt \leq \sum_{i=1}^s \left| D_{m_{k_{2i-1}}}(t) - D_{m_{k_{2i-1}-1}}(t) \sum_{v=1}^{q_{i-1}-1} r_{k_{2i-1}-1}^v(t) - \right. \\ & \left. - D_{m_{k_{2i-1}-2}}(t) \sum_{v=1}^{q_{i-1}-1} r_{k_{2i-1}-2}^v(t) - \dots - D_{m_{k_{2i}}}(t) \sum_{v=0}^{q_i-1} r_{k_{2i}}^v(t) \right| dt \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^s \sum_{j=k_{2i-1}-1}^{k_{2i}} \left(\frac{q_i^2 - 1}{q_i} + \frac{1}{q_i(q_i + 1)^{j-k_{2i}}} \right) \leq \sum_{i=1}^s (2q_i + (k_{2i-1} - k_{2i})(q_i - 1)) q_i \leq V(n). \end{aligned}$$

Обратно,

$$L_n = \int_0^1 |D_n^*(t)| dt = \sum_{j=0}^{m_{k_1}} |D_n^*(t)| + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \int_{\frac{1}{m_{j+1}}}^{\frac{1}{m_j}} |D_n^*(t)| dt + \sum_{i=2}^s \left(\int_{\frac{1}{m_{k_{2i-1}}}}^{\frac{1}{m_{k_{2i}}}} |D_n^*(t)| dt + \right. \\ \left. + \sum_{j=k_{2i-1}}^{k_{2i}} \int_{\frac{1}{m_{j+1}}}^{\frac{1}{m_j}} |D_n^*(t)| dt \right) = A_1 + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} B_j + \sum_{i=2}^s \left(A_i + \sum_{j=k_{2i-1}}^{k_{2i}} B_j \right). \quad (8)$$

Для A_i , $i = 1, \dots, s$, справедливо неравенство $A_i \geq \frac{1}{p_{k_{2i-1}-1}}$. Оценим слагаемые B_i .

$$B_i = \sum_{l=1}^{p_{k_{2i-1}}-1} \int_{\frac{l}{m_{j+1}}}^{\frac{l+1}{m_j}} -m_j \left(\left(r_j^l\right)^0 + \dots + \left(r_j^l\right)^{p_j-a_j-1} \right) + m_j - \dots - m_{k_{2i}} (p_{k_{2i}} - a_{k_{2i}}) + \\ + \sum_{t=i+1}^s (m_{k_{2t-1}} - m_{k_{2t-1}-1}) (p_{k_{2t-1}-1} - a_{k_{2t-1}-1}) + \dots + m_{k_{2t+1}} - m_{k_{2t}} (p_{k_{2t}} - a_{k_{2t}}),$$

где $r_j^l = \exp\left(\frac{2\pi il}{p_j}\right)$, $j = k_{2i-1} - 1, \dots, k_{2i}$. Умножим подынтегральное выражение на $1 = \left| \exp\left(\frac{2\pi il}{p_j}\right) \right|$, получим $B_j \geq \frac{c_j}{p_j}$, где $c_{k_{2i}} = q_i$, $c_j = q_i - 1$ ($j = k_{2i-1}, \dots, k_{2i} + 1$). Таким образом, подставляя полученные результаты в (8), окончательно имеем

$$L_n = \sum_{i=1}^s \left(\frac{1}{p_{k_{2i-1}-1}} + \frac{1}{p_{k_{2i}}} + \sum_{j=k_{2i-1}+1}^{k_{2i}} \frac{q_i - 1}{p_j} \right) \geq \\ \geq \sum_{i=1}^s \left(\frac{2q_i}{p_{k_{2i-1}-1} p_{k_{2i}}} + (q_i - 1) q_i \sum_{j=k_{2i-1}+1}^{k_{2i}} \frac{1}{p_j^2} \right).$$

В случае ограниченности последовательности $\{p_i\}_{i=0}^\infty$ получим

$$L_n \geq \frac{2s}{p} + \sum_{i=1}^s (q_i - 1) \frac{k_{2i-1} - k_{2i}}{p} \geq \sum_{i=1}^s \frac{2q_i}{p^2} + \sum_{i=1}^s (q_i - 1) q_i \frac{k_{2i-1} - k_{2i}}{p^2} \leq V(n).$$

Теорема доказана.

Следствие. Если в представлении (2) $q_i = 1$, $i = 1, \dots, s$, то неравенство

$$(6) \text{ принимает вид } \sum_{i=1}^s \frac{1}{p_{k_{2i-1}-1} p_{k_{2i}}} \leq L_n \leq 2s.$$

Если последовательность $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ограничена числом p , то $\frac{2s}{p^2} \leq L_n \leq 2s$. В случае, когда $p_i = 2$, $i \in \mathbb{N}_0$, получаем известную оценку констант Лебега для системы Уолша [2, с. 34].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джазарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультиплексивные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
2. Schipp F., Wide W.R., Simon P. Walsh series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest: Akademiai Kiado, 1990. 560 p.

УДК 517.984

Т. В. Мазур

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ*

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q(x), h)$:

$$Ly := -y'' + q(x)y = \lambda y, x > 0, \quad (1)$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь λ – спектральный параметр. Через W_M , $M \geq 1$, обозначим множество функций $f(x)$, $x \geq 0$, таких, что $f^{(j)}(x) \in AC[0, T]$ при каждом фиксированном $T > 0$, $j = \overline{0, M-1}$, и $f^{(j)}(x) \in L(0, \infty)$, $j = \overline{0, M}$. Через W'_M обозначим множество функций $q(x) \in W_M$ таких, что $(1+x)|q(x)| \in L(0, \infty)$. Будем говорить, что $L \in V'_M$, если $q(x)$ и h вещественны и $q(x) \in W'_M$. Пусть далее $L \in V'_M$.

Пусть $\lambda = \rho^2$. Введём обозначения: $\Delta(\rho) = e'(0, \rho) - he(0, \rho)$, где $e(x, \rho)$ – решение Йоста уравнения (1). Для простоты положим далее, что дискретного спектра нет. При $\lambda = \rho^2 > 0$ рассмотрим функцию: $V(\lambda) := \rho \pi^{-1} |\Delta(\rho)|^{-2} > 0$.

Будем рассматривать задачу восстановления потенциала $q(x)$ и коэффициента h по функции $V(\lambda)$. Известно [1, с. 161], что $V(\lambda)$ непрерывна

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00007) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376).

и при $\rho > 0$, $\rho \rightarrow \infty$ $V(\lambda) = \frac{1}{\pi\rho} \left(1 + \sum_{s=1}^{M+1} \frac{V_s}{\rho^s} + o\left(\frac{1}{\rho^{M+1}}\right) \right)$, где $V_{2s+1} = 0$,

$$V_2 = -0.5q(0) + h^2.$$

Наряду с $L = L(q(x), h)$ будем рассматривать задачу $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x), \tilde{h})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Положим, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к L , то $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \tilde{L} , а $\hat{\gamma} = \gamma - \tilde{\gamma}$.

Пусть h , $q(0)$ априорно известны. Предположим $\Delta(0) \neq 0$. Выберем $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x), \tilde{h})$ так, что $\tilde{V}_2 = V_2$ (при $V_2 > 0$ положим $\tilde{q}(x) = 0$, $\tilde{h} = \sqrt{V_2}$, при $V_2 \leq 0$ положим $\tilde{h} = h$ и $\tilde{q}(0) = q(0)$).

Пусть $\phi(x, \lambda)$ – решение (1) при условиях: $\phi(0, \lambda) = 1$, $\phi'(0, \lambda) = h$. Обозначим

$$D(x, \lambda, \mu) = \int_0^x \phi(t, \lambda) \phi(t, \mu) dt, \quad \tilde{D}(x, \lambda, \mu) = \int_0^x \tilde{\phi}(t, \lambda) \tilde{\phi}(t, \mu) dt. \quad (3)$$

При рассматриваемых условиях основное уравнение обратной задачи [1, с. 169] принимает вид $\tilde{\phi}(x, \lambda) = \phi(x, \lambda) + \int_0^\infty \tilde{D}(x, \lambda, \mu) \hat{V}(\mu) \phi(x, \mu) d\mu$, $\lambda > 0$.

Обозначим $\varepsilon_0(x) = \int_0^x \phi(x, \mu) \tilde{\phi}(x, \mu) \hat{V}(\mu) d\mu$, $\varepsilon(x) = -2\varepsilon'_0(x)$.

Справедливы соотношения [1, с. 171]

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \varepsilon(x), \quad h = \tilde{h} - \varepsilon_0(0). \quad (4)$$

Возьмём достаточно большое число $R_N > 0$. Заменим интегралы \int_0^∞

на $\int_0^{R_N}$, разобъём отрезок $[0, R_N]$ на n равных частей, каждая из которых равна h_p , т.е. $h_p = R_N n^{-1}$. Обозначим $R_k = kh_p$, $\lambda_k = R_k^2$. Определим функцию

$$\eta(x) = \begin{cases} -xh_p^{-1} + 1, & x \in [0, h_p); \\ xh_p^{-1} + 1, & x \in (-h_p, 0); \\ 0, & x \notin (-h_p, h_p). \end{cases}$$

Будем рассматривать семейство задач $L_k = L(q_k(x), h_k)$ и $\tilde{L}_k = L(\tilde{q}_k(x), \tilde{h}_k)$, для которых верны равенства

$$V_k(\lambda) = \tilde{V}(\lambda) + \sum_{j \leq k} v_j \eta(\rho - R_j), \quad \tilde{V}_k(\lambda) = \tilde{V}(\lambda) + \sum_{j < k} v_j \eta(\rho - R_j),$$

где $k = \overline{1, n}$, $v_k = \hat{V}(\rho_k)$. Тогда $\hat{V}_k(\lambda) = v_k \eta(\rho - R_k)$, $k = \overline{1, n}$. Потенциал q_n , для которого $\tilde{V}_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n v_k \eta(\rho - R_k)$, $k = \overline{1, n}$, возьмём в качестве приближённого решения (1), (2). Тогда на отрезке $[R_{k-1}, R_{k+1}], k = \overline{1, n}$, $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ и $\varepsilon_0(x)$ имеют вид $\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}} \tilde{D}(x, \lambda, \mu) \hat{V}(\mu) \varphi(x, \mu) 2\xi d\xi$,

$$\varepsilon_0(x) = \int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}} \varphi(x, \mu) \tilde{\varphi}(x, \mu) \hat{V}(\mu) 2\xi d\xi, \quad \mu = \xi^2.$$

Заменим интегралы приближённо, используя квадратурную формулу прямоугольников с весом $\eta(\xi - \rho_k)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, \lambda) &\approx \varphi(x, \lambda) + \tilde{D}(x, \lambda, \lambda_k) v_k \varphi(x, \lambda_k) 2\lambda_k \int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}} \eta(\xi - \rho_k) d\xi, \\ \varepsilon_0(x) &\approx \tilde{\varphi}(x, \lambda_k) v_k \varphi(x, \lambda_k) 2\lambda_k \int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}} \eta(\xi - \rho_k) d\xi. \end{aligned}$$

Так как $\int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}} \eta(\xi - \rho_k) d\xi = h_\rho$, то

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda) \approx \varphi(x, \lambda) + \tilde{D}(x, \lambda, \lambda_k) v_k \varphi(x, \lambda_k) 2\lambda_k h_\rho, \quad (5)$$

$$\varepsilon_0(x) \approx \tilde{\varphi}(x, \lambda_k) v_k \varphi(x, \lambda_k) 2\lambda_k h_\rho. \quad (6)$$

Положим $\lambda = \lambda_k$, тогда уравнение (5) перепишется в виде

$$\tilde{\varphi}(x, \lambda_k) \approx \varphi(x, \lambda_k) + \tilde{D}(x, \lambda_k, \lambda_k) v_k \varphi(x, \lambda_k) 2\lambda_k h_\rho. \quad (7)$$

Получили линейное уравнение относительно $\varphi(x, \lambda_k)$. Таким образом, получаем следующий алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм. Пусть дана функция $V(\lambda)$.

1. Выбираем $\tilde{q}(x)$, \tilde{h} такие, что выполняется условие $\tilde{V}_2 = V_2$.
2. При каждом фиксированном x в цикле по R_k :
 - находим $\tilde{D}(x, R_k, R_k)$ из (3),
 - вычисляем $\tilde{\varphi}(x, R_k)$ из задачи Коши
 - $-\tilde{\varphi}''(x, R_k) + \tilde{q}(x)\tilde{\varphi}(x, R_k) = R_k^2 \tilde{\varphi}(x, R_k)$, $\tilde{\varphi}(0, R_k) = 1$, $\tilde{\varphi}'(0, R_k) = h$,
 - считаем $\varphi(x, R_k)$ из (7),
 - находим $\varepsilon_0(x)$ по формуле (6) и вычисляем $\varepsilon(x) = -2\varepsilon'_0(x)$,
 - вычисляем потенциал $q(x)$ и коэффициент h из (4) и берём их за $\tilde{q}(x)$ и \tilde{h} на следующем шаге.

3. Потенциал $q(x)$ и коэффициент h , полученные на выходе, являются приближением искомых $q(x)$ и h .

Приведённый метод имеет небольшое количество вычислений, так как на каждом шаге цикла решается одно единственное уравнение вместо системы с n неизвестными, а это уже объём вычислений порядка n для каждого x . Таким образом, данный метод является более эффективным, по сравнению с методами, основанными на применении оператора преобразования [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001. 499 с.
2. Rundell W., Sacks P.E. Reconstruction techniques for classical inverse St-L problems // Math. Comp. 1992. Vol. 58, № 197. P. 3 – 70.

УДК 517.51.518

И. Д. Молоденкова

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ 2 π -ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРАМИ, СОХРАНЯЮЩИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Данная статья является продолжением статьи, опубликованной в предыдущем номере сборника, в которой были получены оценки приближения непрерывных функций операторами, сохраняющими кубические сплайны. Здесь получены оценки приближения непрерывных 2 π -периодических функций операторами, сохраняющими тригонометрические сплайны по П.-Ж. Лорану.

Пусть A – интегральные осредняющие операторы

$$A_H(f; x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_H(x, t) dt,$$

зависящие от шага разбиения $H = \frac{2\pi}{n+1}$ (n – натуральное число) как от параметра, сохраняющие тригонометрические сплайны, введенные П.-Ж. Лораном [1] с ядрами вида $K_H(x, t) = \sum_{i=1}^S \alpha_i(x) \phi_i(t)$, где S принимает соответствующие значения в зависимости от того, куда попадает x , $\phi_i(t)$ – линейно независимые функции, получаемые сдвигом функции $\phi(t)$, где $\phi(t) = \frac{1}{H}$, если $t \in [0, H]$ и 0 в остальных случаях, $\alpha_i(x)$ находятся из соответствующих систем линейных алгебраических уравнений [2, 3].

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$. Будем считать, что $f(x)$ может быть продолжена непрерывно периодически на всю вещественную ось. Рассмотрим величину, характеризующую скорость аппроксимации функции $f(x)$ на классе $Lip_K \beta$, $0 < \beta \leq 1$ [4]:

$$\Delta_1(A_H, Lip_K \beta) = \sup \{ \|A_H f - f\|_{C[-\pi, \pi]} : f(-\pi) = f(\pi), f \in Lip_K \beta \}.$$

Имеют место теоремы.

ТЕОРЕМА 1. При $H \rightarrow 0$ справедливы оценки:

$$\Delta_1(A_H, Lip_K \beta) \leq K_1 H^\beta, \quad MH^3 \leq \Delta_1\left(A_H, Lip_K \frac{1}{m}\right) \leq K_1 H^{\frac{1}{m}},$$

где $K_1 = \frac{13}{42}K$ для $\beta = 1$, $K_1 = 2K \sqrt{\frac{13}{42}}$ для $\beta = \frac{1}{m}$,

$$M = \frac{(m-1)(2m-1)}{X_n^{(2m-1)/m} m^3 \cdot 6 \cdot 49^3} \min_{X_p, S} \sum_{i=1}^S \alpha_i(x_p) \left[i^2 \left(i - \frac{3}{2} \right) + i - \frac{1}{4} - p^3 \right],$$

$S = 3$, $p = \overline{1, 3}$, $x_p = -\pi + pk$, если $x \in \left[-\pi, x_1 - \frac{\delta_1}{2} \right]$, или $x_p = x_n + \frac{\delta_1}{2} + ph$, если $x \in \left[x_n + \frac{\delta_1}{2}, \pi \right]$;

$S = 5$, $p = \overline{1, 5}$, $x_p = x_l + \frac{\delta_1}{2} + ph$, если $x \in \left[x_l + \frac{\delta_1}{2}, x_{l+1} - \frac{\delta_1}{2} \right]$, $l = \overline{1, n-1}$;

$S = 7$, $p = \overline{1, 7}$, $x_p = x_l - \frac{\delta_1}{2} + ph$, если $x \in \left[x_l - \frac{\delta_1}{2}, x_l + \frac{\delta_1}{2} \right]$, $l = \overline{1, n}$, $m \geq 2$.

Оценки сверху следуют из теоремы Дзядыка [5, гл. VIII, § 6, теорема 1'], леммы [4, гл. 2, § 2.1, лемма 2.1] и свойств оператора A_H , которые приводятся ниже.

ТЕОРЕМА. Если линейный положительный оператор $A_n(f(\xi); x)$ отображает пространство 2π -периодических функций $f(x)$ в самое себя таким образом, что

$$A_n(1; x) = 1, \quad A_n(\cos \xi; x) = \cos x + \alpha_n(x), \quad A_n(\sin \xi; x) = \sin x + \beta_n(x),$$

где $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ равномерно стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то тогда он любую непрерывную 2π -периодическую функцию $f(x)$ будет приближать с точностью

$$|f(x) - A_n(f; x)| \leq (1 + \pi^2) \omega(\delta_n),$$

где через $\omega(f; t)$ обозначен модуль непрерывности функции $f(x)$ и

$$\delta_n = \sqrt{\frac{\|\alpha_n\|^2 + \|\beta_n\|^2}{2}}.$$

ЛЕММА. Пусть $f_1(x)$ – функция, полученная периодическим продолжением на всю вещественную ось функции $f(x) \in C[-\pi, \pi]$. Тогда, если $f(x) \in Lip_K \beta$, то $f_1(x) \in Lip_{2K} \beta$ при $\beta < 1$ и $f_1(x) \in Lip_K \beta$ при $\beta = 1$.

Отметим свойства операторов A_H . Интегральные осредняющие операторы линейны и для них справедливы равенства [2, 3]

$$A_H(1; x) = 1, \quad A_H(\sin \xi; x) = \sin x, \quad A_H(\cos \xi; x) = \cos x.$$

Так же как и операторы, сохраняющие кубические сплайны, операторы A_H положительны [6].

Оценка снизу получена для $\|A_H f_1 - f\|_{C[-\pi, \pi]}$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} x^{\frac{m}{m}}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ (-x)^{\frac{m}{m}}, & -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

$$\text{а } \sup \left\{ \|A_H f - f\|_{C[-\pi, \pi]} : f(-\pi) = f(\pi), f \in Lip_K \frac{1}{m} \right\} \geq \|A_H f_1 - f_1\|_{C[-\pi, \pi]}.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любой 2π -периодической непрерывно дифференцируемой функции до r -го порядка включительно ($r \geq 4$) при $H \rightarrow 0$ справедлива оценка

$$MH^3 \leq \|A_H f - f\| \leq K_1 H^\beta,$$

$$\text{где } K_1 = \frac{13}{42} K \text{ для } \beta = 1, \quad K_1 = 2K \sqrt{\frac{13}{42}} \text{ для } \beta = \frac{1}{m},$$

$$M = \frac{\min_{x_p, S, x_l} \left| f'''(x_l) \sum_{i=1}^S \alpha_i(x_p) \left[i^2 \left(i - \frac{3}{2} \right) + i - \frac{1}{4} - p^3 \right] \right|}{6 \cdot 49^3},$$

$$S = 3, \quad r = \overline{1, 3}, \quad x_p = -\pi + ph, \quad x_l = -\pi, \quad \text{если } x \in \left[-\pi, x_l - \frac{\delta_1}{2} \right], \quad \text{или}$$

$$x_p = x_n + \frac{\delta_1}{2} + ph, \quad x_l = x_n + \frac{\delta_1}{2}, \quad \text{если } x \in \left[x_n + \frac{\delta_1}{2}, \pi \right]; \quad S = 5, \quad p = \overline{1, 5},$$

$$x_p = x_l + \frac{\delta_1}{2} + ph, \quad \text{если } x \in \left[x_l + \frac{\delta_1}{2}, x_{l+1} - \frac{\delta_1}{2} \right], \quad l = \overline{1, n-1}; \quad S = 7, \quad p = \overline{1, 7},$$

$$x_p = x_l - \frac{\delta_1}{2} + ph, \quad \text{если } x \in \left[x_l - \frac{\delta_1}{2}, x_l + \frac{\delta_1}{2} \right], \quad l = \overline{1, n}, \quad m \geq 2.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для операторов, сохраняющих кубические сплайны [6], с учетом ранее сформулированной леммы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.
2. Молоденкова И. Д., Молоденков В. А. Обзор численных методов для решения задач приближения непрерывных функций с использованием сплайнов и осредняющих операторов. Саратов, 1998. 37 с. Деп. в ВИНИТИ, № 986-В98.
3. Молоденкова И. Д. Применение операторов осреднения к задаче восстановления функций // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 57 – 59.

4. Хромова Г. В., Молоденкова И. Д. Методы приближенного решения задачи восстановления функций: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Ч. 2. 33 с.

5. Цзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 508 с.

6. Молоденкова И. Д. Некоторые оценки точности приближений функций с помощью осредняющих операторов, сохраняющих сплайны // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 88 – 90.

УДК 519.4

В. А. Молчанов

ВНУТРЕННИЕ ЭНДОМОРФИЗМЫ ПОЛУГРУППЫ НЕСТАНДАРТНЫХ СЛОВ И НЕСТАНДАРТНЫЕ ДИНАМИКИ*

В статье [1] разработаны основы нестандартного подхода к теории конечных полугрупп, языков и автоматов. В настоящей статье изучается один из основных инструментов нестандартной теории псевдомногообразий – полугруппа нестандартных слов.

После открытия С. Эйленбергом [2] соответствия между потоками рациональных языков и псевдомногообразиями конечных полугрупп теория псевдомногообразий представляет собой одно из важнейших и интенсивно развивающихся направлений современной прикладной алгебры. Разнообразные подходы к теории псевдомногообразий разработаны С. Эйленбергом, М.П. Шютценберже, Ж.-Э. Пэном, Дж. Алмейдой и многими другими (обзор [3]). Один из последних подходов к этой теории был разработан на основе методов нестандартного анализа [4]. Результаты работ [1, 5] позволяют характеризовать псевдомногообразия конечных полугрупп тождествами нестандартного языка узкого исчисления предикатов над конечным алфавитом A и исследовать такие псевдомногообразия и соответствующие им потоки рациональных языков с помощью нестандартного расширения $*W(A)$ полугруппы слов $W(A)$.

В этой статье исследуются эндоморфизмы полугруппы $*W(A)$ с целью разработки методов конструирования нестандартных слов, необходимых для изучения различных псевдомногообразий конечных полугрупп.

В статье используются основные понятия теории полугрупп [6] и нестандартного анализа [4]. Напомним, что главная идея нестандартного анализа заключается в использовании отображения $*$ стандартного теоретико-множественного универсума $U = \mathcal{U}(S)$ над исходным множеством атомов S в собственную подструктуру $*U$ нового теоретико-множественного универсума $\mathcal{U}(*S)$ над расширенным множеством атомов $*S$, так что выполняется следующий принцип переноса: для любых $A_1, \dots, A_n \in U$ любое утверждение логики первого порядка с ограниченными кванторами

* Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 99-1224).

$\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ истинно в U тогда и только тогда, когда φ истинно в $*U$ для нестандартных расширений $*A_1, \dots, *A_n$. Множество $A \in V(*S)$ называется *внутренним*, если $A \in *U$.

Пусть A – конечное множество и $W(A)$ – полугруппа слов над алфавитом A , наделенная операцией конкатенации. Любое слово $w = a_1 \dots a_n$ из $W(A)$ может быть отождествлено с таким отображением $f: [1, n] \rightarrow A$ сегмента $[1, n]$ натурального ряда N в множество A , что $a_i = f(i)$ для каждого $i = 1, n$. Тогда по принципу переноса нестандартное расширение $*W(A)$ полугруппы $W(A)$ является полугруппой всех внутренних отображений сегментов $[1, n]$ ряда $*N$ в конечное множество A , которые можно рассматривать как нестандартные слова над алфавитом A . Множество всех однозлементных делителей слова $w \in *W(A)$ называется *содержанием* этого слова и обозначается $c(w)$. Слово w имеет полное содержание, если $c(w) = A$.

Как известно [6], любое многообразие полугрупп полностью определяется своими свободными объектами, которые являются фактор-полугруппами полугруппы слов $W(A)$ над алфавитом A по полной инвариантной конгруэнции, порожденной тождествами этого многообразия от $|A|$ переменных.

Нестандартный подход к теории конечных полугрупп позволяет модифицировать эту технику и конструировать для псевдомногообразия конечных полугрупп K свободный объект $F_K(A)$ над алфавитом A в виде фактор-полугруппы полугруппы нестандартных слов $*W(A)$ по инвариантной нестандартной конгруэнции, порожденной нестандартными тождествами псевдомногообразия K от $|A|$ переменных (подробнее см. [5]). В общем случае этот объект $F_K(A)$ является компактной топологической полугруппой, содержащей необходимую информацию о всех полугруппах псевдомногообразия K .

В частности, для псевдомногообразия всех конечных полугрупп Sg свободный объект $F(A)$ над алфавитом A представляется в виде фактор-полугруппы полугруппы $*W(A)$ по инвариантной нестандартной конгруэнции:

$$\varepsilon = \cap \{ \ker *f : f - \text{гомоморфизм } W(A) \text{ в конечную полугруппу } S \}.$$

Нетрудно убедиться, что если для нестандартных слов $u, v \in *W(A)$ выполняется условие $u \equiv v (\varepsilon)$, то эти слова имеют одинаковые конечные делители, одинаковые конечные префиксы и одинаковые конечные суффиксы. Далее при исследовании свободного объекта $F(A)$ псевдомногообразия Sg будем отождествлять ε -эквивалентные нестандартные слова и вместо $u \equiv v (\varepsilon)$ писать $u = v$.

Пусть $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ и f – эндоморфизм полугруппы слов $W(A)$. Тогда для любого слова $w = a_1 \dots a_n$ из $W(A)$ выполняется равенство $f(w) = f(a_1 \dots a_n) = f(a_1) \dots f(a_n)$, т. е. значение $f(w)$ является результатом подстановки в слово w вместо входящих в него букв из последовательности

x_1, \dots, x_m соответствующих слов $u_i = f(x_i)$ ($i = \overline{1, m}$). Следовательно, эндоморфизм f полностью определяется своими значениями на элементах $x \in A$ и соответствие $f \rightarrow (f(x_1), \dots, f(x_m))$ ($f \in \text{End } W(A)$) является изоморфизмом полугруппы эндоморфизмов $\text{End } W(A)$ на m -ю декартову степень $W(A)^m$ полугруппы $W(A)$, наделенную следующей операцией композиции:

$$(u_1, \dots, u_m) \cdot (v_1, \dots, v_m) = (u_1(v_1, \dots, v_m), \dots, u_m(v_1, \dots, v_m)),$$

где $u_i, v_i \in W$ и $u_i(v_1, \dots, v_m)$ – слово, полученное в результате подстановки в слово u_i вместо входящих в него букв из последовательности x_1, \dots, x_m соответствующих слов v_1, \dots, v_m .

По принципу переноса нестандартное расширение $*\text{End } W(A)$ полугруппы эндоморфизмов $\text{End } W(A)$ является полугруппой всех внутренних эндоморфизмов полугруппы нестандартных слов $*W(A)$. При этом по-прежнему любой эндоморфизм $f \in *\text{End } W(A)$ полностью определяется своими значениями на элементах $x \in A$, и соответствие $f \rightarrow (f(x_1), \dots, f(x_m))$ ($f \in *\text{End } W(A)$) является изоморфизмом полугруппы $*\text{End } W(A)$ на полугруппу $*W(A)^m$.

Пусть $f \in *\text{End } W(A)$ и $u_i = f(x_i)$ ($i = \overline{1, m}$). Тогда для любого $w \in *W(A)$ значение $f(w) = w(u_1, \dots, u_m)$ и условие $w = w_1$ влечет $w(u_1, \dots, u_m) = w_1(u_1, \dots, u_m)$. Следовательно, упорядоченный набор m нестандартных слов $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$ определяет преобразование полугруппы $F(A)$, которое непрерывно относительно компактной топологии на этой полугруппе и может рассматриваться как топологическая динамическая система на пространстве $F(A)$. При этом элемент $\bar{u} \in *W(A)^m$ будет также называться *нестандартной динамикой*.

Напомним, что точка P динамической системы $(F(A), f)$ называется *рекуррентной*, если она является пределом некоторой подпоследовательности последовательности значений $\{f^n(P)\}$. Множество всех рекуррентных точек такой динамической системы обозначим символом $\text{Rec } f$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого внутреннего эндоморфизма f полугруппы $*W(A)$ справедливы следующие утверждения:

- 1) множество $\text{Rec } f$ состоит из всех таких $w \in *W(A)$, что $f^{k!}(w) = w$ для некоторого бесконечного числа $k \in *N$;
- 2) множество $\text{Rec } f$ совпадает с множеством значений отображения f^k для любого бесконечного числа $k \in *N$;
- 3) ограничение отображения f на множество $\text{Rec } f$ является перестановкой этого множества.

Внутренние эндоморфизмы полугруппы нестандартных слов $*W(A)$ позволяют конструировать нестандартные слова, с помощью которых описываются важные псевдомногообразия конечных полугрупп [7].

ТЕОРЕМА 2. Если все компоненты нестандартной динамики $\bar{u} \in *W(A)^m$ имеют полное содержание, то для любого бесконечного числа $k \in *N$ компоненты динамики \bar{u}^k регулярны и J -эквивалентны [6] между

собой. Если к тому же для некоторого $n \in N$ компоненты динамики \bar{u}^n имеют одинаковые первые буквы и одинаковые последние буквы, то компоненты динамики \bar{u}^k являются H -эквивалентными [6] между собой групповыми элементами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Molchanov V.A. Nonstandard characterization of pseudovarieties // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33. P. 533 – 547.
2. Eilenberg S. Automata, Languages and Machines. Vol. B. N. Y.: Academic Press, 1976.
3. Almeida J. On pseudovarieties, varieties of languages, filters of congruences, pseudoidentities and related topics // Algebra Universalis. 1990. Vol. 27. P. 333 – 350.
4. Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.
5. Molchanov V.A. Nonstandard congruences and lattices of pseudovarieties // Semigroups, automata and languages. Singapore; New Jersey; L.: World Scientific, 1996. P. 183 – 193.
6. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
7. Almeida J. Dynamics of implicit operations and tameness of pseudovarieties of groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 354. P. 387 – 411.

УДК 519.4

В. Е. Новиков

О КОНЦЕНТУАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ НА КОНТЕКСТЕ С МНОГОМЕРНЫМИ АТРИБУТАМИ*

В настоящей статье даётся обзор основных результатов работ [1, 2] и продолжается исследование взаимосвязи концептуального анализа [3] с теорией распознавания образов [4].

Напомним необходимые понятия теории концептуального анализа систем с многомерными атрибутами. Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$ – n -арное отношение. Обозначим: $\bar{n} := (1, 2, \dots, n)$, $M_{\bar{n}} := M_1 \times \dots \times M_n$ и $\bar{i}_s := (i_1, i_2, \dots, i_s)$, $x_{\bar{i}_s} := (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s})$, $M_{\bar{i}_s} := M_{i_1} \times \dots \times M_{i_s}$ для произвольных $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$. При этом также обозначаем $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$. Будем говорить, что s -система $x_{\bar{i}_s}$ *входит в отношение* ρ , если существует n -система $x_{\bar{n}} \in \rho$, для которой элементы $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$ являются её соответствующими компонентами.

Для $\bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, $a_{\bar{i}_s} \in M_{\bar{i}_s}$, $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$ обозначим:

$$\pi_{\bar{j}_k}(\rho) := \{y_{\bar{j}_k} \in M_{\bar{j}_k} \mid y_{\bar{j}_k} \text{ входит в } \rho\}, \quad \sigma_{\{a_{\bar{i}_s}\}}(\rho) := \{x_{\bar{n}} \in \rho \mid a_{\bar{i}_s} \subseteq x_{\bar{n}}\},$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 99-1224).

$$\rho_{\bar{j}_k}(x_{\bar{i}_s}) := \pi_{\bar{j}_k}(\sigma_{\{x_{\bar{i}_s}\}}(\rho)), \quad \bar{\rho}_{\bar{j}_k}(X) := \bigcap_{x_{\bar{i}_s} \in X} \rho_{\bar{j}_k}(x_{\bar{i}_s}), \quad \bar{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X) := \bar{\rho}_{\bar{i}_s}(\bar{\rho}_{\bar{j}_k}(X)).$$

Если $X = \bar{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X)$ и $\bar{\rho}_{\bar{i}_s}(Y) = X$ для $Y \subseteq M_{\bar{j}_k}$, то X называется \bar{i}_s -концептом по \bar{j}_k и $Y - \bar{j}_k$ -генератором \bar{i}_s -концепта X . В этом контексте элементы множества X будем называть *объектами*, а элементы множества Y – *атрибутами* \bar{i}_s -концепта X по \bar{j}_k , при этом также \bar{j}_k называем *индексом генератора*, или *атрибутом*.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ некоторое n -арное отношение и зафиксированы $\bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$. Множество всех \bar{i}_s -концептов по \bar{j}_k , упорядоченное отношением включения, образует полную решётку.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}, \bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ и $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$ является \bar{i}_s -концептом по \bar{j}_k . Множество всех \bar{j}_k -генераторов концепта X суть все возможные фильтры из $P(\bar{\rho}_{\bar{j}_k}(X))$, содержащие минимальные \bar{j}_k -генераторы концепта X .

Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}, \bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$. Будем говорить, что объекты $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$ удовлетворяют атрибутам $Y \subseteq M_{\bar{j}_k}$ в отношении ρ , если $X \subseteq \bar{\rho}_{\bar{i}_s}(Y)$. Также говорим, что объект $x_{\bar{i}_s} \in M_{\bar{i}_s}$ распознаётся представителем \bar{i}_s -концепта $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$ по \bar{j}_k в отношении ρ , если X удовлетворяет в отношении ρ \bar{j}_k -атрибутам объекта $x_{\bar{i}_s}$.

Полученные результаты имеют интерпретацию в теории распознавания образов. Пусть некоторая обучающая последовательность образовала отношение $\rho' \subseteq M_{\bar{n}}$, которое через выбор решающего правила [4] преобразовано в отношение $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$. Пусть X – некоторый \bar{i}_s -концепт по \bar{j}_k отношения ρ , а на этапе распознавания получено отношение $\varsigma' \subseteq M_{\bar{n}}$, преобразованное тем же выбором решающего правила в отношение $\varsigma \subseteq M_{\bar{n}}$. Тогда объект $x_{\bar{i}_s}$, входящий в ς , распознаётся представителем \bar{i}_s -концепта X по \bar{j}_k в отношении ρ , если $\bar{\rho}_{\bar{i}_s}(\varsigma_{\bar{j}_k}(\{x_{\bar{i}_s}\})) \subseteq X$. Заметим, что объект $x_{\bar{i}_s}$ распознаётся представителем \bar{i}_s -концепта X по \bar{j}_k в отношении ρ тогда и только тогда, когда $\varsigma_{\bar{j}_k}(\{x_{\bar{i}_s}\})$ содержит некоторый \bar{j}_k -генератор этого концепта. Следующая теорема устанавливает способ построения отношения $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ с помощью обучающей последовательности.

ТЕОРЕМА 3 (о выборе ведущего правила). Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}, \bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}, Y \subseteq M_{\bar{j}_k}$. Функция $R(Y) = |\bar{\rho}_{\bar{i}_s}(Y)|$ обладает следующими свойствами:

1) R постоянна на множестве немаксимальных \bar{j}_k -генераторов одного и того же \bar{i}_s -концепта;

2) если Y максимальный \bar{j}_k -генератор \bar{i}_s -концепта X , то для любого $Y', Y \subset Y'$, выполняется неравенство $R(Y') < R(Y)$.

Этот результат связывает выбор решающего правила с выбором приближения функций $|\hat{\rho}_{\bar{i}_s}^t(Y)|$ ступенчатыми функциями, на основании чего строится отношение $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$. Следовательно, приближения функций $|\hat{\rho}_{\bar{i}_s}^t(Y)|$ ступенчатыми функциями устанавливают общий принцип выбора класса решающих правил в концептуальном анализе.

Следующие результаты посвящены упорядоченным множествам концептов отношения, однозначного относительно множества объектов. Такие отношения играют особую роль в теории реляционных баз данных. Отношение $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ называется *однозначным относительно* $M_{\bar{i}_s}$, $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$, если каждый элемент $x_{\bar{i}_s} \in M_{\bar{i}_s}$ входит в ρ не более одного раза. В частности, всякое отношение $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ однозначно относительно $M_{\bar{n}}$, и любую реляционную базу данных с ключом можно рассматривать как отношение, однозначное относительно ключа.

ТЕОРЕМА 4. Если отношение $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ однозначно относительно $M_{\bar{i}_s}$, $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$, то множество \bar{i}_s -концептов по произвольному индексу атрибутов, упорядоченное отношением включения, образует полную решётку.

По свойствам дуального среза в множестве всех \bar{i}_s -концептов всегда присутствуют \emptyset и $M_{\bar{i}_s}$. Отличные от этих множеств \bar{i}_s -концепты будем называть *собственными*.

ТЕОРЕМА 5 [2]. Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ – n -арное однозначное отношение относительно $M_{\bar{i}_s}$, $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$. Множество собственных \bar{i}_s -концептов по \bar{j}_k образует разбиение множества $\pi_{\bar{i}_s}(\rho)$, которое в дальнейшем обозначаем $\pi_{\bar{i}_s}(\rho)/_{\bar{j}_k}$.

ТЕОРЕМА 6 [2]. Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ – n -арное однозначное отношение, однозначное относительно $M_{\bar{i}_s}$, и $\bar{i}_q, \bar{j}_p \subseteq \bar{n}$ удовлетворяют $\bar{i}_q \subseteq \bar{j}_p$. Тогда $\pi_{\bar{i}_s}(\rho)/_{\bar{j}_p}$ является подразбиением разбиения $\pi_{\bar{i}_s}(\rho)/_{\bar{i}_q}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть n -арное отношение $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ однозначно относительно $M_{\bar{i}_s}$, $\bar{i}_q, \bar{j}_p \subseteq \bar{n}$, и $X^p, X^q \subseteq M_{\bar{i}_s}$ – два неуниверсальных \bar{i}_s -концепта по \bar{j}_p, \bar{i}_q соответственно, где $y_{\bar{j}_p}, y_{\bar{i}_q}$ – их генераторы максимального индекса. Тогда $y_{\bar{i}_q} \subseteq y_{\bar{j}_p}$ в том и только том случае, если $X^p \subseteq X^q$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ – n -арное однозначное отношение, однозначное относительно $M_{\bar{i}_s}$, $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если \bar{i}_s -концепт X в решётке концептов не является атомом, то X покрывает не менее двух \bar{i}_s -концептов этого отношения [2];
- 2) высота решётки \bar{i}_s -концептов этого отношения не превосходит $n+1$, а её ширина равна $|\pi_{\bar{i}_s}(p)|$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков В. Е. Решётки понятий n -арных отношений // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 111 – 113.
2. Новиков В. Е. О решётке частично однозначного отношения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 102 – 105.
3. Wille R. Introduction to Formal Concept Analysis. Darmstadt: Springer, 1996.
4. Вапник В. Н., Червонец А. Я. Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974.

УДК 517.51

В. В. Новиков

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ АНАЛОГЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Д. Е. МЕНЬШОВА*

Обозначим через $S_n(f, x)$ частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции f , а через $L_n(T, f, x)$ – тригонометрический полином Лагранжа, интерполирующий f в равноотстоящих узлах $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1), k = -n, \dots, n, n = 1, 2, \dots\}$. Далее, для $f \in C_{2\pi}$ и $n \geq 3$ положим

$$T_{n,p}^*(f) = \sum_{k=-[n/2]}^{[n/2]} \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\phi(2k+1, n, p)} \right|, \quad p = -n-1, \dots, n,$$

где

$$\phi(m, n, p) = \begin{cases} p - m, & \text{если } |p - m| \leq 3([n/2] + 1); \\ 2n - (p - m), & \text{если } p - m > 3([n/2] + 1); \\ -2n - (p - m), & \text{если } p - m < -3([n/2] + 1); \end{cases}$$

$$T_n^*(f) = \max_{-n-1 \leq p \leq n} T_{n,p}^*(f).$$

Здесь штрих у знака суммы указывает на отсутствие (не более двух) слагаемых, у которых индекс k является решением уравнения $\phi(2k+1, n, p) = 0$; кроме того, будем считать, что $x_{n+1,n} = \pi$, $x_{-n-1,n} = -\pi$.

Как показано в [1], условие $T_n^*(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ влечет равномерную сходимость к f полиномов $\{L_n(T, f, x)\}$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00060).

В 1940 году Д. Е. Меньшов доказал классическую теорему о наличии у измеримой, почти всюду конечной функции так называемого усиленного C -свойства: для любой функции f указанного вида и любого $\varepsilon > 0$ существует функция g такая, что $f = g$ на некотором множестве $E \subset [-\pi, \pi]$, $\text{mes } E > 2\pi - \varepsilon$ и ряд Фурье $\sigma(g)$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$. Как известно, последовательность $\{L_n(T, f, x)\}$ для $f \in C_{2\pi}$ может расходиться всюду, поэтому представляет интерес вопрос о наличии подобного усиленного C -свойства у произвольной функции $f \in C_{2\pi}$ по отношению к указанному интерполяционному процессу.

ТЕОРЕМА. Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in C_{2\pi}$ такая, что $f = g$ на некотором множестве $E \subset [-\pi, \pi]$, $\text{mes } E > 2\pi - \varepsilon$ и интерполяционный процесс $\{L_n(T, g, x)\}$ сходится к g равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Схема доказательства. Пусть даны произвольные $f \in C_{2\pi}$ и $\varepsilon > 0$. Не теряя общности, можно считать, что $f \geq 0$. Обозначим $\Delta_{k,j} = [-\pi + 2\pi(k-1)2^{-j}, -\pi + 2\pi k 2^{-j}]$, $k = 1, \dots, 2^j$, и $\tilde{f}_j(x) = \min_{t \in \Delta_{k,j}} f(t)$,

$x \in \Delta_{k,j}$, $k = 1, \dots, 2^j$, $j \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{\tilde{f}_j(x)\}$ не убывает по j и равномерно сходится к f на $[-\pi, \pi]$. Положим

$$f_j(x) = \tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_{j-1}(x), \quad \tilde{f}_0(x) \equiv 0.$$

Тогда ряд $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ равномерно и абсолютно на $[-\pi, \pi]$ сходится к f . Докажем, что $\forall j = 1, 2, \dots$ и для любого $N_j \in \mathbb{N}$ существует функция $g_j \in C_{2\pi}$ такая, что

$$1) \quad 0 \leq g_j(t) \leq f_j(t), \quad t \in [-\pi, \pi]; \quad (1)$$

$$2) \quad \text{mes}\{t \in [-\pi, \pi] : f_j(t) \neq g_j(t)\} < \varepsilon 2^{-j}; \quad (2)$$

$$3) \quad \max_n T_n^*(g_j) \leq C \|g_j\|_{C_{2\pi}} \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty; \quad (3)$$

$$4) \quad T_n^*(g_j) = 0, \quad n = 1, \dots, N_j; \quad j = 2, 3, \dots; \quad (4)$$

$$5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^*(g_j) = 0. \quad (5)$$

После того как функции $g_j(x)$ будут построены, мы покажем, что

$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ — искомая. Функцию $g_1(x)$ определим как кусочно-линейную и такую, что $\text{mes}\{t \in [-\pi, \pi] : f_1(t) \neq g_1(t)\} < \varepsilon/2$. Пусть $j \geq 2$. Обозначим $c_j = \|f_j\|_{C_{2\pi}}$, $d_{i,j} = \|f_j\|_{C(\Delta_{i,j})}$, и пусть $\alpha_j \uparrow \infty$, $M_j \uparrow \infty$ — последовательности такие, что $c_j = \alpha_j / \ln M_j$ (окончательно их подберем

позже). Положим $a_j = \frac{1}{\ln M_j}$, $q_j = 1 - 1/\alpha_j$, $c_{k,j} = a_j q_j^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, так

что $\sum_{k=1}^{\infty} c_{k,j} = \frac{a_j}{1-q_j} = c_j$, кроме того, пусть

$$A_{k,j} = \frac{\ln M_j}{\alpha_j \tilde{q}_j^k}, \quad (6)$$

где $\tilde{q}_j = 1 - 1/(2\alpha_j)$, $\tilde{m}_{k,j} = \exp A_{k,j}$, $m_{k,j} = [\tilde{m}_{k,j}]$, $k = 0, 1, \dots$

Обозначим через L множество узлов $x_{l,s} \in T$ таких, что $2s+1 \leq m_{0,j}$, а через M – множество точек разрыва функций f_j . Для каждой точки $t \in D_0 := L \cup M$ рассмотрим окрестность $[t - \sigma_0, t + \sigma_0]$, радиус которой σ_0 выбирается в соответствии с описанной в [2] процедурой (в частности, суммарная длина этих окрестностей меньше, чем $\varepsilon 2^{-j-1}$). Полагаем

$$g_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D_0; \\ f_j(x), & \text{если } x \in [-\pi; \pi] \setminus (t - \sigma_0, t + \sigma_0), t \in D_0; \\ \text{линейная на } (t - \sigma_0, t) \text{ и } (t, t + \sigma_0) \text{ при } t \in D_0, \end{cases}$$

кроме того, $g_{0,j} \in C_{2\pi}$. Предположим, что $g_{0,j}, g_{1,j}, \dots, g_{l-1,j}$, $l \geq 1$, уже построены. Обозначим через D_l множество узлов $x_{l,s}$, у которых номер строки s удовлетворяет условию $m_{l-1,j} < 2s+1 \leq m_{l,j}$, причем D_l содержит только те узлы, которые не принадлежат окрестностям, уже построенным на предыдущих l шагах. Для каждого $x_{l,s} \in D_l$ возьмем окрестность $[x_{l,s} - \sigma_l, x_{l,s} + \sigma_l]$, где $\sigma_l > 0$ вновь выбрано в соответствии с требованиями из [2] (в частности, суммарная длина всех таких окрестностей меньше, чем $\varepsilon 2^{-j-l-1}$). Полагаем

$$g_{l,j}(x) = \begin{cases} \frac{d_{i,j}}{c_j} \sum_{r=1}^l c_{r,j}, & \text{если } x \in D_l \cap \Delta_{i,j}; \\ \text{линейная на } (t - \sigma_l, t) \text{ и } (t, t + \sigma_l), \text{ где } t \in D_l; \\ g_{l-1,j}(x) \text{ для остальных } x \in [-\pi, \pi], \end{cases}$$

причем $g_{l,j} \in C_{2\pi}$. Определим функцию $g_j(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} g_{l,j}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $j \geq 2$, и проверим для нее выполнение условий (1) – (5) (для g_1 эти условия, кроме (4), очевидно, выполнены). Условие (4) для $g_j(x)$ будет выполнено, если взять M_j столь большим, что $m_{0,j} > N_j$. Определим номер k из условия $m_{k,j} < 2n+1 \leq m_{k+1,j}$ ($m_{-1,j} := 1$) и запишем

$$T_{n,p}^*(g_j) = \left(\sum_{i \in I_1} + \sum_{i \in I_2} + \sum_{i \in I_3} + \sum_{i \in I_4} \right) \left| \frac{g_j(x_{2k+1,n}) - g_j(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1, n, p)} \right| = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

где в I_1 собраны индексы i , для которых узлы $x_{2i,n}, x_{2i+1,n}$ находятся в разных отрезках $\Delta_{u,j}, \Delta_{v,j}$, $u \neq v$, в I_2 – те $i \notin I_1$, для которых оба узла $g_j(x_{2i,n}) = g_j(x_{2i+1,n})$; I_3 содержит те i , для которых хотя бы один из узлов $x_{2i,n}, x_{2i+1,n}$ совпадает с точкой из множества D_r , $r = 0, \dots, k$; I_4 содержит все оставшиеся узлы. Рассуждая как в [2], можно показать, что

$$S_4 < \frac{Cc_j}{l+1} + C \sum_{r=l+1}^{\infty} c_{r,j}, \quad \forall p. \quad (7)$$

где l определяется условием $\sigma_{l-1} < 2\pi/(2n+1) \leq \sigma_l$. Для S_1 легко получить оценку

$$S_1 \leq Cc_j \sum_{i=1}^{2^j} \frac{1}{i(2n+1)2^{-j}} \leq C \frac{c_j 2^j j}{M_j}. \quad (8)$$

Далее, при условии $2n+1 \geq m_{0,j} > 2^j$ имеем $S_2 = 0$. Оценим S_3 . Пусть $N := 2n+1$ и $\tau(N)$ – количество делителей числа N . Нетрудно проверить, что при любом $b > 1$

$$S_3 \leq \frac{C}{N} \sum_{\substack{d|N, \\ d < N^{1-1/\alpha_j}}} d \ln d + C \ln N \sum_{r=p}^k c_{r,j}, \quad (9)$$

где p – наименьший из номеров s таких, что $m_{s,j} \geq m_{k,j}^{1-1/\alpha_j}$. Положим $b = \frac{1}{3} \ln \ln M_j$. Тогда можно показать, что при N , больших некоторой абсолютной константы N_0 , верны оценки

$$S'_3 \leq Cc_j \exp\left(-\frac{\ln N}{\ln \ln M_j}\right), \quad (10)$$

$$S''_3 \leq \frac{C}{\ln \ln M_j} \left(\frac{q_j}{\tilde{q}_j}\right)^p, \quad (11)$$

$$k-p \leq \frac{C\alpha_j}{\ln \ln M_j}. \quad (12)$$

Итак, с учетом (7) – (12) заключаем, что (1) – (5) для g_j имеют место. Убедимся, что $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^*(g) = 0$, откуда будет следовать сходимость к g интерполяционного процесса. Пусть n – достаточно большой номер. Определим

j из условия $m_{0,j} < 2n+1 \leq m_{0,j+1}$. Тогда в силу абсолютной сходимости

ряда $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ можно записать

$$T_{n,p}^*(g) \leq \sum_{k=1}^{j-1} T_{n,p}^*(g_k) + T_{n,p}^*(g_j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} T_{n,p}^*(g_k) \equiv V_1 + V_2 + V_3, \forall p.$$

Учитывая (5), можно так выбрать M_j , что будет верно, например неравенство $V_1 < 1/j$. В силу (3) имеем $V_2 < Cc_j$. Наконец, из условия $2n+1 \leq m_{0,j+1}$ находим $V_3 = 0$. Для завершения доказательства осталось

заметить, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ равномерно сходится к функции f на множест-

ве E , мера которого больше, чем $2\pi - \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 2\pi - \varepsilon$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Привалов А.А. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228 – 243.
2. Новиков В.В. О расходимости ряда Фурье функции со сходящимся интерполяционным процессом Лагранжа // Analysis Mathematica. 2003. Vol. 29. P. 289 – 317.

УДК 519.95: 681.31

А. А. Орел

МОДЕЛИРОВАНИЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Одной из признанных и часто используемых технологий моделирования бизнес-процессов является технология функционального моделирования IDEF0 на базе методологии SADT [1]. Однако получаемые на основе этой методологии модели не позволяют проводить имитационное моделирование построенных процессов для проверки корректности потоков работ. Существуют способы построения имитационных моделей на основе IDEF0-моделей с использованием раскрашенных сетей Петри.

В настоящей статье предлагается более простой способ имитационного моделирования, не требующий использования расширенных моделей сетей Петри. При этом возможно потребуется уточнить описание функций IDEF0-модели для выделения и уточнения потоков работ. Рассматривается задача построения сети Петри, моделирующей бизнес-процессы в некоторой предметной области. Для облегчения восприятия модели будем использовать блоки, объединяющие в рамках одной функции IDEF0-модели несколько альтернативных переходов сети Петри, которые возникают в

результате уточнения IDEF0-модели и могут потребовать проведения дополнительных консультаций аналитика, строящего имитационную модель, с экспертами в предметной области. Использование объединяющих блоков позволяет также включать в модель дополнительную информацию о механизмах (исполнителях), реализующих бизнес-процессы на основе данных, представленных дугами-механизмами IDEF0-модели.

Определим правила построения сети Петри на основе IDEF0-модели.

- Дугам IDEF0 – модели, не имеющим разветвлений (слияний), ставятся в соответствие позиции сети Петри, помеченные названиями IDEF0-дуг.
- Интерпретация в сети Петри разветвляющихся (сливающихся) дуг IDEF0-модели зависит от совместимости представляемых ими потоков данных. Если потоки альтернативны, то в сети Петри им соответствуют позиции с одним входом и несколькими выходами. В противном случае, они представляются несколькими позициями.
- Несколько разветвлений (слияний) IDEF0-дуг либо заменяются одним разветвлением (слиянием), либо IDEF0-дуга заменяется несколькими дугами сети Петри.
- Если дуга имеет как разветвления, так и слияния, то ее следует заменить несколькими дугами ранее рассмотренных типов.
- Функциональному блоку IDEF0-модели, не имеющему альтернативных выходов, ставится в соответствие переход сети Петри, содержащий название функционального блока.
- Если IDEF0-блок имеет альтернативные группы выходов, то каждой группе ставится в соответствие по переходу сети Петри. При этом переходы содержат названия альтернатив и объединяются в группу, именуемую аналогично IDEF0-блоку.
- Все переходы и группы переходов сети Петри заключаются в блоки, в нижних областях которых указаны названия механизмов соответствующих IDEF0-блоков.

В качестве примера, иллюстрирующего предлагаемый подход, рассмотрим фрагмент модели маршрутно-групповой технологии оказания кардиологической помощи больным [2, 3], представленный на рис. 1.

На рис. 2 представлен соответствующий фрагмент сети Петри, имитирующей различные варианты кардиологической помощи пациенту в рамках рассматриваемой технологии. Как видно из рис. 2, некоторым функциональным блокам IDEF0-модели соответствуют несколько сгруппированных переходов, каждый из которых служит для выделения возможного варианта потока работ. Использование кратных дуг позволяет минимизировать количество позиций сети Петри. При этом увеличивается количество фишек в текущих позициях, которые трактуются как копии или отдельные части документа, отправляемого различным потребителям информации.

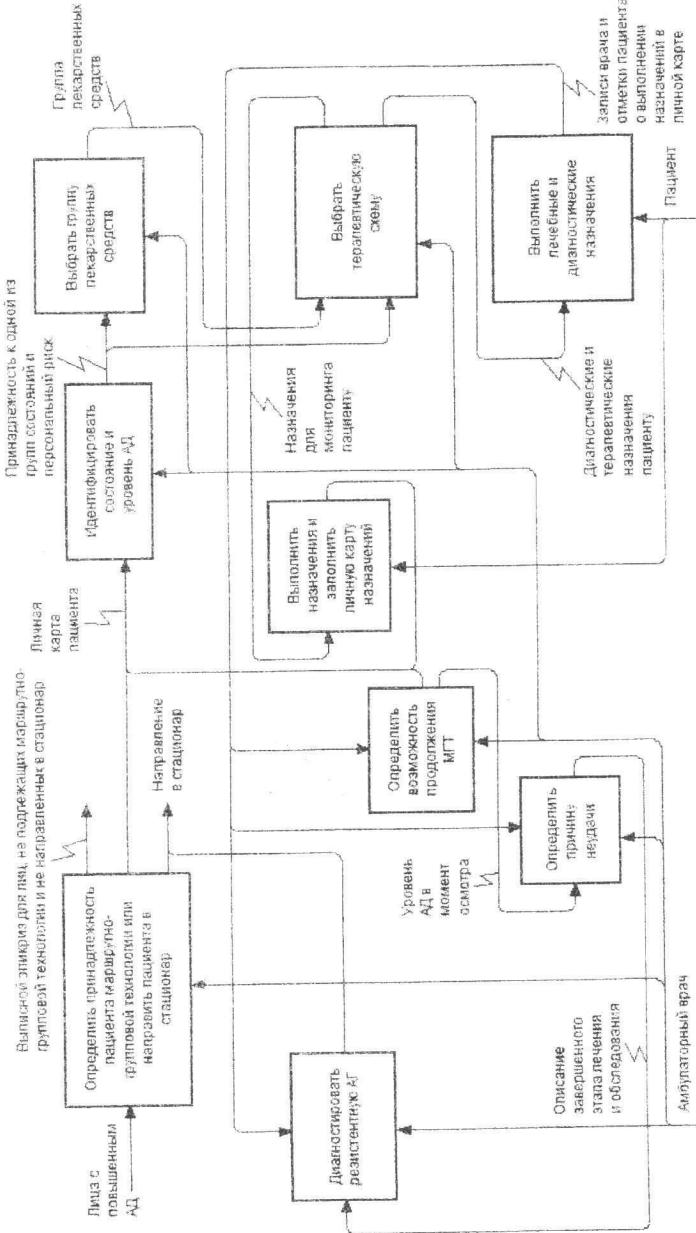
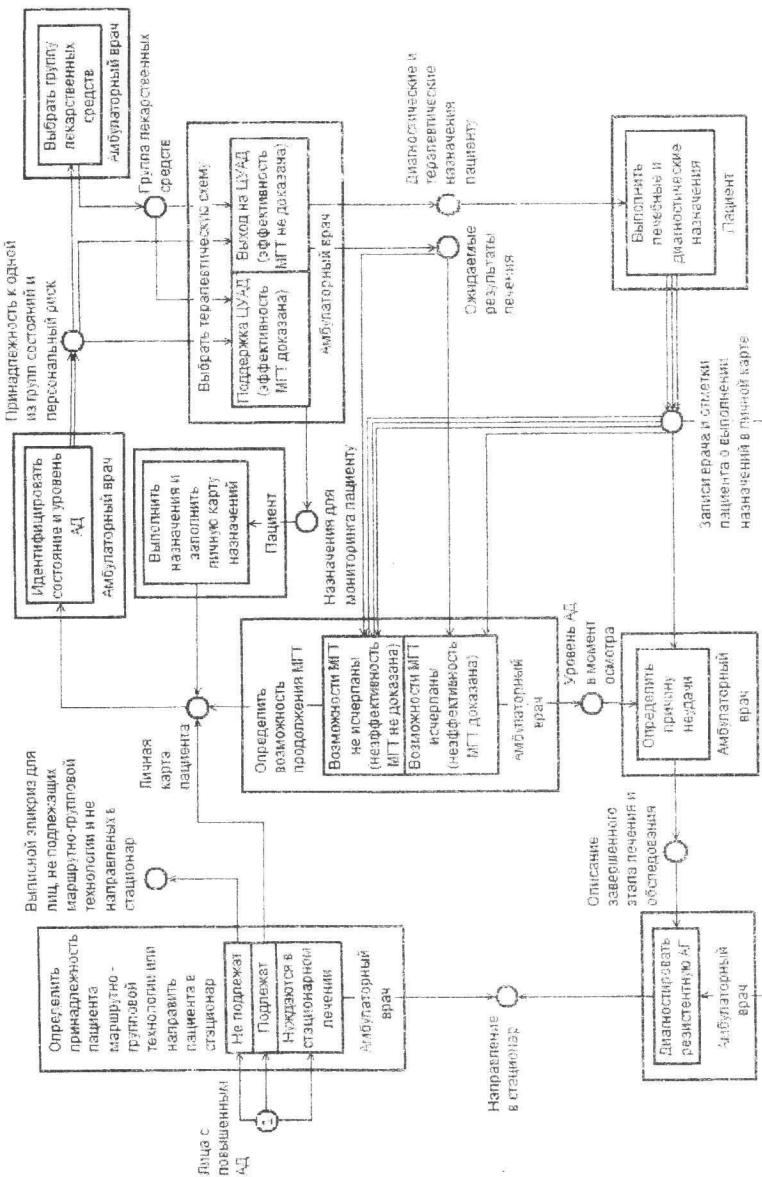


Рис. 1



2

Стартовая позиция сети имеет название «Лица с повышенным АД». Для запуска имитационной модели в данную позицию помещается фишка. Работа производится в интерактивном режиме. На каждом шаге из числа активизированных переходов выбирается переход, соответствующий рассматриваемому варианту потока работ. Для предлагаемой методологии удобно использовать разработанное автором компьютерное приложение. Проведение имитационного моделирования на построенной предлагаемым способом сети Петри позволяет оценить качество соответствующей функциональной IDEF0-модели и может потребовать ее уточнения или изменения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Марка Д. А., МакГоэн К. Методология структурного анализа и проектирования. М., 1993.
2. Орел А. А., Гриднев В. И., Петров Н. В., Котельникова Е. В. Новые методологические подходы проектирования информационно-аналитических систем в кардиологии // Кардиология: Эффективность и безопасность диагностики и лечения: Тез. докл. Рос. нац. конгресса кардиологов. Москва, 6 – 11 окт. 2001 г. М., 2001. С. 283.
3. Гриднев В. И., Орел А. А., Петров Н. В., Довгальевский П. Я. Маршрутно-групповая технология кардиологической помощи в системе «пациент – поликлиника – стационар» // Проблемы стандартизации в здравоохранении: Тез. докл. М., 2001. С. 113.

УДК 519.83

М. В. Пасечник

ИСХОДЫ, ДОПУСТИМЫЕ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА КОАЛИЦИЙ В ИГРЕ С КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Игра с квазиупорядоченными исходами представляет собой набор объектов вида

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F \rangle, \quad (1)$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i , A – множество исходов, ω_i – бинарное отношение на A , выражающее предпочтения игрока i , F – функция реализации, представляющая собой отображение множества $X_N = \prod_{i \in N} X_i$ ситуаций игры G в множестве ее ис-

ходов: $F: X_N \rightarrow A$.

Определение. Стратегия $x_S \in X_S$ называется *возражением* коалиции S на исход a , если при любой стратегии $y_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}$ выполняется $F(x_S, y_{N \setminus S}) > a$. Исход a называется *допустимым* для коалиции S , если она не имеет на него возражений в форме стратегий. В противном случае, a называется *недопустимым* для коалиции S .

Множество исходов, допустимых в игре G для коалиции S , будем обозначать $D_S(G)$:

$$D_S(G) = \{a \in A : \exists x_S \in X_S \quad (\forall y_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}) \quad F(x_S, y_{N \setminus S}) > a\}.$$

Пусть K – некоторое фиксированное семейство коалиций игры G . Определим K -допустимый исход игры G как исход, допустимый для всех коалиций из K . Обозначая через $D_K(G)$ множество K -допустимых исходов игры G , имеем $D_K(G) = \bigcap_{S \in K} D_S(G)$.

Частным случаем игры с квазиупорядоченными исходами является антагонистическая игра, то есть игра между двумя игроками с противоположными интересами. Для антагонистической игры с упорядоченными исходами выявлена структура множества допустимых исходов. Введем некоторые определения.

Исход a является *гарантированным исходом* игрока 1, если существует такая стратегия $x \in X$, что выполняется $(\forall y \in Y) F(x, y) \geq a$. Если последнее неравенство заменить на строгое, то получится *строго гарантированный исход*. Множество

$$U_1(G) = \{a \in A : (\exists x \in X) (\forall y \in Y) F(x, y) \geq a\}$$

есть множество гарантированных исходов игрока 1, а множество

$$U_1^*(G) = \{a \in A : (\exists x \in X) (\forall y \in Y) F(x, y) > a\}$$

есть множество строго гарантированных исходов игрока 1. Множество $D_1(G) = (U_1^*(G))'$ представляет собой множество исходов, допустимых для игрока 1.

Исход a является *незапрещенным исходом* игрока 1, если для любой стратегии $y \in Y$ найдется такая стратегия $x \in X$, что выполняется $F(x, y) \geq a$.

Множеством незапрещенных исходов игрока 1 является множество

$$V_1(G) = \{a \in A : (\forall y \in Y) (\exists x \in X) F(x, y) \geq a\},$$

а множество строго незапрещенных исходов игрока 1 есть

$$V_1^*(G) = \{a \in A : (\forall y \in Y) (\exists x \in X) F(x, y) > a\}.$$

Множества $U_1(G), U_1^*(G), V_1(G), V_1^*(G)$ называются *характеристическими множествами* игрока 1. Для игрока 2 его характеристические множества определяются двойственным образом.

Множество $D(G)$ допустимых (индивидуально рациональных) исходов антагонистической игры с упорядоченными исходами задается равенством

$$D(G) = D_1(G) \cap D_2(G) = (U_1^*(G))' \cap (U_2^*(G))' = (U_1^*(G) \cup U_2^*(G))'.$$

Определим следующие множества:

- 1) $Z(G) = V_1(G) \cap V_2(G)$ – центр игры;
- 2) $P(G) = (V_1(G) \cup V_2(G))' = (V_1(G))' \cap (V_2(G))'$ – периферия игры;
- 3) $R(G) = R_1(G) \cup R_2(G)$, где

$$R_1(G) = (V_1(G) \setminus U_1^*(G)) \setminus V_2(G) = V_1(G) \cap D_1(G) \cap (V_2(G))',$$

$$R_2(G) = (V_2(G) \setminus U_2^*(G)) \setminus V_1(G) = V_2(G) \cap D_2(G) \cap (V_1(G))',$$

называется кольцом игры.

ТЕОРЕМА (структурата множества индивидуально рациональных исходов в антагонистической игре с упорядоченными исходами).

В антагонистической игре с упорядоченными исходами $G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle$ множество всех индивидуально рациональных исходов может быть представлено в виде непересекающегося объединения следующих трех множеств: центра, кольца и периферии, то есть

$$D(G) = Z(G) \cup R(G) \cup P(G).$$

Доказательство теоремы проводится в три шага.

1-й шаг. Устанавливается включение $Z(G) \cup R(G) \cup P(G) \subseteq D(G)$.

Доказаны следующие три вспомогательных леммы.

ЛЕММА 1. В любой антагонистической игре G с упорядоченными исходами выполнено включение $Z(G) \subseteq D(G)$.

ЛЕММА 2. Справедливы следующие включения:

$$R_1(G) \subseteq D(G), R_2(G) \subseteq D(G).$$

ЛЕММА 3. Справедливо следующее включение: $P(G) \subseteq D(G)$.

2-й шаг. Проверяется, что множества $Z(G), R(G), P(G)$ попарно не пересекаются.

3-й шаг. Устанавливается обратное включение:

$$D(G) \subseteq Z(G) \cup R(G) \cup P(G).$$

Итак, всякий допустимый исход игры G принадлежит точно одному из трех попарно непересекающихся подмножеств: либо центру $Z(G)$, либо кольцу $R(G)$, либо периферии $P(G)$.

УДК 512.56

В. Б. Поплавский

О РАВЕНСТВЕ ОБРАТНЫХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ СИММЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАТРИЦ

Введенные автором ранее [1] понятия ориентированных объемов и определителей позволяют определить ориентированные присоединенные матрицы для произвольной квадратной булевой матрицы с элементами из

некоторой булевой алгебры. В статье доказывается равенство обратной матрицы симметрической разности ее ориентированных присоединенных матриц.

Придерживаясь терминологии и системы обозначений, выбранной в [1 – 4], определим для булевой матрицы $A = (a_j^i)$ ($i, j = 1, \dots, n$) над некоторой булевой алгеброй $\langle B, \cup, \cap, ', \emptyset, I \rangle$ присоединенные булевые матрицы следующим образом.

Четным или нечетным (ориентированным) алгебраическим дополнением элемента, расположенного в i -й строке и j -м столбце квадратной

булевой матрицы A назовем ориентированные объемы $\{A\}_j^i = \overset{+}{\nabla}(\text{del}_j^i(A))$,

$\{\bar{A}\}_j^i = \bar{\nabla}(\text{del}_j^i(A))$, если $(i + j)$ есть четное число, и $\{\overset{+}{A}\}_j^i = \bar{\nabla}(\text{del}_j^i(A))$,

$\{\bar{A}\}_j^i = \overset{+}{\nabla}(\text{del}_j^i(A))$, если сумма $(i + j)$ – нечетная. Здесь через $\text{del}_j^i(A)$ обозначена матрица, полученная из матрицы A удалением i -й строки и j -го столбца при условии, что остальные строки и столбцы сохраняют тот же порядок следования друг за другом.

Четной или нечетной (ориентированной) присоединенной булевой матрицей для матрицы A назовем матрицу $\overset{+}{\text{adj}} A$ (или $\bar{\text{adj}} A$), элементами

которой являются $(\text{adj } A)_j^i = \{A\}_j^i$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Можно показать справедливость формул разложения

$$\overset{\pm}{\nabla} A = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P}^{\pm} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap a_n^{\alpha_n}) = \bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap \{\overset{\pm}{A}\}_k^i) \quad \text{ориентированных}$$

объемов по элементам произвольной строки (или столбца:

$$\overset{\pm}{\nabla} A = \bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap \{\overset{\pm}{A}\}_j^k). \quad \text{Для любой квадратной булевой матрицы } A \text{ также}$$

$$\text{справедливо} \quad \bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap \{\overset{\pm}{A}\}_k^j) = \bar{\nabla}(\overset{\pm}{\{A\}_{[i] \Rightarrow [j]}}) = \bar{\nabla}(\overset{\pm}{\{A\}_{[i] \Rightarrow [j]}}) = \nabla(\overset{\pm}{\{A\}_{[i] \Rightarrow [j]}}) \quad \text{и}$$

$$\bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap \{\overset{\pm}{A}\}_j^k) = \nabla(\overset{\pm}{\{A\}_{[i] \Rightarrow [j]}}) = \bar{\nabla}(\overset{\pm}{\{A\}_{[i] \Rightarrow [j]}}) = \nabla(\overset{\pm}{\{A\}_{[i] \Rightarrow [j]}}), \text{ если } i \neq j. \quad \text{Здесь сим-}$$

волами $\overset{\pm}{\{A\}_{[i] \Rightarrow [j]}}$ и $\overset{\pm}{\{A\}_{[i] \Rightarrow [j]}}$ обозначены матрицы, полученные из матрицы A ,

заменой j -й строки (или j -го столбца) строкой (соответственно столбцом) этой же матрицы с номером i . Эти формулы дают тождество

$$\left[(A \prod^+ adj A) \setminus (A \prod^- adj A) \right] \cup \left[(A \prod^- adj A) \setminus (A \prod^+ adj A) \right] = Det A \cap E, \quad (1)$$

где E – единичная булева матрица.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если для матрицы A существует A^{-1} , то $Det A = Det A^{-1} = I$, кроме того, $RDet A = RDet A^{-1}$, $LDet A = LDet A^{-1}$.

Это утверждение непосредственно получается из формул, полученных в [1] для ориентированных объемов произведения произвольных квадратных булевых матриц.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если существует обратная матрица A^{-1} для квадратной матрицы A , то она равна симметрической разности ориентированных присоединенных матриц:

$$A^{-1} = (adj A \setminus adj A) \cup (adj A \setminus adj A).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (1) и тем, что $Det A = Det A^{-1} = I$. Тогда

$$\left[(A \prod^+ adj A) \setminus (A \prod^- adj A) \right] \cup \left[(A \prod^- adj A) \setminus (A \prod^+ adj A) \right] = Det A \cap E = E = A \prod A^{-1}.$$

Пусть Θ есть нулевая булева матрица, тогда последнее равенство равносильно условиям:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (A \prod A^{-1}) \cap \left[(A \prod^+ adj A) \setminus (A \prod^- adj A) \right] \cup \left[(A \prod^- adj A) \setminus (A \prod^+ adj A) \right]' = \Theta \\ (A \prod A^{-1})' \cap \left[(A \prod^+ adj A) \setminus (A \prod^- adj A) \right] \cup \left[(A \prod^- adj A) \setminus (A \prod^+ adj A) \right] = \Theta \end{array} \right\}' \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} [(A \prod A^{-1}) \cap (A \prod^+ adj A)' \cap (A \prod^- adj A)] \cup [(A \prod A^{-1}) \cap (A \prod^- adj A) \cap (A \prod^+ adj A)] = \Theta \\ [(A \prod A^{-1})' \cap (A \prod^+ adj A) \cap (A \prod^- adj A)'] \cup [(A \prod A^{-1})' \cap (A \prod^- adj A) \cap (A \prod^+ adj A)'] = \Theta \end{array} \right\} \rightarrow \\ & \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (A \prod A^{-1}) \cap [(A \prod \left[\begin{array}{c} adj A \cup adj A \end{array} \right])'] = \Theta \\ A \prod (A^{-1} \cap adj A \cap adj A) = \Theta \\ (A \prod^+ adj A) \cap \left[A \prod (A^{-1} \cup adj A) \right]' = \Theta \\ (A \prod^- adj A) \cap \left[A \prod (A^{-1} \cup adj A) \right] = \Theta. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

При получении последнего следствия, использовались дистрибутивность конъюнктного произведения относительно объединения матриц и то, что выполняется $A \prod (B \cap C) \subset (A \prod B) \cap (A \prod C)$ для произвольных квадратных

булевых матриц A, B и C . Последняя система дает эквивалентную ей систему условий:

$$\begin{cases} (A \prod A^{-1}) \subset A \prod (\overset{+}{adj} A \cup \overset{-}{adj} A) \\ A \prod (A^{-1} \cap \overset{+}{adj} A \cap \overset{-}{adj} A) = \Theta \\ (A \prod \overset{+}{adj} A) \subset A \prod (A^{-1} \cup \overset{-}{adj} A) \\ (A \prod \overset{-}{adj} A) \subset A \prod (A^{-1} \cup \overset{+}{adj} A). \end{cases}$$

Умножим слева каждое условие последней системы на обратную матрицу. Получим

$$A \prod A^{-1} = E \rightarrow \begin{cases} A^{-1} \subset \overset{+}{adj} A \cup \overset{-}{adj} A \\ A^{-1} \cap \overset{+}{adj} A \cap \overset{-}{adj} A = \Theta \\ \overset{+}{adj} A \subset A^{-1} \cup \overset{-}{adj} A \\ \overset{-}{adj} A \subset A^{-1} \cup \overset{+}{adj} A \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A^{-1} \subset (\overset{+}{adj} A \setminus \overset{-}{adj} A) \cup (\overset{-}{adj} A \setminus \overset{+}{adj} A) \\ \overset{+}{adj} A \setminus \overset{-}{adj} A \subset A^{-1} \\ \overset{-}{adj} A \setminus \overset{+}{adj} A \subset A^{-1}. \end{cases}$$

Таким образом, обратная матрица должна быть вида

$$A^{-1} = (\overset{+}{adj} A \setminus \overset{-}{adj} A) \cup (\overset{-}{adj} A \setminus \overset{+}{adj} A),$$

что завершает доказательство.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Поплавский В. Б. Ориентированные определители произведения булевых матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 111 – 114.
2. Rudeanu S. Boolean functions and equations. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1974. xix+442 p.
3. Rutherford D. E. Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6, № 1. P. 49 – 53.

УДК 517.95

Д. В. Поплавский

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ БОГОЯВЛЕНСКОГО*

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x + 6v_x, \quad v_t = 2v_{xxx} - 6uv_x, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad (2)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376) и РФФИ (проект 04-01-00007).

$$\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \Big|_{x=0} = u_k(t), \quad \frac{\partial^{k-1} v}{\partial x^{k-1}} \Big|_{x=0} = v_k(t), \quad k = \overline{1,3}. \quad (3)$$

Здесь $u_k, v_k, k = \overline{0,3}$, – непрерывные комплекснозначные функции.

В настоящей статье приводятся необходимое и достаточное условия разрешимости задачи (1) – (3) (см. теоремы 1 и 2).

Пусть $D = \{(x, t) : x \geq 0, t \geq 0\}$. Обозначим через J множество вектор-функций $(f(x, t), g(x, t))$ таких, что функции

$$f, f_t, f_x, f_{xt}, f_{xx}, f_{xxt}, f_{xxx}, f_{xxxx}, g, g_t, g_x, g_{xx}, g_{xxx}$$

непрерывны в D и суммируемы на полуоси $x \geq 0$ при каждом фиксированном $t \geq 0$. Будем говорить, что функции $\{u(x, t), v(x, t)\}$ принадлежат классу K , если вектор $(u(x, t), v(x, t)) \in J$ и функции

$$xu, u^2, (1+x)u^3, x^2u_x, (1+x)u_x^2, xu_{xxx}, x^2u_{xxxx}, x^2u_{xxxxx},$$

$$uu_x, (1+x^2)u^2u_x, (1+x)uu_{xx}, (1+x^2)u_xu_{xx}, (1+x^2)uu_{xxx},$$

$$xv_{xx}, x^2v_{xxx}, (1+x)uv, (1+x^2)uv_x, (1+x^2)u_xv$$

суммируемы на полуоси $x \geq 0$ при каждом фиксированном $t \geq 0$.

Решение задачи (1) – (3) ищется в классе K .

Система (1) равносильна [1] уравнению Лакса $\dot{L} = AL - LA$, где

$$Ly = y^{(4)} - 2(yu')' + (v + u^2 - u_{xx})y, \quad Ay = -4y''' + 6uy' + 3u_x y.$$

Здесь и в дальнейшем «штрих» обозначает дифференцирование по x , а «точка» – дифференцирование по t .

При фиксированном $t \geq 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение по x :

$$Ly = \lambda y, \quad \lambda = \rho^4, \quad x > 0. \quad (4)$$

Пусть $\Phi_k(x, t, \lambda)$, $k = \overline{1,4}$, – решения уравнения (4) при условиях $\Phi_k^{(j-1)}(0, t, \lambda) = \delta_{jk}$, $j = \overline{1, k}$; $\Phi_k(x, t, \lambda) = O(\exp(\rho r_k x))$, $x \rightarrow \infty$. Здесь r_k – корни уравнения $r^4 - 1 = 0$, занумерованные так, что

$$\operatorname{Re}(\rho r_1) < \operatorname{Re}(\rho r_2) < \operatorname{Re}(\rho r_3) < \operatorname{Re}(\rho r_4).$$

Положим $M_{kj}(t, \lambda) = \Phi_k^{(j-1)}(0, t, \lambda)$, $k < j$; $M_{kj}(t, \lambda) = \delta_{kj}$, $k \geq j$; $M(t, \lambda) = [M_{kj}(t, \lambda)]_{k,j=\overline{1,4}}$. Матрица $M(t, \lambda)$ называется матрицей Вейля для уравнения (4). Введем матрицу $F(t, \lambda) = [F_{kj}(t, \lambda)]_{k,j=\overline{1,4}}$ по формуле

$$F = \begin{pmatrix} 3u_2, & 6u_1, & 0, & -4 \\ -4\lambda + 4v_1 + 4u_1^2 - u_3, & u_2, & -2u_1, & 0 \\ 4v_2 + 8u_1u_2 - u_4, & -4\lambda + 4v_1 + 4u_1^2, & -u_2, & -2u_1 \\ F_{41}, & 8v_2 + 12u_1u_2 - u_4, & -4\lambda + 4v_1 - u_3, & -3u_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} F_{41} &= -2u_1(\lambda - v_1 - u_1^2 - 3u_3) + 4v_3 + 8u_2^2 - u_5, \\ u_4 &= -\dot{u}_1 + 6u_1u_2 + 6v_2, \quad u_5 = -\dot{u}_2 + 6u_1u_3 + 6u_2^2 + 6v_3. \end{aligned} \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{u(x,t), v(x,t)\}$ – решение задачи (1) – (3). Обозначим $M^0(\lambda) = [M_{jk}^0(\lambda)]_{j,k=\overline{1,4}} := [M_{jk}(0,\lambda)]_{j,k=\overline{1,4}}$ – элементы матрицы Вейля для $\{u_0(x), v_0(x)\}$. И пусть матрица $R(t,\lambda) = [R_{jk}(t,\lambda)]_{j,k=\overline{1,4}}$ есть решение задачи Коши

$$R_t(t,\lambda) = -R(t,\lambda)F(t,\lambda), \quad R(t,\lambda)|_{t=0} = E, \quad (7)$$

где E – единичная матрица.

Тогда элементы матрицы Вейля $M(t,\lambda)$ удовлетворяют следующим эволюционным уравнениям по переменной t :

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_{1j} &= (F_{j1} + F_{j2}M_{12} + F_{j3}M_{13} + F_{j4}M_{14}) - \\ &- M_{1j}(F_{11} + F_{12}M_{12} + F_{13}M_{13} + F_{14}M_{14}), \quad j = 2,3,4, \\ \dot{M}_{2j} &= (F_{j2} + F_{j3}M_{23} + F_{j4}M_{24}) - M_{2j}(F_{22} + F_{23}M_{23} + F_{24}M_{24}) + \\ &+ (-M_{1j} + M_{12}M_{2j})(F_{21} + F_{13}M_{23} + F_{14}M_{24}), \quad j = 3,4, \\ \dot{M}_{34} &= (F_{43} + F_{44}M_{34}) - M_{34}(F_{33} + F_{34}M_{34}) + \\ &+ (-M_{24} + M_{23}M_{34})(F_{23} + F_{24}M_{34}) + \\ &+ (-M_{14} + M_{12}M_{24} + M_{13}M_{34} - M_{12}M_{23}M_{34})(F_{13} + F_{14}M_{34}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} M_{1k}(t,\lambda) &= (-1)^{k+1} \frac{\Delta_k^{(1)}(t,\lambda)}{\Delta_1^{(1)}(t,\lambda)}, \quad k = \overline{2,4}, \\ M_{2k}(t,\lambda) &= (-1)^k \frac{\Delta_k^{(2)}(t,\lambda)}{\Delta_2^{(2)}(t,\lambda)}, \quad k = 3,4, \\ M_{34}(t,\lambda) &= -\frac{\Delta_4^{(3)}(t,\lambda)}{\Delta_3^{(3)}(t,\lambda)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta_p^{(1)} = \det[R_{js} - M_{1j}^0 R_{1s}]_{j=\overline{2,4}, s=\overline{1,4} \setminus p}, \quad p = \overline{1,4},$

$\Delta_p^{(2)} = \det[R_{js} - M_{2j}^0 R_{2s} + (-M_{1j}^0 + M_{12}^0 M_{2j}^0)R_{1s}]_{j=\overline{3,4}, s=\overline{2,4} \setminus p}, \quad p = \overline{2,4},$

$\Delta_p^{(3)} = [R_{4k} - M_{34}^0 R_{3k} + (-M_{24}^0 + M_{23}^0 M_{34}^0)R_{2k} +$

$+ (-M_{14}^0 + M_{12}^0 M_{24}^0 + M_{13}^0 M_{34}^0 - M_{12}^0 M_{23}^0 M_{34}^0)R_{1k}]_{k=\overline{3,4} \setminus p}, \quad p = 3,4.$

Частично теорема 1 получена в [2]. Используя теорему 1, строим алгоритм решения краевой задачи (1) – (3).

Алгоритм 1. Пусть заданы функции $u_k(t), v_k(t), k = \overline{0,3}$, такие, что

$u_0(t), v_0(t) \in L(0, \infty)$, $u_0(0) = u_1(0)$, $v_0(0) = v_1(0)$ и $\dot{u}_1(t)$, $\dot{u}_2(t)$ непрерывны.

1. Вычисляем функции $u_4(t)$, $u_5(t)$ по формулам (6).
2. Находим матрицу $F(t, \lambda) = [F_{kj}(t, \lambda)]_{k,j=1,4}$ по формуле (5).
3. Находим матрицу $R(t, \lambda)$, решая задачу (7).
4. Находим матрицу Вейля $M(t, \lambda)$ при всех $t \geq 0$ по формулам (9).
5. Находим функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$, решая обратную задачу по $M(t, \lambda)$ методом, изложенным в [3, 4].

ТЕОРЕМА 2. Пусть матрица $M(t, \lambda)$ построена по данным функциям u_k, v_k , $k = \overline{0, 3}$, согласно шагам (1) – (5) алгоритма 1. Предположим, что существуют функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ из класса K такие, что $M(t, \lambda)$ есть матрица Вейля для уравнения (4). Тогда $\{u(x, t), v(x, t)\}$ есть решение задачи (1) – (3).

Таким образом, разрешимость задачи (1) – (3) эквивалентна разрешимости соответствующей обратной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991. 319 с.
2. Поплавский Д. В. Метод обратной спектральной задачи для системы Богоявленского на полуоси // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 115 – 117.
3. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001. 499 с.
4. Jurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002. 303 с.

УДК 517.51

Е. В. Разумовская, В. Г. Тимофеев

О ФУНКЦИЯХ, ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ В СЛОЕ

Пусть $C = C(R^n)$ – пространство непрерывных ограниченных функций на R^n , $n \geq 2$, с нормой $\|u\|_C = \sup\{|u(x)| : x \in R^n\}$, $L_\infty = L_\infty(R^n)$ – пространство измеримых, существенно ограниченных функций на R^n с нормой $\|u\|_\infty = \text{ess sup}\{|u(x)| : x \in R^n\}$.

Обозначим через U класс функций $u \in C$, для которых значение оператора Лапласа $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ принадлежит пространству $L_\infty(R^n)$, а сам оператор понимается в обобщенном, по Соболеву, смысле.

В [1] для всякой функции $u \in U$ получено интегральное представление

$$u(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\partial\Pi_h} \int u(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} d\xi - \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\Pi_h} \int \Delta u(\xi) G(x, \xi) d\xi, \quad (1)$$

где Π_h – слой в R^n , определяемый следующим образом:

$$\Pi_h = \{\xi = \xi(\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n : -h < \xi_1 < h, -\infty < \xi_i < \infty, i = 2, \dots, n\}, \quad h > 0, \quad x \in \Pi_h,$$

а $G(x, \xi)$ – функция Грина слоя Π_h [1].

Представление (1) позволяет ввести понятие гармонической и полигармонической в Π_h функций. Следуя И. И. Привалову [2], будем считать $u(x)$ полигармонической порядка n в Π_h , если она удовлетворяет следующему условию: какова бы ни была область $D', \overline{D'} \subset \Pi_h$, для всех точек x выражение

$$\Delta_h u(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\partial\Pi_h} \int u(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} d\xi - u(x) \quad (2)$$

представляет собой полигармоническую функцию порядка $n-1$.

Подобный взгляд позволяет сформулировать и доказать важные для практического использования свойства этих функций [3], некоторые из которых мы здесь и приводим.

ТЕОРЕМА 1. Если последовательность функций $\{u_k(x)\}_{k \in N}$, полигармонических порядка n в Π_h , сходится в слое, причем сходимость равномерная внутри Π_h , то предельная функция будет полигармонической порядка n в Π_h .

Доказательство. Для гармонических функций эта теорема справедлива ($n=1$). Докажем её по индукции.

Положим, что утверждение теоремы для полигармонических функций порядка $n-1$ уже доказано. Пусть $x \in D'$, $\overline{D'} \subset \Pi_h$ и $\overline{D'} \subset D''$, $\overline{D''} \subset \Pi_h$. Рассмотрим выражения

$$\Delta_h u_k(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\partial\Pi_h} \int u_k(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} d\xi - u_k(x). \quad (3)$$

Они представляют собой полигармонические функции порядка $n-1$ в области D' . По условию теоремы последовательность $\{u_k(\xi)\}$ сходится равномерно в $\overline{D''}$. Последнее означает, что для любой точки ξ этой области имеем $|u_{N+p}(\xi) - u_N(\xi)| < \varepsilon$, $N = N(\varepsilon)$, $p \geq 0$.

Отсюда

$$\Delta_h u_{N+p}(x) - \Delta_h u_N(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\partial\Pi_h} \int_{\Pi_h} (u_{N+p}(\xi) - u_N(\xi)) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} d\xi - \\ - (u_{N+p}(x) - u_N(x)).$$

В силу свойств $G(x, \xi)$ [1], получаем

$$|\Delta_h u_{N+p}(x) - \Delta_h u_N(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad (4)$$

Из (4) вытекает, что последовательность $\{\Delta_h u_k(x)\}$ полигармонических функций порядка $n-1$ сходится равномерно в D' к некоторой предельной функции $H_h(x)$ – полигармонической порядка $n-1$ в D' . Устремляя в (3) $k \rightarrow \infty$, окончательно получаем

$$H_h(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\partial\Pi_h} \int_{\Pi_h} u(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} d\xi - u(x).$$

то есть $u(x)$ – полигармоническая функция порядка n в Π_h . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если семейство функций $\{u(x)\}$, полигармонических порядка n в Π_h , равномерно ограничено внутри Π_h , то оно компактно внутри Π_h .

Доказательство утверждения для $n=1$ проводится по схеме, изложенной в [4, 5]. Полагая теорему доказанной для полигармонических функций порядка $n-1$ в Π_h , докажем её для полигармонических функций порядка n .

В силу (2) $\{\Delta_h u(x)\}$ являются полигармоническими порядка $n-1$ в D' , $\overline{D'} \subset \Pi_h$. По условию теоремы это семейство равномерно ограничено и по предположению индукции – компактно внутри D' , то есть из всякой его бесконечной части можно выбрать бесконечную подпоследовательность $\{\Delta_h u_k(x)\}$, равномерно сходящуюся внутри D' к функции, полигармонической в D' порядка $n-1$.

Можно доказать, что последовательность

$$-\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\partial\Pi_h} \int_{\Pi_h} u_k(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} d\xi$$

ограничена в совокупности в D' и равностепенно непрерывна в ней. По теореме Арцела из неё можно выделить подпоследовательность

$$-\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\partial\Pi_h} \int_{\Pi_h} u_{k_m}(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} d\xi,$$

равномерно сходящуюся внутри D' .

Последовательность функций

$$u_{k_m}(x) = -\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)\partial\Pi_h} \int u_{k_m}(\xi) \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n_\xi} d\xi - \Delta_h u_{k_m}(x)$$

будет сходиться равномерно, а по теореме 1 предельная функция будет полигармонической порядка n в D' . Выбор последовательности $u_{k_m}(x)$ зависит от области D' , поэтому, применяя диагональный отбор, получим последовательность нашего семейства, сходящуюся в Π_h к полигармонической функции порядка n , причем сходимость внутри Π_h будет равномерной. Теорема доказана.

Отметим без доказательства справедливость следующих теорем.

ТЕОРЕМА 3. Если последовательность функций $\{u_k(x)\}_{k \in N}$, полигармонических порядка n в слое Π_h , сходится равномерно внутри слоя к предельной функции $u(x)$ то после дифференцирования сколь угодно много раз данной последовательности получится последовательность, равномерно сходящаяся внутри Π_h , и она будет изображать соответствующую производную функции $u(x)$.

ТЕОРЕМА 4. Если последовательность функций $\{u_k(x)\}_{k \in N}$, полигармонических порядка n в слое Π_h , равномерно ограничена внутри слоя и сходится в некоторой его замкнутой подобласти, то она сходится всюду в Π_h , причём равномерно к полигармонической функции порядка n .

Замечание. Если рассмотреть класс $\left\{ \underbrace{S\Gamma\Gamma\dots\Gamma}_n \right\}$ субгармонических

функций, являющихся одновременно полигармоническими порядка n , определяемый одним из условий: $\Delta u \geq 0$ есть полигармоническая функция порядка $n-1$ или $\Delta_h u \geq 0$ есть полигармоническая функция порядка $n-1$, то для этого класса остаются справедливыми теоремы, аналогичные, например теоремам 3 и 4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимофеев В. Г. Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985. Т. 37, вып. 5. С. 676 – 689.
2. Привалов И. И., Пчелин Б. К общей теории полигармонических функций // Мат. сб. 1937. Т.2(44), №4. С. 745 – 758.
3. Тимофеев В. Г. О полигармонических в слое функциях // Современные проблемы функций и их приложения: Тез. докл. 12-й Сарат. зимней шк. 2004. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. С. 181 – 182.
4. Privaloff I. I. Sur les fonctions harmoniques // Мат. сб. 1925. Т. 32, вып. 3. С. 3 – 37.
5. Montel P. Sur quelques familles de fonctions harmoniques // Fund. Mat. 1935. Т. 25. Р. 388 – 407.

**ОБ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ
ОБОБЩЕННОГО КРИТЕРИЯ В ЗАДАЧАХ
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

1. Ключевой проблемой теории многокритериальной оптимизации является проблема построения обобщенного критерия. Под *критериальным пространством* будем понимать произвольное множество D , на котором задано конечное число отображений $f_k : D \rightarrow C_k$, где C_k – некоторое линейно упорядоченное множество, упорядоченное порядком \leq^k ($k \in K$). Всякое такое отображение f_k называется *локальным критерием* (или *показателем качества*). На множестве D возникает отношение предпочтения ω , определенное условием

$$a_1 \leq^\omega a_2 \Leftrightarrow (\forall k \in K) f_k(a_1) \leq^k f_k(a_2). \quad (1)$$

При отождествлении элементов, имеющих одинаковые показатели качества по всем критериям, отношение ω будет отношением порядка. Обобщенный критерий есть строго изотонное отображение φ упорядоченного множества $\langle D, \omega \rangle$ в некоторую цепь C . Заметим, что для количественных критериев (когда C_k ($k \in K$) и C есть цепь действительных чисел), отношение предпочтения ω становится предпочтением по Парето, а обобщенный критерий превращается в свертывание векторного критерия в скалярный. Нетрудно показать, что любое отношение порядка ω на множестве D может быть представлено формулой вида (1). Таким образом, с абстрактно-алгебраической точки зрения построение обобщенного критерия сводится к заданию строго изотонного отображения произвольного упорядоченного множества $\langle D, \omega \rangle$ в некоторую цепь C .

Каждому обобщенному критерию φ соответствует линейный квазипорядок ρ_φ , определенный условием

$$a_1 \leq^{\rho_\varphi} a_2 \Leftrightarrow \varphi(a_1) \leq \varphi(a_2),$$

причем симметричная часть этого квазипорядка совпадает с ядром отображения φ .

Определение 1. Будем говорить, что два обобщенных критерия φ_1 и φ_2 , заданные на упорядоченном множестве $\langle D, \omega \rangle$, естественно эквивалентны, если $\rho_{\varphi_1} = \rho_{\varphi_2}$.

Для практических целей естественно эквивалентные обобщенные критерии могут быть отождествлены (так как они дают одинаковое «итоговое» линейное упорядочение множества D). Однако на практике сущес-

стествует, как правило, множество неэквивалентных между собой обобщенных критериев. Для обеспечения единственности обобщенного критерия (с точностью до естественной эквивалентности) необходимо произвести сужение класса обобщенных критериев. В данной статье такое сужение производится за счет задания дополнительной информации для обобщенного критерия – указания его ядра. Точнее, решается следующая задача: каким должно быть отношение эквивалентности ε на упорядоченном множестве, чтобы любые два обобщенных критерия, ядра которых совпадают с ε , были естественно эквивалентными между собой?

2. Для решения сформулированной задачи введем следующие два понятия.

Определение 2. Отношение эквивалентности ε на упорядоченном множестве $\langle D, \omega \rangle$, а также соответствующее ему разбиение называется *картой*, если

a) на $\langle D, \omega \rangle$ существует обобщенный критерий φ , ядро которого ε_φ совпадает с ε ;

b) любые два обобщенных критерия φ_1, φ_2 на $\langle D, \omega \rangle$, для которых $\varepsilon_{\varphi_1} = \varepsilon_{\varphi_2} = \varepsilon_\varphi$, естественно эквивалентны между собой.

Определение 3. Отношение эквивалентности $\varepsilon \subseteq D^2$ называется *стабильным* на упорядоченном множестве $\langle D, \omega \rangle$, если фактор-отношение $\frac{\omega}{\varepsilon}$ является ациклическим.

Основной результат статьи дает следующая

ТЕОРЕМА. Для того чтобы отношение эквивалентности ε на упорядоченном множестве $\langle D, \omega \rangle$ было картой, необходимо и достаточно, чтобы оно было максимальным по включению среди стабильных эквивалентностей, все классы которых – антицепи.

Схема доказательства. Пусть ε – карта на $\langle D, \omega \rangle$. По условию a) существует на D обобщенный критерий φ , для которого $\varepsilon_\varphi = \varepsilon$. Из условия изотонности отображения φ следует, что его ядро ε_φ стабильно, а из того, что φ строго изотонно, получаем, что классы ε_φ – антицепи. Остается проверить условие максимальности. В противном случае отношение порядка, являющееся транзитивным замыканием фактор-отношения $\frac{\omega}{\varepsilon}$, не будет линейным на фактор-множестве D/ε . Поэтому найдутся два класса $C', C'' \in D/\varepsilon$, не сравнимых по указанному порядку. По теореме Шпильрайна существуют два таких линейных доупорядочения σ_1 и σ_2 данного порядка, что $C' <^{\sigma_1} C''$ и $C'' <^{\sigma_2} C'$. Пусть $\varphi_k : D \rightarrow D/\varepsilon$ – каноническое отображение D в цепь $\langle D/\varepsilon, \sigma_k \rangle$ ($k=1,2$). Тогда $\varepsilon_{\varphi_1} = \varepsilon_{\varphi_2} = \varepsilon$, однако

$\rho_{\Phi_1} \neq \rho_{\Phi_2}$. Необходимость установлена. Доказательство достаточности основано на следующем вспомогательном утверждении.

ЛЕММА 1. Пусть ε – максимальное по включению среди стабильных эквивалентностей в $\langle D, \omega \rangle$, все классы которых – антицепи. Тогда транзитивное замыкание фактор-отношения \mathcal{W}_ε является линейным порядком на D/ε , а каноническое отображение D на D/ε является обобщенным критерием, ядро которого совпадает с ε .

Возникает естественный вопрос о существовании карты для произвольного упорядоченного множества. Этот вопрос решается положительно. В самом деле, нетрудно убедиться, что в произвольном упорядоченном множестве $\langle D, \omega \rangle$ любая цепь стабильных эквивалентностей, все классы которых – антицепи, имеет мажоранту (а именно мажорантой цепи $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ таких эквивалентностей является эквивалентность $\varepsilon = \bigcup_{i \in I} \varepsilon_i$). Отсюда по

лемме Цорна следует существование максимальной стабильной эквивалентности $\bar{\varepsilon}$, все классы которой – антицепи. По доказанной теореме $\bar{\varepsilon}$ будет картой в упорядоченном множестве $\langle D, \omega \rangle$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
2. Розен В. В. Цель – оптимальность – решение. М.: Радио и связь, 1982.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном интервале $[0,1]$ дифференциальным выражением

$$l(y, \lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0,$$

и линейно независимыми двухточечными краевыми условиями, которые считаем нормированными:

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

$$U_j(y, \lambda) \equiv U_{j0}(y, \lambda) + U_{j1}(y, \lambda) := \\ := \sum_{s+k \leq \sigma_j} \lambda^s (\alpha_{jsk} y^{(k)}(0) + \beta_{jsk} y^{(k)}(1)) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $\alpha_{jsk}, \beta_{jsk} \in \mathbb{C}$, $\sigma_j \in \overline{0, n-1}$ есть порядок j -го краевого условия. Пусть $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$ есть суммарный порядок краевых условий (1).

Рассмотрим уравнение $l(y, \lambda) = 0$. Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ его характеристического уравнения попарно различны и отличны от нуля. Тогда при $\lambda \neq 0$ система функций $y_k(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_k x)$, $k = \overline{1, n}$, является фундаментальной системой решений (ф.с.р.) уравнения $l(y, \lambda) = 0$.

Введем в рассмотрение следующие вектор-столбцы при $k = \overline{1, n}$:

$$H_k(\lambda) = (U_1(y_k, \lambda), U_2(y_k, \lambda), \dots, U_n(y_k, \lambda))^T, \\ V_k(\lambda) = (U_{10}(y_k, \lambda), U_{20}(y_k, \lambda), \dots, U_{n0}(y_k, \lambda))^T, \\ W_k(\lambda) = e^{-\lambda \omega_k} (U_{11}(y_k, \lambda), U_{21}(y_k, \lambda), \dots, U_{n1}(y_k, \lambda))^T.$$

С использованием этих обозначений характеристический определитель (х.о.) пучка $L(\lambda)$ будет иметь вид

$$\Delta(\lambda) = \det(U_j(y_k, \lambda))_{j,k=1}^n = |H_1(\lambda), H_2(\lambda), \dots, H_n(\lambda)| = \\ = |V_1(\lambda) + e^{\lambda \omega_1} W_1(\lambda), V_2(\lambda) + e^{\lambda \omega_2} W_2(\lambda), \dots, V_n(\lambda) + e^{\lambda \omega_n} W_n(\lambda)|. \quad (2)$$

Известно, что отличные от нуля собственные значения пучка $L(\lambda)$ есть нули $\Delta(\lambda)$.

По аналогии с [1] положим $\chi_{J_k} = \sum_{\alpha \in J_k} \omega_\alpha$, где J_k , $k = 1, 2, \dots, N$, – произвольный набор из k различных натуральных чисел, изменяющихся от 1 до n . При $k = 0$ считаем $\chi_{J_0} = 0$.

Далее будет использоваться обозначение

$$[\eta]_\sigma = \eta_0 + \frac{\eta_1}{\lambda} + \dots + \frac{\eta_\sigma}{\lambda^\sigma}, \quad \eta_j \in \mathbb{C}.$$

Учитывая определение форм $U_j(\cdot, \lambda)$ в (1), чисел χ_{J_k} , вид ф.с.р. $y_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, n}$, и раскрывая х.о. (2), будем иметь

$$\Delta(\lambda) = \lambda^\sigma \sum_{J_k} [\Delta^{J_k}]_\sigma e^{\lambda \chi_{J_k}}. \quad (3)$$

Обозначим через M_Δ выпуклую оболочку тех точек χ_{J_k} , для которых $[\Delta^{J_k}]_\sigma \neq 0$. Многоугольник M_Δ назовем характеристическим многоугольником (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$.

Далее будем рассматривать следующее семейство решений уравнения $l(y, \lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ (это семейство было введено в [2]):

$$g(x, \lambda, \Gamma) := \begin{vmatrix} 0 & y_1(x, \lambda) \dots y_n(x, \lambda) \\ -\Gamma(\lambda) & H_1(\lambda) \dots H_n(\lambda) \end{vmatrix}, \quad (4)$$

зависящее от вектор-столбца $\Gamma := \Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \dots, \gamma_n(\lambda))^T$, который является параметром.

Раскладывая определитель (4) сперва по элементам первой строки, а затем каждое алгебраическое дополнение на сумму определителей аналогично тому, как это было сделано при получении формулы (3), находим

$$g(x, \lambda, \Gamma) = \lambda^\sigma \sum_{j=1}^n \sum_{J_k \setminus \{j\}} [g^{j, J_k}]_\sigma e^{\lambda(\omega_j x + \chi_{J_k \setminus \{j\}})}.$$

Обозначим через $M_{g(x, \cdot, \Gamma)}$ выпуклую оболочку тех точек $\omega_j x + \chi_{J_k \setminus \{j\}}$, для которых $[g^{j, J_k}]_\sigma \neq 0$. Пусть $M(\Gamma)$ есть выпуклая оболочка всех многоугольников $M_{g(x, \cdot, \Gamma)}$ при $x \in [0, 1]$. Назовем $M(\Gamma)$ характеристическим многоугольником вектора $\Gamma(\lambda)$.

Будем говорить, что целая вектор-функция экспоненциального типа (ц.в.-ф.э.т.) $\Gamma(\lambda)$ удовлетворяет условию (α) , если M_Δ имеет не менее двух точек касания с $M(\Gamma)$, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутренней точки к сторонам $M(\Gamma)$, на которых лежат точки касания (если точка касания — вершина, то таких перпендикуляров два), разбивают комплексную плоскость на секторы раствора меньше π .

Справедливы следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Если существуют ц.в.-ф.э.т. $\Gamma_j(\lambda) \in (\alpha)$, $j = \overline{1, n}$, такие, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ за исключением конечного множества

$$\text{rank}(\Gamma_1(\lambda), \Gamma_2(\lambda), \dots, \Gamma_n(\lambda)) = n,$$

то система собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) пучка $L(\lambda)$ n -кратно полна в $L_2[0, 1]$.

Естественными кандидатами на роль таких $\Gamma_j(\lambda)$ являются векторы $V_j(\lambda)$ и $W_j(\lambda)$, $j = \overline{1, n}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $V_{i_s} \in (\alpha)$, $s = \overline{1, k}$, $W_{j_t} \in (\alpha)$, $t = \overline{1, l}$, $k + l \geq n$, и для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ за исключением конечного множества

$$\text{rank}(V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_k}, W_{j_1}, W_{j_2}, \dots, W_{j_l}) = n,$$

то система с.п.ф. пучка $L(\lambda)$ n -кратно полна в $L_2[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 2. Если существуют m пар ($0 < m < n$) векторов $\{V_j, W_j\}$ таких, что $V_j \in (\alpha)$, $W_j \in (\alpha)$, то система с.п.ф. пучка $L(\lambda)$ m -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом.

Проверить, удовлетворяют или нет векторы V_j и W_j условию (α) , позволяют следующие леммы из [2], которые приводятся в новой формулировке, учитывающей введенные обозначения.

ЛЕММА 1. Для фиксированного j ($1 \leq j \leq n$) х.м. $M(V_j)$ содержится в выпуклой оболочке х.м. M_Δ и всех тех точек χ_{J_k} , для которых множество J_k содержит число j .

ЛЕММА 2. Для фиксированного j ($1 \leq j \leq n$) х.м. $M(W_j)$ содержится в выпуклой оболочке х.м. M_Δ и всех тех точек χ_{J_k} , для которых множество J_k не содержит число j .

Имеются примеры простых пучков $L(\lambda)$, которые не являются нормальными по терминологии [2] (то есть теорема об n -кратной полноте системы их с.п.ф. в пространстве $L_2[0,1]$ из [2] здесь не имеет места), но, тем не менее, из сформулированных теорем вытекает n -кратная полнота в $L_2[0,1]$ системы их с.п.ф. Из-за ограниченности объема статьи эти примеры здесь не приводятся.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М., 1983. Т. 9. С. 190 – 229.
2. Рыхлов В. С. On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operator // Spectral and Evolutional problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn mathematical School-Symposium. Simferopol, 1997. Vol. 7. P. 70 – 73.

УДК 517.51

Л. В. Сахно

ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОГО ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕСОВОГО КЛАССА С. Л. СОБОЛЕВА $W_{p,\sigma}^l$

В статье дана в терминах L_q -нормы характеристика весовых классов С. Л. Соболева $W_{p,\sigma}^l$.

Пусть $l = (l_1, \dots, l_n)$ – вектор с натуральными координатами, а G – область в \mathbf{R}^n вида $G = \{x : x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, \varphi(x') < x_n < \infty\}$, где функция φ удовлетворяет уравнению Гельдера

$$|\varphi(x') - \varphi(y')|^{l_n} \leq M \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - y_i|^{l_i}$$

(очевидно, что при $l_j > l_n$ функция φ не зависит от x_j).

Для вещественных $p \geq 1$

$$\|f\|_{L_{p,\sigma}(G)} = \|\rho^\sigma f\|_{L_p(G)},$$

где вес ρ определен равенством

$$\rho(x) = \min[1, x_n - \varphi(x')].$$

Нетрудно проверить, что функция ρ в приграничной полосе эквивалентна обобщенному расстоянию

$$\rho(x, \partial G) = \inf_{y \in \partial G} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^{\frac{q}{l_i}}.$$

Положим

$$\|f\|_{L_{p,\sigma}^l(G)} = \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{L_{p,\sigma}^l(G)} \quad \text{и} \quad \|f\|_{W_{p,\sigma}^l(G)} = \|f\|_{L_{p,\sigma}(G)} + \|f\|_{L_{p,\sigma}^l(G)},$$

где $D_i^{l_i} f$, $i = 1, \dots, n$, – обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные порядка l_i по i -й переменной.

Пусть $1 < p < q < \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} \leq 1$. Известна [1] оценка

$$\|f\|_{L_{q,\gamma}(G)} \leq C \|f\|_{W_{p,\sigma}^l(G)},$$

где $\gamma = \sigma - l_n(1 - \kappa)$ и константа C не зависит от f . Другими словами, имеет место вложение

$$W_{p,\sigma}^l(G) \subset L_{q,\gamma}(G).$$

Определим так называемые (p, q) -модули.

Пусть $v \in \mathbb{Z}^n$, $r \in \mathbb{N}$, e_i – орт i -й координатной оси, $h > 0$. Положим

$$\mu_{p,q}^{re_i}(h; G; l; f) = \left\| \left\| \Delta_i^r(h; G) f \left(x + vh^{\frac{l_i}{l}} \right) \right\|_{L_p} \right\|_{L_q[h^{\frac{l_i}{l}}]},$$

где $vh^{\frac{l_i}{l}} = \left(v_1 h^{\frac{l_i}{l}}, \dots, v_n h^{\frac{l_i}{l}} \right)$, $\|a_v\|_{L_p} = \left(\sum_v |a_v|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $L_q[h^{\frac{l_i}{l}}] = L_q \left(\prod_{j=1}^n (0, h^{\frac{l_j}{l}}) \right)$,

$\Delta_i^r(h; G) f$ – разность порядка r по i -й переменной на множестве G .

Определим слои R_k^H ($H > 2$) при натуральных k :

$$R_k^H = \left\{ x : x \in G, H^{-k} < x_n - \varphi(x') < 2H^{-k+1} \right\}.$$

Заметим, что равномерно относительно k $\rho(x) \sim H^{-k}$ при $x \in R_k^H$.

Обозначим

$$\left\| \mu_{p,q}^{re_i}(h; R_k^H; l; f) \right\|_{L_{p,\sigma}} = \left\| \mu_{p,q}^{re_i}(h; R_k^H; l; f) H^{-k\sigma} \right\|_{L_p}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $1 < p < q < \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} \leq 1$, $\gamma = \sigma - l_n(1 - \kappa)$.

Тогда эквивалентны

$$\|f\|_{L_{p,\sigma}^l(G)}$$

и

$$\sum_{i=1}^n \sup_{1 < h < h_0} h^{-l_i + l_i \kappa} \left\| \mu_{p,q}^{l_i e_i} (H^{-k \frac{l_i}{l}} h; R_k^H; l; f) \right\|_{l_{p,\gamma}},$$

причем из конечности второй полуформы следует существование указанных производных.

Замечание. Вторые полуформы в теореме при различных $H > 2$ эквивалентны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кочарли А. Ф. Некоторые весовые теоремы вложения в область с негладкой границей // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 128 – 146.

УДК 517.51: 518

С. Ю. Советникова

О СКОРОСТИ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА*

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода:

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} u(t) dt = f(x).$$

Пусть $u \in M \subset C[a,b]$, где $M = \{u(x) \in C[0,1] : u = A^* v, \|v\|_{L_2} \leq 1\}$.

Для решения этого уравнения рассмотрим метод регуляризации нулевого порядка. В этом методе приближение к решению находится из уравнения

$$\alpha u_\alpha + A^* Au_\alpha = A^* f.$$

Известно, что $u_\alpha(x) \rightarrow u$ при $\alpha \rightarrow 0$ в метрике пространства $L_2[a,b]$ [1], а если $u \in R(A^*)$, то и в метрике пространства $C[a,b]$ [2].

Обозначим через R_α следующий оператор:

$$R_\alpha = (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* \quad (\alpha > 0 \text{ – параметр}).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

Операторы $R_\alpha A$ являются операторами, аппроксимирующими функцию $u(x)$. Введем в рассмотрение величину

$$\Delta_1(R_\alpha A, M) = \sup \{ \|R_\alpha A u - u\|_C : u \in M \},$$

которая характеризует скорость аппроксимации функции $u(x)$ при применении операторов $R_\alpha A$.

ТЕОРЕМА. Справедливо представление

$$\Delta_1(R_\alpha A, M) = \max_x \left[\int_0^1 \left[\int_0^t \dots \int_0^t \underbrace{\Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha})}_{m} dt \dots dt \right]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

где $\Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha})$ – функция Грина краевой задачи:

$$\begin{aligned} & (-1)^m y^{(2m)} + \frac{1}{\alpha} y = \varphi, \\ & y(1) = y'(1) = \dots = y^{(m-1)}(1) = y^{(m)}(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0). \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство. Сначала получаем представление оператора $R_\alpha A$ в интегральном виде. Затем используем лемму из [3]:

ЛЕММА. Если K_α – интегральные операторы с ядрами $K_\alpha(x, \xi)$, такие, что $\|K_\alpha u - u\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ равномерно по

$$u(x) \in M = \{u(x) \in C[a,b] : u(x) = \int_a^b B(x,t)v(t)dt, \|v\|_{L_2[a,b]} \leq 1\},$$

то справедливо представление

$$\begin{aligned} \Delta_1(K_\alpha, M) & \equiv \sup \{ \|K_\alpha u - u\|_{C[a,b]} : u \in M \} = \\ & = \sup_{a \leq x \leq b} \left(\int_a^b \left(\int_a^x K_\alpha(x, \xi)B(\xi, t)d\xi - B(x, t) \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $K_\alpha(x, \xi)$ и $B(\xi, t)$ – ядра операторов $R_\alpha A$ и B соответственно.

Так как $A^{-1} = L$, где L – дифференциальный оператор:

$$y^{(m)} : y(0) = \dots = y^{(m-1)}(0),$$

а $Bv = \int_x^1 \frac{(t-x)^{m-1}}{(m-1)!} v(t)dt$, то отсюда получаем, что

$$R_\alpha A u = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha}) u(t) dt,$$

где $\Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha})$ – функция Грина краевой задачи (2).

Затем берем общий вид функции Грина дифференциального оператора из [4], при этом учитываем знак старшей производной в выражении (2). Проводим соответствующие выкладки, учитывая краевые условия, которым удовлетворяет функция Грина и следующие соотношения:

$$\int \Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha}) dt|_{t=0} = \frac{1}{np^{2m}} \Gamma^{(2m-1)}(x, 0, -\frac{1}{\alpha}) = 0,$$

$$\iint \Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha}) dt dt|_{t=0} = \frac{1}{np^{2m}} \Gamma^{(2m-2)}(x, 0, -\frac{1}{\alpha}) = 0,$$

$$\dots$$

$$\underbrace{\int \dots \int}_{m} \Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha}) dt \dots dt|_{t=0} = \frac{1}{np^{2m}} \Gamma^{(m)}(x, 0, -\frac{1}{\alpha}) = 0.$$

Таким образом, приходим к выражению (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т.153, № 1. С. 49 – 52.
2. Хромова Г. В. О регуляризации интегральных уравнений первого рода с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика. 1972. № 8(123). С. 94 – 104.
3. Хромова Г. В. О модулях непрерывности неограниченных операторов и оптимальности методов приближенного решения уравнений первого рода // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 133 – 135.
4. Хромова Г. В. Об оценке погрешности метода регуляризации Тихонова для интегральных уравнений с ядром Грина // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. 1992. № 4. С. 22 – 27.

УДК 517.518.82

Е. В. Сорина

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ ФИКСИРОВАННОЙ ШИРИНЫ

1. Пусть N – натуральное число, T – дискретная сетка вида $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$, $\Phi(\cdot)$ – дискретное многозначное отображение с образами в виде отрезков $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, причём $y_{2,k} \geq y_{1,k}, \forall k \in [0:N]$. Пусть далее $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$, а $\Pi_n(A, t, r) = [p_n(A, t) - r, p_n(A, t) + r]$ – полиномиальная полоса, где r – фиксированное число. Обозначим через

$$f(A, k) = \max \{ |p_n(A, t_k) + r - y_{2,k}|, |y_{1,k} - p_n(A, t_k) + r| \}.$$

Рассмотрим задачу

$$\rho(A) = \max_{k \in [0:N]} f(A, k) \rightarrow \inf_{A \in R^{n+1}}. \quad (1)$$

В задаче (1) требуется минимизировать наибольшее по всем $k \in [0:N]$ расстояние Хаусдорфа между образом многозначного отображения $\Phi(t_k)$ и соответствующим образом полиномиального отображения $\Pi_n(A, t, r)$ за счёт выбора вектора коэффициентов $A \in R^{n+1}$.

Далее будем также использовать обозначения

$$m = \max_{k \in [0:N]} \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right|, \quad M = \left\{ k \in [0:N] : \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right| = m \right\},$$

$$\rho^* = \inf_{A \in R^{n+1}} \rho(A).$$

Очевидно, что для всех $k \in [0:N]$ справедливо неравенство

$$f(A, k) \geq \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right|.$$

Следовательно, $\max_{k \in [0:N]} f(A, k) \geq \max_{k \in [0:N]} \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right|$, то есть

$$\rho(A) \geq m, \forall A \in R^{n+1}. \quad (2)$$

2. В данной статье ограничимся рассмотрением случая $N \leq n$.

ТЕОРЕМА. Задача (1) эквивалентна линейной относительно компонент (a_0, a_1, \dots, a_n) вектора A системе уравнений

$$a_0 + a_1 t_k + \dots + a_n t_k^n = \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} + \alpha_k \left(m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right| \right), \quad k \in [0:N], \quad (3)$$

где $\alpha_k \in [-1;1]$, $\forall k \in [0:N]$. При этом $\rho^* = m$.

Доказательство. 1. Сначала докажем, что решение системы (3) при любом наборе чисел $\alpha_k \in [-1;1]$, $k \in [0:N]$, является решением задачи (1). Как известно [1], определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^N \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^N \\ & & & \dots & \\ 1 & t_N & t_N^2 & \dots & t_N^N \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, система (3) всегда совместна.

Пусть A^* – решение системы (3) для некоторого набора $\alpha_k \in [-1;1]$, $k \in [0:N]$. Тогда, подставляя вместо $p_n(A^*, t_k)$ выражения из правой части системы (1), для функции $f(A^*, k)$ получим

$$\begin{aligned}
f(A^*, k) &= \max \left\{ \frac{y_{1,k} - y_{2,k}}{2} + r + \alpha_k \left(m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right| \right); \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r - \right. \\
&\quad \left. - \alpha_k \left(m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right| \right); \frac{y_{1,k} - y_{2,k}}{2} + r - \alpha_k \left(m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right| \right) \right\} \leq \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right| + \\
&\quad + \left| \alpha_k \left(m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right| \right) \right| \leq \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right| + m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right| = m.
\end{aligned}$$

Установили, что $f(A^*, k) \leq m, \forall k \in [0 : N]$, и, следовательно, $\rho(A^*) \leq m$. Тогда, учитывая неравенства (2), получаем $\rho(A^*) = m = \inf_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$. Таким образом, A^* – решение задачи (1) и $\rho^* = m$.

2. Докажем, что решение задачи (1) является решением системы (3) при некотором наборе чисел $\alpha_k \in [-1; 1], k \in [0 : N]$. В пункте 1 доказано, что любое решение системы (3) при $\alpha_k \in [-1; 1], k \in [0 : N]$, является решением задачи (1). Установлено, что система (3) всегда имеет решение. Следовательно, решение задачи (1) также существует, причём $\rho^* = m$.

Пусть теперь A^* – любое решение задачи (1). Покажем, что оно удовлетворяет системе (2) при следующем выборе параметров α_k :

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, k \in M, \\ \frac{p_n(A^*, t_k) - \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2}}{m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right|}, k \in [0 : N] \setminus M. \end{cases} \quad (4)$$

Так как $\rho^* = \rho(A^*) = m$, то $f(A^*, k) \leq m, \forall k \in [0 : N]$, а следовательно, и $|y_{2,k} - p_n(A^*, t_k) - r| \leq m$, $|y_{1,k} - p_n(A^*, t_k) + r| \leq m, \forall k \in [0 : N]$. Из этих неравенств и правила выбора (4) вытекает, что $\alpha_k \in [-1; 1], \forall k \in [0 : N]$. Подстановка параметров α_k в систему (3) обращает все её уравнения в тождества, то есть A^* удовлетворяет системе (3) при определённом выборе параметров α_k . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При $N \leq n$ задача (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $N = n$ и выполняются равенства $m = \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right|, k \in [0 : N]$, в остальных случаях задача имеет бесконечное множество решений.

3. Из теоремы вытекает, что решение задачи (1) при $N \leq n$ сводится к решению системы неравенств

$$\left| a_0 + a_1 t_k + \dots + a_n t_k^n - \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} \right| \leq m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right|, k \in [0 : N]. \quad (5)$$

Множество решений каждого из неравенств (5) относительно компонентов вектора $A \in R^{n+1}$ определяет «слой» гиперплоскостей с общей нормалью $d_k = (1, t_k, \dots, t_k^n)$. Если $k \in M$, то правая часть соответствующего неравенства из (4) обращается в нуль, и этот слой сжимается в одну гиперплоскость. Таким образом, множество решений задачи (1) является многоугольным множеством размерности $N + 1 - |M|$.

Из приведённых рассуждений следует, что при условии $N < n$ множество решений задачи (1) не ограничено. Действительно, при $N < n$ в системе (3) оказываются свободными $N - n$ параметров, и их можно выбрать сколь угодно большими.

При $r = 0$ доказанная теорема соответствует результату И. Ю. Выгодчиковой [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
2. Выгодчикова И. Ю. Наилучшее приближение многозначного отображения алгебраическим полиномом // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2004. 112 с.

УДК 517.53

Г. А. Сорокин

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ЕЁ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Известно, что найти представление всех аналитических функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям $f^{(n)}(a_n) = A_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, в скольнибудь обозримом виде в общем случае трудно. Частные значения a_n рассмотрены в работах [1 – 3] и др.

В данной статье мы введем в рассмотрение обобщенные многочлены Тейлора:

$$P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(\theta, n) \frac{f^{(k)}(a_n)}{k!} (z - a_n)^k, \quad (1)$$

где множители $\gamma_k(\theta, n)$ имеют вид

$$\gamma_k(\theta, n) = (1 - \theta^2)^{k+1} \sum_{l=0}^{n-k-1} C_{k+l}^l \theta^{2l}, \quad (0 < \theta < 1); \quad (2)$$

θ – произвольное фиксированное число из $(0; 1)$. Заметим, что $\gamma_0 = 1 - \theta^{2n}$, $\gamma_{n-1} = (1 - \theta^2)^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В силу этого удается получить достаточно широкий класс функций, для которых сходится последовательность (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция; θ ($0 < \theta < 1$) – произвольное число. Справедлива формула

$$P_{n-1}(z) = f(z) - R_n(z), \quad (3)$$

где $P_{n-1}(z)$ – многочлены (1), а остаточный член $R_n(z)$ имеет вид

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(t)}{t-z} \left(\theta^2 + \frac{(z-a_n)(1-\theta^2)}{t-a_n} \right)^n dt, \quad (4)$$

C_n – простой спрямляемый замкнутый контур, внутри которого содержатся точки z и a_n .

Доказательство. Опираясь на интегральную формулу Коши, получим

$$\begin{aligned} f(z) - R_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(t)}{t-z} \left[1 - \left(\theta^2 + \frac{(z-a_n)(1-\theta^2)}{t-a_n} \right)^n \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{(1-\theta^2)f(t)}{t-a_n} \left[\left(1 + \theta^2 + \frac{(1-\theta^2)(z-a_n)}{t-a_n} \right) + \left(\theta^2 + \frac{(1-\theta^2)(z-a_n)}{t-a_n} \right)^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\theta^2 + \frac{(1-\theta^2)(z-a_n)}{t-a_n} \right)^{n-1} \right] dt. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона, раскроем скобки и сгруппируем члены с одинаковыми степенями $z - a_n$, далее, выполнив интегрирование, получим

$$\begin{aligned} f(z) - R_n(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(t)\gamma_k(\theta, n)}{(t-a_n)^{k+1}} (z-a_n)^k dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(\theta, n) \frac{f^{(k)}(a_n)}{k!} (z-a_n)^k = P_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $n(r)$ – функция плотности последовательности (a_n) , $|a_n| = \rho_n$, $\rho_n \leq \rho_{n+1}$, $a_i \neq a_k$, $i \neq k$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \infty$, $f(z)$ – целая функция с максимумом модуля $M(r)$ и неравенства

$$\ln M(r) < \lambda n(\theta r), \quad \lambda < \ln \frac{1}{\theta} \quad (5)$$

при некотором фиксированном θ , $0 < \theta < 1$, будут выполнены для любого $r > r_0$, то в любом круге конечного радиуса последовательность полиномов (1) будет равномерно сходиться к $f(z)$.

Доказательство. В качестве контура C_n выберем окружность

$$|t| = \eta \rho_n, \text{ где } \eta = \frac{1}{\theta} - \frac{1-\theta}{2\theta n}. \text{ На этой окружности оценим по модулю (4).}$$

Пусть R – сколь угодно большое фиксированное число. При $|z| \leq R$ и $|t| = \eta \rho_n$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=\eta\rho_n} \left| \frac{f(t)}{t-z} \right| \left| \frac{t\theta^2 - a_n + z(1-\theta^2)}{t-a_n} \right|^n |dt|; \\ |f(t)| &\leq M(\eta \rho_n). \end{aligned} \quad (6)$$

При $\eta \rho_n \geq 2R$, т.е. при $n > n_1(R)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|t-z|} &< \frac{1}{\eta \rho_n - R} < \frac{2}{\eta \rho_n}, \\ \left| \frac{t\theta^2 - a_n + z(1-\theta^2)}{t-a_n} \right| &= \left| \frac{t\theta^2 - a_n}{t-a_n} \right| \left| 1 + \frac{z(1-\theta^2)}{t\theta^2 - a_n} \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

При $|z| \leq R$ и $|t| = \eta \rho_n$ имеют место очевидные неравенства:

$$\left| 1 + \frac{z(1-\theta^2)}{t\theta^2 - a_n} \right| \leq 1 + \frac{R(1-\theta^2)}{\rho_n(1-\eta\theta^2)} < 1 + \varepsilon_1, \quad n > n_2(R, \varepsilon_1). \quad (9)$$

Далее, $|t/a_n| = \eta$, поэтому, полагая $t/a_n = \eta e^{\varphi_n i}$, получим:

$$\left| \frac{t\theta^2 - a_n}{t-a_n} \right| = \theta \left| \frac{t\theta^2/a_n - 1}{t\theta/a_n - \theta} \right| = \theta \left| \frac{\eta\theta^2 e^{\varphi_n i} - 1}{\eta e^{\varphi_n i} \theta - \theta} \right|.$$

Так как $\eta = 1/\theta - \alpha_n$, где $\alpha_n = (1-\theta)/2\theta n$, то имеем

$$\left| \frac{\eta\theta^2 e^{\varphi_n i} - 1}{\eta e^{\varphi_n i} \theta - \theta} \right| = \left| \frac{\theta e^{\varphi_n i} - 1}{e^{\varphi_n i} - 1} \right| \left| \frac{1 - \alpha_n \theta^2 e^{\varphi_n i} / (\theta e^{\varphi_n i} - 1)}{1 - \alpha_n \theta e^{\varphi_n i} / (e^{\varphi_n i} - 1)} \right|.$$

Первый множитель в первой части этого равенства равен 1; второй множитель при $n \rightarrow \infty$ стремится к единице, поэтому для сколь угодно малого $\varepsilon_2 > 0$ найдется $n_3(\varepsilon_2)$ такое, что при $n > n_3(\varepsilon_2)$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{\eta\theta^2 e^{\varphi_n i} - 1}{\eta e^{\varphi_n i} \theta - \theta} \right| < 1 + \varepsilon_2; \quad \left| \frac{t\theta^2 - a_n}{t-a_n} \right| < \theta(1 + \varepsilon_2).$$

Отсюда и из (9) получаем оценку

$$\left| \frac{t\theta^2 - a_n + z(1-\theta^2)}{t-a_n} \right|^n \leq \theta^n (1 + \varepsilon_1)^n (1 + \varepsilon_2)^n, \quad n > \max(n_1, n_2). \quad (10)$$

Из (7) – (10) следует неравенство

$$|R_n(z)| \leq 2 \exp(\ln M(\eta\rho_n) + n(\ln\theta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)),$$

справедливое при $n > \max(n_1, n_2, n_3) = n_0$.

Вследствие того, что $\eta\theta < 1$, имеем $n(\eta\theta\rho_n) < n$. Отсюда в силу (5) получаем оценку $\ln M(\eta\rho_n) < \lambda n(\eta\theta\rho_n) < \lambda n$.

Таким образом, имеем

$$|R_n(z)| < 2 \exp\left(n\left(\lambda - \ln\frac{1}{\theta} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\right). \quad (11)$$

Так как ε_1 и ε_2 сколь угодно малы, и $\lambda - \ln\frac{1}{\theta} < 0$, то неравенство (11), справедливое при любом $n > n_0$, доказывает равномерную сходимость последовательности многочленов (1) к $f(z)$ в круге $|z| \leq R$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959. 375 с.
2. Гончаров В. Л. Теория интерполяции и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954. 327 с.
3. Гончаров В. Л. Интерполяционные процессы и целые функции // УМН. 1937. Вып. 3. С. 135 – 156.

УДК 517.5

П. А. Терехин

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОСРЕДСТВОМ ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГА ПОДПРОСТРАНСТВ В $L_2(\mathbf{R}^d)$ *

Пусть $\phi \in L_2(\mathbf{R}^d)$. Обозначим $V(\phi) = \overline{\text{span}}\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}^d\}$ – замыкание по L_2 -норме линейной оболочки системы целочисленных сдвигов функции ϕ . Подпространство $V(\phi)$ называется *инвариантным относительно сдвига подпространством, порожденным функцией* ϕ . Для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$ положим $V_j = D^j V(\phi)$ – образ подпространства $V(\phi)$ при действии j -й степени оператора $Df(x) = 2^{d/2} f(2x)$. Вопросы приближения в метрике L_2 функций f из пространства Соболева $W_2^m(\mathbf{R}^d)$ и про-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых кандидатов наук (проект МК-2569.2005.1), РФФИ (проект 03-01-00390), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и программы «Университеты России» (проект ур. 04.01.374).

странства Шварца $S(\mathbf{R}^d)$ посредством системы подпространств $(V_j)_{j \geq 0}$ изучены в работах [1, 2]. В работе [3] рассмотрены вопросы представления функций в метрике L_p посредством системы подпространств $(V_j)_{j \geq 0}$. В частности, в [3] показано, что при выполнении следующих двух условий:

$$\int \phi(x) dx \neq 0, \quad (\text{A})$$

$$|\phi(x)| \leq C|x|^{-d-\delta}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \delta > 0, \quad (1)$$

для любой функции $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ справедливо представление

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\| < \infty, \quad (\text{B})$$

где $f_j \in V_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Кроме того, в [3] была высказана гипотеза, что представление (B) останется справедливым при замене условия (1) на менее ограничительное условие

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} |\phi(\cdot - k)| \in L_2([0, 1]^d). \quad (2)$$

В работе [4] анонсировано доказательство этой гипотезы (подробное изложение имеется в [5]). Оказалось, что условие (2), в свою очередь, может быть ослаблено. Именно достаточно потребовать, чтобы функция $\phi \in L_2(\mathbf{R}^d)$ удовлетворяла условию

$$\left\| \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} c_k \phi(\cdot - k) \right\| \leq M \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} |c_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

В настоящей статье предложено дальнейшее обобщение условий (A) и (3). Обозначим

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x) e^{-i\omega \cdot x} dx$$

— преобразование Фурье функции $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$.

Предположим, что функция $\phi \in L_2(\mathbf{R}^d)$ такова, что для почти всех $\omega \in \mathbf{R}^d$ выполняется неравенство

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq 1. \quad (\text{C})$$

Заметим, что если для исходной функции ϕ неравенство (C) не выполняется, то найдется функция θ , удовлетворяющая (C) и такая, что $V(\theta) = V(\phi)$. Понятно, что при замене ϕ на θ система подпространств $(V_j)_{j \geq 0}$ останется неизменной, поэтому такая замена не повлияет на справедливость представления (B). Определим оператор $Q: L_2(\mathbf{R}^d) \rightarrow V(\phi)$ равенством

$$Qf = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle \phi(\cdot - k).$$

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ и $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\pi, \pi]^d$. Тогда

$$\|f - Qf\|^2 \leq (2\pi)^{-d} \int |\hat{f}(\omega)|^2 (1 - |\hat{\phi}(\omega)|^2) d\omega.$$

Доказательство. Для периодической функции $m(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle e^{-ik \cdot \omega}$ имеем $Qf = m\hat{\phi}$. Сравнивая коэффициенты

Фурье, проверяем равенство $m(\omega) = \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\phi}(\omega)}$ для почти всех $\omega \in [-\pi, \pi]^d$.
Окончательно находим

$$\begin{aligned} \|f - Qf\|^2 &= (2\pi)^{-d} \|\hat{f} - Qf\|^2 = \\ &= (2\pi)^{-d} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} |\hat{f}(\omega + 2\pi k) - m(\omega)\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega = \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \left(|\hat{f}(\omega) - m(\omega)\hat{\phi}(\omega)|^2 + |m(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \right) d\omega = \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} |\hat{f}(\omega)|^2 \left((1 - |\hat{\phi}(\omega)|^2)^2 + |\hat{\phi}(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \right) d\omega \leq \\ &\leq (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} |\hat{f}(\omega)|^2 (1 - |\hat{\phi}(\omega)|^2) d\omega. \end{aligned}$$

Теперь для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим оператор $Q_j = D^j Q D^{-j}$.

Заметим, что $Q_j f = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk}$, где $\varphi_{jk}(x) = 2^{jd/2} \varphi(2^j x - k)$,
 $j = 0, 1, 2, \dots$, $k \in \mathbf{Z}^d$.

ЛЕММА 2. Пусть при некоторых $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ для почти всех $\omega \in (-\delta, \delta)^d$ имеем

$$|\hat{\phi}(\omega)| \geq \gamma. \quad (\text{D})$$

Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - Q_j f\| \leq q \|f\|,$$

где постоянная $0 < q < 1$ не зависит от f .

Доказательство. Заметим, что предельное соотношение достаточно проверить для некоторого всюду плотного класса функций. Пусть преобразование Фурье функции f имеет компактный носитель. Тогда $\text{supp } \hat{f} \subseteq (-2^j \delta, 2^j \delta)^d$ для $j \geq j_0$. Поскольку $D^{-j} f = D^j \hat{f}$, то $\text{supp } D^{-j} f \subseteq (-\delta, \delta)^d$. Применим лемму 1 к функции $D^{-j} f$. Получим

$$\|f - Q_j f\|^2 = \|D^{-j} f - QD^{-j} f\|^2 \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-d} \int_{(-\delta, \delta)^d} |D^j \hat{f}(\omega)|^2 (1 - |\hat{\phi}(\omega)|^2) d\omega \leq (1 - \gamma^2) \|f\|^2.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\phi \in L_2(\mathbf{R}^d)$ удовлетворяет условиям (C) и (D). Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ найдется возрастающая последовательность натуральных чисел $J = J(f) = (j_n)_{n \geq 0}$ такая, что имеет место разложение

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{j_n} R_{n-1}^{[J]} f,$$

где $R_n^{[J]} = (I - Q_{j_n}) \dots (I - Q_{j_1})$.

Доказательство. Пусть $f \neq 0$ и $q < r < 1$. По лемме 2 найдется номер j_1 такой, что $\|R_1^{[J]} f\| = \|f - Q_{j_1} f\| \leq r \|f\|$. Снова по лемме 2 найдется номер $j_2 > j_1$ такой, что $\|R_2^{[J]} f\| = \|R_1^{[J]} f - Q_{j_2} R_1^{[J]} f\| \leq r \|R_1^{[J]} f\| \leq r^2 \|f\|$. Продолжая этот процесс, по индукции построим возрастающую последовательность $J = J(f) = (j_n)_{n \geq 0}$, для которой $\|R_n^{[J]} f\| \leq r^n \|f\|$. По построению имеем

$$f = Q_{j_1} f + R_1^{[J]} f = Q_{j_1} f + Q_{j_2} R_1^{[J]} f + R_2^{[J]} f = \dots = \sum_{k=1}^n Q_{j_k} R_{k-1}^{[J]} f + R_n^{[J]} f = \dots$$

Здесь $R_n^{[J]} f \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $Q_{j_n} R_{n-1}^{[J]} f \in V_{j_n}$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_{j_n} R_{n-1}^{[J]} f\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|R_{n-1}^{[J]} f - R_n^{[J]} f\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (r^{n-1} + r^n) \|f\| = \frac{1+r}{1-r} \|f\|.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть существует такая окрестность $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ начала координат, что для почти всех $\omega \in \Omega$ выполняются соотношения

$$\hat{\phi}(\omega) \neq 0, \quad \sum_{k \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq C |\hat{\phi}(\omega)|^2. \quad (4)$$

Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ справедливо представление (B).

Справедливы импликации $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ и $(A) \wedge (3) \Rightarrow (4)$. Это означает, что теорема 2 усиливает теоремы о представлении [3 – 5] для случая пространства L_2 . Отметим также, что условия теоремы 2 не требуют принадлежности функции ϕ пространству $L_1(\mathbf{R}^d)$, которую предполагает условие (A).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. De Boor C., DeVore R., Ron A. Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbf{R}^d)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 341. P. 787 – 806.
2. Jetter K., Zhou D.-X. Order of linear approximation from shift-invariant spaces // Constr. Approx. 1995. Vol. 11. P. 423 – 438.

3. Filippov V. I., Oswald P. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory. 1995. Vol. 82. P. 15 – 29.

4. Терехин П. А. Сжатия и сдвиги функции с ненулевым интегралом // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. Вып. 1. С. 67 – 68.

5. Терехин П. А. Фреймы в банаховом пространстве и их приложения к построению всплесков // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 2. С. 65 – 81.

УДК 517.51

А. Ю. Трынин

ОБ ОЦЕНКЕ АППРОКСИМАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПО СИНКАМ*

Начиная с известной теоремы Крамера [1], на стыке спектральной теории дифференциальных операторов и конструктивной теории функций появился ряд интересных работ, посвящённых различным направлениям обобщения классической теоремы Котельникова. В процессе этих исследований получены различные представления целых функций рядами, в основу конструкции которых положен принцип построения интерполяционного оператора Лагранжа. Много серьёзных результатов получено методом контурного интегрирования как для действительных [2 – 5], так и для комплексных [6 – 8] узлов интерполирования, удовлетворяющих некоторым условиям "равномерности распределения". Изучается также связь между этими "sampling" теоремами и интерполяцией Лагранжа по узлам из спектра задачи Штурма – Лиувилля, например [9]. В статье получена теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in AC(K_\varepsilon)$, то есть f – аналитическая, непрерывная вплоть до границы, в круге $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| < \pi/2 + \varepsilon\}$ функция, для некоторого положительного ε . Тогда найдётся такое натуральное n_ε , зависящее только от ε , что для всех $n > n_\varepsilon$ и $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} |L_n(f, x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin(nx)}{(nx - k\pi)} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f(x) \right| \leq \\ &\leq \left(\ln \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} + 2 \right) \frac{\|f\| |\sin(nx)|}{n \left(\pi \left(\frac{n+1}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \right)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\|f\| = \max_{x \in K_\varepsilon} |f(x)|$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 04-01-00060).

Доказательство. Обозначим

$$x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \dots, \quad \omega_n = \prod_{k=0}^n (x - x_{k,n}).$$

Тождественно преобразуем левую часть (1)

$$\begin{aligned} & |L_n(f, x) - f(x)| = \\ & = \left| \frac{\sin nx}{\omega_n(x)} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{\omega_n(x_{k,n})}{\sin(nx_{k,n})} - \frac{\omega_n(x)}{\sin(nx)} f(x) \right|. \end{aligned} \quad (2)$$

При каждом натуральном n оценим уклонение интерполяционного многочлена Лагранжа от интерполируемой функции $\frac{\omega_n(x)}{\sin(nx)} f(x)$ по формуле Эрмита [10]. В качестве контура интегрирования возьмём окружность Γ_n с центром в $\frac{\pi}{2}$ радиуса $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$. Эта окружность при каждом n охватывает $n+1$ узел $x_{k,n}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Так как $x \in [0, \pi]$, то из (2) следует

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sin nx}{\omega_n(x)} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{\omega_n(x_{k,n})}{\sin(nx_{k,n})} - \frac{\omega_n(x)}{\sin(nx)} f(x) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{\sin nx}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)\sin(n\xi)} d\xi \right| \leq \frac{\|f\|\sin(nx)}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \left| \frac{1}{(\xi - x)\sin(n\xi)} \right| d\xi. \end{aligned} \quad (3)$$

Сделав замену $\xi = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)e^{i\phi}$, с помощью неравенства (3) оценим интеграл (2), учитывая, что

$$\begin{aligned} & \min_{\phi \in [0, 2\pi]} \left[\left(\frac{\pi n + 1}{2} \right) e^{i\phi} - \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|, \\ & |L_n(f, x) - f(x)| \leq \\ & \leq \frac{|\sin nx|}{4n} \frac{\|f\|(n+1)}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\left| \sin \frac{\pi n}{2} \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right) \right|}. \end{aligned} \quad (4)$$

В зависимости от чётности n оценка распадается на два случая.

Обозначим $\chi_n(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{\left| \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right) \right|}, & \text{при } n \text{ нечётных} \\ \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right) \right|}, & \text{при } n \text{ чётных} \end{cases}$. Тогда

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{|\sin nx|}{4n} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \int_0^{2\pi} \chi_n(\phi) d\phi. \quad (5)$$

Рассмотрим случай $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $A > 2$. Обозначим через $\delta_m = \frac{1}{4(m+1)} \ln \frac{A}{A-2}$. Выберем m_0 настолько большим, чтобы для любого натурального $m > m_0$ $\delta_m \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^{2\pi} \chi_{2m+1}(\phi) d\phi \leq 4 \int_0^{\delta_m} \frac{d\phi}{|\cos(\pi(m+1)\cos\phi)|} + 4 \int_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{|\operatorname{sh}(\pi(m+1)\sin\phi)|}. \quad (6)$$

Найдётся такое натуральное $m_1 > m_0$, что неравенство

$$|\cos(\pi(m+1)\cos\phi)| \geq \frac{1}{2} \quad (7)$$

будет выполняться для любых $m > m_1$ и $\phi \in [0, \delta_m]$. Нетрудно проверить, что, если $\phi \geq \delta_m = \frac{1}{4(m+1)} \ln \frac{A}{A-2}$, $A > 2$, то $\operatorname{sh}(\pi(m+1)\sin\phi) \geq \frac{e^{\pi(m+1)\sin\phi}}{A}$.

Поэтому можно утверждать, что для второго интеграла в (5) справедливо неравенство $\int_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\operatorname{sh}(\pi(m+1)\sin\phi)} \leq A \int_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{e^{-\pi(m+1)\sin\phi}} \leq \frac{\sqrt{A(A-2)}}{2(m+1)}$. Отсюда, а также из (5), (6) и (7) для любого $x \in [0, \pi]$ и нечётного $n > n_0 = 2m_1 + 1$ получаем

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{|\sin nx|}{n} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \left(\ln \frac{A}{A-2} + \sqrt{A(A-2)} \right).$$

В случае чётного $n = 2m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, проведя аналогичные рассуждения, для достаточно больших чётных n получим

$$|L_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{|\sin nx|}{n} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \left(\ln \frac{A}{A-2} + (A(A-2))^{\frac{1}{4}} \right).$$

Окончательно, в силу того что

$$\min_{A>2} \max \left(\left(\ln \frac{A}{A-2} + \sqrt{A(A-2)} \right), \left(\ln \frac{A}{A-2} + (A(A-2))^{\frac{1}{4}} \right) \right) = 2 + \ln \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1},$$

получаем утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kramer H. P. A generalized sampling theorem // J. Math. Phus. 1959. Vol. 38. P. 68 – 72.
2. Butzer P. L., Hinsen G. Reconstruction of bounded signals from pseudo-periodic, irregularly spaced samples // Signal Process. 1989. Vol. 17. P. 1 – 17.
3. Higgins J. R. Sampling theorems and contour integral method // Appl. Anal. 1991. Vol. 41. P. 155 – 169.
4. Hinsen G. Irregular sampling of bandlimited L^2 -functions // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 72. P. 346 – 364.
5. Seip K. An irregular sampling theorem for functions bandlimited in a generalized sense // SIAM J. Appl. Math. 1987. Vol. 47, № 5. P. 1112 – 1116.
6. Higgins J. R. A sampling theorem for irregularly spaced sample points // IEEE Trans. Inform. Theory. 1976. Vol. 22. P. 621 – 622.
7. Young R.M. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. N. Y.: Academic Press, 1980.
8. Voss J. J. A Sampling Theorem with Nonuniform Complex Nodes // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90. P. 235 – 254.
9. Zayed A. I., Hinsen G., Butzer P. L. On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems // SIAM. J. Appl. Math. 1990. Vol. 50, № 3. P. 893 – 909.
10. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.

УДК 517.984

В. А. Халова

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, ДОПУСКАЮЩИМИ РАЗРЫВЫ ПРОИЗВОДНЫХ НА ДИАГОНАЛЯХ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A(x,t)f(t)dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt + \sum_{k=1}^m (f, v_k)g_k(x), \quad (1)$$

где $A(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, $v_k(t) \in C^n[0,1]$, $g_k(x) \in C^n[0,1]$,

$\{v_k^{(n)}(t)\}_1^m$ и $\{g_k^{(n)}(x)\}_1^m$ линейно независимые, $(f, v_k) = \int_0^1 f(t)v_k(t)dt$.

Оператор (1) является одним из представителей операторов вида

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t)f(t)dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t)f(t)dt + \\ + \alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t)f(t)dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t)f(t)dt,$$

которые впервые были рассмотрены А. П. Хромовым. Путем несложных преобразований за счет конечномерного добавка четыре слагаемых в нашем случае удается свести к двум. Для оператора (1) при $n=1$ теоремы равносходимости были получены А. П. Хромовым [1]. Затем в работе [2] им совместно с В. В. Корневым была получена теорема равносходимости для оператора (1) без конечномерного возмущения, но с более сложным ядром $A(x,t)$. На основе этой работы в [3] автором была получена аналогичная теорема для оператора (1) при $n=2$. В данной статье обобщается результат [3]. Важным достоинством оператора (1) является то, что для него условия существования обратного оператора записываются в явном виде [4]. Кроме того, в каждом конкретном случае условия регулярности можно просто сосчитать. Эти условия (существование A^{-1} и регулярность условий) являются необходимыми для получения теоремы равносходимости и, вообще говоря, трудно проверяемыми.

Пусть n – четное и

$$\Delta = \det |\gamma_{jk}| \neq 0, \quad (2)$$

где $\gamma_{jk} = D^{\mu_j} T g_k(0), \quad j=1, \dots, m_0, \quad 0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{m_0} \leq n-1,$

$\gamma_{jk} = \delta_{k\psi_j} + (Lg_k, v_{\psi_j}), \quad j=m_0+1, \dots, m, \quad 1 \leq \psi_{m_0+1} < \psi_{m_0+2} < \dots < \psi_m \leq m,$

m_0 – фиксированное целое число, $0 \leq m_0 \leq m$, $D = \frac{d}{dx}$, $T = \alpha_1 E - \alpha_2 S$,

E – единичный оператор, $Sf(x) = f(1-x)$, $L = \frac{1}{\beta} D^n T$, δ_{kj} – символ Кронекера. Тогда оператор $A^{-1}y(x)$ существует, и $y(x)$ удовлетворяет

условиям

$$a_i y^{(\sigma_i)}(0) + b_i y^{(\sigma_i)}(1) + \sum_{j=0}^{\sigma_i-1} [a_{ij} y^{(j)}(0) + b_{ij} y^{(j)}(1)] = (y, \varphi_i), \quad i=1, \dots, n, \quad (3)$$

$0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_n \leq n-1$, $\sigma_i < \sigma_{i+2}$, $|a_i| + |b_i| > 0$, $\varphi_i \in C[0,1]$.

Считаем, что условия (3), представляющие собой условия из теоремы 2 [4], приведенные к нормированному виду, регулярны по Биркгофу.

Обозначим через ω_i корни n -й степени из 1, $d^n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$, λ – спектральный параметр. Положим $\lambda = \rho^n$ и разобьем область $0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n$ на секторы $\gamma_{j-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_j$, $j=1, \dots, N$ ($0 = \gamma_0 < \dots < \gamma_N = 2\pi/n$) таким образом, что числа $\omega_i, d\omega_i$ ($i=1, \dots, n$) можно перенумеровать через $\tilde{\omega}_k$

$(k=1,\dots,2n)$ так, чтобы при любых ρ из рассматриваемого сектора выполнялось $\operatorname{Re} \tilde{\omega}_k \geq 0$, $k=1,\dots,n$, $\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_k \leq 0$, $k=n+1,\dots,2n$. Пусть

$$\theta = \det \left| p_{jk} \tilde{\omega}_k^{\sigma_j} \right|_{j,k=1}^n \neq 0, \quad (4)$$

где $p_{jk} = a_j + (-1)^j b_j$, если $\tilde{\omega}_k = \omega_i$, $p_{jk} = a_j - (-1)^j b_j$, если $\tilde{\omega}_k = d\omega_i$.

Обозначим $S_{\delta_0} = \bigcup_{j=1}^N S_{\delta_0,j}$, где $S_{\delta_0,j}$ — область, получающаяся из сектора

$\gamma_{j-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_j$ удалением всех нулей многочлена

$$a_{0,j} + a_{1,j} e^{-2\rho \tilde{\omega}_n} + a_{2,j} e^{-\rho(\tilde{\omega}_{n-1} + \tilde{\omega}_n)} + a_{3,j} e^{-2\rho \tilde{\omega}_{n-1}} + a_{4,j} e^{-2\rho(\tilde{\omega}_{n-1} + \tilde{\omega}_n)},$$

где $a_{0,j} = \pm \theta^2$, $a_{4,j} = \pm \theta^2$, вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0 . Удалим из области S_{δ_0} еще точки ρ_k , $k=1,2,\dots$ вместе с круговыми окрестностями того же радиуса δ_0 , для которых $(\alpha_1 + \alpha_2)\rho_k^n$ или $(\alpha_1 - \alpha_2)\rho_k^n$ являются собственными значениями краевой задачи

$$y^{(n)}(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1), \quad j=1,\dots,n,$$

где $y(x)$ — скалярная функция, и для оставшейся области сохраним обозначение S_{δ_0} .

ТЕОРЕМА. Если $g_k^{(n)}(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ и выполняются условия (2) и (4), то для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0,1/2)$ имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq x \leq 1-\delta} \left| S_r(f, x) - \frac{1}{2} \sigma_{r|d_1}(f+g, x) - \frac{1}{2} \sigma_{r|d_2}(f-g, x) \right| = 0,$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f, x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ для тех номеров k , для которых $(2k\pi)^n < r$; $g(x) = f(1-x)$, r таково, что $\{\rho : |\rho|^n = r, 0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n\} \subset S_{\delta_0}$, $d_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $d_2 = \alpha_1 - \alpha_2$.

Замечание. Условие (5) не зависит от выбора сектора, в котором нумеруются $\tilde{\omega}_k$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $f(x) \in L[0,1]$ и $f(x) = f(1-x)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq x \leq 1-\delta} \left| S_r(f, x) - \sigma_{r|d_1}(f, x) \right| = 0.$$

Если $f(x) \in L[0,1]$ и $f(x) = -f(1-x)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq x \leq 1-\delta} \left| S_r(f, x) - \sigma_{r|d_2}(f, x) \right| = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестн. Моск. ун-та. 2000. № 2. С. 21 – 26.
2. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Докл. АН. 2001. Т. 379, № 6. С. 741 – 744.
3. Халова В. А. Теорема равносходимости для одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 126 – 128.
4. Халова В. А. Задача обращения одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 125 – 127.

УДК 517.984

А. П. Хромов

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ*

Пусть A интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t)dt + \alpha \int_0^x A(x, t)f(t)dt, \quad (1)$$

где ядро $A(x, t)$ удовлетворяет условиям:

- а) $A(x, t), \frac{\partial}{\partial x} A(x, t), \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x, t), \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} A(x, t)$ непрерывны при $0 \leq t \leq x \leq 1$;
- б) $A(x, x) \equiv 1$;
- в) $\alpha^2 \neq 1$.

Это простейший вид интегрального оператора $Af = \int_0^1 A(x, t)f(t)dt$,

ядро которого имеет разрыв на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$. В [1] для такого оператора¹, когда еще выполняется условие г) $\frac{\partial}{\partial x} A(x, t)|_{t=x} \equiv 0$, установлено равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье. Теперь мы полу-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

¹ В [1] рассмотрен и более общий случай скачка $(n-1)$ -й производной на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$.

чим аналогичный результат и в том случае, когда условие г) не выполняется. Введем операторы:

$$A'_x f = \int_0^x A'_x(x,t) f(t) dt, \quad Tf = \int_0^x T(x,t) f(t) dt,$$

$$T'_t f = \int_0^x T'_t(x,t) f(t) dt, \quad T = (E + A'_x)^{-1} - E,$$

где E – единичный оператор, $A'_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} A(x,t)$, $T'_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)$, и краевую задачу в пространстве вектор-функций размерности 2:

$$By'(x) + P_1(x)y(x) - N_1y(x) = \mu y(x) + F(x), \quad (2)$$

$$M_0 y(0) + M_1 y(1) = 0, \quad (3)$$

где $B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $P_1(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & -p(1-x) \end{pmatrix} B$, $p(x) = T(x,x)$,

$$N_1 = \begin{pmatrix} \alpha T'_t & -T'_t \\ \alpha S T'_t & -S T'_t \end{pmatrix}, \quad Sf(x) = f(1-x), \quad \mu = (\alpha^2 - 1)\lambda, \quad F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T,$$

$$F_1(x) = (\alpha^2 - 1)f(x), \quad F_2(x) = (\alpha^2 - 1)f(1-x), \quad M_0 = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad (T – знак транспонирования).$$

ЛЕММА 1. Если комплексное λ таково, что резольвента Фредгольма $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ существует, то $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, где $y_1(x) = R_\lambda(A)f$, $y_2(x) = y_1(1-x)$, удовлетворяет (2), (3). Обратно, если $y(x)$ удовлетворяет (2), (3) и соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то $R_\lambda(A)$ существует и $R_\lambda(A)f = y_1(x)$, $y_2(x) = y_1(1-x)$.

Введем еще краевую задачу:

$$z'(x) + P(x)z(x) - Nz(x) = \lambda Dz(x) + \Phi(x), \quad Q_0 z(0) + Q_1 z(1) = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } P(x) = D^{-1}\Gamma^{-1}P_1(x)\Gamma, \quad D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}, \quad d = \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad B\Gamma = \Gamma D,$$

$$N = D^{-1}\Gamma^{-1}N_1\Gamma, \quad \Phi(x) = D^{-1}\Gamma^{-1}F(x), \quad Q_0 = M_0\Gamma, \quad Q_1 = M_1\Gamma.$$

Тогда из леммы 1 следует $R_\lambda(A)f = \gamma_{11}z_1(x,\lambda) + \gamma_{12}z_2(x,\lambda)$, где $z(x,\lambda) = (z_1(x,\lambda), z_2(x,\lambda))^T$ – решение системы (4), γ_{11}, γ_{12} – элементы первой строки матрицы Γ . Присутствие ненулевой матрицы $P(x)$ является серьезным препятствием в исследовании асимптотического поведения решения краевой задачи (4). Здесь мы проведем преобразование ее, заменяющее $P(x)$ на матрицу с элементами $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ [2, с. 48–58]. Пусть

$H_0(x) = \text{diag}(h_{11}(x), h_{22}(x))$, где $h_{ii}(x) = \exp\left(-\int_0^x p_{ii}(t)dt\right)$, $p_{ii}(x)$ – диагональные элементы матрицы $P(x)$, а $H_1(x)$ – кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения:

$$H'_0(x) + P(x)H_0(x) + (H_1(x)D - DH_1(x)) = 0.$$

Так как $p(x) \in C^1[0,1]$, то элементы матрицы $P(x)$ также из $C^1[0,1]$, и поэтому элементы матрицы $H_1(x)$ из $C^1[0,1]$, а матрицы $H_0(x)$ из $C^2[0,1]$.

ЛЕММА 2. При больших $|\lambda|$ неособое преобразование

$$z = H(x, \lambda)v = \left(H_0(x) + \frac{H_1(x)}{\lambda}\right)v \text{ приводит систему (4) к виду}$$

$$v' + P_\lambda(x)v + N_\lambda v = \lambda Dv + \Phi_\lambda(x), Q_{0\lambda}v(0) + Q_{1\lambda}v(1) = 0, \quad (5)$$

где

$$P_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} H^{-1}(x, \lambda)[P(x)H_1(x) + H'_1(x)], N_\lambda = -H^{-1}(x, \lambda)NH(x, \lambda),$$

$$\Phi_\lambda(x) = H^{-1}(x, \lambda)\Phi(x), Q_{l\lambda} = Q_l H(l, \lambda) \quad (l = 0, 1).$$

Рассмотрим теперь такую краевую задачу:

$$w' = \lambda Dw + F, \quad U(w) = Q_{0\lambda}w(0) + Q_{1\lambda}w(1) = 0. \quad (6)$$

Считаем, что $\operatorname{Re} \lambda d \geq 0 \geq \operatorname{Re}(-\lambda d)$ (противоположный случай рассматривается аналогично).

ЛЕММА 3. Если λ таково, что матрица $\Delta(\lambda) = U(V(x, \lambda))$ обратима, то краевая задача (6) однозначно разрешима при любой $F(x)$ с компонентами из $L[0,1]$, и это решение дается формулой

$$w(x, \lambda) = R_{1\lambda}F = -V(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U\left(\int_0^1 g(x, t, \lambda)F(t)dt\right) + \int_0^1 g(x, t, \lambda)F(t)dt,$$

где $V(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda dx}, e^{-\lambda dx})$, $g(x, t, \lambda) = \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), g_2(x, t, \lambda))$, $g_1(x, t, \lambda) = -\varepsilon(t, x)e^{\lambda d(x-t)}$, $g_2(x, t, \lambda) = \varepsilon(t, x)e^{-\lambda d(x-t)}$, $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t \geq x$.

Удалим из λ -плоскости все нули функции $\vartheta_0 + \vartheta_1 e^{-2\lambda d}$, где $\vartheta_0 = -q_{11}q_{02}h_{11}(1)$, $\vartheta_1 = -q_{01}q_{12}h_{22}(1)$, $q_{01}, q_{02}, (q_{11}, q_{12})$ – элементы первой (второй) строчки матрицы Q_0 (Q_1) вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ . Получившуюся область будем обозначать S_δ .

ЛЕММА 4. В S_δ при больших $|\lambda|$ выполняются оценки:

$$\|R_{1\lambda}F\|_\infty = O(\|F\|_1), \quad \|R_{1\lambda}F\|_\infty = O(\psi(\lambda)\|F\|_\infty),$$

$$\|R_{1\lambda}F\|_j = O(\psi(\lambda)\|F\|_1), \quad \|R_{1\lambda}\chi\|_\infty = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где $\|\cdot\|(\|\cdot\|_\infty)$ – норма в $L_1(L_\infty)$, $\chi(x) = (\chi_1(x), \chi_2(x))^T$ и $\chi_i(x)$ – характеристические функции произвольных отрезков из $[0,1]$,

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda d} (1 - |e^{-\lambda d}|).$$

На основании лемм 1 – 4 методом работы [1] получается следующий результат.

ТЕОРЕМА (равносходимости). Для любой $f(x) \in L[0,1]$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon} |S_r(f, x) - \sigma_{rd}(f, x)| = 0,$$

где $S_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел, попавших в круг $|\lambda| < r$, через $\sigma_r(f, x)$ частичную сумму тригонометрического ряда Фурье по системе $\{\exp 2k\pi i x\}_{k=-\infty}^\infty$ для тех k , для которых $2k\pi < r$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33 – 50.
2. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1954.

УДК 517.51

Г. В. Хромова

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА*

В [1] рассматривался вопрос о получении порядковых оценок модулей непрерывности неограниченных операторов путем привлечения семейств регуляризирующих операторов, соответствующих оптимальным по порядку методам регуляризации уравнений первого рода. В данной статье рассматривается случай, когда для уравнения с оператором интегрирования используется семейство, о котором заранее неизвестно, будет ли оно оптимальным на заданном классе. Здесь дается положительный ответ на этот вопрос и приводятся точные по порядку оценки модуля непрерывности обратного оператора. Рассмотрим

$$\omega(\delta, 1) = \sup \left\{ \|f'\|_{C[0,1]} : \|f''\|_{L_2[0,1]} \leq 1, \|f\|_{L_2[0,1]} \leq \delta, f(0) = f'(1) = 0 \right\}. \quad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

С точки зрения уравнений первого рода, это – модуль непрерывности обратного оператора, соответствующего уравнению

$$Au \equiv \int_0^x u(t) dt = f(x) \quad (2)$$

при дополнительном условии

$$u(x) = \int_x^1 v(t) dt, \quad \|v\|_{L_2[0,1]} \leq 1. \quad (3)$$

Возьмем в качестве R_α семейство операторов

$$R_\alpha = (\alpha E + A^* A)^{-1} A^*, \quad (4)$$

соответствующее регуляризации Тихонова нулевого порядка [2]. Так как в нашем случае $u(x) \in R(A^*)$, то, как показано в [3], с помощью семейства (4) можно получать равномерные приближения к решению уравнения (2).

ЛЕММА. Если K_α – интегральные операторы с ядрами $K_\alpha(x, \xi)$ такие, что $\|K_\alpha u - u\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ равномерно по

$$u(x) \in M = \{u(x) \in C[a,b] : u(x) = \int_a^b B(x,t)v(t) dt, \|v\|_{L_2[a,b]} \leq 1\},$$

то справедливо представление

$$\begin{aligned} \Delta_1(K_\alpha, M) &\equiv \sup \{\|K_\alpha u - u\|_{C[a,b]} : u \in M\} = \\ &= \sup_{\substack{b \\ a \leq x \leq b}} \left(\int_a^b \left(\int_a^\xi K_\alpha(x, \xi) B(\xi, t) d\xi - B(x, t) \right)^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

ТЕОРЕМА. Для модуля непрерывности (1) справедлива двусторонняя оценка, точная по порядку, асимптотическая по δ при $\delta \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{4} \delta^{1/4} + \psi_2(\delta) \leq \omega(\delta, 1) \leq C_1 \delta^{1/4} + \psi_1(\delta), \quad (6)$$

где $C = 2.3^{-1/4} (2e^{-1} + 1)^8 (2e^{-1} + 3)^8$, $\psi_1(\delta), \psi_2(\delta)$ суть $O(e^{-\delta^{1/2}})$.

Доказательство. Для оператора $R_\alpha A$ имеет место представление

$R_\alpha A = \frac{1}{\alpha} ((A^* A)^{-1} + \frac{1}{\alpha} E)^{-1}$, а отсюда вытекает, что $R_\alpha A = \frac{1}{\alpha} G_\alpha$, где G_α – интегральный оператор с ядром Грина дифференциального оператора

$$L : ly = -y'', y(0) = y'(0) = 0.$$

Применяем метод из [1] с использованием формулы (5) при $K_\alpha = R_\alpha A$ и представления для нормы $\|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C}$, полученного в [4]:

$$\|R_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} = \alpha^{-1/2} \sup_{a \leq x \leq b} (K_\alpha(x, x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^1 K_\alpha^2(x, \xi) d\xi)^{1/2},$$

где $K_\alpha(x, \xi)$ – ядро оператора $R_\alpha A$. Отсюда приходим к оценке сверху в (6). Для оценки снизу строим функцию

$$f_0(x) = \frac{x}{2} \delta^4 \left(e^{-\delta^{\frac{1}{2}}x} - e^{-\delta^{\frac{1}{2}}} (1 - \delta^{\frac{1}{2}}) \right).$$

Можно убедиться в том, что $f_0(x) \in M$, а $\|f_0'\|_C > \frac{1}{4} \delta^{\frac{1}{4}}$ при достаточно малых δ .

СЛЕДСТВИЕ. Метод регуляризации нулевого порядка, используемый для получения равномерного приближения к решению уравнения (2) на классе M , соответствующем условиям (3), является оптимальным по порядку. При этом константа K в «оценке оптимальности» (см. оценку (2) из [1]) имеет вид $K = 4C_1$, C_1 определена в теореме.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. Об оценке модулей непрерывности неограниченных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 140 – 143.
2. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49 – 52.
3. Хромова Г. В. О регуляризации интегральных уравнений с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика. 1972. № 8(123). С. 94 – 104.
4. Хромова Г. В. О нахождении равномерных приближений к решению интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 4. С. 3 – 10.

УДК 517.984

Д. Г. Шалтыко

О СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПЯТОГО ПОРЯДКА*

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ краевую задачу, порожденную дифференциальным уравнением:

$$l[y] = y^{(5)} - \lambda y = 0 \quad (1)$$

и распадающимися краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'(\alpha) = y(1) = 0 \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2)$$

Данные краевые условия являются нерегулярными, и функция Грина задачи (1), (2) имеет экспоненциальный рост при $t < x$. Это представляет

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

собой существенную трудность при исследовании подобной задачи. Отметим, что задача о сходимости спектральных разложений в случае $\alpha = 0$ (и для более общих дифференциальных операторов n -го порядка с произвольными распадающимися краевыми условиями) получила окончательное решение в работе А. П. Хромова [1]. Исследованием же задач вида (1), (2) и даже более общими многоточечными краевыми задачами n -го порядка занимался Г. Фрайлинг [2]. Им были получены достаточные условия разложимости функций в ряды по собственным функциям таких задач. К сожалению, эти условия налагают серьезные требования на аналитичность разлагаемых функций и достаточно далеки от необходимых условий. В настоящей статье приводятся достаточные условия для сходимости спектральных разложений, усиливающие результат Фрайлинга для случая задачи (1), (2).

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Краевая задача (1), (2) имеет бесконечно много собственных значений, которые можно разложить в две серии:

$$\lambda_{k,1} = -\left(\rho_{k,1}^{(0)} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^5, \quad \rho_{k,1}^{(0)} = \frac{(5k+1)\pi}{5(1-\alpha)\sin\frac{\pi}{5}}, \quad k=0,1,2,\dots,$$

$$\lambda_{k,2} = -\left(\rho_{k,2}^{(0)} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^5, \quad \rho_{k,2} = \frac{k\pi}{\alpha\sin\frac{2\pi}{5}} e^{\frac{i\pi}{5}}, \quad k=1,2,\dots.$$

При этом все собственные значения, достаточно большие по модулю, простые. Для соответствующих им последовательностей собственных функций справедливы формулы:

$$y_{k,1} = e^{\rho_{k,1}^{(0)}(\omega_5 + \omega_1 x)} \left(1 - \exp\left(\left(2i\frac{(5k+1)\pi}{5(1-\alpha)}\right)(1-x)\right) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$y_{k,2} = e^{\rho_{k,2}^{(0)}(\omega_5 + \omega_1 x)} \left(1 + \exp\left(\left(-2i\frac{k\pi}{\alpha}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Пусть $\omega_k = \exp\left(\frac{2k-1}{5}\pi i\right)$, $k=1,\dots,5$. Далее, пусть $G(x,t,\lambda)$ является

функцией Грина задачи (1), (2) и $\rho^5 = -\lambda$. Через D_β обозначим область в комплексной плоскости, ограниченную отрезками прямых

$$\eta = \left(\xi \cos \frac{2k\pi}{5} - \beta \cos \frac{2\pi}{5}\right) \sin \frac{2k\pi}{5}, \quad k=1,2,3,4.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть ряды $\sum a_k y_{k,1}(x)$ и $\sum b_k y_{k,2}(x)$ сходятся равномерно на некотором интервале $[x_0, x_1] \subset (0,1)$. Тогда ряд

$$\sum a_k y_{k,1}(z) + \sum b_k y_{k,2}(z)$$

сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой области, лежащей в D_{x_1} , и представляет собой в этой области регулярную функцию.

Сформулируем теперь достаточное условие сходимости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x) \in L[0,1]$ и $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, причем выполняются следующие условия:

а) f_1, f_2 аналитичны в области D_β ($0 < \beta < \alpha$);

б) $f_1, l[f_1], l^2[f_1], \dots, f_2, l[f_2], l^2[f_2], \dots$ удовлетворяют краевым условиям в точке 0;

$$\text{в)} \frac{d^p}{dx^p} l^q [f_1] = O\left(\left(\frac{1+\varepsilon}{(\rho - \varepsilon - x)\cos \frac{\pi}{5}}\right)^{5q+p} (5q+p)!\right), \quad x \in [0, \beta - \varepsilon];$$

$$\text{г)} \frac{d^p}{dx^p} l^q [f_2] = O\left(\left(\frac{1+\varepsilon}{(\rho - \varepsilon - x)\cos \frac{2\pi}{5}}\right)^{5q+p} (5q+p)!\right), \quad x \in [0, \beta - \varepsilon].$$

Тогда $f(x)$ разлагается на $[0, \beta_1]$ ($0 < \beta_1 < \beta$) в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи (1), (2).

Приведем ряд наиболее важных лемм, используемых для доказательства теоремы 3.

ЛЕММА 1. При $x \in [0, \beta - \varepsilon_1]$, $t \geq \beta - \varepsilon_1$ справедлива оценка

$$G(x, t, \lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^4} \exp(-\delta_1 |\rho|)\right),$$

где $\delta_1 = (\varepsilon - \varepsilon_1) \cos \frac{\pi}{5}$ ($0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$).

ЛЕММА 2. При $x \geq t$ справедлива оценка

$$G(x, t, \lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^4} \exp\left(\cos \frac{\pi}{5} |\rho|(x-t)\right)\right).$$

ЛЕММА 3. При $t \leq x \leq \alpha$ справедлива оценка

$$G(x, t, \lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^4} \exp\left(\cos \frac{2\pi}{5} |\rho|(x-t)\right)\right).$$

ЛЕММА 4. Пусть $x \in [0, \beta - \varepsilon_1]$ и для функции $f_1(x)$ выполняются условия теоремы 3. Тогда

$$f_1 - S_{l+h}(f_1) = o(1)$$

при больших $|\lambda|$, где $S_{l+h}(f_1)$ представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции f_1 .

ЛЕММА 5. Пусть $x \in [0, \beta - \varepsilon_1]$ и для функции $f_2(x)$ выполняются условия теоремы 3. Тогда

$$f_2 - S_{l+h}(f_2) = o(1)$$

при больших $|\lambda|$, где $S_{l+h}(f_2)$ представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции f_2 .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. 1976. Т. 19, № 5. С. 763 – 772.

2. Freiling G. Irregulare Mehrpunkt-Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen: Habilitationsschrift dem Fachbereich 11 – Mathematik. Duisburg, 1979. 90 s.

УДК 517.5

В. И. Шевцов

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

В данной статье рассматриваются ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k x}. \quad (1)$$

Представления функций рядами вида (1) изучались многими математиками. Фундаментальные исследования по теории представления функций рядами (1) проведены А. Ф. Леонтьевым [1, 2] и его учениками.

Пусть $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k$ – целая функция уточненного порядка $\rho(r)$ и

типа σ . По определению функция $\rho(r)$ называется уточненным порядком, если существуют $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = p$, $\lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0$. Обозначим через $r = \varphi(t)$

функцию, обратную к функции $t = r^{\rho(r)}$. Предположим, что все нули функции $L(\lambda)$ простые, обозначим их через λ_k . В дальнейшем $0 < p < 1$.

Система функций $e^{\lambda_k x}$ неполна в метрике C ни на каком отрезке, так как $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$ при условии $0 < p < 1$ [2, с. 61]. Обозначим через A_{m_n} класс бесконечно дифференцируемых на интервале $[a; b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$1) |f^{(n)}(x)| < B_f^n m_n \quad (n \geq 0), \quad a < x < b, \quad 2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{m_n}}{\varphi(n)} = 0, \quad (2)$$

где B_f – постоянная, для каждой функции $f(x)$ своя.

Класс A_{m_n} не является квазианалитическим. Например, если $m_n = n^{\alpha n}$, $1 < \alpha < \frac{1}{p}$, $0 < p < 1$, тогда $A_{m'_n}$ не является квазианалитическим классом функций [3, 4].

Обозначим $A_{m_n}^*$ подкласс A_{m_n} , что любая функция $f \in A_{m_n}^*$ удовлетворяет следующему уравнению бесконечного порядка:

$$M_L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n f^{(n)}(x) = 0. \quad (3)$$

Элементарными решениями (3) являются функции $e^{\lambda_k x}$, $L(\lambda_k) = 0$. При исследовании класса $A_{m_n}^*$ важное значение имеет интерполирующая функция, которая определяется следующим образом. Обозначим через $C_n(\mu)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) тейлоровские коэффициенты функции:

$$\frac{L(\mu) - L(t)}{\mu - t} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\mu) t^n, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Функция

$$\omega_L(\mu, f, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\mu) f^{(n)}(\alpha), \quad \alpha < \alpha < b, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

называется интерполирующей функцией. Если $f \in A_{m_n}$, то интерполирующая функция является целой функцией комплексного переменного μ .

Отметим необходимое в дальнейшем свойство интерполирующей функции: если $f \in A_{m_n}^*$, тогда справедливо равенство

$$e^{\lambda_k(\alpha-x_0)} \omega_L(\lambda_k, f, x_0) = \omega_L(\lambda_k, f, \alpha), \quad x_0 = \frac{a+b}{2}, \quad \alpha \in (a; b). \quad (5)$$

Далее, $\omega_L(\mu, f, x_0)$ будем обозначать через $\omega_L(\mu, f)$. Функции $f \in A_{m_n}^*$ приведем в соответствие ряд

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\alpha) e^{\lambda_k x}, \quad b_k(\alpha) = \frac{\omega_L(\lambda_k, f, \alpha)}{L'(\lambda_k)}. \quad (6)$$

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in A_{m_n}$ и $b_k(\alpha) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), тогда $f^{(n)}(\alpha) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$).

Доказательство теоремы 1 в основном проводится методами, предложенными в [5, 6].

ТЕОРЕМА 2. Класс $A_{m_n}^*$ квазианалитический.

Доказательство. В силу линейности класса $A_{m_n}^*$ необходимо доказать, что если $f \in A_{m_n}^*$ и $f^{(n)}(t_0) = 0$, $t_0 \in (a; b)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), тогда $f(t) \equiv 0$. Рассмотрим случай, когда $t_0 = \frac{a+b}{2}$, применяя (5), получаем $b_n(\alpha) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) для любого $\alpha \in (a; b)$, отсюда по теореме 1 $f(t) \equiv 0$. Пусть $t_1 \neq t_0$ и $f^{(n)}(t_1) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$), используя (5), находим $\omega_L(\lambda_k, f, t_1) = \omega_L(\lambda_k, f) = 0$, отсюда как и выше $f(t) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу, связанную с аналитическим продолжением функции $f \in A_{m_n}^*$. Эту задачу будем рассматривать в случае, когда характеристическая функция $L(\lambda)$ уравнения (3), удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$1) L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_k^2} \right), \quad \mu_k > 0; \quad (7)$$

$$2) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|^h} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} < \infty, \quad 0 < h < 1. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in A_{m_n}^*$ и выполнены условия (7) и (8), тогда $f(x)$ допускает аналитическое продолжение в полосу $a < \operatorname{Re} z < b$ и в этой полосе $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$, $a_k = \frac{\omega_L(\lambda_k, f)}{L'(\lambda_k)}$.

Доказательство данной теоремы опирается на оценки коэффициентов a_k при условиях (7), (8) для $f \in A_{m_n}^*$ и теоремы 1 и 2.

Рассмотрим теперь задачу, когда функция $f \in A_{m_n}^*$ удовлетворяет также уравнению

$$M_{L_1}(f) = 0, \quad x \in \Delta, \quad \Delta \subset (a; b), \quad (9)$$

где Δ – интервал; характеристическая функция $L_1(\lambda)$ – целая функция уточненного порядка $p(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} p(r) = p$ и конечного типа.

ТЕОРЕМА 4. Для функции $f \in A_{m_n}^*$, удовлетворяющей условию (9), справедливы следующие утверждения:

1) если функции $L(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$ не имеют общих нулей, тогда $f(x) \equiv 0$, $x \in (a; b)$.

2) если функции $L(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$ имеют общие нули λ'_k , тогда в условиях теоремы 3

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k e^{\lambda'_k z}, \quad a'_k = \frac{\omega_L(\lambda'_k, f)}{L'(\lambda'_k)}, \quad a < \operatorname{Re} z < b.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М., 1976.
2. Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М., 1980.
3. Мандельбройт С. Квазианалитические классы функций. М.;Л., 1937.
4. Мандельбройт С. Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. М., 1955.
5. Шевцов В. И. Об одном квазианалитическом классе функций. Саратов, 2000. 15 с. Деп. в ВИНТИ 20.04.2000, №1103-В00.
6. Шевцов В. И. Уравнение бесконечного порядка в одном квазианалитическом классе функций // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов, 1999. С. 72 – 75.

УДК 519.517.948

Е. В. Шишкова

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^1[0,1]^*$

Рассмотрим уравнение Абеля:

$$Au \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1-\beta}} dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \beta < 1. \quad (1)$$

В данной статье, используя общий подход из [1], по аналогии с [2] построен метод нахождения приближений к решению $u(x) \in C[0,1]$ уравнения (1), а также к производной от решения (если $u(x) \in C^1[0,1]$), когда правая часть $f(x)$ уравнения задана ее δ -приближением в метрике $L_2[0,1]$: $\|f - f_\delta\|_{L_2} < \delta$.

Подход из [1] заключается в следующем: если для уравнения известен обратный оператор A^{-1} и имеется семейство операторов T_α такое, что $\|T_\alpha u - u\|_C \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, то семейство операторов $R_\alpha = T_\alpha A^{-1}$ будет регуляризующим для исходного уравнения в случае, если R_α является ограниченным оператором, действующим из L_2 в C .

Известно [3], что

$$A^{-1} f = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\beta} dt \right).$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

Рассмотрим операторы:

$$T_\alpha^0 u = -\frac{3}{4\alpha^3} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} ((t-x)^2 - \alpha^2) u(t) dt \quad \text{и} \quad T_\alpha^1 u = \frac{3}{2\alpha^3} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} (t-x) u(t) dt,$$

где $\alpha > 0$ – параметр.

Известно [4], что если $u(x) \in C^1[0,1]$, то $\|T_\alpha^p u - u^{(p)}\|_{C_\varepsilon} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ ($p = 0, 1$), где $C_\varepsilon = C[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > \alpha$.

ТЕОРЕМА 1. Для интегральных операторов

$$\widetilde{T}_\alpha^0 u = -\frac{3}{4\alpha^3} \begin{cases} \int_0^{x-\alpha} (K_{\alpha 1}(x,t) + K_{\alpha 2}(x,t)) u(t) dt + \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} K_{\alpha 1}(x,t) u(t) dt, & x \in [0, \alpha], \\ \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} K_{\alpha 1}(x,t) u(t) dt, & x \in [\alpha, 1-\alpha], \\ \int_{x-\alpha}^{2-x-\alpha} K_{\alpha 1}(x,t) u(t) dt + \int_{2-x-\alpha}^1 (K_{\alpha 1}(x,t) + K_{\alpha 3}(x,t)) u(t) dt, & x \in [1-\alpha, 1], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} K_{\alpha 1}(x,t) &= (t-x)^2 - \alpha^2, \\ K_{\alpha 2}(x,t) &= (t+x)^2 - \alpha^2, \\ K_{\alpha 3}(x,t) &= (2-t-x)^2 - \alpha^2, \end{aligned}$$

справедливо: $\|\widetilde{T}_\alpha^0 u - u'\|_{C[0,1]} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Обозначим ядра операторов \widetilde{T}_α^0 через $\widetilde{T}_\alpha^0(x,t)$.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $u(x) \in C^1[0, 1]$ и $u(0) = u(1) = 0$, тогда для интегральных операторов

$$\widetilde{T}_\alpha^1 u = -\int_0^1 \frac{d(\widetilde{T}_\alpha^0(x,t))}{dt} u(t) dt$$

справедливо: $\|\widetilde{T}_\alpha^1 u - u'\|_{C[0,1]} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Рассмотрим семейства операторов:

$$R_\alpha^p = \widetilde{T}_\alpha^p A^{-1} \quad (p = 0, 1).$$

ТЕОРЕМА 3. Операторы $R_\alpha^p = \widetilde{T}_\alpha^p A^{-1}$ ($p = 0, 1$) имеют вид

$$R_\alpha^p f = \frac{3}{2\alpha^3 \Gamma(3-\beta-p)} \hat{R}_\alpha^p f,$$

где

при $x \in [0, \alpha]$

$$\hat{R}_\alpha^p f = \int_0^{\alpha-x} (R_{\alpha\beta 1}^p(x,\tau) + R_{\alpha\beta 2}^p(x,\tau)) f(\tau) d\tau + \int_{\alpha-x}^{\alpha+x} R_{\alpha\beta 2}^p(x,\tau) f(\tau) d\tau;$$

при $x \in [\alpha, 1 - \alpha]$

$$\hat{R}_\alpha^p f = \int_0^{x-\alpha} (R_{\alpha\beta 3}^p(x, \tau) + R_{\alpha\beta 2}^p(x, \tau)) f(\tau) d\tau + \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} R_{\alpha\beta 2}^p(x, \tau) f(\tau) d\tau;$$

при $x \in [1 - \alpha, 1]$

$$\begin{aligned} \hat{R}_\alpha^p f &= \int_0^{x-\alpha} (R_{\alpha\beta 3}^p(x, \tau) + R_{\alpha\beta 4}^p(x, \tau) + R_{\alpha\beta 5}^p(x, \tau)) f(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{x-\alpha}^{2-x-\alpha} (R_{\alpha\beta 4}^p(x, \tau) + R_{\alpha\beta 5}^p(x, \tau)) f(\tau) d\tau + \int_{2-x-\alpha}^1 R_{\alpha\beta 5}^p(x, \tau) f(\tau) d\tau; \end{aligned}$$

$$R_{\alpha\beta 1}^p(x, \tau) = (x + \tau - \alpha\beta + \alpha(1-p))(\alpha - x - \tau)^{1-\beta-p},$$

$$R_{\alpha\beta 2}^p(x, \tau) = (\tau - x - \alpha\beta + \alpha(1-p))(x - \tau + \alpha)^{1-\beta-p},$$

$$R_{\alpha\beta 3}^p(x, \tau) = (x - \tau - \alpha\beta + \alpha(1-p))(x - \tau - \alpha)^{1-\beta-p},$$

$$R_{\alpha\beta 4}^p(x, \tau) = (2 - x - \tau - \alpha\beta + \alpha(1-p))(2 - x - \tau - \alpha)^{1-\beta-p},$$

$$R_{\alpha\beta 5}^p(x, \tau) = (1-p)(1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2 - (1-x)^2\right)(1-\tau)^{-\beta} - 2(1-\tau)^{2-\beta-p}.$$

Каждый из операторов R_α^p ($p = 0, 1$) при $0 < \beta < \frac{1}{2}$ является линейным ограниченным действующим из $L_2[0,1]$ в $C[0,1]$ интегральным оператором. При этом в пространстве $C[0,1-\varepsilon]$ ($\varepsilon > \alpha$) оператор R_α^0 является линейным ограниченным при $0 < \beta < 1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. Об одном способе построения методов регуляризации уравнений первого рода // ЖВМ и МФ. 2000. Т. 40, № 7. С. 907 – 1002.
2. Хромова Г. В. О приближенных решениях уравнения Абеля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2001. № 3. С. 5 – 9.
3. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. С. 38.
4. Хромова Г. В. О дифференцировании функций, заданных с погрешностью // Диф. уравнения и выч. математика. 1984. Вып. 6. С. 53 – 58.

ОБ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ НА ГРАФАХ*

1. Рассмотрим компактное связное дерево T в \mathbf{R}^m с корнем v_0 , множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, \dots, e_r\}$. Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Вершина называется *границей*, если она принадлежит только одному ребру. Такое ребро называется *граничным*. Все остальные вершины и ребра называются *внутренними*. Без ограничения общности считаем, что v_0 является границей вершиной.

Для двух точек $a, b \in T$ будем писать $a \leq b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b ; пусть $|b|$ обозначает длину этого пути. Будем писать $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Отношение $<$ определяет частичную упорядоченность на T . Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : a \leq z \leq b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ – ребро, то мы будем называть v его *начальной точкой*, w – его *конечной точкой* и будем говорить, что e *выходит из* v и *заканчивается* в w . Для каждой внутренней вершины v мы обозначим через $R(v) := \{e \in E : e = [v, w], w \in V\}$ множество ребер, выходящих из v . Для любой $v \in V$ число $|v|$ является целым неотрицательным числом, которое называется *порядком* v . Для $e \in E$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=1, r} |v_j|$ называется *высотой дерева* T . Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$ – множество вершин порядка μ , и пусть $E^{(\mu)} := \{e \in E : e = [v, w], v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$, $\mu = \overline{1, \sigma}$ – множество ребер порядка μ .

Каждое ребро $e \in E$ рассматривается как отрезок $[0, 1]$ и параметризуется параметром $x \in [0, 1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию на каждом ребре $e = [v, w] \in E$: если $z = z(x) \in e$, то $z(0) = w$, $z(1) = v$, т.е. $x = 0$ соответствует конечной точке w , а $x = 1$ соответствует начальной точке v . Для определенности занумеруем вершины v_j следующим образом: $\Gamma := \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ – граничные вершины, $v_{p+1} \in V^{(1)}$, а v_j , $j > p + 1$, занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра, а именно $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \dots, e_{p+1}\}$ – множество граничных ребер, $e_{p+1} = [v_0, v_{p+1}]$. Ясно, что $e_j \in E^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j \in V^{(\mu)}$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00007) и программы «Университеты России» (проект упр.04.01.376).

2. Интегрируемая функция Y на T может быть представлена как вектор $Y(x) = [y_j(x)]_{j \in J}$, $x \in [0,1]$, где $J := \{j : j = \overline{1, r}\}$, и функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j . Пусть $q = [q_j]_{j \in J}$ – интегрируемая вещественно-значная функция на T , которая называется потенциалом. Рассмотрим уравнение Штурма – Лиувилля на T :

$$-y''_j(x) + q_j(x)y_j(x) = \lambda y_j(x), \quad x \in [0,1], \quad (1)$$

где $j \in J$, λ – спектральный параметр, функции $y_j(x), y'_j(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине v_k , $k = p+1, r$:

$$\left. \begin{array}{l} y_j(1) = y_k(0) \text{ для всех } e_j \in R(v_k) \text{ (условие непрерывности),} \\ \sum_{e_j \in R(v_k)} y'_j(1) = y'_k(0) \text{ (условие Кирхгофа).} \end{array} \right\} \quad (2)$$

Условия склейки (2) называются *стандартными*. В электрических сетях (2) выражает закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей – баланс напряжений и т.д. Отметим, что в (2) мы имеем $2r - p - 1$ условий. Для того чтобы определить краевую задачу для (1), нам нужно дополнительно задать $p+1$ условие в граничных вершинах v_j , $j = \overline{0, p}$. Например, через L_0 обозначим краевую задачу для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями Дирихле $Y_{v_j} = 0$, $j = \overline{0, p}$.

3. Пусть $\Psi_k(x, \lambda) = [\psi_{kj}(x, \lambda)]_{j \in J}$, $k = \overline{0, p}$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие (2) и краевым условиям $\Psi_{k|v_j} = \delta_{kj}$, $j = \overline{0, p}$, где δ_{kj} – символ Кронекера. Функции Ψ_k называются решениями Вейля для (1) относительно граничной вершины v_k . Обозначим $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1, p}}$, где $M_k(\lambda) := \psi'_{kk}(0, \lambda)$. Функции $M_k(\lambda)$ называются *функциями Вейля*, а $M(\lambda)$ называется *вектором Вейля* для (1). Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. По заданному M построить потенциал q на T .

Понятие вектора Вейля M является обобщением понятия функции Вейля (m -функций) для классического оператора Штурма – Лиувилля. Таким образом, обратная задача 1 является обобщением классической обратной задачи для оператора Штурма – Лиувилля на отрезке по функции Вейля и (что эквивалентно) по спектральной мере.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с T рассмотрим дерево \tilde{T} того же вида, но с другим потенциалом \tilde{q} . Везде в дальнейшем, если символ α обозначает объект, относящийся к T , то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \tilde{T} .

ТЕОРЕМА 1. Если $M = \tilde{M}$, то $q = \tilde{q}$. Таким образом, задание вектора Вейля M однозначно определяет потенциал q на T .

Доказательство теоремы конструктивно и дает процедуру решения обратной задачи 1. Известно, что для классического оператора Штурма – Лиувилля на отрезке задание m -функции эквивалентно заданию спектральной меры и также эквивалентно заданию дискретных спектральных данных, введенных Марченко, Левинсоном и Боргом [1]. Аналогично задание вектора Вейля M на T эквивалентно заданию некоторых дискретных спектральных характеристик. Например дадим постановку обратной задачи на T по системе спектров, которая является обобщением классической обратной задачи Борга для уравнения Штурма – Лиувилля на отрезке по двум спектрам. Обозначим через L_k , $k = \overline{1, p}$ краевые задачи для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями $y'_k(0) = 0$, $y_{|v_j} = 0$, $j = \overline{0, p} \setminus k$. Пусть $\{\lambda_{lk}\}_{l \geq 1}$, $k = \overline{0, p}$, – собственные значения краевых задач L_k .

Обратная задача 2. По заданным спектрам $\{\lambda_{lk}\}_{l \geq 1}$, $k = \overline{0, p}$, построить потенциал q на T .

Если $r = 1$ (т.е. дерево T является интервалом $[0, 1]$), то $p = 1$, и обратная задача 2 совпадает с классической задачей Борга по двум спектрам.

ТЕОРЕМА 2. Если $\lambda_{lk} = \tilde{\lambda}_{lk}$ при всех $l \geq 1, k = \overline{0, p}$, то $q = \tilde{q}$. Таким образом, задание спектров краевых задач L_k , $k = \overline{0, p}$, однозначно определяет потенциал q на T .

Доказательство теоремы конструктивно и дает процедуру решения обратной задачи 2. Отметим, что для решения обратных задач 1 и 2 мы используем и развиваем идеи метода спектральных отображений [2].

Замечание. Функции Вейля $M_k(\lambda)$ являются мероморфными по λ с полюсами в точках $\{\lambda_{l0}\}_{l \geq 1}$. Можно показать, что задание вектора Вейля $M(\lambda)$ равносильно заданию дискретных спектральных данных $S := \{\lambda_{l0}, \alpha_{lk}\}_{l \geq 1, k = \overline{1, p}}$, где α_{lk} – вычеты $M_k(\lambda)$ в точках λ_{l0} . Таким образом, обратная задача 1 эквивалентна обратной задаче восстановления потенциала q на дереве T по спектральным данным S , которые являются обобщением спектральных данных Марченко для классического оператора Штурма – Лиувилля на отрезке [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001.
2. Yurko V.A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, 2002.

УДК 535.319

Н. Ю. Агафонова

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ
ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ**

Напряженное состояние однородного изотропного тела $Q \in R^3$, находящегося под действием некоторых объемных или поверхностных сил, описывается уравнением вида [1]

$$\begin{aligned} u_j(P_0) + \iint_E [u_i(P)T_{ij}(P_0, P) - t_i(P)U_{ij}(P_0, P)]dE(P) = \\ = \iiint_Q b_i(p)U_{ij}(P_0, p)dQ(p), \end{aligned} \quad (1)$$

где P_0 – фиксированная точка тела, P – некоторая точка поверхности E , p – некоторая точка тела Q , t_i – компоненты вектора поверхностных сил, b_i – компоненты вектора объемных сил, u_i – компоненты вектора перемещений.

Компоненты матрицы фундаментальных решений выражаются формулой

$$U_{ij}(P_0, P) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j} \right].$$

Компоненты матрицы сингулярных решений имеют вид

$$T_{ij}(P_0, P) = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[\delta_{ij} + \frac{3}{1-2\nu} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right\},$$

где $r^2 = (x_i - x_j)(x_i - x_j)$, x_i – координаты точки P , x_j – координаты точки P_0 , n_i – компоненты вектора нормали n к поверхности тела.

Пусть Q является телом вращения. Перейдем к цилиндрической системе координат $x_1 = x$, $x_2 = R \cos \varphi$, $x_3 = R \sin \varphi$. Уравнение (1) примет вид

$$v_l + \int\limits_{\Gamma}^{2\pi} (T_{kl} v_k - V_{kl} F_k) R d\phi d\Gamma = \int\limits_D^{2\pi} \int V_{kl} B_k R d\phi dS,$$

где v_l – компоненты вектора перемещений, V_{kl}, T_{kl} – компоненты матриц фундаментальных и сингулярных решений соответственно, F_k, B_k – компоненты поверхностных и объемных сил соответственно, записанные в цилиндрической системе координат. Здесь D – двумерная область, вращением которой получается тело Q , а Γ – ее граница. При этом

$$V_{ij} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\alpha_{ij}^0 \alpha_{kj} + \frac{\partial r}{\partial \xi_k} \left(-\frac{\partial r}{\partial \eta_l} \right) \right],$$

$$T_{kl} = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} \left[\alpha_{lj}^0 \alpha_{kj} + \frac{3}{1-2\nu} \frac{\partial r}{\partial \xi_k} \left(-\frac{\partial r}{\partial \eta_l} \right) \right] - \frac{\partial r}{\partial \xi_k} \alpha_{lj}^0 \alpha_{ij} \hat{n}_i + \left(-\frac{\partial r}{\partial \eta_l} \right) \hat{n}_k \right\},$$

где α_{ij} – направляющие косинусы, \hat{n} – вектор нормали, ξ_k – цилиндрические координаты произвольной точки тела, η_l – цилиндрические координаты точки, в которой ищется решение.

Раскладывая компоненты векторов v, F, B в ряды Фурье вида

$$h_l(x, R, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} h_l^c(x, R) \cos m\phi + h_l^s(x, R) \sin m\phi \quad \text{для } l=1, 2,$$

$$h_l(x, R, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} h_l^s(x, R) \cos m\phi + h_l^c(x, R) \sin m\phi \quad \text{для } l=3$$

и проводя необходимые преобразования, получаем следующую систему интегральных уравнений для коэффициентов $v_1^c(x, R), v_2^c(x, R), v_3^c(x, R)$.

$$\begin{cases} v_1^c + \int\limits_{\Gamma} (v_1^c T_{11}^c + v_2^c T_{21}^c + v_3^c T_{31}^s) R d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} (F_1^c V_{11}^c + F_2^c V_{21}^c + F_3^c V_{31}^s) R d\Gamma = \\ = \iint\limits_D (B_1^c V_{11}^c + B_2^c V_{21}^c + B_3^c V_{31}^s) R dS; \\ v_2^c + \int\limits_{\Gamma} (v_1^c T_{12}^c + v_2^c T_{22}^c + v_3^c T_{32}^s) R d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} (F_1^c V_{12}^c + F_2^c V_{22}^c + F_3^c V_{32}^s) R d\Gamma = \\ = \iint\limits_D (B_1^c V_{12}^c + B_2^c V_{22}^c + B_3^c V_{32}^s) R dS; \\ v_2^c + \int\limits_{\Gamma} (v_1^c T_{13}^s + v_2^c T_{23}^s + v_3^c T_{33}^c) R d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} (F_1^c V_{13}^s + F_2^c V_{23}^s + F_3^c V_{33}^c) R d\Gamma = \\ = \iint\limits_D (B_1^c V_{13}^s + B_2^c V_{23}^s + B_3^c V_{33}^c) R dS. \end{cases} \quad (2)$$

Заменой индексов $c \Leftrightarrow s$ получается соответствующая система для коэффициентов $v_1^c(x, R), v_2^c(x, R), v_3^c(x, R)$.

Компоненты

$$T_{kl}^c = \int_0^{2\pi} T_{kl} \cos m\varphi \, d\varphi, \quad T_{kl}^s = \int_0^{2\pi} T_{kl} \sin m\varphi \, d\varphi,$$

$$V_{kl}^c = \int_0^{2\pi} V_{kl} \cos m\varphi \, d\varphi \text{ и } V_{kl}^s = \int_0^{2\pi} V_{kl} \sin m\varphi \, d\varphi$$

требуют вычисления интегралов вида

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2m\varphi}{\rho^a} \, d\varphi, \text{ где } \rho^2 = (x - x_0)^2 + (R - R_0)^2 + 4RR_0 \sin^2 \varphi, \quad a = 1, 3, 5.$$

Используя метод представления границы плоской области в Р-форме, предложенный в [2], в уравнениях (2) перейдем к параметру σ . Предположим, что всю границу Γ можно разбить на гладкие участки L_1, L_2, \dots, L_N , представимые уравнениями в параметрическом виде $x = x(\sigma) = x_k(\sigma)$, $R = R(\sigma) = R_k(\sigma)$, $\sigma \in L_k$. Положительным направлением движения по Γ считается то, при котором подобласть с большим номером остается слева. Параметр σ выбирается так, чтобы он монотонно увеличивался при движении по L_k в положительном направлении и конечное значение σ на L_{k-1} было его начальным значением на L_k . Тогда участок L_k взаимно однозначно отобразится на отрезок $[d_{k-1}, d_k]$, а вся граница Γ области D – на отрезок $[d_0, d_N]$ числовой оси σ . Элемент поверхности E для областей вращения выразится теперь следующим образом:

$$dE = R(\sigma)\chi(\sigma)d\sigma, \quad \chi(\sigma) = \sqrt{[x'(\sigma)]^2 + [R'(\sigma)]^2}.$$

Первое уравнение системы (2) примет вид

$$\begin{aligned} v_1^c(\sigma_0) &+ \int_{d_0}^{d_N} (v_1^c T_{11}^c + v_2^c T_{21}^c + v_3^c T_{31}^s) R(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma - \\ &- \int_{d_0}^{d_N} (F_1^c V_{11}^c + F_2^c V_{21}^c + F_3^c V_{31}^s) R(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma = \\ &= \int_{d_0}^{d_N} (B_1^c V_{11}^c + B_2^c V_{21}^c + B_3^c V_{31}^s) R(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma \text{ для } m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Остальные уравнения преобразуются аналогично.

Таким образом, для тел вращения получена система одномерных интегральных уравнений, после решения которых по формулам вида (2) можно получить значения компонент вектора перемещений как на поверхности, так и внутри изотропного тела.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М. Метод граничных интегральных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.

2. Федик И. И., Колесов В. С., Михайлова В. Н. Температурные поля и термона-пряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985. 280 с.

УДК 539.3

Э. В. Антоненко, Н. С. Хлопцева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

К тонкостенным элементам оболочечных конструкций относятся стрингеры, шпангоуты и обшивка. Физическими моделями этих элементов являются стержни, кольца и гладкая оболочка. Для снижения массы конструкции ее элементы могут выполняться геометрически неоднородными (с переменной по их периметру жесткостью или толщиной).

Математические модели потери устойчивости элементов можно разделить на две группы. В основе первой находятся решения задач на собственные значения дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях. Критические силы входят в коэффициенты этих уравнений. Будем называть такой метод расчета «точным».

Вторая группа математических моделей строится на базе прямых методов (с использованием законов сохранения в механике). Обычно используется условие безразличного равновесия, когда работа внутренних сил приравнивается работе внешних сил.

Критическую нагрузку потери устойчивости обозначим через p_* , прогибы – w , изгибную жесткость – D . Штрихами будем обозначать производные по осевой координате x или по угловой координате φ .

1. Потеря устойчивости при сжатии неоднородного стержня длиной l описывается уравнением

$$(D(x)w''(x))'' + p_* w(x) = 0. \quad (1)$$

При дискретном и непрерывном изменении жесткости вдоль стержня имеется ряд решений этой задачи [1].

Энергетический метод позволяет найти критическую силу по формуле

$$p_* = \left(\int_0^l D(x)[w''(x)]^2 dx \right) / \left(\int_0^l [w'(x)]^2 dx \right), \quad (2)$$

где функции прогиба должны удовлетворять граничным условиям.

Например, для составного стержня с двумя участками, на которых $D = D_1$ ($0 \leq x \leq l_1$) и $D = D_2$ ($l_1 \leq x \leq l$), целесообразно выбирать функцию прогиба как у однородного стержня. Из (2) можно получить $p_* = kp_{*0}$, p_{*0} – критическая сила однородного стержня с жесткостью $D = D_1$ при заданных граничных условиях, $k = k(\bar{l}, \bar{D})$, где $\bar{l} = l_1/l$, $\bar{D} = D_2/D_1$. При широком опирании

$$p_* = k(m\pi/l)^2, \quad k = a + \bar{D}(1-a), \quad a = \bar{l} + (\sin \pi \bar{l})/\pi.$$

2. Потеря устойчивости неоднородного кольца радиуса R от радиальной нагрузки описывается дифференциальным уравнением пятого порядка [1] или полученным нами уравнением

$$\psi^{(4)} + 2\frac{D'}{D}\psi'' + \left(2 + \frac{D''}{D} + p_* \frac{R^3}{D}\right)\psi'' + 2\frac{D'}{D}\psi' + \left(1 + \frac{D''}{D} + p_* \frac{R^3}{D}\right)\psi = 0, \quad (3)$$

где $w = w(\phi)$, $D = D(\phi)$. Для замкнутого кольца $w = A \cos n\phi$. Из (3) для однородного кольца следует известный результат

$$p_* = (n^2 - 1)D/R^3. \quad (4)$$

Энергетический подход при $D = D_0 f(\phi)$ позволяет получить

$$p_* = k \frac{(n^2 - 1)D}{R^3}, \quad k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\phi) \cos^2 n\phi d\phi. \quad (5)$$

Для однородного кольца ($D = D_0$, $k = 1$) из (5) следует (4).

При дискретном (ступенчатом) изменении жесткости, когда $D = D_1$ ($0 \leq \phi < \alpha$), $D = D_2$ ($\alpha \leq \phi < \pi$), имеем

$$D_0 = D_1, \quad k = N + \bar{D}(1-N), \quad N = \alpha/\pi + (\sin 2n\alpha)/2n\pi, \quad \bar{D} = D_2/D_1.$$

3. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки средней длины с переменной толщиной $\delta(x)$ вдоль образующей описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами [2].

Используя результаты [1, 4] при $w(x, \phi) = \psi(x) \cos n\phi$, получим

$$p_* = \frac{1}{I_3} \left[(n^2 - 1)I_1 + \frac{I_2}{n^4(n^2 - 1)} \right], \quad (6)$$

$$I_3 = \int_0^l \psi^2(x) dx, \quad I_1 = \int_0^l DR^{-3}\psi'(x) dx, \quad I_2 = \int_0^l E\delta R^3 [\psi''(x)]^2 dx.$$

Для рассматриваемого класса оболочек минимизация (6) по n^2 приводит к выражению

$$p_* = 1,33 \sqrt[4]{3I_1^3 I_2 / I_3}, \quad (7)$$

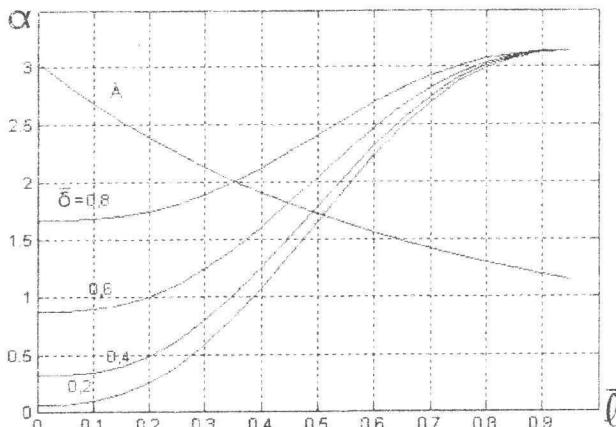
из которого как частный случай для оболочки с постоянной толщиной следуют результаты [3, 1, 4].

Если $\delta = \delta_0 f(x)$, из (7) можно получить

$$p_* = 0,293E \frac{R}{l} \left(\frac{\delta_0}{R} \right)^{2.5} \alpha,$$

где δ_0 – толщина оболочки в сечении $x=0$, коэффициент α учитывает граничные условия и закон изменения толщины оболочки по длине $f(x)$.

Для непрерывно меняющейся толщины $\delta = \delta_0 e^{-\alpha x}$ при шарнирном опириании краев оболочки на рисунке (кривая А) показан характер изменения $\alpha = \alpha(\bar{l})$, если $\bar{l} = bl$.



Из (7) для составной оболочки из двух отсеков с толщинами $\delta_1 (0 \leq x \leq l_1), \delta_2 (l_1 \leq x \leq l)$ при различных граничных условиях получены зависимости для расчета $\alpha = \alpha(\bar{l}, \bar{\delta}), \bar{l} = l_1/l, \bar{\delta} = \delta_2/\delta_1$. Результаты расчета для шарнирного опириания представлены на рисунке. Различие результатов расчета по (7) с результатами «точных» расчетов [2] не превышает 2%.

Математическая модель потери устойчивости, базирующаяся на прямых методах, позволяет относительно просто с достаточной для нужд расчетчика точностью на этапе эскизного проектирования оболочечной конструкции оценить влияние неоднородности на величины критических нагрузок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Антоненко Э. В., Хлопцева Н. С. Критическое давление составных цилиндрических оболочек // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 156 – 158.

3. Антоненко Э. В. Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами // Прикл. механика. 1975. Т. 11, вып. 6. С. 44 – 50.
 4. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.

УДК 629

Ю. В. Афанасьева, Ю. Н. Челноков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Рассматривается задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА) как деформируемой фигуры. Эта задача формулируется как задача оптимального управления движением центра масс КА с подвижным правым концом траектории и сводится к краевой задаче принципа максимума Понтрягина. Для описания ориентации мгновенной орбиты КА используется новый кватернионный оскулирующий элемент орбиты, заменяющий собой три классических угловых элемента орбиты КА.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу: требуется построить ограниченное по модулю управление \mathbf{p} :

$$0 \leq p \leq p_{\max} < \infty, \quad p = |\mathbf{p}|, \quad (1)$$

переводящее КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} v_1' &= c^2 r^{-3} - fMr^{-2} + p_1, \quad r' = v_1, \quad c' = rp_2, \\ \varphi_{tr}' &= cr^{-2} + r(c^2 - fMr)^{-1} \cos \varphi_{tr} (cp_1 \cos \varphi_{tr} - (c + fMr c^{-1}) p_2 \sin \varphi_{tr}), \\ 2(\Lambda^{or})' &= \Lambda^{or} \circ \Omega_\xi, \\ \Omega_\xi &= \Omega_1 \mathbf{i}_1 + \Omega_2 \mathbf{i}_2 + \Omega_3 \mathbf{i}_3 = (r/c)p_3(\cos \varphi_{tr} \mathbf{i}_1 + \sin \varphi_{tr} \mathbf{i}_2) - \\ &- r(c^2 - fMr)^{-1} \cos \varphi_{tr} (cp_1 \cos \varphi_{tr} - (c + fMr/c)p_2 \sin \varphi_{tr}) \mathbf{i}_3, \end{aligned} \quad (2)$$

из заданного начального состояния

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \quad r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \quad c(0) = c^0, \quad \varphi_{tr}(0) = \varphi_{tr}^0, \\ \Lambda_j^{or}(0) &= (\Lambda_j^{or})^0 \quad (j = 0..3) \end{aligned} \quad (3)$$

в конечное состояние, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} c(t_k) &= c(0) = c_0, \quad e_{or}(t_k) = e_{or}(0), \\ \Lambda_j^{or}(t_k) &= \Lambda_j^{*}, \end{aligned} \quad (4)$$

и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^L (1 + \alpha p^2(t)) dt, \quad \alpha = \text{const} \geq 0.$$

В уравнениях (1) – (4) f – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела, \mathbf{p} – вектор ускорения от тяги реактивного двигателя, $v_1, r, c, \varphi_{tr}, \Lambda^{or}$ – фазовые координаты КА; v_1, r, c характеризуют форму и размеры мгновенной орбиты КА, угловая переменная φ_{tr} характеризует положение КА на орбите, Λ^{or} – кватернионный оскулирующий элемент орбиты КА.

биты КА, характеризующий ее мгновенную ориентацию, ϵ_{or} – эксцентриситет орбиты КА.

2. Необходимые условия оптимальности. Задачу решаем, используя принцип максимума Понтрягина. Вводим дополнительную переменную g , удовлетворяющую дифференциальному уравнению $g' = 1 + \alpha p^2$ и начальному условию $g(0) = 0$. Вводим сопряжённые переменные p , s_1 , e , χ_{tr} , M_j^{or} и ψ_0 , соответствующие фазовым переменным r , v_1 , c , ϕ_{tr} , Λ_j^{or} и переменной g . Функция Гамильтона – Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_0(1 + \alpha p^2) + p v_1 + s_1(c^2 r^{-3} - fMr^{-2} + p_1) + e r p_2 + \chi_{\text{tr}} c r^{-2} + (\chi_{\text{tr}} - (1/2)N_3^{\text{or}})r(c^2 - fMr)^{-1} \cos\phi_{\text{tr}}(cp_1 \cos\phi_{\text{tr}} - (c + fMr c^{-1})p_2 \sin\phi_{\text{tr}}) + (1/2)(N_1^{\text{or}} \cos\phi_{\text{tr}} + N_2^{\text{or}} \sin\phi_{\text{tr}})rc^{-1}p_3, \quad (5)$$

где N_1^{or} , N_2^{or} , N_3^{or} – компоненты кватерниона;

$$\mathbf{N}^{\text{or}} = \mathbf{N}_0 + N_1 \mathbf{i}_1 + N_2 \mathbf{i}_2 + N_3 \mathbf{i}_3 = \mathbf{\Lambda}^{\text{or}} \circ \mathbf{M}^{\text{or}}$$

(здесь $\overline{\mathbf{\Lambda}^{\text{or}}} = \mathbf{\Lambda}_0^{\text{or}} - \mathbf{\Lambda}_1^{\text{or}} \mathbf{i}_1 - \mathbf{\Lambda}_2^{\text{or}} \mathbf{i}_2 - \mathbf{\Lambda}_3^{\text{or}} \mathbf{i}_3$ – кватернион, сопряженный к $\mathbf{\Lambda}^{\text{or}}$).

Сопряжённая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} s_1' &= -p, \quad p' = F_1(s_1, c, r, \chi_{\text{tr}}, e, p, \mathbf{N}^{\text{or}}, \phi_{\text{tr}}), \quad e' = F_2(s_1, c, r, \chi_{\text{tr}}, p, \mathbf{N}^{\text{or}}, \phi_{\text{tr}}), \\ \chi_{\text{tr}}' &= F_3(c, r, \chi_{\text{tr}}, p, \mathbf{N}^{\text{or}}, \phi_{\text{tr}}), \\ 2(\mathbf{M}^{\text{or}})' &= \mathbf{M}^{\text{or}} \circ \mathbf{\Omega}_{\xi}, \quad (6) \\ \psi_0' &= 0. \quad (7) \end{aligned}$$

В дальнейшем в силу однородности функции H относительно сопряженных переменных и уравнения (7) в выражении (5) для функции H положим $\psi_0 = -1$.

Оптимальное управление \mathbf{p}^0 , найденное из условия максимума функции H , определяемой соотношением (5) по переменной \mathbf{p} с учётом ограничения (1), имеет вид

$$\mathbf{p}_{\eta}^0 = p_1^0 \mathbf{i}_1 + p_2^0 \mathbf{i}_2 + p_3^0 \mathbf{i}_3 = p^0 \mathbf{n}_{\eta} / |\mathbf{n}|, \quad (8)$$

$$\mathbf{n}_{\eta} = G_1(s_1, r, c, e, \chi_{\text{tr}}, \mathbf{N}^{\text{or}}, \phi_{\text{tr}}),$$

где p^0 при $\alpha > 0$ определяется соотношениями:

$$p^0 = \begin{cases} (2\alpha)^{-1} |n|, & \text{если } (2\alpha)^{-1} |n| \leq p_{\max}, \\ p_{\max}, & \text{если } (2\alpha)^{-1} |n| > p_{\max}, \end{cases} \quad (9)$$

а при $\alpha = 0$ – соотношением

$$p^0 = p_{\max}. \quad (10)$$

Условия трансверсальности на правом конце траектории после исключения неопределенных множителей Лагранжа принимают вид

при $t = t_k$

$$\begin{aligned} p + s_1 v_1 r^{-1} &= 0, \\ \chi_{\text{tr}} - s_1 v_1 (\operatorname{ctg}\phi_{\text{tr}} + v_1 r c^{-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию шестнадцати дифференциальных уравнений (2), (6) – (10) относительно переменных r , v_1 , c , ϕ_{tr} , Λ_j , M_j ($j = 0..3$), p , s_1 , e , χ_{tr} . При интегрировании уравнений появится шестнадцать произвольных постоянных интегрирования, семнадцатым неизвестным будет время t_k . Для определения постоянных и времени t_k

имеем семнадцать условий: четырнадцать граничных условий (3) – (4), два условия трансверсальности (11) и равенство гамильтониана нулю в конечный момент времени, имеющее место для оптимального управления p^0 .

3. **Анализ задачи.** Уравнения задачи имеют первые интегралы:

$$\|\Lambda^{\text{ор}}\|^2 = 1, \|\mathbf{M}^{\text{ор}}\|^2 = \text{const}, H(r, v_1, c, \varphi_{tr}, \Lambda^{\text{ор}}, \rho, \chi_{tr}, \mathbf{M}^{\text{ор}}, p^0) = 0,$$
$$\mathbf{M}^{\text{ор}} \circ \overline{\Lambda^{\text{ор}}} = \mathbf{N}^* = \text{const}.$$

Использование двух последних интегралов и кватернионной замены переменных $\mathbf{N}^{\text{ор}} = \Lambda^{\text{ор}} \circ \mathbf{M}^{\text{ор}}$ позволяет понизить порядок системы на пять единиц без усложнения правых частей уравнений. Правые части уравнений (6) F_1, F_2, F_3 являются сложными функциями фазовых и сопряженных переменных. Анализ этих уравнений показал, что при выполнении условия $\chi_{tr} = (1/2)\mathbf{N}_3^{\text{ор}}$ уравнения и соотношения краевой задачи существенно упрощаются, а порядок системы понижается еще на единицу.

Заключение. В статье сформулирована краевая задача принципа максимума, к которой сводится задача оптимального управления ориентацией орбиты КА как деформируемой фигуры. Использование новой модели орбитального движения КА позволяет наиболее эффективно рассматривать общую задачу оптимального управления движением КА как композицию двух взаимосвязанных задач: задачи управления формой и размерами орбиты КА и задачи управления ориентацией орбиты КА, поскольку введенный новый кватернионный оскулирующий элемент непосредственно характеризует собой ориентацию мгновенной орбиты КА в отличие от других, ранее использованных кватернионных переменных. Получены первые интегралы уравнений краевой задачи, установлено условие, при выполнении которого уравнения краевой задачи существенно упрощаются.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 1. С. 92 – 107.

УДК 517.958:536.2

К. Г. Бахтин, В. Ю. Ольшанский

ОЦЕНКА КОНВЕКТИВНЫХ ЧЛЕНОВ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОРАСПЩЕПЛЕНИЯ ГРАФИТА

Рассматривается математическая модель процесса получения термически расщепленного графита (ТРГ) из окисленного графитового порошка (ОГ) в металлической пресс-форме. Порошок ОГ равномерно распределен в заданной области и подвергается нагреву извне. При достижении критической температуры появляется подвижная граница раздела ОГ – ТРГ.

Плотность ТРГ, получаемого при расщеплении в свободном объеме, может быть в десятки раз меньше плотности ОГ. Точный учет возникающего поля скоростей сыпучей среды (ОГ) является достаточно сложной задачей. Для оценки влияния конвективных членов на движение границы раздела фаз поле скоростей задавалось априорно. Задача Стефана решалась методом сквозного счета со сглаживанием коэффициентов [1, 2] с использованием локально-одномерной разностной схемы [3].

1. Пусть ОГ и ТРГ занимают области D_1 и D_2 соответственно, $\sigma = \sigma(t)$ – разделяющая подобласти D_i подвижная граница, $D = D_1 \cup D_2$, $\Gamma = \partial D$. Если поля скоростей \bar{v} частиц известны, то поля температур $u_i(x, y, t)$ в областях D_i определяются из решения задачи Стефана:

$$\rho_i c_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{v}_i \operatorname{grad} u_i \right) = \operatorname{div}(k_i \operatorname{grad} u_i), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_1(x, y, 0) = f_0(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (2)$$

$$u_i(x, y, t) = f_i(x, y) \text{ или } k_i \frac{\partial u_i}{\partial n} + u_i(x, y, t) \operatorname{Bio} = u_e \operatorname{Bio}, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t) = u_*, \quad (x, y) \in \sigma, \quad (4)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = \lambda \rho_1 (v_\sigma - v_{in}), \quad (x, y) \in \sigma. \quad (5)$$

Здесь ρ_i, c_i, k_i – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности вещества в областях D_i , u_e – температура внешнего нагрева, Bio – число Био, v_{in} – нормальная составляющая (по отношению к границе σ) скорости частиц в области D_i , v_σ – скорость движения границы σ .

Рассматривались две упрощенные модели процесса.

Модель А. Средняя плотность вещества в областях D_i мала и постоянна, $\rho_1(t) = \rho_2(t) = \gamma \rho_{OG}$, где ρ_{OG} – плотность порошка ОГ; $\gamma < 1$, $\kappa \gamma > 1$, где γ – начальная доля графита в единице объема; κ – коэффициент расширения ОГ в свободном объеме. Считаем $v_i = 0$, $i = 1, 2$. Равномерное начальное распределение ОГ в области D осуществляется при помощи наклеивания ОГ на слои бумаги. Величину коэффициента теплопроводности в области D_1 можно приблизенно оценить, если считать, что имеются тонкие плоские слои графита, чередующиеся со слоями воздуха. Полагая, что углы, задающие нормаль к плоскому слою, являются равномерно распределенными случайными величинами, для k_1 получим $k_1 = k_{\text{оф}} \approx 0,75 \gamma k_{OG}$.

Модель В. На первом этапе (при $0 < t \leq T_1$) сопротивление расширению ТРГ со стороны ОГ пренебрежимо мало; плотность ТРГ в области D_2 постоянна $\rho_2 = \rho_{OG}/\kappa$, $v_2 = 0$. Плотность вещества в области D_1 увеличивается до значения $\rho_1(T_1) = \rho_{OG}$ по закону

$$\rho_1(t) = (\gamma \rho_{\text{ог}} - \rho_2)/\mu + \rho_2, \quad \mu = S_1(t)/S,$$

где $S_1(t)$, S – площади областей D_1 , D в момент времени t . На втором этапе (при $t > T_1$) имеем $\rho_1(t) = \rho_{\text{ог}}$ и $\rho_2(t) = \rho_{\text{ог}}(\gamma - \mu)/(1 - \mu)$.

Для $\rho_1 = \rho_1(t)$ из уравнения неразрывности получим $\operatorname{div} \bar{v} = -(\ln \rho_1(t))'_t$. При равномерном сжатии ОГ к центру получаем $v_{1x} = -0.5(\ln \rho_1)'_t \cdot x$, $v_{1y} = -0.5(\ln \rho_1)'_t \cdot y$.

2. В соответствии с методом «сквозного счета» [1, 2] отыскивается решение уравнения

$$\rho(u)(c(u) + \lambda \delta(u - u_*)) \left(\bar{v} \operatorname{grad} u + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \operatorname{div}(k(u) \operatorname{grad} u). \quad (6)$$

Условия (4), (5) на границе фаз при этом выполнены автоматически.

При переходе к разностной схеме входящая в уравнение δ -функция на некотором интервале температуры $(u_* - \Delta_1, u_* + \Delta_2)$ заменяется сглаженной функцией $\tilde{\delta} \geq 0$; вне указанного интервала функция $\tilde{\delta}$ равна нулю. В результате вводится сглаженная теплоемкость $\tilde{c}(u)$, значение которой вне интервала сглаживания равно значению c_i в области D_i ; внутри $(u_* - \Delta_1, u_* + \Delta_2)$ определяется из условия сохранения баланса тепла.

В качестве области D рассматривается прямоугольник, то есть $xa \leq x \leq xb$, $ya \leq y \leq yb$, в котором вводится произвольная неравномерная сетка $\omega_h = \{(x_i, y_j), i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, x_1 = xa, x_{N_1} = xb, y_1 = ya, y_{N_2} = yb\}$. На временном отрезке вводится сетка $\omega_\tau = \{t_n, n = 1, 2, \dots\}$ с шагом $\tau_n = t_{n+1} - t_n$. Обозначим w_{ij}^n – значение искомой функции (распределение температуры u) в точке (x_i, y_j) в момент t_n , $\bar{w}_{ij} = u_{ij}^{n+1/2}$ – промежуточное значение в момент $t_n + 0.5\tau_n$. Локально-одномерная схема [3] для задачи (6) имеет вид

$$\rho(t_n) \tilde{c}(\bar{w}_{ij}) \left[v_{1x_i} \cdot \frac{\bar{w}_{i+1,j} - \bar{w}_{i-1,j}}{(x_{i+1} - x_{i-1})} + \frac{\bar{w}_j - w_{ij}^n}{\tau_n} \right] = \Lambda_1 \bar{w}_{ij}, \quad (x_i, y_j) \in D; \quad (7)$$

$$\Lambda_1 \bar{w}_{ij} = \frac{1}{h_{x,i}} \left[k(\bar{w}_{i+1/2,j}) \frac{\bar{w}_{i+1,j} - \bar{w}_{i,j}}{h_{x,i+1}} - k(\bar{w}_{i-1/2,j}) \frac{\bar{w}_{i,j} - \bar{w}_{i-1,j}}{h_{x,i}} \right],$$

$$\rho(t_n) \tilde{c}(w_{ij}^{n+1}) \left[v_{1y_j} \cdot \frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{(y_{j+1} - y_{j-1})} + \frac{w_{ij}^{n+1} - \bar{w}_{ij}}{\tau_n} \right] = \Lambda_2 w_{ij}^{n+1}, \quad (x_i, y_j) \in D; \quad (8)$$

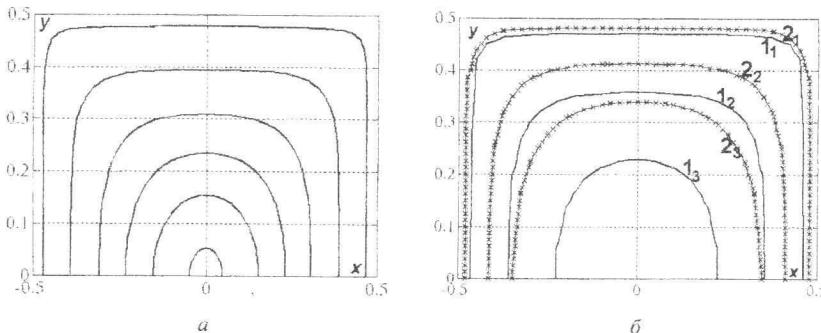
$$\Lambda_2 w_{ij}^{n+1} = \frac{1}{h_{y,j}} \left[k(w_{i,j+1/2}^{n+1}) \frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j}^{n+1}}{h_{y,j+1}} - k(w_{i,j-1/2}^{n+1}) \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{h_{y,j}} \right].$$

Нелинейные уравнения (7), (8) относительно функций \bar{w}_{ij} и w_{ij}^{n+1} соответственно решаются итерационно; каждая из итераций находится по формулам прогонки.

3. Численно задача решалась для области

$$D = \{-0.5 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.5\}$$

с граничными условиями 1-го и 3-го рода. На нижней границе прямоугольника D задавалось условие равенства нулю теплового потока. На остальных границах при условиях 1-го рода температура внешнего нагрева $u_e = 2$, а при условиях 3-го рода $Bio = 1$. Температура фазового перехода $u_* = 1$. В расчетах теплофизические параметры всюду брались следующими: $c_{\text{ОГ}} = 0.25$, $c_{\text{ТРГ}} = 0.34$, $k_{\text{ОГ}} = 1$, $k_{\text{ТРГ}} = 0.1$, $\rho_{\text{ТРГ}} = 1$, $\gamma = 0.1$, $\kappa = 60$, $\lambda = 0.21$. Начальное распределение температуры $f_0 = 0.066$, $(x, y) \in D \cup \Gamma$. На рисунке представлены положения межфазной границы в определенные моменты времени, полученные из численного решения задачи для граничных условий 3-го рода для моделей А (рисунок, а) и В (рисунок, б). Для модели В (см. рисунок, б) каждому моменту времени соответствуют две кривые: 1_i – свободная граница, вычисленная при решении без учета поля скоростей частиц ОГ; 2_i (маркированная кривая) – с учетом скорости.



Сравнение результатов при учете поля скоростей в обоих случаях с аналогичными результатами для $v_i = 0$ ($i = 1, 2$) показало, что в математической модели необходимо учитывать массоперенос.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 816 – 827.
2. Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Разностный метод со слаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 5. С. 828 – 840.
3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 2001. 319 с.

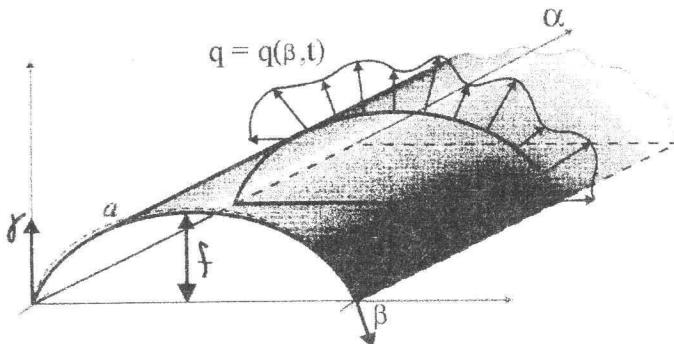
А. А. Гребенникова

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ВЯЗКОУПРУГОЙ ПАНЕЛИ
С ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ КРАЯМИ**

Рассматривается задача об установившихся колебаниях жестко защемленной вдоль прямолинейных краев круговой цилиндрической панели, изготовленной из вязкоупругого материала. Панель находится под действием внешнего давления, постоянного вдоль образующей и меняющегося во времени по гармоническому закону.

Приведены уравнения, описывающие рассматриваемое напряженно-деформированное состояние (НДС) панели, значения первых трех критических частот и соответствующих им максимумов характеристик рассматриваемого колебательного процесса.

Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую панель с максимальной стрелой подъема f , толщиной h и радиусом срединной поверхности R (рисунок).



Деформации полагаем малыми и подчиняющимися линейному закону вязкоупругости в виде

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{1-v^2} \int_{-\infty}^t K(t-\tau)(e_{\alpha} + v \cdot e_{\beta}) d\tau; \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{2(1+v)} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \gamma_{\alpha\beta} d\tau \quad (\alpha \Leftrightarrow \beta). \quad (1)$$

Здесь α и β – соответственно осевая и окружная координаты на срединной поверхности.

Считая справедливыми гипотезы классической теории Кирхгофа – Лява, рассмотрим колебания панели под действием распределенного давления интенсивности

$$q(\beta, t) = q_1(\beta) \cos \omega t. \quad (2)$$

Отличные от нуля характеристики НДС панели представим в виде

$$\{V(\beta, t), W(\beta, t), T_\alpha(\beta, t), T_\beta(\beta, t), Q_\beta(\beta, t), M_\alpha(\beta, t), M_\beta(\beta, t)\} = \\ = \{V_1, W_1, T_\alpha^{(1)}, T_1, Q_1, M_\alpha^{(1)}, M_1\} \cos \omega t + \{V_2, W_2, T_\alpha^{(2)}, T_2, Q_2, M_\alpha^{(2)}, M_2\} \sin \omega t, \quad (3)$$

где функции $V_k, W_k, T_\alpha^{(k)}, T_k, Q_k, M_\alpha^{(k)}, M_k$ зависят только от координаты β . Система уравнений для определения этих функций приведена в [1, с. 11 – 36, 47 – 50; 2, с. 23 – 25] и может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dV_k}{d\eta} &= -\lambda g W_k + \frac{(-1)^{k-1}}{B_1^2 + B_2^2} ag \sum_{j=1}^2 B_{j+k-1} T_j; \\ \frac{dW_k}{d\eta} &= \lambda g V_k - \vartheta_k ag; \\ \frac{d\Theta_k}{d\eta} &= (-1)^{k-1} \frac{ag}{D_1^2 + D_2^2} \sum_{j=1}^2 D_{j+k-1} M_j; \\ \frac{dT_k}{d\eta} &= -\rho h ag \omega^2 V_k - \lambda g Q_k; \quad \frac{dM_k}{d\eta} = ag Q_k; \\ \frac{dQ_k}{d\eta} &= \lambda g T_k - ag q_k - ag \rho h \omega^2 W_k, \quad q_2 = 0, \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (4) обозначено:

$$E_1 + iE_2 = \int_0^\infty K(S)e^{i\omega s} ds \quad \text{комплексный модуль упругости}, \quad B_k = \frac{E_k h}{1 - v^2},$$

$$B_3 = -B_1, \quad D_k = \frac{E_k h^3}{12(1-v^2)}, \quad D_3 = -D_1, \quad k = (1, 2) \quad \text{составляющие комплексной}$$

жесткости при растяжении и изгибе соответственно, $\lambda = \frac{a}{R}$,

$\Theta_k = \frac{V_k}{R} - \frac{dW_k}{d\beta}$ ($k = 1, 2$) – составляющие угла поворота нормального к срединной поверхности элемента, безразмерная координата $0 \leq \eta \leq 1$ связана с окружной координатой β соотношением

$$d\beta = ag(\eta)d\eta, \quad g(\eta) = (1 + 4f_0^2)[(1 + 4f_0^2)^2 - 16f_0^2(2\eta - 1)^2]^{-\frac{1}{2}},$$

ρ – плотность материала.

Границные условия, соответствующие рассматриваемому способу закрепления прямолинейных краев панели, имеют вид

$$\text{при } \eta = 0, \eta = 1 \quad V_k = W_k = \Theta_k = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (5)$$

Краевая задача (4), (5) допускает применение устойчивого численного метода дискретной ортогонализации С. К. Годунова, который обеспечивает получение практически точного решения.

Числовые расчеты были выполнены для панели из материала ЭД-6 МА ($\rho = 1250 \text{ кг}/\text{м}^3$, $E_1 = 2.7 \cdot 10^9 \text{ Н}/\text{м}^2$, $\operatorname{tg}\delta = 0.015$) при толщине

$h = 0.02$ м, стреле подъема $f = 0.2$ м. Значение параметра нагрузки $q_1(\beta) = p_0 = 1$ Н/м².

На основании результатов обращения к процедуре, реализующей метод С. К. Годунова, методом подбора были получены значения первых трех критических частот и соответствующих им максимумов характеристик рассматриваемого колебательного процесса (таблица).

ω, c^{-1}	$W \times 10^8$	$M \times 10^2, \text{Н}$
798	31.62 (0.15); 61.15 (0.50)	11.58 (0.00); 7.42 (0.20); 8.33 (0.50)
1695	6.80 (0.25)	0.79 (0.00); 0.87 (0.10); 1.18 (0.25); 1.24 (0.50)
1882	10.47 (0.05); 84.89 (0.30)	21.59 (0.00); 16.29 (0.10); 19.42 (0.30); 19.98 (0.50)

В таблице наряду с критическими частотами приведены амплитудные значения прогиба W и изгибающего момента M , являющиеся наиболее значимыми и показательными для рассматриваемого случая НДС.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
2. Недорезов П. Ф., Сироткина Н. М. Численные методы исследования установившихся колебаний вязкоупругих прямоугольных пластинок и круговых цилиндрических оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 72с.

УДК 539.3

Ю. П. Гуляев, А. В. Сергеева

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ В РАСТЯНУТЫХ ЭЛАСТИЧНЫХ СТРУКТУРАХ

В клинической диагностике при изучении механических свойств сосудистой стенки, а также связанных с ними нарушениях гемодинамики при различных сосудистых заболеваниях часто приходится учитывать силу предварительного натяжения стенок сосуда. Для определения продольной силы натяжения S стенок сосуда необходимо предварительно жестко закрепить в двух точках концы исследуемого участка эластичной структуры (рис. 1). Поперечную силу F прикладывают дважды к середине участка и дважды измеряют величину перемещения d точки приложения силы и величину самой силы F .

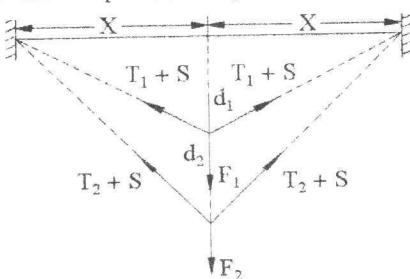


Рис. 1

Приведём вывод формулы для определения предварительной силы продольного натяжения S эластичной структуры [1]. Из условия равновесия силового узла (см. рис. 1) будем иметь

$$F_i = 2(T_i + S) \frac{d_i}{\sqrt{d_i^2 + x^2}}. \quad (1)$$

В линейном случае из закона Гука для дополнительных сил натяжения T_1 и T_2 , которые создаются силами F_1 и F_2 , получим следующие выражения:

$$\begin{cases} T_1 = EF_0 \epsilon = EF_0 \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2} - x}{L}, \\ T_2 = EF_0 \epsilon = EF_0 \frac{\sqrt{d_2^2 + x^2} - x}{L}. \end{cases}$$

Здесь L – длина базы нити в эксперименте по растяжению.

Отсюда получаем соотношение

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2} - x}{\sqrt{d_2^2 + x^2} - x}. \quad (2)$$

Используя равенства (1) и (2), находим

$$S = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2} + \sqrt{d_2^2 + x^2}}{2(d_2^2 - d_1^2)} \left(\frac{d_2^2 - \sqrt{d_1^2 + x^2}}{d_1 x + \sqrt{d_2^2 + x^2}} F_1 - \frac{d_1^2 - \sqrt{d_2^2 + x^2}}{d_2 x + \sqrt{d_1^2 + x^2}} F_2 \right). \quad (3)$$

Для получения подобной формулы, но уже для нелинейно упругого поведения нити при больших деформациях был проведён эксперимент по определению диаграммы растяжения. В качестве материала использовалась резиновая нить с квадратным поперечным сечением размером 1,5 мм × 1,5 мм.

На рис. 2 изображена диаграмма растяжения резины, на которой представлена зависимость $P = f(\epsilon)$ – нелинейный закон Гука при больших деформациях. На основании этой зависимости можно написать следующие

равенства: $T_i + S = f(\epsilon_0 + \epsilon_i)$, $i = 1, 2$, где $\epsilon_i = \frac{\sqrt{d_i^2 + x^2} - x}{L}$, тогда

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{f(\epsilon_0 + \epsilon_1) - S}{f(\epsilon_0 + \epsilon_2) - S}, \quad (4)$$

где $f(\epsilon_0) = S$ – сила предварительного натяжения.

Используя (1) и (4), приходим к решению следующей системы нелинейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) - S}{f(\varepsilon_0 + \varepsilon_2) - S} = \frac{\frac{1}{2d_1} \sqrt{d_1^2 + x^2} F_1 - S}{\frac{1}{2d_2} \sqrt{d_2^2 + x^2} F_2 - S}, f(\varepsilon_0) = S \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Из (5) получаем нелинейное уравнение для определения начальной деформации ε_0 , которая определяет силу предварительного натяжения S :

$$FF(\varepsilon_0) = f(\varepsilon_0) \left(\frac{1}{2d_2} \cdot \sqrt{d_2^2 + x^2} \cdot F_2 - \frac{1}{2d_1} \cdot \sqrt{d_1^2 + x^2} \cdot F_1 + f(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) - f(\varepsilon_0 + \varepsilon_2) \right) - \\ - \left(\frac{1}{2d_2} \cdot \sqrt{d_2^2 + x^2} \cdot F_2 \cdot f(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) - \frac{1}{2d_1} \cdot \sqrt{d_1^2 + x^2} \cdot F_1 \cdot f(\varepsilon_0 + \varepsilon_2) \right) = 0, \quad (6)$$

решив которое, находим предварительную деформацию ε_0 и предварительную силу натяжения нити $S = f(\varepsilon_0)$.

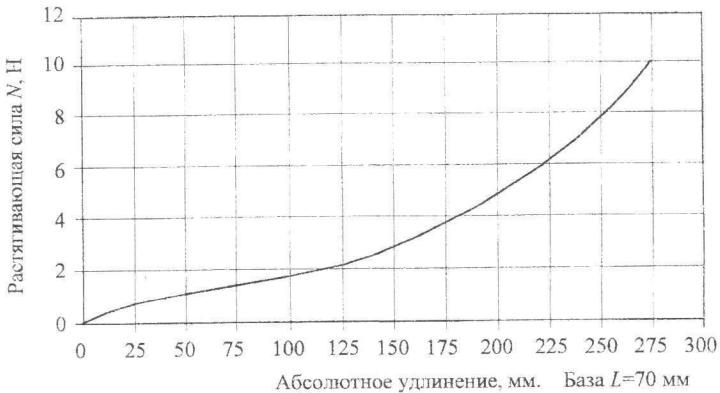


Рис. 2

Чтобы численно решить уравнение (6), диаграмму $f(\varepsilon)$ аппроксимируем рядом Фурье. Для этого разобьём отрезок $[0, T]$, на котором задана эта функция, точками с шагом 5 мм ($T=245$ мм). Таким образом получим кусочно-линейную аппроксимацию диаграммы в пятидесяти точках с координатами y_i, f_i , ($i = \overline{0, k}; k = 49$). Все линейные перемещения нити относим к базе L , т.е. $y_i = \frac{y_i}{L}, T = \frac{T}{L}$. После этого раскладываем кусочно-линейную функцию в ряд Фурье с периодом T :

$$ff(t) = \frac{a_0}{T} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \right).$$

На рис. 3 представлены результаты аппроксимации диаграммы отрезком ряда Фурье, в котором удержано $N = 1000$ членов. Визуально эти кривые неразличимы.

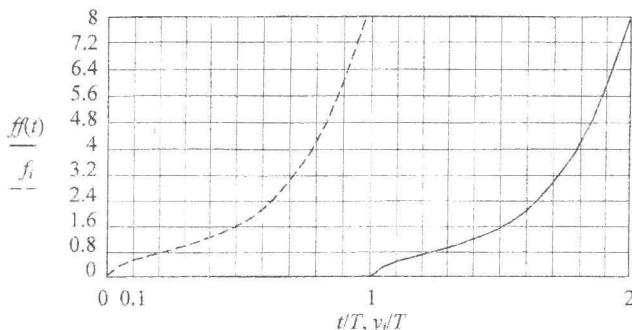


Рис. 3

Для проверки работоспособности полученных формул был проведён натурный эксперимент. В качестве испытуемого образца использовалась резиновая нить с поперечным сечением в виде квадрата, размером 1,5 мм × 1,5 мм. Была сделана специальная оснастка, реализующая данную схему нагружения (см. рис.1). Здесь $x = 42$ мм. Для закрепления концов резиновой нити использовались специальные зажимы. Один конец жестко фиксировался, а на другой конец вешался груз, весом в 50 гр. (0,49 Н) и 100гр. (0,98 Н). После этого второй конец жестко фиксировался. Затем с помощью испытательной машины прикладывали силу по оттягиванию резиновой нити в точке, равноудалённой от обоих концов и получали необходимые перемещения d средней точки и величину оттягивающей силы F . Результаты эксперимента приведены в табл. 1. Если подставить те же данные в формулу (3), то получим результаты, представленные в табл. 2.

Таблица 1

$L, \text{мм}$	$S_{\text{эксп}}, \text{Н}$	$d_1, \text{мм}$	$d_2, \text{мм}$	$\varepsilon_0, \text{мм}$	$F_1, \text{Н}$	$F_2, \text{Н}$	$S_{\text{теор}}, \text{Н}$	$\Delta, \%$
70	0,49	19,08	34,56	0,225	0,5	1	0,492	0,4
	0,98	10,58	20,04	0,689			0,967	1,32

Таблица 2

$S_{\text{эксп}}, \text{Н}$	$d_1, \text{мм}$	$d_2, \text{мм}$	$F_1, \text{Н}$	$F_2, \text{Н}$	$S_{\text{теор}}, \text{Н}$	$\Delta, \%$
0,49	19,08	34,56	0,5	1	0,513	2,3
	10,58	20,04			0,967	1,3

Все вычисления проводились с помощью программного комплекса Mathcad. Численные результаты говорят о том, что формула (3) применима и для нелинейного закона растяжения нити. Связано это с тем, что на каждом отрезке $[\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \varepsilon_i]$ нелинейная диаграмма хорошо аппроксируется линейной функцией. Ценность формулы (3) состоит в том, что для определения силы предварительного натяжения эластичной структуры не нужно знать в явном виде диаграмму растяжения материала этой структуры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Гуляев Ю. П., Коссович Л. Ю. Математические модели биомеханики в медицине. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. 49 с.

УДК 533.6.011:539.5

В. В. Гурьянов, М. А. Буслаева

СПЕКТРЫ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН РИМАНА В СРЕДАХ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Продольные плоские упругие волны конечных деформаций без учета влияния сил описываются дифференциальным уравнением [1]:

$$u_{tt} - v^2(u_x)u_{xx} = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее нижние индексы (x, t) обозначают частные производные по этим переменным, $u = u(x, t)$. Смещение точек упругой среды $v^2(u_x)$ – квадрат скорости распространения волн.

Для спектрального анализа и возможности сопоставления результатов с полевыми наблюдениями в вибросейсморазведке, полученных в НВ НИИГГ, волны, бегущие в направлении оси Ox (вглубь Земли), представляются в параметрической форме в функции параметра ζ так [1]:

$$\begin{aligned} u(x(\zeta), t) &= u_0(\zeta) - (p(\zeta)v(p(\zeta)) + q(\zeta)(t - \zeta)), \\ t(\zeta, x) &= \zeta + \frac{x}{v(p(\zeta))}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь t – время, $u(x, t)$ – смещение точек среды, $q(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = q(\zeta)$ – скорость смещения, $p = \frac{\partial u}{\partial x} = p(\zeta)$, $v(p(\zeta))$ – скорость распространения фронта волны вдоль оси Ox . Заметим, что q, p, v зависят только от параметра ζ ; q и v задаются, p вычисляется при $x=0$, когда $t=\zeta$. Это инварианты Римана и от x не зависят. Они связаны зависимостью

$$q' = -v(p(\zeta))p', \quad (3)$$

определяющей волну, бегущую в направлении оси Ox . Для изменения направления движения волны нужно сменить знак у скорости. Такие волны называются *простыми*, или *волнами Римана*.

Для спектрального анализа ограничимся степенным законом для квадрата скорости

$$v^2(p) = a + bp^n. \quad (4)$$

Здесь $a = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $g = \frac{\theta}{\rho}$, $\lambda + 2\mu$, θ – упругие параметры, ρ – плотность, λ , μ – модули Ламе. Параметры определяют продольную волну. Значение $n=1$ определяет квадратичную нелинейность, $n=2$ – кубическую нелинейность.

Известно, что спектры определяются интегралом Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5)$$

При $x=0$ выполняется равенство $t=\zeta$, поэтому принимаем в (5) $q(t)=q(\zeta)$ и далее вследствие независимости q от x в формуле (5) полагаем $f(t)=q(\zeta)$, и формулу запишем следующим образом:

$$F(\omega; x) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\zeta) e^{-i\omega t} dt. \quad (6)$$

В формуле (6)

$$t(\zeta, x) = \zeta + \frac{x}{v(p(\zeta))}, \quad dt = \left(1 - \frac{xp'}{v^2(p(\zeta))}\right) d\zeta. \quad (7)$$

Принимаем $q(\zeta) = \sin(k\zeta)$, а $p(\zeta)$ вычисляем методом Рунге – Куттга по уравнению

$$\frac{dp}{d\zeta} = \frac{q'(\zeta)}{v(\zeta)} = \frac{k \cos(k\zeta)}{\sqrt{a + bp^n}}. \quad (8)$$

На рис. 1, 2 представлены амплитудные спектры для квадратичной и кубической нелинейностей. Видно, что появляются кратные исходной частоте $\omega=k$ гармоники $2\omega, 3\omega, 4\omega, 5\omega, \dots$ в случае квадратичной нелинейности и $3\omega, 5\omega, 7\omega, 9\omega, \dots$ – в случае кубичной. Штриховой линией показан спектр исходного сигнала.

На рис. 3 представлены амплитудные спектры, полученные по результатам наблюдений в поле. Видно полное совпадение теоретических и полевых частот. Разница в форме спектров обусловлена различной длительностью исходных сигналов.

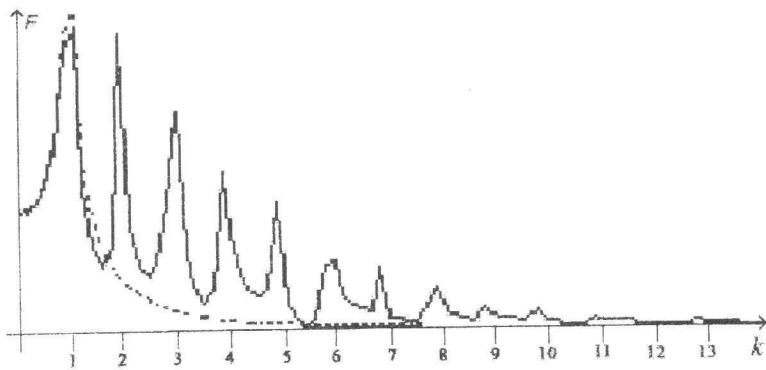


Рис. 1. Спектр сигнала для квадратичной нелинейности

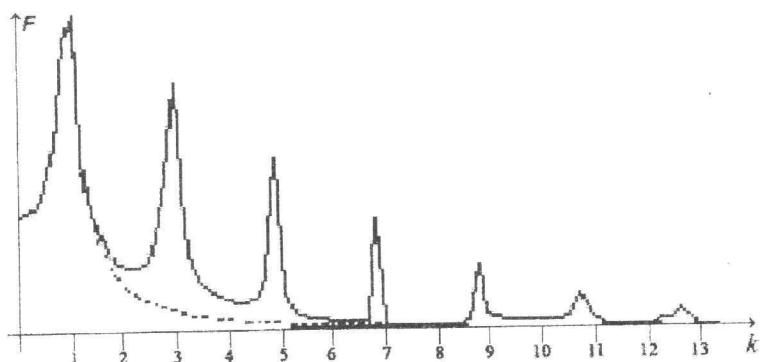


Рис. 2. Спектр сигнала для кубической нелинейности

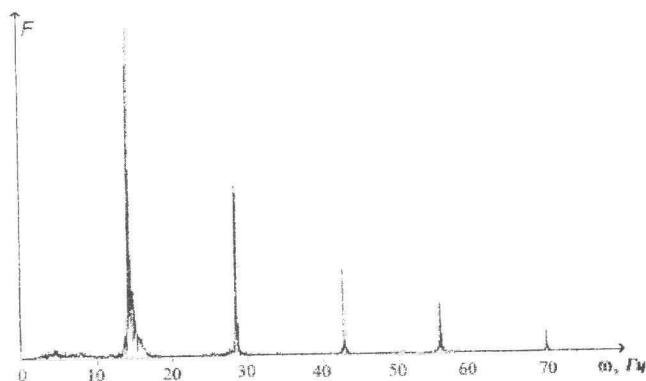


Рис. 3. Спектр сигнала по результатам полевых наблюдений

Таким образом, математическая модель позволяет сделать вывод о том, что наблюдения производились в среде с квадратичной нелинейностью, и эта модель адекватна натуре.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гурьянов В. В. Монотипные плоские изоэнтропические волны конечных деформаций // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций: Сб. науч. тр. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1993. Вып. 1. С. 150 – 157.

УДК 539.3

Д. В. Иванов

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ АОРТЫ

В статье приведены результаты решения нескольких краевых задач, связанных с течением трехмерной стационарной несжимаемой вязкой жидкости в каналах с жесткими и гибкими стенками. Последние из них моделируют движение крови в верхней части аорты человека. Решение получено с помощью пакета Femlab [1]. Femlab – среда для моделирования научных и технических проблем, основанных на дифференциальных уравнениях в частных производных (PDE). При решении PDE в Femlab применяются конечноэлементные методы [1].

Движение крови в модели части аорты с жесткими стенками

Течение крови описывается стационарной системой уравнений Навье – Стокса [2]

$$\begin{cases} (U \cdot \nabla)U + \text{grad } p - \nu \nabla^2 U = 0, \\ \text{div } U = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $U = (u, v, w)$.

На торцах модели задается давление втекающего и вытекающего потоков, на боковой поверхности – условия прилипания. Коэффициент динамической вязкости жидкости равен $0,005 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$, плотность – $1060 \text{ кг}/\text{м}^3$.

При решении задачи выбирается сетка с относительно малым количеством четырехгранников и более мелкая сетка (порядка 1000 и 11000 четырехгранников). Это сделано с целью сравнения решений, а также выявления качества расчетов.

В результате решения задачи получена картина линий тока (рис. 1).

Размер стрелки говорит о величине скорости потока: скорость максимальна на линии симметрии и равна нулю на боковой поверхности канала. Время решения для «грубой» сетки – 6 с, для сетки более высокого качества – 110 с.

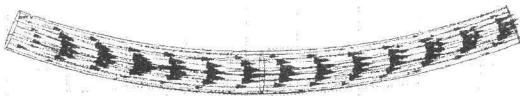


Рис. 1

Расчеты показали, что решения для двух сеток разного качества почти не различаются, а время расчета увеличивается почти в 20 раз, поэтому можно сделать вывод, что для данной задачи качество сетки не играет большой роли, следовательно, для экономии машинного времени можно использовать достаточно «грубую» сетку.

Движение крови в верхней части аорты с жесткими стенками

Перейдем к решению более сложной задачи. Сложность в первую очередь состоит в построении геометрии самой модели, а также в увеличении времени решения краевой задачи на компьютере.

Течение крови также будет описываться системой уравнений Навье – Стокса (1). Здесь, как и в предыдущей задаче, стенки аорты предполагаются жесткими. Коэффициент динамической вязкости жидкости равен $0,005 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$, плотность крови – $1060 \text{ кг} / \text{м}^3$. На торцах аорты задаются давления втекающего и вытекающего потоков, на боковой поверхности – условия прилипания.

Задача решалась на двух разных по качеству сетках (1900 и 15000 четырехгранников). Модель аорты, линии тока, модуль и направление скорости потока показаны на рис. 2.

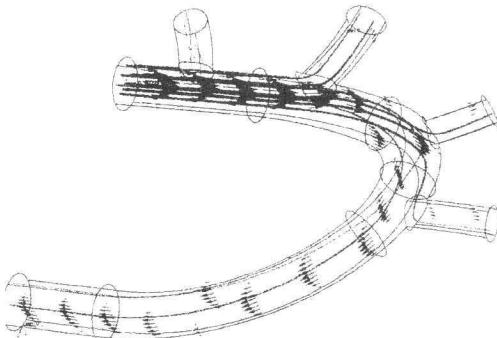


Рис. 2

Исходя из полученных результатов, видим, что величина скорости потока максимальна на оси симметрии аорты и уменьшается по мере приближения к ее стенке (на стенке она равна нулю), что объясняется вязкостью жидкости. Это справедливо для прямолинейных участков аорты. Но на участках, где имеет место искривление аорты, заметно действие центробежных сил, то есть при повороте артерии поток крови как бы ударяется в стенку аорты и вблизи стенки скорости достаточно велики.

Время решения для «грубой» сетки – 18 с, для сетки более высокого качества – 223 с. Так же, как и в предыдущей задаче, качественные и количественные характеристики решения не зависят от качества сетки, поэтому для экономии машинного времени и памяти компьютера целесообразно использовать более «грубую» сетку.

Задача для упругих стенок верхней части аорты

В данной модели рассматривается лишь одностороннее взаимодействие между жидкой и твердой средой. Любое изменение напряженно-деформированного состояния (НДС) и формы стенок аорты не влияет на течение крови. В данном случае лишь поток крови и сердечная мышца влияют на НДС стенок аорты. Моделирование двустороннего взаимодействия возможно, но в этом случае нужно будет использовать так называемый Arbitrary Lagrangian – Eulerian method (ALE) метод (совместный подход Лагранжа – Эйлера).

Рассматривается НДС стенок аорты под действием давления крови и сердечной мышцы. Материал стенок предполагается сверхупругим. Будем использовать модель Нео-Хука [2], описывающую резиноподобный сверхупругий материал. В таблице приведены характеристики материалов (стенки аорты и сердечной мышцы).

Материалы \ Характеристики	μ , Н/м ²	E , Н/м ²	ν	Модуль объемной деформации
Стенка аорты	6204106	10^7	0,45	20 μ
Сердечная мышца	719676	$1,16 \cdot 10^6$	0,45	20 μ

Решаются уравнения равновесия, а также уравнение состояния $\frac{p}{20\mu} = 1 - \det(F_d)$, где F_d – градиент деформаций. Границные условия на внутренней поверхности аорты задаются в виде постоянного нормального давления крови $F_n = p$. На внешней границе задается усилие, пропорциональное перемещению, направленное по нормали к поверхности, то есть $F_n = E(U \cdot n)/d$, где d – толщина стенки аорты, E – модуль Юнга сердечной мышцы, $U = (u, v, w)$. На рис. 3 показаны модули и направления перемещений стенок аорты.

Размер и направление стрелок характеризует величину и направление перемещений. Имеет место сжатие основного сосуда аорты, а также сужение входов отростков аорты, по-видимому, это объясняется резиноподобной природой материала стенок аорты.

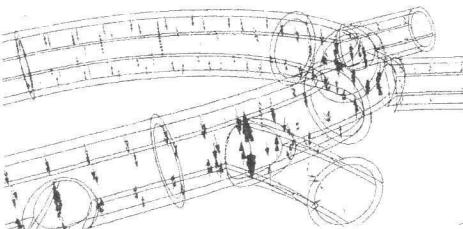


Рис. 3

Решение всех задач производилось на компьютере ASUS P4P800E, Pentium IV 2800E, 1024 Mb RAM.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Интернет сайт www.comsol.com.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.

УДК 539.3

М. А. Ковырягин, А. В. Климов

ЯВНАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Одним из ярких примеров высотных сооружений, широко востребованных в настоящее время практикой, являются пилоны вантовых мостов. Описание динамического поведения пилонов вантовых мостов производится с использованием дифференциальных уравнений. Причем сама конструкция рассматривается в виде двух моделей: 1) как многомассовая с расположением этих масс на определенном расстоянии друг от друга, 2) в виде единого деформируемого твердого тела.

Первая модель рассматривается в работе В. Б. Зылева [1]. В таком случае сосредоточенная масса ассоциируется с узлом. Узлы разделяются на подвижные и неподвижные. Координаты неподвижных узлов известны, а координаты подвижных узлов известны из предыдущего шага по времени, так же как и их скорости. Под скоростями здесь понимаются составляющие вдоль координатных осей. Внешние силы принимаются сосредоточенными, приложенными в узлах. Они могут быть как постоянными, так

и переменными. В последнем случае нужно иметь правило, по которому нагрузки вычисляются в каждый момент времени. Необходимые уравнения составляются на основании второго закона Ньютона, предполагая, что массы соединены стержнями известной жесткости. Сначала определяются текущие усилия в стержнях, ориентируясь на использование точных геометрических формул. Возьмем, к примеру, стержень 1-2. Его длина в текущий момент времени равна расстоянию между узлами 1 и 2

$$\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

если этот стержень расположен вдоль оси x .

Вычтя из текущей длины начальную, получим удлинение $\Delta\ell = \ell - \ell_0$.

Далее по формуле закона Гука $N = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} EA$ находим внутреннее усилие в

стержне N_{1-2} . Аналогично можно найти продольные силы во всех остальных стержнях конструкции. По отношению к точечной массе узла 1 усилие в стержне 1-2 есть внешняя сила. Ее направляющие косинусы определяются через координаты узлов $\cos\alpha = (x_2 - x_1)/\ell$, $\cos\beta = (y_2 - y_1)/\ell$. Далее по второму закону Ньютона определяется ускорение массы m_1 в рассматриваемом узле. В проекции на ось x оно определится по формуле

$$W_x = \frac{F_x}{m_1}. \quad (1)$$

Здесь F_x – сумма проекций на ось x усилий во всех примыкающих к узлу 1 стержнях с добавлением составляющей внешней силы P_x , приложенной в этом узле; m_1 – узловая масса в первой точке.

Составляющая P_x включает силу, приложенную к внешнему узлу относительно внутреннего узла, а также силу сопротивления среды.

Далее рассматриваются все остальные узлы расчетной схемы. При их описании учитываются координаты предыдущих узлов.

Выражения вида (1) для всех степеней упругой свободы системы являются разрешающими уравнениями. Правда, они не есть уравнения в привычном смысле слова, то есть выражения, из которых необходимо искать неизвестные величины. Здесь необходимые для дальнейшего составляющие ускорений вычисляются через известные на текущем шаге решения величины. Целью является получение состояния системы через малый промежуток времени Δt . В первом приближении можно предположить, что каждая составляющая ускорения остается постоянной в течение Δt . Применив формулы для разноускоренного движения, получим для выбранной точки приращение составляющей скорости $\Delta V_x = W_x \cdot \Delta t$; приращение смещения вдоль оси x $\Delta S = V_{0x} \cdot \Delta t + W_x \frac{\Delta t^2}{2}$.

Добавив к координатам и скоростям точек найденные приращения, получим состояние системы в момент времени $t + \Delta t$, что и завершает ал-

горитм. Обратим внимание, что искомые добавки к скоростям и перемещениям получаются здесь в явном виде, без решения уравнений. Поэтому естественно назвать такую вычислительную схему «явной». Она принципиально отличается от неявных вычислительных схем, которые в настоящее время являются наиболее распространенными. Если действительно принять формулы (1) за основу вычислительного метода, то такой метод, по выражению В. Б. Зылева, можно назвать методом «постоянного ускорения».

Метод «постоянного ускорения» в принципе является работоспособным. Вопрос здесь заключается лишь в том, что для его использования нужно применять крайне маленький шаг Δt . Следовательно, метод будет неэкономичным. Для улучшения обычно используют экстраполяцию по Адамсу. В. Б. Зылев предлагает следующие расчетные формулы приращения скорости ΔV и смещения ΔS за шаг по времени Δt [1]:

$$\Delta V = (55W_0 - 59W_1 + 37W_2 - 9W_3)\Delta t / 24,$$

$$\Delta S = V\Delta t + (323W_0 - 264W_1 + 159W_2 - 38W_3)\Delta t^2 / 360.$$

Рассчитанный по описанному методу призматический стержень размерами длиной 10 м, выполненный из стали, находится под действием порыва ветра. Колебательные процессы, испытываемые узлами, будут иметь вид, изображенный на рис. 1 – 5.



Рис. 1



Рис. 2



Рис. 3



Рис. 4



Рис. 5

Изображенные на рис. 1 – 5 процессы описывают колебательное положение узлов, расположенных с шагом 2 м от основания. Из рис. 1 – 5 видно, что чем выше узел, тем существеннее усложняется колебательный процесс. Следовательно, необходимость управления динамическим поведением возникает именно на большом расстоянии от основания.

Рассмотренный метод исследования колебательных процессов имеет значительное преимущество перед известными широко распространенными «неявными» схемами ввиду неограниченного разнообразия прилагаемых нагрузок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зылев В. Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. М.: Науч. издат. центр «Инженер», 1999. 145 с.

УДК 533.6.011

Д. Н. Коновалов, Г. Д. Севостьянов

УДАРНЫЙ ПЕРЕХОД СЛАБОСВЕРХЗВУКОВОЙ ОДНОРОДНОЙ СТРУИ В ДОЗВУКОВУЮ ВБЛИЗИ ЕЁ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Плоские стационарные околозвуковые безвихревые течения идеального газа описываются системой Фальковича – Кармана [1] ($u = M^2 - 1$, M – число Маха):

$$uu_x = v_y, v_x = u_y, \quad (1)$$

на околозвуковом скачке $x = h(y)$ имеем два условия:

$$g = h' = -[v]/[u], (h')^2 = <u>, \quad (2)$$

где $[f]$, $<f>$ – разность и полусумма значений f_+ и f_- разрывной на скачке функции f . Исключив в (2) h' , имеем уравнение ударной поляры Буземана

$$[v]^2 = <u> [u]^2. \quad (3)$$

Пусть однородная slabosverkhzvukovaya strui ($u = u_x = M^2 - 1 \geq 0$, $v = v_\infty = 0$) вытекает из щели в стенке в область со сверхкритическим дав-

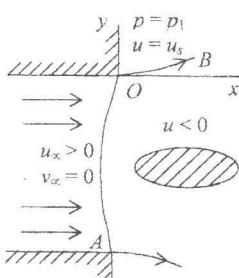


Рис. 1

лением $p_1 \geq p_*$. Направив ось x по стенке ($y = 0$, $x < 0$) в сторону течения, ось y перпендикулярно x вне струи, исследуем околозвуковое течение вблизи края щели $O(0,0)$, из которой выходят околозвуковой скачок OA и свободная дозвуковая граница струи OB ($u = u_s < 0$). Требуется найти решение $u < 0$, v системы (1) за неизвестным скачком OA , свободную границу OB (с скачком OA криволинеен, если в струе за ним имеются возмущения, например преграда (рис. 1)).

Ударная поляра (3) является «ежевидной» («дикобраз» Буземана), если в однородном потоке скачок криволинейный. В [2] указана характерная точка S поляры, в которой наклон «иголки» $du/dv = 0$:

$$u = u_s = -3/5 u_\infty < 0, |v| = |v_s| = 8/(5\sqrt{5}) u^{3/2}_\infty. \quad (4)$$

На свободной дозвуковой границе постоянно давление ($p = p_1$), поэтому величина скорости не меняется, $u = u_s$.

Если за скачком поток однородный $u = u_s$, $v = v_s$ (преграда отсутствует), то скачок OA° – косой ($x = \delta y$, $y \leq 0$), свободная граница OB° струи прямолинейна ($v = v_s$, $u = u_s$).

Для этого нулевого приближения решения из условий (2) имеем

$$|\delta| = \sqrt{u_s}/\sqrt{5}. \quad (5)$$

Введя для кривого скачка OA неизвестную функцию $G(y)$, $y \leq 0$:

$$g(y) = \delta + G(y), \quad G(0) = 0,$$

запишем через нее из (2) решение на скачке OA :

$$\begin{aligned} u &= u_{ck} = u_s + 4\delta G + 2G^2, \\ v &= v_{ck} = v_s - 4/3 u_s G - 6\delta G^2 - 2G^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Эту функцию и уравнение скачка OA будем искать в виде рядов:

$$\begin{aligned} G(y) &= c_0 y + c_1 y^2 + c_2 y^3 + \dots, \\ x = h(y) &= \delta y + c_0/2 y^2 + c_1/3 y^3 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы (1) с учетом условия на OB $u(x, 0) = u_s < 0$ ищем в виде рядов вблизи края O :

$$\begin{aligned} u &= u_s + B_0' y + u_s/6 B_0''' y^3 + 1/12 (B_0'B_0'')' y^4 + \dots, \\ v &= B_0 + u_s/2 B_0'' y^2 + 1/3 B_0'B_0''' y^3 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

с произвольной функцией $B_0(x)$:

$$B_0(x) = v_s + e_0 x + e_1 x^2 + e_2 x^3 + \dots \quad (9)$$

Построим второе приближение системы (1):

$$\begin{aligned} u &= u_s + e_0 y + 2e_1 x y + \dots, \\ v &= v_s + e_0 x + (e_1 x^2 + u_s e_1 y^2) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив (10) и (7) в (6), выразим коэффициенты c_k и e_k через параметры δ и $g_s = e_0 = v_s(0, 0)$:

$$c_0 = g_s/(4\delta), \quad c_1 = 3/64 g_s^2/\delta^3, \quad e_1 = 5/32 g_s^2/\delta^3. \quad (11)$$

Тогда уравнение скачка OA у края щели примет вид

$$x = h(y) = \delta y + g_s/(8\delta) y^2 + g_s^2/(64\delta^3) y^3 + \dots, \quad y \leq 0.$$

При $g_s = 0$ скачок – косой.

Поле скорости за скачком (второе приближение):

$$\begin{aligned} u &= u_s + g_s y + 5/16 g_s^2/\delta^3 x y + \dots, \\ v &= v_s + g_s x + 5/32 g_s^2/\delta^3 (x^2 + u_s y^2) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Величина скорости V , угол θ её наклона к оси x , коэффициент давления c_p – функции u или v ($\gamma > 1$ – отношение теплоемкостей), они равны:

$$\begin{aligned} V^2 &= V_\infty^2 [1 + 2(u - u_\infty)/(\gamma+1)M^2_\infty]; \quad \theta = v/(\gamma+1)M^2_\infty, \\ c_p &= (p - p_\infty)/(1/2 \rho_\infty V_\infty^2) = -2(u - u_\infty)/(\gamma+1)M^2_\infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Эти зависимости можно записать в универсальной форме, используя закон околовзвукового подобия:

$$\begin{aligned} X &= |g_s|/|u_s|^{3/2} x, \quad Y = |g_s|/|u_s| y, \\ U &= u/|u_s|, \quad V = v/|u_s|^{3/2}, \quad \varepsilon_g = \text{sign } g_s = \pm 1, \quad \varepsilon_\delta = \text{sign } \delta = \pm 1, \\ V &= 8/(3\sqrt{3}) + \varepsilon_g X + 5/(32\sqrt{3}) \varepsilon_g X^2 - 15/(32\sqrt{3}) \varepsilon_\delta Y^2 + \dots, \\ U &= -1 + \varepsilon_g Y + 15\sqrt{3}/16 \varepsilon_\delta X Y + \dots, \end{aligned}$$

$$X = H(Y) = \epsilon_0/\sqrt{3} Y + \sqrt{3}/8 \epsilon_0 \epsilon_g Y^2 + 3\sqrt{3}/64 \epsilon_0 Y^3 + \dots \quad (14)$$

Уравнение свободной дозвуковой границы OB :

$$y = [(\gamma+1)M^2]^{1/2} [v_s x + g_s/2 x^2 + 5/96 g_s^2/\delta^3 x^3 + \dots].$$

На рис. 2 показаны изобары течения (т.е. $U = \text{const}$) для $\delta > 0, g_s > 0$.

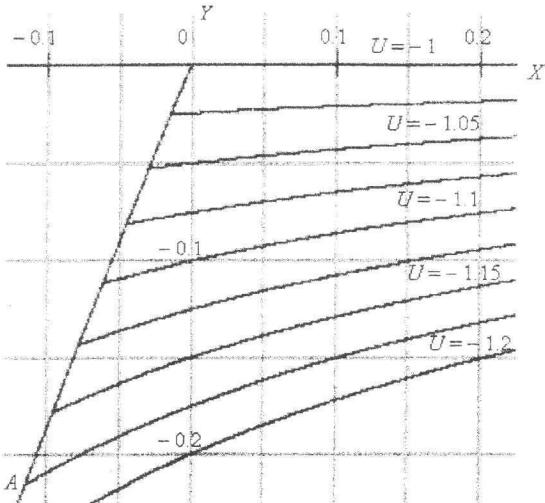


Рис. 2

При решении (14) использован метод ускорения сходимости рядов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г.Д. Основы теории околозвуковых течений газа. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. Ч. 1.
2. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений / Пер. с нем. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

УДК 539.3

В. И. Копнина, М. В. Демина

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО КРУГУ МЕНЬШЕГО РАДИУСА

Рассмотрим круглую плиту радиуса $r = a$, изготовленную из изотропного материала (рисунок). Будем считать, что она изгибаётся под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по кругу меньшего радиуса, при этом край плиты жестко защемлен. В силу того что плита загружена таким образом, можно считать, что она состоит из двух час-

тей: внутреннего круга радиуса $r = b$, загруженного нормальной нагрузкой, (II) и внешнего кольца шириной $(a - b)$ (I). Тогда все величины, характеризующие состояние кольца, будем обозначать индексом I сверху, а величины, характеризующие состояние круга – индексом II сверху. Так как у нас интенсивность нормальной нагрузки $q = \text{const}$, то мы имеем осесимметричное загружение плиты.

Математическая модель такой задачи включает в себя уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 W^{\text{II}} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W^{\text{I}} = 0 \quad (2)$$

и дополнительные условия:

границные условия: при $r = a$ $W^{\text{I}} = W^{\text{II}} = 0$;

контактные условия на контуре сопряжения плит (условия неразрывности плиты):

$$\text{при } r = b \quad W^{\text{I}} = W^{\text{II}}; \quad M_r^{\text{I}} = M_r^{\text{II}};$$

$$W^{\text{I}'} = W^{\text{II}'}; \quad N_r^{\text{I}} = N_r^{\text{II}}.$$

Здесь W^l ($l=\text{I,II}$) – функция прогиба, D – жесткость материала, из которого изготовлена плита, q – интенсивность нормальной нагрузки, M_r – изгибающий момент, действующий на площадке с нормалью r (поскольку пластина круглая, введем в рассмотрение полярную систему координат), N_r – перерезывающая сила, действующая на той же площадке.

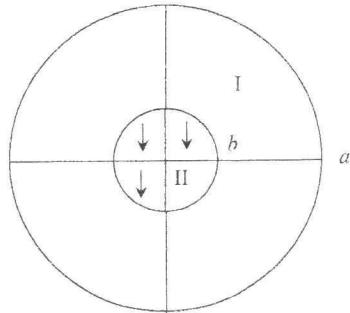
Так как у нас загружение осесимметричное, то уравнения (1), (2) можно проинтегрировать и получить представления для W^{I} и W^{II} :

$$W^{\text{I}} = A^{\text{I}} + B^{\text{I}}r^2 + C^{\text{I}}\ln r + E^{\text{I}}r^2 \ln r,$$

$$W^{\text{II}} = A^{\text{II}} + B^{\text{II}}r^2 + C^{\text{II}}\ln r + E^{\text{II}}r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}.$$

Имеем 6 условий и 8 неизвестных коэффициентов, так как из физических соображений ясно, что в центре прогиб и моменты не могут быть бесконечно большие $\Rightarrow C^{\text{II}} = E^{\text{II}} = 0$. Оставшиеся коэффициенты определим из граничных и контактных условий, учитывая, что в нашем случае равенство моментов равносильно равенству вторых производных функций W^l ($l=\text{I,II}$), а равенство перерезывающих сил равносильно равенству третьих производных функций W^l ($l=\text{I,II}$). Это приводит нас к системе, состоящей из 6 уравнений:

$$A^{\text{I}} + B^{\text{I}}a^2 + C^{\text{I}}\ln a + E^{\text{I}}a^2 \ln a = 0,$$



$$2B^I + \frac{C^I}{a^2} + E^I(2\ln a + 1) = 0,$$

$$A^{II} + B^{II}b^2 + \frac{qb^4}{64D} = A^I + B^Ib^2 + C^I \ln b + E^Ib^2 \ln b,$$

$$2B^{II} + \frac{qb^2}{16D} = 2B^I + \frac{C^I}{b^2} + E^I(2\ln b + 1),$$

$$2B^{II} + \frac{3qb^2}{16D} = 2B^I - \frac{C^I}{b^2} + E^I(2\ln b + 3),$$

$$\frac{3qb^2}{16D} = \frac{C^I}{b^2} + E^I.$$

Решим эту систему аналитически, а затем через найденные коэффициенты получим представления для моментов и перерезывающих сил:

$$M_r^I = (1+\nu)\left(\frac{qb^4}{16a^2} + \frac{qb^2}{4}\ln\frac{a}{r} + \frac{qb^2}{8}\right) + (1-\nu)\frac{qb^4}{16r^2} - (3+\nu)\frac{qb^2}{8},$$

$$M_r^{II} = (1+\nu)\left[\frac{qb^4}{16}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{qb^2}{4}\left(\ln\frac{a}{b} - 1\right) + \frac{3qb^2}{16}\right] - (3+\nu)\frac{qr^2}{16},$$

$$M_\theta^I = (1+\nu)\left(\frac{qb^4}{16a^2} + \frac{qb^2}{4}\ln\frac{a}{r} + \frac{qb^2}{8}\right) - (1-\nu)\frac{qb^4}{16r^2} - (1+3\nu)\frac{qb^2}{8},$$

$$M_\theta^{II} = (1+\nu)\left[\frac{qb^4}{16}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{qb^2}{4}\left(\ln\frac{a}{b} - 1\right) + \frac{3qb^2}{16}\right] - (1+3\nu r)\frac{qr^2}{16},$$

$$N_r^I = -\frac{qb^2}{2r}, \quad N_r^{II} = -\frac{qr}{2}.$$

При $r=b$ получаем

$$M_r^I = M_r^{II} = \frac{qb^2}{16}\left[(1+\nu)\frac{b^2}{a^2} + 4(1+\nu)\ln\frac{a}{b} - 3 - \nu\right], \quad N_r^I = N_r^{II} = -\frac{qb}{2}.$$

Два последних равенства дают основания полагать, что выражения для моментов и перерезывающих сил получены верно. Таким образом, можно получить значения W, M_r, M_θ, N_r в любой точке плиты.

Результаты вычислений при $b=1, a=3, D=3.52, \nu=0.13, q=1$ приведены в таблице.

Координаты Точек	W	M_r	N_r	M_θ
(0,0)	0.125	0.315	0	0.316
(1,0)	0.090	0.119	-0.500	0.236
(1,0)	0.090	0.119	-0.500	0.226
(3,0)	0	-0.200	-0.160	0.973

Анализ получившихся значений показывает, что граничные и контактные условия выполняются, максимального значения функция прогиба достигает в центре плиты, максимальным изгибающим моментом является M_θ на контуре плиты при $r = a$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 4. С. 754 – 757.
2. Беленький М. Я. Некоторые осесимметричные задачи теории упругости // Прикл. математика и механика. 1960. Т. XXIV, вып. 3. С. 582 – 584.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

УДК 539.3

В. И. Копнина, А. С. Щербаков

ИЗГИБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ С ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим упругое равновесие тонкой эллиптической анизотропной плиты, ослабленной одним эллиптическим отверстием, которое подкреплено эллиптическим кольцом из другого анизотропного материала. Центр отверстия совпадает с центром плиты. Толщина кольца равна толщине плиты h ; ширина кольца достаточная, чтобы к кольцу можно было применить теорию изгиба плит.

Плита находится под действием изгибающих моментов интенсивности M , равномерно распределенных по внешнему контуру. Внутренний контур составной плиты свободен. Определим НДС такой плиты. Считаем материал пластиинки анизотропным, обладающим одной плоскостью упругой симметрии, параллельной срединной плоскости плиты. Выберем систему координат следующим образом: пусть плоскость XOY совпадает со срединной плоскостью плиты, ось OZ направлена вертикально вниз.

Обозначим:

$L_0^{(v)}$ – внешний контур v -го кольца – эллипс с полуосами $a_0^{(v)}$, $b_0^{(v)}$ (здесь и далее $v = I, II$);

$L_1^{(v)}$ – внутренний контур v -го кольца – эллипс с полуосами $a_1^{(v)}$, $b_1^{(v)}$.

Задача об изгибе такой плиты сводится к определению функций $W^{(v)}(x,y)$, представляющих прогиб срединной плоскости v -го кольца.

Искомые функции $W^{(v)}(x,y)$ удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям в частных производных 4-го порядка [1]:

$$D_{11}^{(v)} \frac{\partial^4 W^{(v)}}{\partial X^4} + 4D_{16}^{(v)} \frac{\partial^4 W^{(v)}}{\partial X^3 \partial Y} + 2(D_{12}^{(v)} + 2D_{66}^{(v)}) \frac{\partial^4 W^{(v)}}{\partial X^2 \partial Y^2} +$$

$$+4D_{26}^{(v)} \frac{\partial^4 W^{(v)}}{\partial X \partial Y^3} + D_{22}^{(v)} \frac{\partial^4 W^{(v)}}{\partial Y^4} = 0 \quad (1)$$

и следующим граничным и контактным условиям [1]:

1) на контуре $L_1^{(II)}$:

$$M_n^{(II)} = 0, N_n^{(II)} + \frac{\partial H_{nt}^{(II)}}{\partial S} = 0; \quad (2)$$

2) на контуре $L_0^{(I)}$:

$$M_n^{(I)} = M, N_n^{(I)} + \frac{\partial H_{nt}^{(I)}}{\partial S} = 0; \quad (3)$$

3) на контуре спая $L_0^{(II)} = L_1^{(I)}$:

$$W^{(II)} = W^{(I)}, \frac{\partial W^{(II)}}{\partial n} = \frac{\partial W^{(I)}}{\partial n}; M_n^{(II)} = M_n^{(I)}, N_n^{(II)} = N_n^{(I)}. \quad (4)$$

В уравнении (1) $D_{ij}^{(v)}$ – жесткости материалов, из которых изготавливаются кольца. В граничных условиях (2) – (4) n – внешняя нормаль к соответствующим контурам; $M_n^{(v)}$ – изгибающий момент, действующий на площадке с нормалью n в соответствующем кольце; $N_n^{(v)}$ – перерезывающая сила, действующая в v -м кольце на площадке с нормалью n ; $N_n^{(v)} + \frac{\partial H_{nt}^{(v)}}{\partial S}$ – обобщённая перерезывающая сила, действующая в v -м кольце на площадке с нормалью n .

Для решения поставленной задачи используем метод комплексных потенциалов, предложенный С. Г. Лехницким. Согласно этому методу, искомые функции $W^{(v)}(x, y)$ могут быть представлены в виде [1]

$$W^{(v)}(x, y) = 2 \operatorname{Re}[W_1^{(v)}(z_1^{(v)}) + W_2^{(v)}(z_2^{(v)})] \quad (j=1,2; v=I, II). \quad (5)$$

Здесь $W_j^{(v)}(z_j^{(v)})$ – произвольные аналитические функции, определенные в соответствующих плоскостях $z_j^{(v)}$. Тогда функции $W_j^{(v)}(z_j^{(v)})$ будут удовлетворять следующим граничным и контактным условиям [2]:

$$2\operatorname{Re}\left[\frac{p_1^{(v)}}{\mu_1^{(v)}} W_1^{(v)'}(t_1) + \frac{p_2^{(v)}}{\mu_2^{(v)}} W_2^{(v)'}(t_2)\right] = F_1^{(v)}; \\ 2\operatorname{Re}[q_1^{(v)} W_1^{(v)'}(t_1) + q_2^{(v)} W_2^{(v)'}(t_2)] = F_2^{(v)}; \quad (6)$$

здесь на $L_0^{(I)}$ $v=1$, $F_1^{(I)} = -My$, $F_2^{(I)} = -Mx$; на $L_1^{(II)}$ $v=2$, $F_1^{(II)} = F_2^{(II)} = 0$;

$$2\operatorname{Re}[W_1^{(I)'}(t_1) + W_2^{(I)'}(t_2)] = 2\operatorname{Re}[W_1^{(II)'}(t_1) + W_2^{(II)'}(t_2)],$$

$$2\operatorname{Re}\left[\mu_1^{(I)} W_1^{(I)'}(t_1) + \mu_2^{(I)} W_2^{(I)'}(t_2)\right] = 2\operatorname{Re}\left[\mu_1^{(II)} W_1^{(II)'}(t_1) + \mu_2^{(II)} W_2^{(II)'}(t_2)\right], \quad (7)$$

$$2\operatorname{Re}\left[\frac{p_1^{(I)}}{\mu_1^{(I)}} W_1^{(I)'}(t_1) + \frac{p_2^{(I)}}{\mu_2^{(I)}} W_2^{(I)'}(t_2)\right] = 2\operatorname{Re}\left[\frac{p_1^{(II)}}{\mu_1^{(II)}} W_1^{(II)'}(t_1) + \frac{p_2^{(II)}}{\mu_2^{(II)}} W_2^{(II)'}(t_2)\right],$$

$$2\operatorname{Re}[q_1^{(I)} W_1^{(I)'}(t_1) + q_2^{(I)} W_2^{(I)'}(t_2)] = 2\operatorname{Re}[q_1^{(II)} W_1^{(II)'}(t_1) + q_2^{(II)} W_2^{(II)'}(t_2)] \text{ на контуре спая.}$$

Согласно В. В. Меглинскому, искомые функции $W_j^{(v)}(z_j^{(v)})$ выбираем так, чтобы их производные имели вид

$$W_j^{(v)'}(z_j^{(v)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{jk}^{(v)}}{[\zeta_1(z_j^{(v)})]^k} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{jk}^{(v)} P_{k0}^{(v)}(z_j^{(v)}). \quad (8)$$

Здесь $A_{jk}^{(v)}$, $C_{jk}^{(v)}$ – комплексные постоянные, подлежащие определению из граничных условий.

Поступая аналогично В. В. Меглинскому, поставленную задачу можно свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \alpha_{1n}^{(I)} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1kl}^{(I)} A_{ll}^{(I)} + C_{1k}^{(I)} m_{10}^{(I)k} \right] + \alpha_{2n}^{(I)} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{2kl}^{(I)} A_{2l}^{(I)} + C_{2k}^{(I)} m_{20}^{(I)k} \right] + \\ & \quad + \left[\bar{\alpha}_{1n}^{(I)} \bar{C}_{1k}^{(I)} + \bar{\alpha}_{2n}^{(I)} \bar{C}_{2k}^{(I)} \right] = \gamma_{kn}^{(I)}; \\ & \alpha_{j1}^{(I)} = \frac{p_j^{(I)}}{\mu_j^{(I)}}; \quad \alpha_{j2}^{(I)} = q_j^{(I)}; \quad \gamma_{11}^{(I)} = -M \frac{b_0^{(I)} i}{2}; \quad \gamma_{12}^{(I)} = -M \frac{a_0^{(I)}}{2}; \quad \gamma_{kn}^{(I)} = 0; \quad k \geq 3; \quad n = 1, 2; \\ & \beta_{1n}^{(II)} \sum_{l=1}^{\infty} \psi_{1kl}^{(II)} C_{1l}^{(II)} + \beta_{2n}^{(II)} \sum_{l=1}^{\infty} \psi_{2kl}^{(II)} C_{2l}^{(II)} + \bar{\beta}_{1n}^{(II)} \left[\bar{A}_{1k}^{(II)} + \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\psi}_{1kl}^{(II)} \bar{C}_{1l}^{(II)} \bar{m}_{11}^{(II)k} \right] + \\ & \quad + \bar{\beta}_{2n}^{(II)} \left[\bar{A}_{2k}^{(II)} + \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\psi}_{2kl}^{(II)} \bar{C}_{2l}^{(II)} \bar{m}_{21}^{(II)k} \right] = 0; \\ & \beta_{j1}^{(II)} = \frac{p_j^{(II)}}{\mu_j^{(II)}}; \quad \beta_{j2}^{(II)} = q_j^{(II)}; \quad n = 1, 2; \\ & \delta_{1n}^{(v)} \sum_{l=1}^{\infty} \psi_{1kl}^{(v)} C_{1k}^{(v)} + \delta_{2n}^{(v)} \sum_{l=1}^{\infty} \psi_{2kl}^{(v)} C_{2k}^{(v)} + \bar{\delta}_{1n}^{(v)} \left[\bar{A}_{1k}^{(v)} + \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\psi}_{1kl}^{(v)} \bar{C}_{1k}^{(v)} \bar{m}_{11}^{(v)k} \right] + \\ & \quad + \bar{\delta}_{2n}^{(v)} \left[\bar{A}_{2k}^{(v)} + \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\psi}_{2kl}^{(v)} \bar{C}_{2k}^{(v)} \bar{m}_{21}^{(v)k} \right] - \delta_{1n}^{(v+1)} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1kl}^{(v+1)} A_{ll}^{(v+1)} + C_{1k}^{(v+1)} m_{10}^{(v+1)k} \right] - \\ & \quad - \delta_{2n}^{(v+1)} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{2kl}^{(v+1)} A_{2l}^{(v+1)} + C_{2k}^{(v+1)} m_{20}^{(v+1)k} \right] - \bar{\delta}_{1n}^{(v+1)} \bar{C}_{1k}^{(v+1)} - \bar{\delta}_{2n}^{(v+1)} \bar{C}_{2k}^{(v+1)} = 0; \\ & \quad v = 1; \quad n = 1, 2, 3, 4; \\ & \delta_{j1}^{(v)} = 1; \quad \delta_{j2}^{(v)} = \mu_j^{(v)}; \quad \delta_{j3}^{(v)} = \frac{p_j^{(v)}}{\mu_j^{(v)}}; \quad \delta_{j4}^{(v)} = q_j^{(v)}; \quad v = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Численные результаты были получены для случая, когда материалы колец ортотропные и различные. В этом случае $\mu_2^{(v)} = -\bar{\mu}_1^{(v)}$, тогда коэффициенты в представлении искомых функций связаны следующими соотношениями: $A_{2k}^{(v)} = \bar{A}_{1k}^{(v)}$, $C_{2k}^{(v)} = \bar{C}_{1k}^{(v)}$, $m_{2k}^{(v)} = \bar{m}_{1k}^{(v)}$, $R_{2k}^{(v)} = \bar{R}_{1k}^{(v)}$ ($k=0,1$); жесткости $D_{16}^{(v)}=D_{26}^{(v)}=0$; $D_1^{(v)}=D_{11}^{(v)}$; $D_2^{(v)}=D_{22}^{(v)}$; $D_3^{(v)}=D_{12}^{(v)}+2D_{66}^{(v)}$; $D_k^{(v)}=D_{66}^{(v)}$.

Вследствие этого количество неизвестных решаемой задачи уменьшится в 2 раза. Для получения численных результатов поставленной задачи система уравнений (9) была сокращена до 24 уравнений, что соответствует $k = 5$. Это можно сделать, так как эта система квазирегулярна. Используя полученное решение, по известным формулам можно определить прогибы и изгибающие моменты в некоторых точках рассматриваемой плиты [2].

В качестве примера была рассмотрена плита, составленная из двух вложенных друг в друга круглых колец. При этом предполагалось, что внешнее кольцо изготовлено из СВАМа [2], а внутреннее — из материала, жесткости которого в два раза больше соответствующих жесткостей СВАМа. Часть полученных результатов приведена в таблице.

Контур	θ	W	M_r	M_b
$L_0^{(I)}$	0°	-3.1233	0.9985	0.9967
	45°	-3.1317	0.9957	0.5001
	90°	-3.1790	0.9927	-0.9976
$L_0^{(II)} = L_1^{(I)}$	0°	-0.0890	1.5142	0.8051
		-0.0890	1.5142	1.4681
	45°	-0.0719	1.3356	1.0760
		-0.0681	1.3418	1.4506
	90°	-0.0457	0.3871	-0.8969
		-0.0420	0.4000	-1.4736
$L_1^{(II)}$	0°	-0.0160	0.0073	3.7380
	45°	-0.0187	0.0010	2.5632
	90°	-0.0293	0.0032	-2.5851

Анализ полученных результатов показывает, что граничные условия на внутреннем и внешнем контурах, а также на контуре спая выполняются с достаточной степенью точности. Прогиб достигает своего наибольшего значения в точках загруженного контура $L_0^{(I)}$. Максимальное значение изгибающий момент принимает на контуре отверстия, и этим моментом является момент M_b .

Таким образом, можно считать, что полученные результаты соответствуют физической постановке задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1975.
- Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1967. Вып. 3. С. 97 – 127.

А. А. Матутин

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН

В настоящей статье исследуется случай нерегулярной рефракции (в частном случае отражения ударной волны от свободной поверхности, разделяющей газовую и газожидкостную среды) при падении плоской ударной волны BR интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$ под углом α со свободной поверхностью OA с давлением p_0 и массовыми газосодержаниями γ^+ сверху и γ^- снизу от OA (рис. 1). Область II, примыкающая к точке взаимодействия УВ, характеризуется большими градиентами параметров.

1. Постановка краевой задачи для области II. Введем асимптотическое разложение в области II в виде [1]

$$r = \frac{R}{c_0 t} = 1 - P_{10} R_0(\gamma) \delta, \quad \theta = P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma) Y, \quad \frac{v}{c_0} = P_0^{3/2} R_0^{1/2} v + \dots,$$

$$\frac{u}{c_0} = P_{10} \mu + \dots, \quad H = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = P_{10} H^{(1)} + \dots, \quad P^* = \frac{P - P_0}{\rho_0 c_0^2} = P_{10} P^{*(1)} + \dots \quad (1)$$

В итоге получим систему уравнений коротких волн:

$$2(\mu - \delta) \mu_\delta + v_y + \mu = 0, \quad \mu_y = v_\delta, \quad \mu = P^{*(1)}. \quad (2)$$

Условия на фронтах УВ $\delta = \delta^*(Y)$ имеют вид (μ_1, v_1 – параметры перед фронтом УВ)

$$\left(\frac{d\delta}{dY} \right)^2 = 2\delta - (\mu - \mu_1), \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta}{dY} + (v - v_1) = 0. \quad (3)$$

Первое уравнение (3) является дифференциальным уравнением для определения фронта ударной волны.

На линии слабого разрыва

$$\mu = \mu_1, \quad v = v_1. \quad (4)$$

Условия сращивания с решениями в областях I и III представлены в [1].

На свободной поверхности

$$\mu = P^{*(1)} = 0, \quad Y = 0. \quad (5)$$

Для решения краевой задачи (2) – (5) в области II удобно свести систему (2) к одному уравнению второго порядка для функции $\mu(\delta, Y)$:

$$(\mu^2 - 2\delta\mu)_{\delta\delta} + \mu_{YY} + 3\mu_\delta = 0, \quad \mu = P^{*(1)}. \quad (6)$$

Используя уравнения (2) и (3), дифференциальное уравнение фронта УВ и условие на фронте (3) можно записать в виде

$$(5\delta'^2 - 2\delta + 2\mu_1)\delta'' - (\delta + \mu_\delta - 3\mu_{1\delta})\delta'^2 + (3\mu_{1y} + v_{1\delta})\delta' + 2(\mu_\delta + 1)\delta - (2\mu_\delta + 1)\mu_1 + v_{1y} = 0. \quad (7)$$

Окончательно задача свелась к решению уравнения (6) в области II для функции $\mu(\delta, Y)$, удовлетворяющей условиям (5), (3), (4) и (7). Отметим, что в постановку задачи входит параметр

$$\alpha^v = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon_{10}^{1/2} L_0^{1/2}(\gamma)}, \quad (8)$$

который характеризует угол наклона, интенсивность и газосодержание среды.

2. Численный метод решения краевых задач. Для решения краевых задач (2) – (5) применяется метод последовательных приближений [1], который сводит исходную краевую задачу для уравнений коротких волн с неизвестной границей к серии краевых задач с фиксированной границей.

При решении таких задач применяют метод конечных разностей [1]. Задача (2) – (6) решается методом секущих (f – левая часть уравнений (2)).

$$\mu_{i,j}^{(k+1)} = \mu_{i,j}^{(k)} - \frac{f(\mu_{i-1,j}^{(k)}, \mu_{i+1,j}^{(k)}, \mu_{i,j}^{(k)}, \mu_{i,j-1}^{(k)}, \mu_{i,j+1}^{(k)})}{f'_{\mu_{i,j}}(\mu_{i-1,j}^{(k)}, \mu_{i+1,j}^{(k)}, \mu_{i,j}^{(k)}, \mu_{i,j-1}^{(k)}, \mu_{i,j+1}^{(k)})}, \quad (9)$$

$$\text{где } f'_{\mu_{i,j}} = 4(\mu_{i+1,j} - 2\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j}) - 8(\mu_{i,j} - \delta_j) - 4\left(\frac{\Delta i}{\Delta j}\right)^2.$$

Уточнение фронта ударной волны также производится по методу секущих.

Начальное приближение для поля давления строится по методу прямых ($Y=0$, $Y=Y_A$, $Y=-H$ ($H \gg 1$)) [1].

На рис. 2 для $\alpha^v = 0,5$ построена картина нерегулярного отражения ударной волны для водовоздушной смеси, для относительно слабой ударной волны. Для таких сред характерно сильное изменение параметров в нижней области и слабое – для верхней области, что позволяет не рассматривать верхнюю часть картины.

Рассмотренный метод позволяет восстанавливать структуру поля давления и поток за ним.

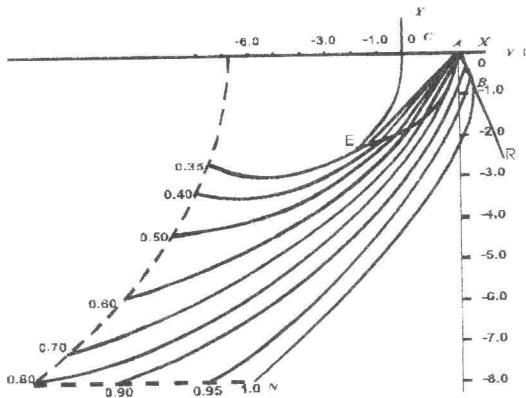


Рис. 2

3. Аналитическое исследование рефракции. При нерегулярной рефракции ударной волны, когда $\alpha^v < 1$, область возмущения NABD разрастается [2], захватывая часть падающей волны AC и искривляя ее; за искривленной частью волны AB возникает «дозвуковое» неоднородное течение, разделяющее область однородного потока за фронтом BC и область центрированной волны разряжения ALE. Неоднородное «дозвуковое» течение в области FABD смыкается по линии BD – линии параболичности – с однородным потоком за фронтом BC и описывается следующим решением:

$$\mu = 1 - m\sqrt{1 - \delta}, \quad v = 1 + (m^2 - 1)(Y - Y_A), \quad Y_A = \alpha^v - 1, \quad m = \text{const}, \quad (10)$$

имеющим «звуковыми» линиями линию BD и линию AF.

$$\delta = \delta^*, \quad \mu = \mu^*, \quad \delta^* = \mu^* = 1 - m^2, \quad \delta_B = Y_B = \mu^*. \quad (11)$$

По линии параболичности AF (11) решение (10) смыкается с «дозвуковым» решением в области EAF:

$$\mu = \frac{1}{2}Y\sqrt{2(\mu^* - \delta)} + \mu^*, \quad v = -\frac{1}{3}[2(\mu^* - \delta)]^{3/2} + \frac{1}{6}Y^3 - \mu^*(Y - Y_A) + 1, \quad (12)$$

имеющем кроме AF «звуковой» линией линию ALE:

$$\delta = \mu^* - \frac{1}{2}Y^2. \quad (13)$$

По «звуковой» линии ALE решение (12) смыкается со «сверхзвуковым» решением в области ALE, где параметр $b = -1/8$:

$$\mu = -\frac{1}{2}c^2 + \mu^*, \quad v = \frac{1}{3}c^3 - (\mu^* - \frac{1}{2}c^2)Y + \mu^*Y_A + 1, \quad c = \frac{X - X_B}{Y}. \quad (14)$$

С учетом значения для Y_B из (10) имеем выражение

$$\alpha^v = \sqrt{1-m^2} + \frac{m}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{m^2+8}-3m}{2\sqrt{2}\sqrt{1-m^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{m^2+8}+m}{2\sqrt{2}} \right), \quad (15)$$

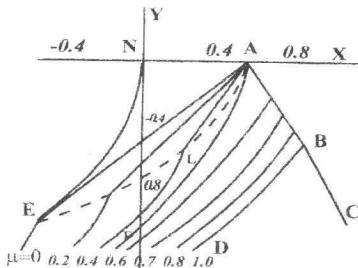


Рис. 3

связывающее исходный параметр α^v и m .

На рис. 3 в плоскости X,Y изображена картина перегулярной рефракции ударной волны в воде со значением исходного параметра $\alpha^v = 0.5$. Линии равных значений давления (совпадающие с линиями $\mu = \text{const}$) построены согласно решениям (10) при $m=0.667$, $\mu^*=0.555$, (12), (14) из [1].

Построенное численное решение

качественно и достаточно точно согласуется с аналитическим решением, которое было построено в [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндягин Г. П. Численное решение задачи нерегулярного отражения слабой ударной волны от жесткой стенки в идеальном газе // ЖВМ и МФ. 1980. № 1. С. 249 – 254.
2. Шиндягин Г. П., Матутин А. А. Аналитическое исследование ударно-волновых структур при нелинейной рефракции ударных волн на поверхности, разделяющей газовую и газожидкостную среды // Механика и процессы управления: Сб. науч. тр. Екатеринбург: УРОРАН, 2004. С. 190 – 197.

УДК 533.6.011

Е. О. Немцова, И. А. Чернов

ПОЛУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В статье рассматривается параметрический метод Б. И. Заславского [1, 2], позволяющий получить точные решения, которые являются обобщением некоторых известных автомодельных решений [3].

Рассмотрим классическое трансзвуковое течение идеального газа. Будем считать, что поток стационарный изэнергетический и изэнтропический. Основная система уравнений, характеризующих плоскопараллельные течения, имеет вид

$$uu_x = v_y, \quad v_x = u_y. \quad (1)$$

Известен несимметричный класс решений Заславского – Клепиковой для системы (1), s – параметр:

$$\begin{aligned}
u &= u_0(s) + u_1(s)y + u_2(s)y^2, \\
v &= v_0(s) + v_1(s)y + v_2(s)y^2 + v_3(s)y^3, \\
x &= x_0(s) + x_1(s)y + sy^2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов в (2), с целью упрощения записи опускаем аргументы у функций:

$$\begin{aligned}
x'_0 &= \frac{u_0 - x_1^2}{u_2 - 4s^2}, & x'_1 &= \frac{-(4x_1s - u_1)}{u_2 - 4s^2}, & u'_0 &= \frac{-(u_1x_1 - v_1)}{u_2 - 4s^2}, \\
u'_1 &= \frac{-2(u_2x_1 - v_2 + u_1s)}{u_2 - 4s^2}, & u'_2 &= \frac{3v_3 - 4s u_2}{u_2 - 4s^2}, & v'_0 &= \frac{u_0u_1 - v_1x_1}{u_2 - 4s^2}, \\
v'_1 &= \frac{u_1^2 - 2v_2x_1 + 2u_0u_2 - 2v_1s}{u_2 - 4s^2}, & v'_2 &= \frac{3(u_1u_2 - v_3x_1) - 4v_2s}{u_2 - 4s^2}, & v'_3 &= \frac{-2(3v_3s - u_2^2)}{u_2 - 4s^2}.
\end{aligned}$$

Из этой системы можно выделить нелинейное ядро (из пятого и девятого уравнений) для u'_2, v'_3 .

Применим технологию восстановления остальных коэффициентов. Известным считаем коэффициент $u_2(s)$. Действительно, нелинейное ядро можно свести к одному уравнению 2-го порядка относительно $u_2(s)$, частное решение которого $u_2(s) = s^2$. Восстановленное решение для (2) имеет вид ($z = t^3$)

$$\begin{aligned}
x &= Bt^3y^2 + \left(\frac{1}{2}C_1t^2 + \frac{9}{28}\frac{C_3B^2}{t^4} + C_4Bt^3 \right)y + \frac{1}{4}C_4^2Bt^3 + \frac{1}{4}C_1C_4t^2 + \frac{1}{2}\frac{C_2}{t^2} - \\
&\quad - \frac{27}{2156}\frac{B^3C_3^2}{t^{11}} + \frac{9}{56}\frac{C_4C_3B^2}{t^4} - \frac{3}{5}\frac{C_5B}{t^5} + C_6, \\
u &= B^2t^6y^2 + \left(\frac{18}{7}\frac{B^3C_3}{t} + t^5BC_1 + C_4B^2t^6 \right)y + tC_2B - \frac{27}{784}\frac{B^4C_3^2}{t^8} + \\
&\quad + \frac{9}{7}\frac{C_4C_3B^3}{t} + \frac{1}{2}t^5C_4C_1B + \frac{1}{4}C_4^2B^2t^6 - 3\frac{C_5B^2}{t^2} + \frac{9}{28}\frac{C_3B^2C_1}{t^2} + \frac{1}{4}t^4C_1^2, \\
v &= -\frac{2}{3}y^3B^3t^9 + \left(-C_4B^3t^9 + \frac{117}{28}t^2B^4C_3 - t^8C_1B^2 \right)y^2 + \left(-\frac{1}{2}t^9B^3C_4^2 - \right. \\
&\quad \left. - t^4B^2C_2 - 6tC_5B^3 - \frac{1}{2}t^7BC_1^2 + \frac{9}{4}tB^3C_1C_3 - t^8B^2C_4C_1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{27}{49}\frac{B^5C_3^2}{t^5} + \frac{117}{28}t^2B^4C_4C_3 \right)y + \left\{ -\frac{1}{12}C_4^3B^3t^9 - \frac{243}{10976}\frac{C_3^3B^6}{t^{12}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}BC_1C_2t^3 - \frac{1}{4}BC_1^2C_4t^7 + \frac{27}{28}\frac{C_3B^3C_2}{t^3} - \frac{27}{784}\frac{C_1B^4C_3^2}{t^6} + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{27}{28} \frac{C_3^2 B^5 C_4}{t^5} + \frac{117}{112} C_3 B^4 C_4^2 t^2 - \frac{1}{4} C_1 C_4^2 B^2 t^8 - \frac{1}{12} t^6 C_1^3 + C_7 - \\ - \frac{27}{28} \frac{C_5 B^4 C_3}{t^6} - 3B^3 C_5 C_4 t - \frac{1}{2} C_2 C_4 B^2 t^4 + \frac{9}{8} C_3 B^3 C_1 C_4 t \Big\}.$$

Здесь $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, B$ – константы.

Заметим, что в представлении (2) мы брали старшие коэффициенты как функции параметра s и тем самым полученный результат не включает так называемые *потерянные решения*, когда старшие коэффициенты в (2) константы.

$$x = \left(\frac{5z^9 + 18z^6 B - 15z^3 C_1 + 15B^2 z^3 + 30C_1 + 60C_3 Dz}{60Dz} \right) + (Bz + z^4)y + Dy^2,$$

$$u = \left(\frac{C_1}{z} + z^2 C_1 - \frac{1}{3} z^5 (3B + z^3) \right) + (2DBz - 4Dz^4)y + 4D^2 y^2,$$

$$v = \left(\frac{1}{3} Bz^9 + B^2 z^6 + \frac{1}{3} (-3BC_1 + 3C_1 + B^3) z^3 + C_2 \right) + \\ + \frac{2D(3C_1 - 6z^3 C_1 + 12z^6 B + 2z^9 + 3B^2 z^3)y}{3z} + (4D^2 Bz + 16D^2 z^4)y^2 + \frac{16}{3} D^3 y^3.$$

Здесь C_1, C_2, C_3, D, B – произвольные постоянные.

Наряду с решением Заславского (2) существует класс однопараметрических решений, ассоциированный с $n=3$.

Аналогично несимметричному решению (2) можно воспользоваться технологией восстановления коэффициентов и получить следующее точное решение ($s = z^4$) для $u_4(s) = s^2$:

$$x = -\frac{4}{5} \frac{C_2 B}{t^5} + \frac{1}{2} \frac{C_1}{t} + C_3 + Bt^4 y^3, \quad u = B^2 t^8 y^4 + \left(t^3 C_1 B - 8 \frac{C_2 B^2}{t} \right) y, \\ v = -\frac{2}{3} y^6 B^3 t^{12} + \left(-\frac{40}{3} t^3 C_2 B^3 - t^7 C_1 B^2 \right) y^3 + \frac{16}{3} \frac{C_2^2 B^3}{t^6} - 4 \frac{C_1 C_2 B^2}{t^2} - \\ - \frac{1}{4} t^2 B C_1^2 + C_3. \quad (3)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, B – константы.

Решения вида (2) как обобщение симметричного решения Заславского – Клепиковой описывают трансзвуковые течения для показателей автомодельности $n=2, n=4/5, n=5/4$ при $\omega=0$. А решения вида (3) – для $n=3, n=5/3, n=6/5, n=3/5$. Необходимо рассмотреть автомодельные решения для соответствующих показателей автомодельности, найти для них параметрическое представление и убедиться в его соответствии с решениями вида (2). Таким образом, на базе основных автомодельных решений параметрическим методом могут быть получены точные решения, являющиеся их обобщением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Заславский Б. И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда со свободной поверхностью воды // ПМТФ. 1964. Вып. 4. С. 57 – 65.
2. Севостьянов Г. Д. Структура элементарных околосзвуковых решений // Аэродинамика. Нелинейные проблемы: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1997. Вып. 14(17). С. 109 – 117.
3. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа // ПММ. 1964. Т. 28. С. 280 – 284.

УДК 517.958:536.2

В. Ю. Ольшанский, В. Ю. Михайлов, А. В. Серебряков

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА КОМПОНЕНТ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ ТЕРМИЧЕСКОМ РАСЩЕПЛЕНИИ ГРАФИТА

Рассмотрим термическое расщепление предварительно окисленного графита (ОГ) в случае, когда два размера технологической формы много больше третьего. Расчеты проводятся на основе одномерной модели для бесконечного слоя, помещенного между двумя пластинаами, через которые осуществляется нагрев. В первоначальной засыпке технологической формы $h_0/L < 1$, где h_0 – толщина слоя графита и L – расстояние между пластинами, принятое за характерную длину при переходе к безразмерным величинам.

В рамках предложенной модели процесс термического расщепления разделяется на три стадии. Первая стадия описывает нагрев слоя ОГ за счет конвективного теплообмена через нижнее основание. Между слоем графита и верхней пластиной имеется воздушная прослойка. Интенсивность теплообмена с этой прослойкой считается пренебрежимо малой. Распределение температуры в слое ОГ определяется из решения задачи нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = F_O^{(1)} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < h_0/L, \quad 0 < t < t_1, \quad (1)$$

$$u_1(x, 0) = u_0, \quad 0 < x < h_0/L, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} - Bi^{(1)} \cdot u_1(0, t) + Bi^{(1)} \cdot u_\infty = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=h_0/L} = 0. \quad (3)$$

Здесь F_O , Bi – соответственно числа Фурье и Био. Первая стадия завершается в момент $t = t_1$, для которого $u(0, t_1) = u_*$. Здесь u_* – температура, при которой возникает фаза терморасщепленного графита (TPI').

На второй стадии происходит нагрев через нижнее основание пакета слоёв ТРГ-ОГ. Для этой стадии характерно наличие двух подвижных границ: поверхности раздела фаз $x = \xi_n(t)$ и свободной поверхности ОГ $x = \phi(t)$. Движение свободной поверхности связано с изменением объема графита при термическом расщеплении. Используется зависимость $\phi(t) = \frac{h_0}{L} + (1 - \frac{1}{\kappa}) \cdot \xi_n(t)$, где $\kappa = \text{const}$, $\kappa > 1$ – относительное изменение объема ОГ при его переходе в ТРГ. Распределения температуры $u_1(x, t)$ в слое ОГ и $u_2(x, t)$ в слое ТРГ определяются из решения задачи нестационарной теплопроводности. В задаче для ТРГ используется начальное условие

$$u_2(x, t_1) = u_* + Bi^{(2)}(u_\infty - u_*) (\xi_n(t) - x), \quad 0 < x < \xi_n(t). \quad (4)$$

В формуле (4) $\xi_n(t)$ определяется из предположения, что в начале второй стадии поверхность $x = \xi_n(t)$ движется в течение малого промежутка времени Δt_2 с постоянной скоростью. Скорость определяется выражением $\frac{d\xi_n}{dt} = Bi^{(2)} \cdot (u_\infty - u_*) \cdot \frac{\kappa}{\Lambda}$, где Λ – безразмерный комплекс, связанный с энталпийей фазового перехода.

В дальнейшем скорость движения поверхности раздела фаз определяется из условия

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=\xi_n(t)} = \frac{\Lambda}{\kappa} \frac{d\xi_n}{dt}. \quad (5)$$

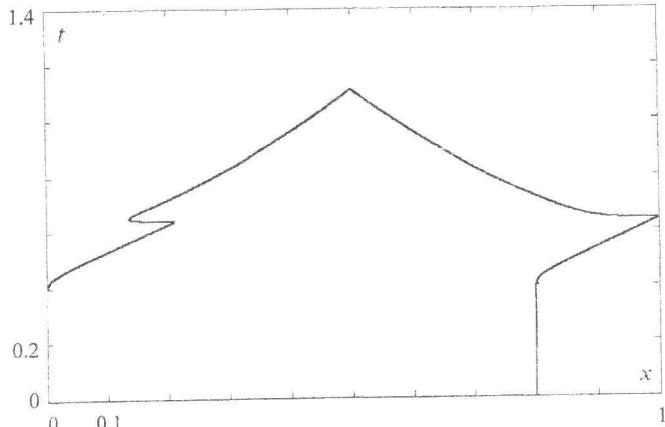
Здесь k_1 , k_2 – коэффициенты теплопроводности ОГ и ТРГ соответственно.

Для решения задачи теплопроводности с условием (5) использован метод выпрямления фронтов [1–4]. Решение ведется шагами по времени. Определив скорость $d\xi_n/dt$ и полагая, что ее значение не меняется на промежутке времени Δt , решаем задачи нестационарной теплопроводности для температур u_1 и u_2 . Используем при этом конечноразностную схему. Затем снова определяем $d\xi_n/dt$ и повторяем вычисления для следующего промежутка времени. Стадия нестесненного расширения пакета слоев ТРГ-ОГ завершается в момент времени $t = t_2$, когда свободная поверхность ОГ касается верхней пластины, т.е. при выполнении условия $\phi(t_2) = 1$.

На третьей, заключительной, стадии происходит нагрев пакета слоёв ТРГ-ОГ-ТРГ с поверхностями раздела $x = \xi_n(t)$ и $x = 1 - \xi_\beta(t)$. При этом объём между пластинами полностью занят ОГ и ТРГ, и переход из ОГ в ТРГ сопровождается изменением плотности ТРГ:

$$\rho_{\gamma_n} - \rho_{2\beta} = \rho_1 \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) \cdot \frac{\xi_n(t_2)}{\xi_n(t) + \xi_\beta(t)} \right) \quad (6)$$

В формуле (6) ρ_1 , ρ_{2H} , ρ_{2B} – плотности в слоях пакета. Условия для тепловых потоков на поверхностях $x = \xi_H(t)$ и $x = 1 - \xi_B(t)$ брались с учетом малой скорости перемещения слоя ОГ. Третья стадия и вместе с ней весь процесс завершаются в момент времени $t = t_3$, для которого выполняется условие $\xi_H(t_3) + \xi_B(t_3) = 1$, т.е. весь объем ОГ переходит в ТРГ. На рисунке представлено распространение с течением времени свободной поверхности ОГ и поверхностей раздела ОГ-ТРГ.



Результат получен для значений $h_0/L = 0.8$, $t_0 = 300$ с, $\kappa = 20$, $Fo^{(1)} = 3.9$, $Fo^{(2)} = 51.4$, $Bi^{(1)} = 0.4$, $Bi^{(2)} = 4$, $k_1/k_2 = 0.1$, $\Lambda = 0.21$, $u_\infty/u_* = 2$, $u_0/u_* = 0.066$. Общее время процесса термического расщепления составило 330 с. Это согласуется с результатами экспериментов в лаборатории. Ранее в работах [3, 4] авторами представлены результаты для нестесненного терморасщепления графита.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Будак Б. М., Васильев Ф. П., Успенский А. Б. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана // Численные методы в газовой динамике: Сб. работ ВЦ МГУ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. С. 139 –183.
2. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
3. Михайлов В. Ю., Ольшанский В. Ю., Серебряков А. В. Метод выпрямления фронтов при численном моделировании термического расщепления графита // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. сб. науч. тр. / РИЦ Сарат. гос. техн. ун-та. Саратов, 2004. С. 72 – 76.
4. Михайлов В. Ю., Ольшанский В. Ю., Серебряков А. В. Решение задачи Стефана методом выпрямления фронтов для расчета процесса термического расщепления графита // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 202 – 205.

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В НЕЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ
ГРАВИТАЦИИ ЗЕМЛИ***

В статье с помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимального управления о встрече двух космических аппаратов (КА), один из которых управляемый, а второй – неуправляемый и движется под действием силы притяжения к Земле. Задача решена с использованием кватернионных элементов орбиты при условии, что поле гравитации Земли не является центральным. Функционал качества процесса управления представляет свертку с весовыми множителями двух критериев, определяющих время и энергию, затраченные в процессе управления.

1. Движение управляемого КА в нецентральном поле гравитации Земли в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой находится в центре Земли, а плоскость Ox_1x_2 совпадает с экваториальной плоскостью, в безразмерных кватернионных элементах орбиты $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ описывается системой уравнений:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\phi} = (-\varepsilon \mathbf{F}_1 + \delta \mathbf{F}_2 (\mathbf{u}^2)^{-5}) Q \sin \phi, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\phi} = (\varepsilon \mathbf{F}_1 - \delta \mathbf{F}_2 (\mathbf{u}^2)^{-5}) Q \cos \phi, \quad (1)$$

$$\frac{dt}{d\phi} = \mathbf{u}^2 (2Q)^{1/2}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{A} \cos \phi + \mathbf{B} \sin \phi, \quad \mathbf{w} = -\mathbf{A} \sin \phi + \mathbf{B} \cos \phi, \quad Q = A^2 + B^2,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{p}) = \mathbf{u}^2 P(\mathbf{u}) \mathbf{p} + \mathbf{w}(\mathbf{w}, P(\mathbf{u}) \mathbf{p}), \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{q}(\mathbf{u})),$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \left[1 - 5(\mathbf{u}, P(\mathbf{u}) \mathbf{j}_3)^2 (\mathbf{u}^2)^{-2} \right] P^T(\mathbf{u}) \mathbf{u} + 2(\mathbf{u}, P(\mathbf{u}) \mathbf{j}_3) \mathbf{j}_3.$$

$$P(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_0 \\ -u_3 & -u_0 & u_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{r} = P^T(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \frac{2}{r(2Q)^{1/2}} P^T(\mathbf{u}) \mathbf{w}, \quad |\mathbf{p}| \leq 1. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{p} – безразмерный управляемый параметр, \mathbf{j}_3 – единичный орт оси Ox_3 , \mathbf{r} и \mathbf{v} – безразмерные радиус вектор и вектор скорости центра масс КА, ϕ – независимая переменная, t – безразмерное время.

При переходе к безразмерным переменным масштабом длины выбран экваториальный радиус Земли R_s , масштабом времени $(R_s^3 (\gamma M_s)^{-1})^{1/2}$, где M_s – масса Земли, γ – гравитационная постоянная. Для величин

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00347).

A, B, u, w масштабным множителем является $R_3^{1/2}$, для величины **p** – максимальная величина тяги p^* max, отнесенная к единице массы КА. Малые параметры $\epsilon = p^*_{\max} R_3^2 (\gamma M_3)^{-1}$, $\delta = 1.5 (I_{x_3 x_3} - I_{x_1 x_1}) (M_3 R_3^2)^{-1}$, где $I_{x_1 x_1}$, $I_{x_3 x_3}$ – осевые моменты инерции Земли. Параметр ϵ характеризует отношение максимальной тяги к силе тяжести на экваторе Земли. Параметр $\delta = 0.001647$ характеризует отклонение гравитационного поля Земли от центрального поля.

Движение неуправляемого КА в безразмерных переменных описывается системой уравнений с независимой переменной ϕ_a :

$$\frac{d\mathbf{A}_a}{d\phi_a} = \delta \mathbf{F}_{2a} \left(\mathbf{u}_a^2 \right)^{-5} Q_a \sin \phi_a, \quad \frac{d\mathbf{B}_a}{d\phi_a} = -\delta \mathbf{F}_{2a} \left(\mathbf{u}_a^2 \right)^{-5} Q_a \cos \phi_a,$$

$$\mathbf{F}_{2a} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_a, \mathbf{w}_a, \mathbf{q}(\mathbf{u}_a)),$$

$$\frac{dt}{d\phi_a} = \mathbf{u}_a^2 (2Q_a)^{1/2}, \quad \mathbf{u}_a = \mathbf{A}_a \cos \phi_a + \mathbf{B}_a \sin \phi_a, \quad \mathbf{w}_a = -\mathbf{A}_a \sin \phi_a + \mathbf{B}_a \cos \phi_a,$$

$$Q_a = A_a^2 + B_a^2. \quad (3)$$

Начальное состояние управляемого КА задано соотношениями:

$$\text{при } t=0 \quad \phi=0, \quad \mathbf{A}=\mathbf{A}_0, \quad \mathbf{B}=\mathbf{B}_0, \quad (4)$$

а неуправляемого КА – соотношениями:

$$\text{при } t=0 \quad \phi_a=0, \quad \mathbf{A}_a=\mathbf{A}_{a0}, \quad \mathbf{B}_a=\mathbf{B}_{a0}. \quad (5)$$

Связь между переменными ϕ_a и ϕ определяется уравнением

$$\frac{d\phi_a}{d\phi} = \frac{\mathbf{u}^2 Q^{1/2}}{\mathbf{u}_a^2 Q_a^{1/2}} \quad (6)$$

и начальными условиями (4) и (5).

Условие мягкой встречи аппаратов определяется соотношениями:

$$P^T(\mathbf{u}(\phi_k)) \mathbf{u}(\phi_k) = P^T(\mathbf{u}_a(\phi_a(\phi_k))) \mathbf{u}_a(\phi_a(\phi_k)), \quad (7)$$

$$\frac{1}{Q^{1/2}(\phi_k)} P^T(\mathbf{u}(\phi_k)) \mathbf{w}(\phi_k) = \frac{1}{Q_a^{1/2}(\phi_a(\phi_k))} P^T(\mathbf{u}_a(\phi_a(\phi_k))) \mathbf{w}_a(\phi_a(\phi_k)), \quad (8)$$

а условие жесткой встречи – лишь соотношением (7).

Для оптимального процесса управления функционал качества

$$I = \int_0^{\phi_k} (\alpha_1 + \alpha_2 \epsilon^2 p^2) dt = \int_0^{\phi_k} (\alpha_1 + \alpha_2 \epsilon^2 p^2) \mathbf{u}^2 (2Q)^{1/2} d\phi \quad (9)$$

принимает минимальное значение. С помощью изменения весовых множителей α_1 и α_2 можно усиливать влияние одного из критериев, входящих в функционал.

2. Для решения поставленной задачи с помощью принципа максимума Понтрягина составляется функция Гамильтона – Понтрягина:

$$H = -\varepsilon \left(\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2 \right) \mathbf{u}^2 Q^{1/2} + Q \left(\varepsilon \mathbf{F}_1 - \delta \mathbf{F}_2 (\mathbf{u}^2)^{-5}, \Pi \right) + \varepsilon \vartheta \frac{\mathbf{u}^2 Q^{1/2}}{\mathbf{u}_a^2 Q_a^{1/2}},$$

$$\Pi = -\Psi_a \sin \varphi + \Psi_b \cos \varphi. \quad (10)$$

Уравнения для сопряженных переменных $\Psi_a, \Psi_b, \varepsilon \vartheta$ имеют вид

$$\frac{d\Psi_a}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{A}}, \quad \frac{d\Psi_b}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}}, \quad \varepsilon \frac{d\vartheta}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_a}. \quad (11)$$

Оптимальное управление \mathbf{p}_{opt} , удовлетворяющее ограничению (2), согласно условию максимума для функции Гамильтона – Понtryгина можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{1}{2\alpha_2 \varepsilon^2 \mathbf{u}^2} Q^{1/2} P^T(\mathbf{u}) \left(\mathbf{u}^2 \Pi + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \Pi) \right),$$

$$\mathbf{p}_{opt} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{p}}, \text{ если } |\tilde{\mathbf{p}}| \leq 1, \\ \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{|\tilde{\mathbf{p}}|}, \text{ иначе} \end{array} \right\}. \quad (12)$$

В поставленной задаче оптимального управления правый конец траектории находится на подвижном многообразии, которое определяется условиями (7) и (8) или (7) в зависимости от варианта встречи. Следовательно, на правом конце траектории должны выполняться соответствующие условия трансверсальности, которые в случае мягкой встречи имеют вид

$$l(\Psi_a, \mathbf{A}) + l(\Psi_b, \mathbf{B}) = 0, \quad l(\Pi, \mathbf{u}) = 0, \quad H + (\Psi_a, \mathbf{B}) - (\Psi_b, \mathbf{A}) = 0,$$

$$\varepsilon \vartheta + (\Psi_a, \mathbf{B}) - (\Psi_b, \mathbf{A}) - \delta Q_a (\mathbf{u}_a^2)^{-6} (P(\mathbf{u}_a) P^T(\mathbf{u}) \Pi, \mathbf{F}_{2a}) = 0, \quad (13)$$

а в случае жесткой встречи:

$$l(\Psi_a, \mathbf{A}) + l(\Psi_b, \mathbf{B}) = 0, \quad \Pi = 0, \quad \varepsilon \mathbf{u}^2 \vartheta + (P^T(\mathbf{u}) \Phi, P^T(\mathbf{u}_a) \mathbf{w}_a) = 0,$$

$$H + (P^T(\mathbf{u}) \Phi, P^T(\mathbf{u}) \mathbf{w}) = 0, \quad \text{где } \Phi = \Psi_a \cos \varphi + \Psi_b \sin \varphi. \quad (14)$$

Таким образом, решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы уравнений (1), (3), (6), (11), (12) с граничными условиями (4), (5) при $\varphi=0$ и условиями (7), (8), (13) для мягкой встречи или (7), (14) для жесткой встречи в конце движения.

3. На рис. 1 представлена в нецентральном поле Земли траектория оптимального движения управляемого КА, которая начинается в точке В, и траектория движения неуправляемого КА, начинаящаяся в точке А. На рис. 2 изображена зависимость оптимального управления от времени.

Ниже приводятся результаты расчетов в безразмерных переменных для $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 40$, $\varepsilon = 0.175$.

В таблице представлены координаты радиуса вектора положения и вектора скорости управляемого КА в начальный момент времени (первая строка), неуправляемого КА в начальный момент времени (вторая строка), те же величины в момент мягкой встречи в центральном поле Земли [1] (третья строка) и в нецентральном поле (четвертая строка).

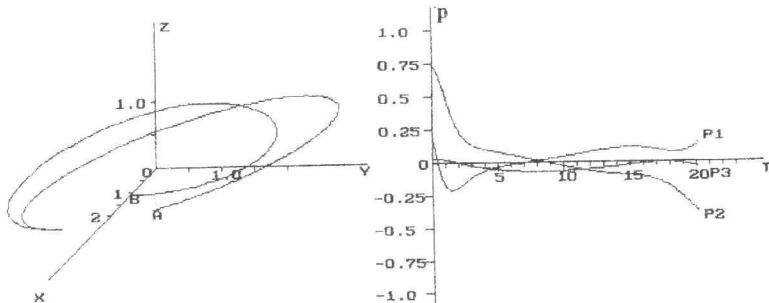


Рис. 1. Траектории полета КА

Рис. 2. Управления p_1 , p_2 , p_3

T	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3
0.0	1.1025	0.0	0.0	0.0	0.9524	0.0
0.0	2.3100	0.7500	0.1750	-0.1006	0.6037	0.1409
20.6105	2.1811	-0.4534	-0.1058	0.2472	0.6226	0.1453
20.6237	2.1865	-0.4378	-0.1012	0.2424	0.6238	0.1457

Для перехода к размерным переменным необходимо использовать масштабы длины $R_0 = 6378.245$ км, времени $T = 806.83$ с = 0.2241 ч, скорости $V = 7.9053$ км/с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я. Г. Оптимальные траектории и управления в задаче о встрече космических аппаратов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003, Вып. 5. С. 171 – 174.

УДК 531

Г. Д. Севостьянов

О ЛИНЕЙНОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Задача Дарбу (G. Darboux) [1, 2] – аналитически определить движение тела с неподвижной точкой по заданной его мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}(t)$. Для этого необходимо аналитически проинтегрировать нели-

нейную систему 3-го порядка (кинематические уравнения Эйлера, разрешенные относительно производных по времени t) [2]:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= (p \sin \phi + q \cos \phi) / \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= p \cos \phi - q \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= r - (p \sin \phi + q \cos \phi) \operatorname{ctg} \theta,\end{aligned}\quad (1)$$

где ϕ, ψ, θ – углы Эйлера (углы собственного вращения, прецессии, нутации тела соответственно); $p(t), q(t), r(t)$ – заданные координаты ω в связанной с телом системе координат xuz .

Ж.Г. Дарбу (1848 – 1917) привел систему (1) к комплексному уравнению Риккати (первого порядка) (или двум линейным уравнениям 2-го порядка для вещественных функций) [1, 2]. С помощью четырех параметров Родрига – Гамильтона из (1) получена линейная система четырех уравнений первого порядка [2].

Введение четырех параметров Кейли – Клейна (комплексных комбинаций параметров Родрига – Гамильтона) приводит к 4 уравнениям 1-го порядка. Уравнения Пуассона – линейная система 3 циклических уравнений для трех зависимых координат $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ орта неподвижной оси в связанной системе xuz , определяющих углами ϕ, θ [2].

В данной статье из (1) получено одно *линейное однородное* уравнение 3-го порядка для $\cos \theta$ (содержащее одну заданную временную функцию), *нелинейное уравнение 2-го порядка* для $\cos \theta$.

В связанной с телом плоскости xu введем вектор $\bar{\Omega}(p, q)$ и χ – угол между $\bar{\Omega}$ и осью x ($p = \Omega \cos \chi, q = \Omega \sin \chi$). Обозначим знаком «'» производную по интегральному безразмерному времени τ :

$$\tau = \int_0^t \Omega(t) dt. \quad (2)$$

Тогда система (1) примет вид

$$\begin{aligned}\psi' \sin \theta &= \sin(\phi + \chi), \\ \theta' &= \cos(\phi + \chi), \\ \psi' \cos \theta &= \frac{r}{\Omega} - \phi'.\end{aligned}\quad (3)$$

Перемножим 1-е, 2-е уравнения и $\cos \theta$; тогда, учитывая 3-е уравнение, получим:

$$\left(\frac{r}{\Omega} - \phi' \right) \sin \theta \cos(\phi + \chi) = \sin(\phi + \chi) \cos \theta \cdot \theta'.$$

Прибавив к обеим частям $(\phi' + \chi') \sin \theta \cos(\phi + \chi)$ и используя 2-е уравнение, имеем:

$$[\sin \theta \sin(\phi + \chi)]' = \sigma(\tau) \sin \theta \cdot \theta',$$

где введена известная функция σ , зависящая от p, q, r (линейно зависящая от r):

$$\sigma(\tau) = \frac{r}{\Omega} + \chi', \quad \chi' = \frac{q'p - p'q}{\Omega^2}, \quad \Omega^2 = p^2 + q^2. \quad (4)$$

Учитывая равенство

$$\sin^2 \theta \sin^2 (\varphi + \chi) = 1 - \cos^2 \theta - [(\cos \theta)']^2$$

и вводя вместо θ функцию $s = \cos \theta$, получим для нее нелинейное уравнение 2-го порядка:

$$\left(\sqrt{1 - s^2 - s'^2} \right)' = -\sigma s', \quad |s| \leq 1, \quad (5)$$

или после дифференцирования и возведения в квадрат другое уравнение

$$s^2 + s'^2 + \left(\frac{s'' + s}{\sigma} \right)^2 = 1. \quad (6)$$

Дифференцируя его по τ , придем к линейному однородному уравнению 3-го порядка для функции $s = \cos \theta$:

$$s''' - \frac{\sigma'}{\sigma} s'' + (1 + \sigma^2) s' - \frac{\sigma'}{\sigma} s = 0, \quad (7)$$

которое можно записать в компактной форме:

$$\left(\frac{s'' + s}{\sigma} \right)' = -\sigma s'. \quad (8)$$

Уравнение (8) приводится к линейной системе $s' = \mathbf{C}s$, где $s(s_1, s_2, s_3)$, $s_1 = s$, $s_2 = s'$, $s_3 = \frac{s'' + s}{\sigma}$, с кососимметричной вырожденной

$$\text{матрицей } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \sigma \\ 0 & -\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью замены $s' = us$ из (7) получим уравнение 2-го порядка (разрешенное относительно старшей производной без радикалов):

$$u'' + P_1(u)u' + P_3(u) = 0, \quad (9)$$

где $P_1(u) = 3u - \frac{\sigma'}{\sigma}$, $P_3(u) = u^3 - \frac{\sigma'}{\sigma}u^2 + (1 + \sigma^2)u - \frac{\sigma'}{\sigma}$, $u = -\operatorname{tg} \theta \cdot \theta'$.

Уравнение (9) приводится к уравнению Риккати [3]:

$$u' = -u^2 + gu + h, \quad (10)$$

если его коэффициенты $g(\tau)$ и $h(\tau)$ удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned} h' + \left(g - \frac{\sigma'}{\sigma} \right)h - \frac{\sigma'}{\sigma} &= 0, \\ g' + g^2 - \frac{\sigma'}{\sigma}g + h + 1 + \sigma^2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (7) приводит к линейному однородному уравнению 2-го порядка для s и уравнению (10) ($g = \sigma'/\sigma$, $h = -1 - \sigma^2 - (\sigma'/\sigma)^2$), если $\sigma(\tau)$ удовлетворяет уравнению (интегрируемому с помощью замены $w = \ln|\sigma|$)

$$(\sigma'/\sigma)'' + 2\sigma\sigma' + \sigma'/\sigma = 0.$$

При постоянной $\sigma = \sigma_c$ из (7) имеем

$\cos\theta = s = s_* + a\sin(k\tau + \alpha)$, $k^2 = 1 + \sigma_c^2$, $\alpha^2 = k^{-2} - s_*^2/(k^2 - 1)$,
тогда из (4) $r(\tau)$ выражается через $p(\tau)$, $q(\tau)$; в случае $a = 0$ – регулярная прецессия ($\theta = \theta_0$).

Если из (7) найти для заданной $\sigma(\tau)$ решение $s(\tau)$, то получим $\theta(\tau)$; из 2-го уравнения (3) – $\phi(\tau)$, а из 3-го уравнения интегрированием по τ – $\psi(\tau)$. С помощью (2) найдем углы θ , ϕ , ψ как функции времени t , т. е. движение тела относительно неподвижного пространства.

Кинематические уравнения Эйлера для корабельных, самолетных и других углов Эйлера можно привести к виду (1).

Если заданы p , q , θ , то с учетом (2) из (6) можно найти σ , а из (4) – r ; тогда из динамических уравнений Эйлера находится момент внешних сил относительно неподвижной точки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris: Bibl. Gauthier-Villars, 1887. Т. I, chap. II.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

УДК 531+629

Ю. Н. Челноков

ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА – ИШЛИНСКОГО О ТЕЛЕСНОМ УГЛЕ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ НА НЕГОЛОННОМ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА *

Одной из замечательных теорем кинематики твердого тела, имеющей важные приложения в инерциальной навигации и гирокопической технике, является теорема о телесном угле. В геометрической постановке эта теорема впервые была сформулирована У. Р. Гамильтоном изначально как теорема о сложении любого числа конечных конических поворотов, а затем как теорема о сложении бесконечного числа конических инфинитези-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00347).

мальных поворотов. В кинематической постановке, отражающей важные геометрические свойства углового движения твердого тела при наличии неголономной связи, эта теорема была впервые сформулирована и строго доказана А. Ю. Ишлинским. Рассмотрим теорему о телесном угле в кинематической постановке А. Ю. Ишлинского и ее обобщение на общий случай неголономного пространственного движения твердого тела.

Пусть с твердым телом жестко связана система координат $x_0y_0z_0$. И пусть тело движется так, что проекция ω_z вектора угловой скорости тела на связанную с ним ось z во все времена движения остается равной нулю:

$$\omega_z(t) = 0. \quad (1)$$

Это равенство может рассматриваться как уравнение неголономной связи, наложенной на твердое тело, так как проекция ω_z угловой скорости твердого тела может быть выражена через углы Эйлера – Крылова, характеризующие угловое положение тела, и их первые производные по времени. Наличие этой связи обуславливает важные геометрические свойства соответствующего движения твердого тела, составляющие содержание теоремы о телесном угле.

Пусть ось z твердого тела совершает коническое движение, при котором одна из точек оси неподвижна, а какая-либо другая ее точка описывает на некоторой невращающейся сфере S с центром в первой точке какую-либо замкнутую сферическую кривую. Обозначим через F площадь области на сфере, ограниченную этой кривой. А. Ю. Ишлинским было доказано, что при возвращении оси z в исходное положение z_0 твердое тело вместе со связанный с ним системой координат $x_0y_0z_0$ в исходное положение $x_0y_0z_0$ не возвращается, а приходит в некоторое новое положение $x_1y_1z_1$, повернутое относительно системы координат $x_0y_0z_0$ вокруг оси $z_0(z)$ на угол χ , связанный с точностью до знака с величиной площади F простым соотношением $\chi = F / R^2$, в котором R – радиус сферы S .

Отношение, стоящее в правой части последнего равенства, является мерой телесного угла Ω , под которым видна упомянутая сферическая область из центра сферы S или, что то же самое, мерой телесного угла конуса, описываемого осью z тела в своем движении. Отсюда следует, что имеет место формула

$$\chi = \Omega, \quad (2)$$

определяющая поворот твердого тела вокруг его оси z в результате замкнутого углового движения этой оси. Эта формула является математической записью теоремы о телесном угле.

Теорема Гамильтона – Ишлинского о телесном угле и ее доказательство, предложенное А. Ю. Ишлинским, могут быть обобщены с помощью принципа перенесения Котельникова – Штуди на общий случай неголономного пространственного движения твердого тела.

Пусть твердое тело совершает такое пространственное движение относительно опорной системы координат $\xi\eta\zeta$, принимаемой за неподвижную, при котором дуальная ортогональная проекция U_z кинематического

винта U твердого тела на ось z связанной системы координат xyz во все время движения остается равной нулю:

$$U_z(t) = \omega_z(t) + sv_z(t) = 0, \quad s^2 = 0. \quad (3)$$

Здесь ω_z и v_z – проекции векторов угловой $\boldsymbol{\omega}$ и линейной \boldsymbol{v} скоростей твердого тела на связанную с ним ось z .

Аналогично равенству (1) равенство (3) может рассматриваться как уравнение неголономной связи, наложенной на твердое тело, так как проекция U_z кинематического винта твердого тела может быть выражена через дуальные углы Эйлера – Крылова, характеризующие ориентацию и местоположение тела в системе координат $\xi\eta\zeta$, и их первые производные по времени. Наличие этой связи обуславливает важные геометрические свойства соответствующего пространственного движения твердого тела, аналогичные рассмотренным свойствам углового движения тела и составляющие содержание теоремы о дуальном телесном угле.

Пусть ось z твердого тела при его движении, удовлетворяющем условию (3), описывает в пространстве линейчатую замкнутую поверхность. Тогда при совмещении оси z с прямой, на которой лежала эта ось в ее исходном положении, твердое тело вместе со связанной с ним системой координат xyz в исходное положение $x_0y_0z_0$ не возвращается, а приходит в некоторое новое положение $x_1y_1z_1$, повернутое относительно системы координат $x_0y_0z_0$ вокруг оси z_0 (z, z_1) на дуальный угол X , определяемый соотношением

$$X = \chi + s \chi^0 = T = \Omega + s \Omega^0, \quad s^2 = 0, \quad (4)$$

являющимся дуальным аналогом соотношения (2).

В этом равенстве χ – обычный, ранее введенный угол поворота тела вокруг связанной оси z , а χ^0 – алгебраическая величина поступательного перемещения тела вдоль этой оси; T – дуальный телесный угол «раздвинутого» конуса, описываемого осью z тела в своем движении (дуальный телесный угол линейчатой замкнутой поверхности, описываемой осью z тела); Ω как и прежде – обычный телесный угол.

Таким образом, отсутствие проекции кинематического винта твердого тела на какую-либо связанную с ним ось еще не гарантирует отсутствия конечного перемещения тела относительно этой оси после ее совмещения с прямой, на которой лежала эта ось.

Формула (4) является математической записью теоремы о дуальном телесном угле. Доказательство равенства (4) полностью аналогично доказательству А. Ю. Ишлинского равенства (2). Запишем основные уравнения, описывающие геометрические свойства пространственного движения твердого тела при наличии неголономной связи (3).

Обозначим через $\Psi = \psi + sv\psi^0$ и $\Phi = \phi + s\phi^0$ дуальные углы, характеризующие местоположение оси z твердого тела в системе координат $\xi\eta\zeta$. Эти углы являются дуальными аналогами обычных углов ψ, ϕ , характеризующих ориентацию оси z в системе координат $\xi\eta\zeta$. Введем далее вспомогательную подвижную систему координат enz , местоположение которой в

системе координат $\xi\eta\zeta$ характеризуется дуальными углами Ψ и Φ . Введем также дуальный угол $\Theta = \vartheta + s\vartheta^0$ между осями e и x или равный ему дуальный угол между осями n и y (т.е. дуальный угол собственного вращения твердого тела вокруг оси z). Этот угол является дуальным аналогом угла ϑ , характеризующего поворот тела вокруг оси z относительно системы координат enz .

Кинематический винт U описывает мгновенное винтовое движение твердого тела по отношению к неподвижной системе координат $\xi\eta\zeta$. Дуальная ортогональная проекция U_2 кинематического винта U на ось z связанный системы координат xyz представляется выражением $U_2 = d\Theta/dt + + \sin\Phi d\Psi/dt$. В рассматриваемом случае движения твердого тела, когда выполняется условие (3), из последнего выражения следует равенство $d\Theta/dt + \sin\Phi d\Psi/dt = 0$, являющееся аналитическим представлением (уравнением) неголономной связи, наложенной на пространственное движение твердого тела. Из этого равенства, в свою очередь, следует дуальное дифференциальное соотношение: $d\Theta = -\sin\Phi d\Psi$.

Дуальный угол, на который повернется относительно вспомогательной подвижной системы координат enz система координат xyz , связанная с твердым телом, при перемещении оси z из одного положения в другое, определяется в соответствии с последним соотношением формулой

$$\Theta_1 - \Theta_0 = \int_{\Psi_0, \Phi_0}^{\Psi_1, \Phi_1} \sin\Phi d\Psi, \quad (5)$$

где Θ_0 и Θ_1 – начальное и конечное значения дуального угла Θ между осями e и x ; Ψ_0 , Φ_0 и Ψ_1 , Φ_1 – соответственно начальные и конечные значения дуальных углов Ψ и Φ (дуальных полярных координат совместного начала систем xyz и enz).

Правая часть формулы (5) представляет собой криволинейный интеграл в плоскости (Ψ, Φ) дуальных переменных Ψ и Φ .

Пусть ось z твердого тела при его движении, удовлетворяющему условию (3), описывает в пространстве линейчатую замкнутую поверхность (совмещается в своем конечном положении с прямой, на которой лежала эта ось в своем начальном положении). Тогда, вводя для этого случая обозначение $X = \Theta_1 - \Theta_0$, получим, используя принцип перенесения Котельникова – Штуди, дуальные аналоги формул А. Ю. Ишлинского:

$$X = - \int \sin\Phi d\Psi = \iint \cos\Phi d\Phi d\Psi = T.$$

Выделяя в этих формулах главные и моментные части, получаем формулы А. Ю. Ишлинского (6) для угла χ , характеризующего изменение ориентации твердого тела в результате движения его оси z по линейчатой замкнутой поверхности, и формулы (7), (8) для величины χ^0 поступательного перемещения твердого тела вдоль его оси z :

$$\chi = - \int \sin\Phi d\Psi = \iint \cos\Phi d\Phi d\Psi = \Omega, \quad (6)$$

$$\chi^0 = - \int \phi^0 \cos\Phi d\Psi + \sin\phi^0 d\Psi^0, \quad (7)$$

$$\chi^0 = - \iint \phi^0 \sin\phi \, d\psi \, d\phi + \cos\phi \, (d\psi \, d\phi^0 + d\phi \, d\psi^0) = \Omega^0. \quad (8)$$

Таким образом, нахождение поступательного перемещения твердого тела вдоль связанной оси z в результате ее движения по линейчатой замкнутой поверхности сводится к вычислению криволинейного интеграла второго рода (7) или поверхностного интеграла (8). Отметим, что формула (8) может быть также получена из формулы (7) с помощью формул Стокса и Грина.

Среди важных приложений теоремы о дуальном телесном угле и полученных формул отметим задачи пространственной инерциальной навигации, а также задачи механики пространственных механизмов и роботов-манипуляторов, в особенности механизмов с винтовыми кинематическими парами, в которых непосредственно реализуются повороты на дуальные углы. В этих задачах полученные формулы могут быть использованы для оценки поступательных перемещений движущихся объектов и выходных звеньев механизмов и манипуляторов в случаях, когда они совершают описанные неголономные пространственные движения.

Другим важным примером являются задачи навигации и управления движением, в которых информация о кажущемся ускорении и кажущейся скорости движущегося объекта используется как для целей навигации, так и управления движением.

УДК 593.3

В. П. Черненко, Н. С. Анофрикова

УРАВНЕНИЕ ПОГРАНСЛОЯ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ В ОКРЕСТИНОСТИ ФРОНТА ВОЛНЫ С ДЛИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассмотрим тонкий вязкоупругий полубесконечный стержень цилиндрической формы. Пусть стержень подвергается ударному торцевому воздействию. Краевая задача, описывающая данный тип воздействия, имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left[\sigma(x,t) + \int_0^t K(t-t_*) \sigma(x,t_*) dt_* \right], \end{aligned} \quad (1)$$

с граничным условием

$$\sigma(0,t) = IH(t) \quad (2)$$

и начальными условиями

$$\sigma(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma(x,0)}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

где u – перемещение, σ – напряжение, x – продольная координата, t – время, ρ – плотность материала, I – амплитуда воздействия, E – мгновенный модуль упругости, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, $K(t - t_*)$ – разностное ядро ползучести Работнова, которое имеет вид [2]

$$K(t) = kt^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n/2}}{\Gamma[(n+1)/2]}, \quad (4)$$

где $\beta > 0$, $k > 0$ – параметры материала, $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функция.

Подставляя второе уравнение системы (1) в первое уравнение той же системы, получим следующее разрешающее уравнение относительно напряжения:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t K(t - t_*) \sigma(x, t_*) dt_* = 0. \quad (5)$$

В уравнении (5) перейдем к безразмерным переменным и безразмерному напряжению по формулам

$$x = c T_k \xi, \quad t = T_k \tau, \quad \sigma = E \sigma^*, \quad (6)$$

где $c = \sqrt{E/\rho}$ – мгновенная скорость, $T_k = 1/k^2$ – масштабный множитель, имеющий размерность времени. Получим разрешающее уравнение в следующем виде

$$\frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma^*}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_0^t K_*(\tau - \tau_*) \sigma(\xi, \tau_*) d\tau_* = 0, \quad (7)$$

$$K_*(\tau) = \tau^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_*)^n \tau^{n/2}}{\Gamma[(n+1)/2]}, \quad \beta_* = T_k^{1/2} \beta.$$

В дальнейшем для простоты опустим звездочки у безразмерных величин.

Переходя в уравнении (7) к изображениям по Лапласу по переменной τ , представляем изображение разностного ядра \bar{K} в виде ряда

$$\bar{K} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta^n} s^{n/2}, \quad (8)$$

после возвращения к функциям-оригиналам получим

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} - \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta^n} D^{n/2} \sigma \right] = 0, \quad (9)$$

где $k_c^2 = \beta/(\beta + 1)$, $D^{n/2}$ – оператор дробного дифференцирования [3].

Рассмотрим данную задачу при больших значениях времени, т.е. когда $\tau \gg 1$. Вводим масштабированные переменные в соответствии с характерным масштабным временем $T \gg 1$, т.е.

$$\tau = T\tau_T, \quad \xi = T\xi_T, \quad (10)$$

где τ_T и ξ_T – величины порядка единицы. Тогда разрешающее уравнение (9) относительно напряжения примет вид

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi_T^2} - \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau_T^2} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial \tau_T^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta^n} \frac{1}{T^{n/2}} D_T^{n/2} \sigma \right] = 0, \quad (11)$$

где D_T – оператор производной по переменной τ_T .

Для получения уравнения погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью введём в рассмотрение характеристические переменные

$$y = T^{1/3}(\tau_T - \xi_T/k_c), \quad \tau_1 = \tau_T. \quad (12)$$

Тогда уравнение (11) в характеристических переменных примет вид

$$2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial \tau_1} + \frac{1}{T^{1/3}} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau_1^2} + \frac{k_c^2}{\beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2}{T^{1/3}} \frac{\partial^2}{\partial y \partial \tau_1} + \frac{1}{T^{2/3}} \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} \right) \times \\ \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta^n} \frac{1}{T^{(n-1)/3}} \left(\frac{D_T}{T^{1/3}} \right)^{n/2} \sigma \right] = 0. \quad (13)$$

Оставляя в уравнении (13) члены порядка $O(1/T^{1/3})$, преобразуя асимптотически второстепенные члены с учётом соотношения между асимптотически главными, интегрируя полученные уравнения по y и возвращаясь к масштабированным переменным (10), получим следующее соотношение:

$$k_c \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_T} + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_T} - \frac{1}{2\beta(\beta+1)} \left(\frac{k_c}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_T} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_T} \right) \frac{1}{T^{1/2}} D_T^{1/2} \sigma + \frac{1}{2\beta^2(\beta+1)} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau_T} D_T \sigma = 0. \quad (14)$$

Возвращаясь в соотношении (14) к исходным переменным и записывая его без дробных производных, получим уравнение погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью:

$$k_c \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{1}{2\beta^2(\beta+1)} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} - \frac{k_c}{4\beta(\beta+1)\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{1}{(\tau - \tau_*)^{1/2}} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\tau_* - \\ - \frac{3}{4\beta(\beta+1)\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_0^\tau \frac{\sigma d\tau_*}{(\tau - \tau_*)^{1/2}} = 0. \quad (15)$$

Порядок уравнения (15) на единицу меньше порядка точного уравнения (7). Кроме того, вместо ядра Работнова (уравнение (7)) мы имеем более простое ядро Абеля (уравнение (15)).

Решая уравнение (15) с помощью интегрального преобразования Лапласа по переменной τ , получаем следующее выражение для напряжения:

$$\sigma = \frac{I}{E} \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{p} \exp \left[- \left(\left(\tau - \frac{\xi}{k_c} \right) p + B\xi p^2 \right) \right] \sin(A\xi p^{3/2}) dp \right], \quad (16)$$

$$A = \frac{1}{2\beta(\beta+1)k_c}, \quad B = \frac{4\beta+3}{8\beta^2(\beta+1)^2 k_c}.$$

Полученное решение (16) уравнения погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью (15) совпадает с асимптотикой решения точного уравнения, полученной в [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коссович Л.Ю., Сухоловская М.С. Решение задачи о нестационарных продольных волнах в тонком вязкоупругом стержне // Механика деформируемых сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 14. С. 93 – 98.
2. Работников Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1974. 338 с.
3. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems // Appl. Mech. Rev. 1997. Vol. 50, № 1. С. 16 – 18.

УДК 533.6.011

С. П. Шевырёв

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА ДАВЫДОВА НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТКЕ

В статье метод Давыдова численного решения сложных задач механики сплошных сред [1, 2] обобщается на случай произвольной сетки.

Плоский случай

Рассматриваются краевые задачи для системы уравнений Эйлера нестационарного невязкого газа [1, 2]. При численном решении методом Давыдова схема расчёта разбивается на три этапа, но сетка теперь треугольная, что позволяет адаптироваться к произвольному обтекаемому телу и реализовать на теле граничное условие непротекания.

Выпишем разностные схемы метода Давыдова для случая треугольных крупных частиц. Все вычисляемые газодинамические параметры (плотность, скорость, полная энергия, давление) относятся к геометрическим центрам треугольников.

Укороченные дифференциальные уравнения эйлерова этапа

$$\begin{cases} p \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ p \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ p \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial x} + \frac{\partial pv}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

дискретизируются на треугольной сетке. В частности, для членов с давлением имеем (применяется *теорема Грина* и *теорема о среднем* [3])

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \oint_{\Delta} pdy / \oint_{\Delta} xdy, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\oint_{\Delta} pdx / \oint_{\Delta} xdy, \quad \frac{\partial pu}{\partial x} + \frac{\partial pv}{\partial y} = [\oint_{\Delta} pudy - pvdx] / \oint_{\Delta} xdy.$$

Контурные интегралы при численных расчётах обходятся по сторонам треугольника против часовой стрелки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &\approx \frac{\sum_{j=1}^3 (p_{j+1} + p_j)(y_{j+1} - y_j)}{\sum_{j=1}^3 (x_{j+1} + x_j)(y_{j+1} - y_j)}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{-\sum_{j=1}^3 (p_{j+1} + p_j)(x_{j+1} - x_j)}{\sum_{j=1}^3 (x_{j+1} + x_j)(y_{j+1} - y_j)}, \\ \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} &\approx \\ \approx \frac{\sum_{j=1}^3 \{(p_{j+1}u_{j+1} + p_ju_j)(y_{j+1} - y_j) - (p_{j+1}v_{j+1} + p_jv_j)(x_{j+1} - x_j)\}}{\sum_{j=1}^3 (x_{j+1} + x_j)(y_{j+1} - y_j)}. \end{aligned}$$

Здесь $p_4 = p_1$, $x_4 = x_1$, $y_4 = y_1$; p_1, p_2, p_3 – значения давления в трёх соседних треугольниках; $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ – координаты центров этих треугольников.

Граница заменяется виртуальными ячейками, чтобы сохранить единую схему расчёта.

Величины с «волнами» определяются обычным образом [1, 2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_i^n = u_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} (\partial p / \partial x)_i^n, \\ \tilde{v}_i^n = v_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} (\partial p / \partial y)_i^n, \\ \tilde{E}_i^n = E_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} \left[(\partial(pu) / \partial x)_i^n + (\partial(pv) / \partial y)_i^n \right]. \end{array} \right. \quad (1)$$

Выпишем формулы для потоков массы через границы ячеек на *лагранжевом этапе*.

Выберем произвольную сторону треугольника, например, $(x_1, y_1) – (x_2, y_2)$. Выпишем формулу для потока массы через выбранную границу:

$$\Delta M_{K_{1,2}}^n = \rho_p^n \frac{\tilde{u}_{i(\text{норм})}^n + \tilde{u}_{k_{1,2}(\text{норм})}^n}{2} \Delta L((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \quad (2)$$

где $\Delta M_{K_{1,2}}^n$ – поток массы через сторону $(x_1, y_1) – (x_2, y_2)$; ρ_p^n – плотность в текущем треугольнике, если поток вытекает из него, и плотность в сосед-

нем через указанную сторону треугольнике, если поток втекает; $\tilde{u}_{i(\text{норм})}^n$ – нормальная составляющая вектора скорости для текущего треугольника; $\tilde{u}_{1,2(\text{норм})}^n$ – нормальная составляющая вектора скорости для соседнего треугольника; Δt – шаг по времени;

$$L((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \text{– длина стороны.}$$

На заключительном этапе

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \sum_{j=1}^3 \Delta M_j^n / S_i, \\ u_i^{n+1} = (\tilde{u}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^3 \Delta M_j^n \tilde{u}_p^n / S_i) / \rho_i^{n+1}, \\ v_i^{n+1} = (\tilde{v}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^3 \Delta M_j^n \tilde{v}_p^n / S_i) / \rho_i^{n+1}, \\ E_i^{n+1} = (\tilde{E}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^3 \Delta M_j^n \tilde{E}_p^n / S_i) / \rho_i^{n+1}, \end{array} \right. \quad (3)$$

где S_i – площадь текущего (i -го) треугольника; p – нижний индекс у переменных \tilde{u}_p^n , \tilde{v}_p^n , \tilde{E}_p^n , он равен номеру текущего треугольника, если поток вытекает из него через указанную сторону, в противном случае, этот индекс равен номеру соседнего треугольника с общей указанной стороной.

На теле ставится условие *непротекания*:

$$u_{\text{тр. (норм)}}^n = u_{\text{вирт. (норм)}}^n. \quad (4)$$

На внешних границах ставятся обычные условия «мягкого» сопряжения.

Таким образом, формулы (1), (2), (3), (4) представляют метод Давыдова на произвольной треугольной сетке.

Пространственный случай

Для четырёхгранной ячейки дифференциальные члены с давлением на эйлеровом этапе аппроксимируются с применением *формулы Гаусса – Остроградского* [3] и *теоремы о среднем*.

Формула Гаусса – Остроградского вдоль оси x имеет вид

$$\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = \iint_S p n_x dS.$$

Левую часть этого равенства можно приблизённо заменить на $\frac{\partial p}{\partial x} V_{\text{нуп}}$.

Интеграл в правой части для четырёхгранника распадается на четыре интеграла (по числу граней):

$$\iint_S p n_x dS = \iint_{S_1} p n_x dS + \iint_{S_2} p n_x dS + \iint_{S_3} p n_x dS + \iint_{S_4} p n_x dS.$$

Итак,

для $\frac{\partial p}{\partial x}$ имеем $\iint_S p n_x dS \approx \sum_{i=1}^4 p_i (n_x)_i S_i$; для $\frac{\partial p}{\partial y}$: $\iint_S p n_y dS \approx \sum_{i=1}^4 p_i (n_y)_i S_i$;

для $\frac{\partial p}{\partial z}$: $\iint_S p n_z dS \approx \sum_{i=1}^4 p_i (n_z)_i S_i$;

для $\frac{\partial pu}{\partial x} + \frac{\partial pv}{\partial y} + \frac{\partial pw}{\partial z}$: $\iint_S [(pu)n_x + (pv)n_y + (pw)n_z] dS \approx$

$$\approx \sum_{i=1}^4 [(pu)_i (n_x)_i S_i + (pv)_i (n_y)_i S_i + (pw)_i (n_z)_i S_i],$$

где S_i – площадь i -й грани четырёхгранника; n_x, n_y, n_z – проекции внешней нормали к грани на оси x, y, z соответственно; p_i, u_i, v_i, w_i – давление и компоненты вектора скорости в соседнем через i -ю грань четырёхграннике.

Величины с «волнами» для пространственного случая определяются для эйлерова этапа из системы (1) с добавлением ещё одной компоненты для вектора скорости:

$$\begin{aligned}\tilde{w}_i^n &= w_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} (\partial p / \partial z)_i^n, \\ \tilde{E}_i^n &= E_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} [(\partial pu / \partial x)_i^n + (\partial pv / \partial y)_i^n + (\partial pw / \partial z)_i^n].\end{aligned}$$

На лагранжевом этапе поток массы через границу ячеек, например находящуюся между точками (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , вычисляется по формуле

$$\Delta M_{K_{1,2,3}}^n = \rho_q^n \times \frac{\tilde{u}_{i(\text{норм})}^n + \tilde{u}_{k_{1,2,3}(\text{норм})}^n}{2} \times \Delta t \times S((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)),$$

где обозначения те же, что и в двумерном случае,

$S((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3))$ – площадь грани.

Формулы заключительного этапа имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \sum_{j=1}^4 \Delta M_j / V_i, \\ u_i^{n+1} &= (\tilde{u}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^4 \Delta M_j^n \tilde{u}_q^n / V_i) / \rho_i^{n+1}, \\ v_i^{n+1} &= (\tilde{v}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^4 \Delta M_j^n \tilde{v}_q^n / V_i) / \rho_i^{n+1},\end{aligned}$$

$$w_i^{n+1} = (\tilde{W}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^4 \Delta M_j^n \tilde{W}_q^n / V_i) / \rho_i^{n+1},$$

$$E_i^{n+1} = (\tilde{E}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^4 \Delta M_j^n \tilde{E}_q^n / V_i) / \rho_i^{n+1},$$

где V_i – объём текущего четырёхгранника; q равно номеру текущего четырёхгранника, если поток вытекает из него через указанную грань, в противном случае, q равно номеру соседнего четырёхгранника.

Границные условия аналогичны двумерному случаю.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математическая энциклопедия: В 5 т. М.: Сов. энцикл., 1982. Т. 3.
2. Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1988.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Наука, 1970. Т. 3.

УДК 533.6.011:532.529

Г. П. Шиндяпин, Е. Н. Гамаюнова

О ФИЗИЧЕСКОЙ АДЕКВАТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОТРАЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ ПАРАДОКСА НЕЙМАНА

1. Разработаны [1, 2] оригинальные аналитические модели нерегулярных отражений относительно слабых ударных волн (УВ) в газах и газожидкостных пузырьковых средах, описывающих как невырожденный режим (модель C'' с отраженной УВ) простого маховского отражения SMR, так и вырожденный режим (модель B'' с вырождением отраженной УВ в линию слабого разрыва) Неймановского маховского отражения NMR.

Для невырожденного режима характерны неклассические условия за тройной точкой A (для частиц, прошедших через падающий AN и отраженный AB фронты и через фронт Maxa AS): при равенстве давлений или продольных скоростей $\mu^+ = \mu^-$ имеет место непараллельность потока, характеризуемая углом $\Delta\delta$ и разрывом $\Delta\nu = \nu^+ - \nu^-$ поперечной составляющей скорости ν . Для вырожденного режима характерны классические (Неймановские) условия: равенства давлений или направлений скоростей $\mu^+ = \mu^-$, $\nu^+ = \nu^-$ за тройной точкой.

Целью настоящей работы является анализ физической адекватности разработанных аналитических моделей путем сравнения аналитических решений модельных уравнений (моделей C'' , B'') с известными результатами экспериментальных [3, 4, 5] и численных [5] исследований.

2. Разработка достаточно простых аналитических моделей, позволяющих аналитически описывать основные параметры течений и возникающих ударно-волновых структур при различных режимах нерегулярных взаимодействий, опирается на общий асимптотический анализ и свойства решений краевых задач нелинейных взаимодействий. Следя [1, 2] опишем течения в областях нелинейных взаимодействий (коротких волн) в зависимости от исходного параметра

$$\alpha^v = \operatorname{tg} \alpha / \bar{\epsilon}^{1/2}, \quad \bar{\epsilon} = P_{10} R_0(\gamma)$$

($P_{10} = (p_1 - p_0) / (\rho_0 c_0^2)$, α – относительная интенсивность и угол наклона падающей волны, $R_0(\gamma)$ – параметр, характеризующий влияние газосодержания среды γ), используя класс точных параметрических решений Заславского – Гриба системы уравнений коротких волн [1] (q – параметр; μ , v – компоненты скорости; δ , Y – координаты) вида

$$\mu = \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_0(q); \quad v = \psi_3(q)Y^3 + \psi_1(q)Y; \quad \delta = qY^2 + \chi_0(q), \quad (1)$$

который позволяет точно удовлетворить условиям динамической совместности на фронте УВ Maxa AS $\delta = \delta^*(Y)$ при $q = q_0 = \text{const}$

$$(\delta^*/dY)^2 = 2\delta - \mu, \quad \mu(\delta^*/dY) = v. \quad (2)$$

Запись с помощью решений (1) условий (2) приводит к системе условий для значений функций $\varphi_2(q_0) \dots \chi_0(q_0)$

$$\begin{aligned} \varphi_2(q_0) &= 2q_0(1 - q_0), \quad \varphi_0(q_0) = 2\chi_0(q_0) - \chi_1^2(q_0), \quad \psi_3(q_0) = -4q_0^2(1 - 2q_0), \\ \psi_1(q_0) &= -4q_0\chi_0(q_0), \quad \chi_0(q_0) = \delta_A + q_0 Y_A^2 - CY_A, \quad q_0 = C/2Y_A. \end{aligned} \quad (3)$$

Условия динамической совместности на фронтах УВ (AK, AB, AS) в тройной точке A при $Y = Y_A$, $\delta = \delta_A$ можно записать, вводя обозначения A_1 , B , C (α , β , γ – углы наклона УВ) в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha^v + Y_A, \quad \delta_A = (1 + A_1^2)/2, \quad \bar{\epsilon} = P_{10} R_0(\gamma), \quad v_A^+ = -A_1 + B(\mu_A - 1), \\ B &= \beta^v - Y_A, \quad B = (A_1^2 - \mu_A)^{1/2}, \quad \beta^v = \operatorname{tg} \beta / \bar{\epsilon}^{1/2}, \quad v_A^- = -c\mu_A, \\ C &= \gamma^v + Y_A, \quad C = (1 + B^2)^{1/2}, \quad \gamma^v = \operatorname{tg} \gamma / \bar{\epsilon}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Полученные формулы (3), (4) дополняются [1, 2] соотношениями, выражающими принцип притока массы

$$\begin{aligned} Y_A(3\mu^* - 2\mu_c) &= -v_A^+, \quad \mu_c = 1, \\ \mu^* &= (1 + 2A_1^2)/3 + 2/9\sqrt{2 + A_1^2}\left[\sqrt{2 + A_1^2} - \sqrt{3}(A_1 - \alpha^v)\right] \end{aligned} \quad (5)$$

и принцип экстремального поворота потока при прохождении через фронт AB отраженной УВ в точке A

$$\mu_A = (1 + 2A_1^2)/3. \quad (6)$$

Таким образом, в качестве общей аналитической модели имеем систему 11 уравнений (4) – (6) для определения 11 основных параметров.

3. Анализ общей аналитической модели показывает, что можно выразить все искомые параметры через параметр A_1

$$\begin{aligned}\delta_A &= (1 + A_1^2)/2; \quad Y_A = (A_1 - \alpha^v); \quad \mu_A = (1 + 2A_1^2)/3; \\ v_A^- &= -\mu_A / \sqrt{3}(2 + A_1^2)^{1/2}; \quad v_A^+ = -A_1 + 2/(3\sqrt{3})(A_1^2 - 1)^{3/2}; \\ \beta^v &= Y_A + 1/\sqrt{3}(A_1^2 - 1)^{1/2}; \quad \gamma^v = -Y_A + 1/\sqrt{3}(2 + A_1^2)^{1/2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Для определения зависимости A_1 от α^v можно использовать уравнение притока массы (5), которое в новых переменных A, z

$$z = (2 + A_1^2)/3, \quad A = 2A_1 - 2\alpha^v \quad (8)$$

примет вид

$$A[6z^2 - 5 + (2z - A)z] = 2\sqrt{3z^2 - 2} - 2(z^2 - 1)^{3/2}. \quad (9)$$

Решение (9) позволяет рассчитать z (при фиксированном A) и согласно (8) A_1, α^v и согласно (7) – остальные параметры.

В общем случае развитого нерегулярного отражения SMR (модель C''), решая относительно A , получим ($0.5 \leq \alpha^v \leq 2.0$)

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2z} \left[8z^2 - 5 - \sqrt{(8z^2 - 5) - 8z(3z^2 - 2)^{1/2} + 16z(z^2 - 1)^{3/2}} \right], \\ \alpha^v &= \sqrt{3z^2 - 2} - A/2, \quad q_0 = \frac{z}{2(\sqrt{3z^2 - 2} - \alpha^v)}, \quad 1 \leq z \leq \sqrt{2}.\end{aligned}\quad (10)$$

В случае вырожденного нерегулярного отражения NMR (модель B'') ($z = A_1 = 1$) получим

$$A = 2(1 - \alpha^v), \quad Y_A = 1 - \alpha^v, \quad q_0 = \frac{1}{2(1 - \alpha^v)}, \quad 0 \leq \alpha^v \leq 0.5. \quad (11)$$

Полученные аналитические результаты (10), (11); (7), (8) позволяют рассчитать основные параметры, характеризующие УВ структуры и течения (распределение параметров μ, v вдоль фронта Маха при $q = q_0$ и пр.) при различных режимах SMR, NMR нерегулярных отражений УВ.

4. На рис. 1 приведено сравнение полученных аналитических результатов (TKB) для угла $\delta = P_{10}^{3/2} R_0^{1/2} (\gamma(v_A^+ - v_A^-))$, характеризующего непараллельность потока за тройной точкой, с экспериментальными данными T. Adachi, T. Suzuki, S. Kobayashi [3] в широком диапазоне углов γ_i при различных интенсивностях УВ ($M_S = 1.1; M_S = 1.2$). Теоретические результаты для относительно слабых УВ хорошо согласуются с экспериментом и правильно предсказывают возникновение особенности ($\Delta v \neq 0$) в тройной точке.

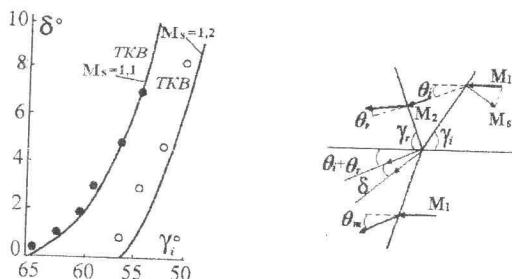


Рис. 1

На рис. 2 приведено сравнение полученных аналитических результатов (ТКВ) для углов ω' , ω_0 , характеризующих наклоны падающих АК и отраженных АВ УВ в точке A , с экспериментальными данными L. F. Hender-
son, A. Siegenthaler [4]. Нанесены также данные расчета по 2-ударной
(2T) и 3-ударной (3T) локальной теории Неймана. Сравнение показывает,
что полученные аналитические результаты достаточно надежно соответст-
вуют экспериментальным данным при отражениях в условиях возникнове-
ния парадокса Неймана.

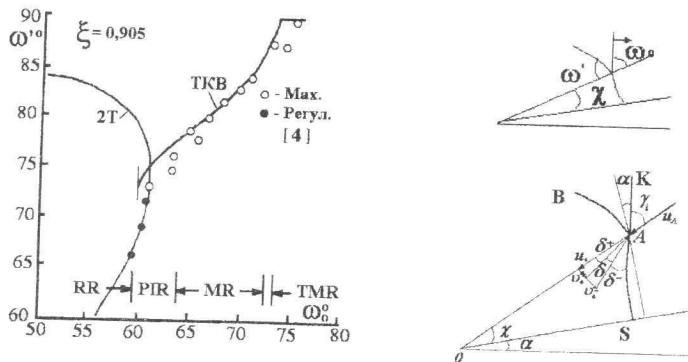


Рис. 2

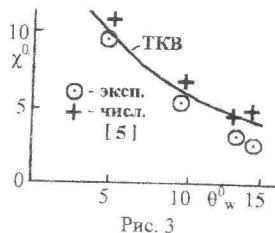


Рис. 3

На рис. 3 приведено сравнение полу-
ченной аналитической зависимости (ТКВ)
для угла χ , характеризующего отход трой-
ной точки от стенки, при различных углах
отражения ($\theta_w = \alpha$) с экспериментальными
и численными (решение краевой задачи от-
ражения) результатами P. Colella, L. Hender-
son [5].

Сравнение показывает, что результаты аналитической теории (ТКВ) достаточно точно описывают поведение угла отхода тройной точки.

В целом приведенные результаты [1, 2] позволяют считать, что развитые аналитические модели невырожденного нерегулярного отражения (модель C'') и вырожденного нерегулярного отражения (модель B'') физически адекватно описывают процессы нелинейных отражений для относительно слабых УВ, в условиях возникновения парадокса Неймана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндягин Г. П. Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. МЖГ. 1996. №2. С. 185 – 190.
2. Шиндягин Г. П., Гамаюнова Е. Н. Аналитическое исследование общего случая нерегулярного взаимодействия и отражения ударных волн // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2002. Вып. 4. С. 225 – 229.
3. Adachi T., Suzuki T., Kobayashi S. Mach reflection of a weak Shock waves // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng B. 1994. Vol. 60, № 575. P. 2281 – 2286.
4. Henderson L. F., Siegenthaler A. Experiments on the diffraction of weak blast waves: the von Neumann paradox // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1980. Vol. 369, № 1739. P. 537 – 555.
5. Colella P., Henderson L. F. The von Neumann paradox for the diffraction off weak shock waves // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 213. P. 71 – 94.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АКИМОВА С. А. Об определимости упорядоченных автоматов полугруппами их входных сигналов	3
БЕЛГОРОДСКИЙ А. В. О модификации однофакторной модели доходности активов в условиях интернациональной диверсификации вложения	5
БРЕДИХИН Д. А. О диофантовых редуктах алгебр отношения Тарского	9
БУКУШЕВА А. В., ГАЛАЕВ С. В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении неголономному многообразию	12
БУТЕРИН С. А. Единственность восстановления оператора свёртки по спектру его негладкого одномерного возмущения	14
ВАСЮКОВ Р. Р. Периодические последовательности канонических моментов	17
ВОДОЛАЗОВ А. М., КОРОЛЕВА О. А. Алгебра целозначных функций квазиразложимых торов	20
ВОЛОСИВЕЦ С. С., АГАФОНОВА Н. Ю. О преобразовании рядов Фурье по мультиплексиальным системам функций классов Орлича	23
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. Об оценках числа крайних точек множества решений задачи приближения многозначного отображения полиномом	25
ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. Условие метризуемости аффинной связности в неголономном многообразии X_3^2	28
ГОРБУНОВ О. Б. Единственность решения обратной задачи для пучков дифференциальных операторов с неинтегрируемой особенностью внутри интервала	32
ГРОМОВА Л. Л. Об интегральных средних для аналитических функций	35
ГУДОШНИКОВА Е. В. Приближение функций многих переменных линейными комбинациями операторов	39
ДУДОВ С. И. О приближении выпуклого компакта шаром фиксированного радиуса	42
ДУДОВА А. С. Об аппроксимации выпуклого компакта многогранником	45
ИГНАТЬЕВ М. Ю. О решении одной смешанной задачи для уравнения КdФ на полуоси с неоднородными краевыми условиями	47
КЛЯЕВА И. А. Гомология толерантных сфер	50
КОЖЕВНИКОВА А. В. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка на всем отрезке $[0,1]$	53
КОРНЕВ В. В. Кватернионное решение обратной задачи кинематики твердого тела	56
КУЗНЕЦОВА И. А. Об одной игровой модели переговоров	58
КУРДЮМОВ В. П., ХРОМОВ А. П. О базисах Рисса из собственных и присоединённых функций дифференциально-разностного оператора с интегральным краевым условием	61
ЛУКОМСКИЙ С. Ф. Сходимость рядов Фурье – Уолша в пространствах Орлича, близких к L_∞^*	63

ЛУКОНИНА А. С. О сходимости разложений по собственным и присоединённым функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием	67
ЛУКЬЯНЕНКО О. А. О константах Лебега для системы Виленкина	70
МАЗУР Т. В. Численный метод решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на полуоси	73
МОЛОДЕНКОВА И. Д. Оценки точности приближения 2π -периодических функций операторами, сохраняющими тригонометрические сплайны	76
МОЛЧАНОВ В. А. Внутренние эндоморфизмы полугруппы нестандартных слов и нестандартные динамики	79
ПАПИЧОВА Е. Ф. О контекстуальном анализе на контексте с многомерными атрибутами	82
НОВИКОВ В. В. Об интерполяционном аналоге одной теоремы Д. Е. Меньшова ..	85
ОРЕЛ А. А. Моделирование бизнес-процессов с помощью сетей Петри	89
ПАСЕЧНИК М. В. Исходы, допустимые для семейства коалиций в игре с квазиупорядоченными исходами	93
ПОПЛАВСКИЙ В. Б. О равенстве обратных булевых матриц симметрической разности ориентированных присоединенных матриц	95
ПОПЛАВСКИЙ Д. В. О разрешимости начально-краевой задачи для системы Боявленского	98
РАЗУМОВСКАЯ Е. В., ТИМОФЕЕВ В. Г. О функциях, полигармонических в слое	101
РОЗЕН В. В. Об условиях единственности обобщённого критерия в задачах многокритериальной оптимизации	105
РЫХЛОВ В. С. О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов	107
САХНО Л. В. Теорема эквивалентного вложения для весового класса С. Л. Соболева $W_{p,\sigma}^l$	110
СОВЕТНИКОВА С. Ю. О скорости аппроксимации решения одного интегрального уравнения первого рода	112
СОРИНА Е. В. О приближении многозначного отображения полиномиальной полосой фиксированной ширины	114
СОРОКИН Г. А. Построение аналитической функции по значениям её последовательных производных	117
ТЕРЕХИН П. А. Представление посредством инвариантных относительно сдвига подпространств в $L_2(\mathbf{R}^d)$	120
ТРЫНИН А. Ю. Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам	124
ХАЛОВА В. А. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях	127
ХРОМОВ А. П. Разложение по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования	130
ХРОМОВА Г. В. О модулях непрерывности неограниченных операторов и оптимальности методов приближенного решения уравнений первого рода	133
ШАЛТЫКО Д. Г. О сходимости спектральных разложений одной трехточечной краевой задачи пятого порядка	135
ШЕВЦОВ В. И. Об одном специальном квазианалитическом классе функций	138
ШИПКОВА Е. В. Регуляризация уравнения Абеля в пространстве $C^1[0,1]$	141
ЮРКО В. А. Об обратной спектральной задаче на графах	144

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АГАФОНОВА Н. Ю. Интегральные уравнения для пространственной задачи термоупругости для однородного изотропного тела вращения	147
АНТОНЕНКО Э. В., ХЛОПЦЕВА Н. С. Математические модели потери устойчивости тонкостенных элементов цилиндрических оболочек	150
АФАНАСЬЕВА Ю. В., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата	153
БАХТИН К. Г., ОЛЬШАНСКИЙ В. Ю. Оценка конвективных членов в одной модели терморасщепления графита	155
ГРЕБЕННИКОВА А. А. Напряженно-деформированное состояние вязкоупругой панели с жестко защемленными краями	159
ГУЛЯЕВ Ю. П., СЕРГЕЕВА А. В. Способ определения продольной силы в растянутых эластичных структурах	161
ГУРЬЯНОВ В. В., БУСЛАЕВА М. А. Спектры продольных волн Римана в средах со степенной нелинейностью	165
ИВАНОВ Д. В. Численное исследование движения крови в верхней части аорты...	168
КОВЫРЯГИН М. А., КЛИМОВ А. В. Явная схема исследования динамического поведения призматических стержней	171
КОНОВАЛОВ Д. Н., СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Ударный переход слабосверхзвуковой однородной струи в дозвуковую вблизи ее свободной границы	174
КОПНИНА В. И., ДЕМИНА М. В. Изгиб круглой плиты под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по кругу меньшего радиуса	176
КОПНИНА В. И., ЩЕРАБКОВ А. С. Изгиб эллиптической плиты с отверстием ...	179
МАТУТИН А. А. Аналитическое и численное исследование процессов рефракции ударных волн	183
НЕМЦОВА Е. О., ЧЕРНОВ И. А. Получение основных автомodelьных трансзвуковых решений параметрическим методом	186
ОЛЬШАНСКИЙ В. Ю., МИХАЙЛОВ В. Ю., СЕРЕБРЯКОВ А. В. Расчет движения границ раздела компонент в одной модели тепломассопереноса при термическом расщеплении графита	189
САПУНКОВ Я. Г. Оптимальное управление движением космического аппарата в нецентральном поле гравитации Земли	192
СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с не-подвижной точкой	195
ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Теорема Гамильтона – Ишлинского о телесном угле и ее обобщение на неголономное пространственное движение твердого тела	198
ЧЕРНЕНКО В. П., АНОФРИКОВА Н. С. Уравнение погранслоя для вязкоупругого стержня в окрестности фронта волны с длительной скоростью	202
ШЕВЫРЁВ С. П. Разностные схемы метода Давыдова на произвольной сетке	205
ШИНДЯПИН Г. П., ГАМАЮНОВА Е. Н. О физической адекватности аналитических моделей нерегулярных отражений относительно слабых ударных волн в условиях действия парадокса Неймана	209