

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2003

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат.
М34 ун-та, 2003. – Вып. 5. – 200 с.: ил.

Настоящий сборник содержит работы специалистов Саратовского государственного университета в области математики и механики. Представлены исследования по алгебре, геометрии, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории игр, теории приближений, механике деформируемого твёрдого тела, механике жидкости и газа и приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук *Д. В. Прохоров* (отв. редактор),
доктор физ.-мат. наук *Л. Ю. Коссович* (зам. отв. редактора),
доктор физ.-мат. наук *А. П. Хромов*,
доктор физ.-мат. наук *Г. П. Шиндягин*,
кандидат физ.-мат. наук *В. В. Мозжилкин*,
кандидат физ.-мат. наук *С. П. Сидоров* (отв. секретарь)

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1609-4751

© Саратовский государственный
университет, 2003

УДК 519.4

С. А. Акимова

КОНКРЕТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛУГРУППЫ
ЭНДОМОРФИЗМОВ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ*

Начало изучения полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств было положено в работе Л. М. Глускина [1]. В настоящей статье для таких полугрупп решается задача о конкретной характеристике [2].

Идея решения задачи заключается в том, что для полугруппы преобразований S строятся канонические отношения и с их помощью формулируются необходимые и достаточные условия, при которых S является полугруппой эндоморфизмов некоторого упорядоченного множества.

Пусть ρ – произвольное бинарное отношение на множестве X и Δ_x – тождественное бинарное отношение на множестве X .

Отношением порядка (сокращенно *порядком*) будем называть транзитивное рефлексивное антисимметричное бинарное отношение. Порядок Δ_x на множестве X назовем *тривиальным*.

Пусть $F(X)$ – полугруппа всех преобразований множества X , и пусть на X задан порядок ρ .

Преобразование $f \in F(X)$, удовлетворяющее условию

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \rho \quad (\text{где } (x, y) \in X),$$

называется *эндоморфизмом отношения порядка* ρ . Множество таких эндоморфизмов с операцией композиции образуют полугруппу, которую обозначим $\text{End}(X, \rho)$.

Задачу о конкретной характеристике полугруппы эндоморфизмов упорядоченного множества можно сформулировать следующим образом: для полугруппы преобразований S найти необходимые и достаточные условия, при которых на множестве X существует нетривиальный порядок ρ такой, что полугруппа S совпадает с полугруппой эндоморфизмов $\text{End}(X, \rho)$.

Для полугруппы преобразований S введем следующие обозначения:

* Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 99-1224).

для преобразования $f \in S$ символ $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_f$ будет обозначать, что $f(u) = x, f(v) = y$ или сокращенно $f^2(u, v) = (x, y)$;

символ $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$ будет обозначать, что $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_f$ для некоторого преобразования $f \in S$;

символ $\begin{pmatrix} u & \hat{v} \\ x & y \end{pmatrix}_f$ будет обозначать, что для любого $f \in S$ выполняется $f^2(u, v) \neq (x, y)$, т.е. $f(u) \neq x$ либо $f(v) \neq y$.

Композицию преобразований f, g будем обозначать fg .

Определим для полугруппы S канонические отношения по формулам

$$P = \{(x, y) \in X^2 \setminus \Delta_X : (\forall u, v \in X) \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v & u \\ x & y \end{pmatrix}\}, \quad Q = X^2 \setminus P.$$

Полугруппу S будем называть 2-ограниченно замкнутой, если для любого $f \in F(X)$ из условия, что для любых $x, y \in X$ существует преобразование $\varphi \in S$, для которого ограничение $\varphi|_{\{x, y\}}$ совпадает с ограничением $f|_{\{x, y\}}$, следует $f \in S$. Другими словами, полугруппа S является 2-ограниченно замкнутой, если она содержит все такие преобразования φ множества X , ограничения которых на двух элементных подмножествах X совпадают с ограничениями преобразований f из S .

ТЕОРЕМА. Полугруппа S преобразований множества X в том и только в том случае является полугруппой эндоморфизмов некоторого нетривиального порядка на множестве X , если S является 2-ограниченно замкнутой полугруппой, и ее канонические отношения удовлетворяют следующим аксиомам:

(A1) если $(x, y), (u, v) \in Q$ и $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} x & y \\ v & u \end{pmatrix}$;

(A2) если x, y, u, v ($u \neq v$) – любые элементы из X и

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ v & u \end{pmatrix},$$

то $(x, y) \in P$;

(A3) если x, y, u, v, w – любые элементы из X , для которых

$$(x, y), (u, v), (v, w) \in Q \text{ и } \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ v & w \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & w \end{pmatrix};$$

(A4) для любых $(x, y) \in Q$ выполняется

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полученный результат даёт алгоритм решения задачи о том, какая полугруппа преобразований конечного множества является полугруппой эндоморфизмов упорядоченного множества. С другой стороны, эти результаты можно применять в изучении абстрактных и элементарных свойств полугрупп эндоморфизмов упорядоченных множеств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Глускин Л.М. Полугруппы изотонных преобразований // УМН. 1961. Т. 16, вып. 5. С. 157 – 162.
2. Уlam С. Нерешённые математические задачи. М.: Наука, 1964.

УДК 519.864.3

А. В. Белгородский, С. И. Дудов

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИРОВАННОГО ЗАПАСА КАЧЕСТВА СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ РИСКОВЫХ БУМАГ*

1. Одна из возможных формализаций задачи формирования оптимального портфеля ценных рисковых бумаг имеет следующий вид:

$$u(x) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1. \quad (1)$$

Здесь x_i – доля вложений капитала инвестора в i -й вид ценных бумаг, а $u(x)$ – значение некоторой функции полезности портфеля со структурой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Предположим, мы решили задачу (1) и x^* – структура оптимального портфеля. Но по своей практической реализации процесс формирования портфеля по уже известной оптимальной структуре не является тривиальным. Возможны отклонения от запланированной структуры из-за различных факторов объективного характера, случайных причин, форсмажорных обстоятельств.

Пусть число $u_0 < u(x^*)$ выражает допустимый уровень полезности портфеля. Обозначим через

$$D = \left\{ x \in R^n : u(x) \geq u_0 \right\}, \quad S = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

Тогда $D_0 = D \cap S$ – множество векторов, выражающих структуру портфеля, которая устраивает инвестора в смысле значения функции полезности. Рассмотрим задачу

$$\phi(x) \equiv \min_{y \in \Omega \cap S} \|x - y\| \rightarrow \max_{x \in D_0}, \quad (2)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма, а $\Omega = \overline{R^n / D}$.

Если $x \in D_0$, то сечение шара радиуса $\phi(x)$ с центром в точке x гиперплоскостью S содержится в D_0 . Поэтому если при формировании портфеля по структуре x инвестор допустит отклонения

$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)^T$ такие, что $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0$ и при этом $\|\Delta x\| \leq \phi(x)$, то его

портфель будет удовлетворять допустимому уровню полезности: $u(x + \Delta x) \geq u_0$. Чем больше значение $\phi(x)$, которое можно назвать гарантированным запасом качества, тем больше возможностей для “маневрирования” у инвестора при формировании портфеля. В этом и заключается смысл решения задачи (2).

2. Будем далее считать, что функция полезности $u(x)$ является конечной и вогнутой функцией на всем пространстве R^n . В частности [1], она может иметь вид $u(x) = m^T x - \lambda x^T V x$, где $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$ – вектор эффективностей вложений в каждый вид ценных бумаг, $V = (V_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, – положительно определённая матрица ковариаций случайных величин отклонения эффективностей ценных рисковых бумаг от ожидаемых, а λ – некоторое положительное число, являющееся показателем относительной важности доходности и рисковости портфеля.

Обозначим через riD_0 относительную внутренность множества D_0 .

ТЕОРЕМА 1. Функция $\phi(x)$ является вогнутой на множестве D_0 , а её супердифференциал в точках $x \in riD_0$ можно выразить формулой

$$\overline{\partial \phi}(x) = co \left\{ \frac{x - y}{\|x - y\|} : y \in Q(x) \right\}, \quad (3)$$

где $Q(x) = \{y \in \Omega \cap S : \phi(x) = \|x - y\|\}$, а coA – выпуклая оболочка множества A .

Доказательство. Доказательство вогнутости функции $\phi(x)$ можно дать, фактически повторяя соответствующее доказательство вогнутости функции расстояния в несколько другой ситуации из работы [2].

Пусть $x \in riD_0$. Тогда $x \notin Q(x)$ и функция $F(x, y) = \|x - y\|$ дифференцируема, в смысле Фреше, по x для любого $y \in Q(x)$.

Теперь, используя дифференциальные свойства функции маргинального вида [3, с. 233] и известный факт из выпуклого анализа [4, с. 27], получаем

$$\begin{aligned}\varphi'(x, g) &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [\varphi(x + \alpha g) - \varphi(x)] = \min_{y \in Q(x)} \left\langle \frac{dF(x, y)}{dx}, g \right\rangle = \min_{y \in Q(x)} \left\langle \frac{x-y}{\|x-y\|}, g \right\rangle = \\ &= \min_{v \in \left\{ \frac{x-y}{\|x-y\|} : y \in Q(x) \right\}} \langle v, g \rangle = \min_{v \in co \left\{ \frac{x-y}{\|x-y\|} : y \in Q(x) \right\}} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in R^n.\end{aligned}\quad (4)$$

С другой стороны, основное дифференциальное свойство супердифференциала вогнутой функции [4, с. 55] заключается в том, что

$$\varphi'(x, g) = \min_{v \in \partial \varphi(x)} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in R^n. \quad (5)$$

Из (4) и (5) в соответствии с известными фактами из выпуклого анализа следует формула (2). \square

Получим необходимое и достаточное условие решения задачи (2).

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы точка $x^0 \in riD_0$ была решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы $0_n \in \overline{\partial \varphi}(x^0)$.

Доказательство. Обозначим через $K(x^0, D_0)$ конус возможных направлений множества D_0 в точке x^0 , а $K^+(x^0, D_0)$ – сопряжённый к нему конус. Как известно [5, с. 142], необходимым и достаточным условием максимума вогнутой функции $\varphi(x)$ на выпуклом множестве D является соотношение

$$\{-\overline{\partial \varphi}(x_0)\} \cap K^+(x_0, D) \neq \emptyset. \quad (6)$$

Так как $x^0 \in riD_0$, то $K(x^0, D_0) = K(x^0, S)$. Поскольку гиперплоскость S можно записать в виде $S = \{x \in R^n : f(x) = 0\}$, где $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i - 1$, то, используя наработанную в [5, с. 188 – 190] технику вычисления конусов возможных направлений и сопряжённых к ним, нетрудно доказать, что

$$K^+(x^0, D_0) = K^+(x_0, S) = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in R^n : w_i = w_j, i, j = \overline{1, n}\}. \quad (7)$$

Поскольку $x^0 \in S$ и $Q(x^0) \subset S$, то $x^0 - y \in S_0 \equiv \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$,

$\forall y \in Q(x^0)$. Следовательно, в силу формулы (3), и $\overline{\partial \varphi}(x^0) \subset S_0$. Поэтому, учитывая (7), выполнение (6) эквивалентно тому, что существует элемент $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \overline{\partial \varphi}(x^0)$ такой, что $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ и $v_i = v_j, i, j = \overline{1, n}$. А это возможно тогда и только тогда, когда $v = 0_n$, то есть $0_n \in \overline{\partial \varphi}(x^0)$. \square

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Первозванский А.А. Оптимальный портфель ценных бумаг на нестационарном неравновесном рынке // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35, № 3. С. 63 – 68.
2. Дудов С.И. Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36, № 5. С. 153 – 159.
3. Демьянов В.Ф. Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
4. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
5. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

УДК 517.984

С. А. Бутерин

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА СВЁРТКИ*

Рассмотрим интегральный оператор $A = A(M, g, v)$ вида

$$Af = Mf + g(x) \int_0^\pi f(t)v(t)dt, \quad Mf = \int_0^x M(x-t)f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (1)$$

В статье исследуется следующая обратная задача: по совокупности характеристических чисел $\{\lambda_k\}$ оператора $A(M, g, v)$ вида (1) найти функцию $M(x)$ в предположении, что функции $g(x)$, $v(x)$ известны a priori.

Пусть функция $M(x)$ имеет вид

$$M(x) = -i + \int_0^x (x-t)N(t)dt, \quad \text{где } (\pi-x)N(x) \in L_2(0, \pi). \quad (2)$$

Рассмотрим функцию $H(x)$, являющуюся решением уравнения

$$H(x) = N(x) - i \int_0^x H(t)dt \int_0^{x-t} N(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Можно показать, что $(\pi-x)H(x) \in L_2(0, \pi)$.

Определение. Будем говорить, что $A = A(M, g, v) \in A$, если $M(x)$ имеет вид (2), $g(x), v(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $a_1 a_2 \neq 0$, где

$$a_1 = 1 + ig(0)v(0) + \int_0^\pi \left(ig'(t) + \int_0^t H(t-\tau)g(\tau)d\tau \right) dt, \quad a_2 = ig(0)v(\pi).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1) и Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).

Решение обратной задачи приведём для операторов класса А. В [1] доказывается теорема единственности решения данной обратной задачи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = A(M, g, v) \in \mathcal{A}$, тогда характеристические числа $\{\lambda_k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, оператора A имеют вид

$$\lambda_k = 2k + \alpha + \beta_k, \quad \lambda_k \neq 0, \quad \{\beta_k\} \in l_2, \quad (4)$$

и выполняются условия согласования с функциями $g(x), v(x)$:

$$p = -\int_0^\pi g(t)v(t)dt, \quad a_2 = \gamma \exp(i\alpha\pi), \quad (5)$$

где

$$p = \frac{i\pi}{\exp(-i\alpha\pi) - 1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^0} - \frac{1}{\lambda_k} \right), \quad \gamma = (1 - \exp(i\alpha\pi))^{-1} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}, \quad (6)$$

если α не является целым четным числом, и

$$p = \frac{\pi}{2i} - \frac{1}{\lambda_{-\alpha/2}} + \sum_{k=-\infty, k \neq -\alpha/2}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^0} - \frac{1}{\lambda_k} \right), \quad \gamma = \frac{i}{\pi \lambda_{-\alpha/2}} \prod_{k=-\infty, k \neq -\alpha/2}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}, \quad (6')$$

в противном случае. Здесь $\lambda_k^0 = 2k + \alpha$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы функции $g(x), v(x) \in W_2^1[0, \pi]$ такие, что $g(0)v(\pi) \neq 0$, и последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, вида (4), удовлетворяющих условиям согласования (5). Тогда существует единственный оператор $A(M, g, v) \in \mathcal{A}$, для которого $\{\lambda_k\}$ являются характеристическими числами.

Доказательству теоремы 2 предпошлем следующее утверждение.

ЛЕММА. Даны числа $\{\lambda_k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, вида (4). Обозначим

$$X(\lambda) = \exp(p\lambda) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right). \quad (7)$$

Тогда для $X(\lambda)$ имеет место представление

$$X(\lambda) = \gamma(1 - \exp(i(\alpha - \lambda)\pi)) + \int_0^\pi w(t) \exp(-i\lambda t) dt, \quad (8)$$

где $w(x) \in L_2(0, \pi)$, а числа p , γ определяются по формулам (6) или (6'), смотря по тому, $\exp(i\alpha\pi) \neq 1$ или $\exp(i\alpha\pi) = 1$.

Схема доказательства теоремы 2. Известно, что характеристические числа $\{\lambda_k\}$ оператора A вида (1) совпадают с нулями характеристической функции

$$L(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^T v(x)g(x, \lambda)dx, \quad (9)$$

где $g(x, \lambda) = (E - \lambda M)^{-1}g$, E – тождественный оператор.

Построим функцию $X(\lambda)$ по формуле (7). Тогда согласно лемме для $X(\lambda)$ справедливо представление (8). Как и в [1], приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$(\pi - x)H(x) = \phi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(b_j(x)H^{*j}(x) + \int_0^x B_j(x,t)H^{*j}(t)dt \right), \quad (10)$$

где $\phi(x) = (iw(\pi - x) - \mu_0''(\pi - x))/a_2$, $b_1(x) \equiv 0$, $b_j(x) = i^{j+1}(\pi - x)^j / j!$, $j \geq 2$, функция $w(x)$ определена посредством (8), $H^{*1} = H$, $H^{*(j+1)} = H * H^{*j}$,

$$B_j(x,t) = -\frac{i^j}{a_2} \frac{(\pi - x)^{j-2}}{j!} (j(j-1)\mu_0(\pi - x + t) + 2j(\pi - x)\mu_0'(\pi - x + t) + (\pi - x)^2\mu_0''(\pi - x + t)), \quad j \geq 1, \quad \mu_0(x) = \int_x^\pi v(t)g(t-x)dt.$$

Следующий факт играет главную роль в доказательстве теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Если выполняются условия (5), то уравнение (10) имеет единственное решение $H(x)$, такое что $(\pi - x)H(x) \in L_2(0, \pi)$.

Итак, получив $H(x)$, находим функцию $N(x)$ из уравнения (3). Можно показать, что $(\pi - x)N(x) \in L_2(0, \pi)$. Таким образом, приходим к некоторому оператору $A = A(M, g, v)$ вида (1). Нетрудно показать [1, 2], что его характеристическая функция имеет вид

$$L(\lambda) = a_1 - a_2 \exp(-i\lambda\pi) + \int_0^\pi w(t) \exp(-i\lambda t) dt. \quad (11)$$

Вычитая (8) из (11) и учитывая (5), имеем $L(\lambda) - X(\lambda) = a_1 - \gamma$ и, так как в силу (7), (9) $L(0) = X(0) = 1$, то $a_1 = \gamma$. Следовательно, $L(\lambda) = X(\lambda)$, а значит, $A \in \Lambda$, и характеристические числа оператора A совпадают с $\{\lambda_k\}$. Единственность следует из единственности решения уравнения (10) [1]. Теорема 3 доказана.

Замечание. Из (6), (6') видно, что условия (5) в теореме 2 можно не накладывать, предполагая два элемента последовательности $\{\lambda_k\}$ незаданными.

Аналогичные результаты имеют место для случая, когда оператор M подобен любой целой положительной степени оператора интегрирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутерин С.А. О единственности восстановления одномерного возмущения оператора свёртки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 15 – 18.
2. Юрко В.А. Обратная задача для интегральных операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37(5). С. 690 – 701.

А. М. Водолазов, В. Н. Кузнецов

**ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПЕРИОДИЧНОСТИ КОНЕЧНОЗНАЧНОЙ,
ВПОЛНЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФУНКЦИИ
НАТУРАЛЬНОГО АРГУМЕНТА**

Пусть $h(n)$ – конечнозначная функция натурального аргумента. Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

сходящийся в полуплоскости $\sigma > 1$.

При данных обозначениях авторами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $h(n)$ – отличная от единичной периодическая функция;
- 2) существует последовательность полиномов Дирихле $T_n(s)$:

$$T_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k^{(n)}}{k^s}, \quad s = \sigma + it,$$

равномерно сходящаяся в полуплоскости $\sigma > \sigma_0 > 1$ к функции $f(s)$, определенной рядом (1), со скоростью $O\left(\frac{1}{\rho^n}\right)$, где $\rho > 1$.

Остановимся на основных положениях доказательства теоремы 1. В основе ее доказательства лежит так называемый метод редукции к степенным рядам, разработанный одним из авторов в работах [1 – 3], суть которого заключается в том, что задача аналитического продолжения рядов Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (2)$$

сводится к проверке выполнения определенных условий на границе сходимости для степенного ряда $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ с теми же самыми коэффициентами, что и у ряда Дирихле (2).

Известно [4], что условие периодичности функции $h(n)$ эквивалентно регулярности степенного ряда

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) z^n$$

в точке $z = 1$.

Таким образом, если $h(n)$ периодическая функция, то в силу известной теоремы Берштейна [5] существует последовательность полиномов $P_n(x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} x^k, \quad (3)$$

приближающих функцию $g(z)$ на отрезке $[0;1]$ со скоростью $O\left(\frac{1}{\rho^n}\right)$, где $\rho > 1$. Следовательно, на полуоси $[0, \infty)$ функция $g(e^{-x})$ допускает приближение полиномами $P_n(e^{-x})$ с той же скоростью. Используя свойства преобразования Меллина

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty g(e^{-x}) x^{s-1} dx, \quad \sigma > 1, \quad (4)$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция, удается показать, что последовательность полиномов Дирихле

$$T_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k^{(n)}}{k^s} \quad (5)$$

(здесь $T_n(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx$) равномерно сходится в полуплоскости $\sigma > \sigma_0 > 1$ со скоростью $O\left(\frac{1}{\rho^n}\right)$, $\rho > 1$, к функции $f(s)$.

Обратно, если последовательность полиномов Дирихле $T_n(s)$ вида (5) равномерно сходится в полуплоскости $\sigma > \sigma_0 > 1$ к функции $f(s)$ со скоростью $O\left(\frac{1}{\rho^n}\right)$, то на основании свойств обратного преобразования Меллина (4) удается показать, что последовательность соответствующих полиномов $P_n(x)$ вида (3) приближает функцию $g(z)$ на отрезке $[0;1]$ со скоростью $O\left(\frac{1}{\rho^n}\right)$, $\rho > 1$, а это позволяет судить о регулярности степенного ряда $g(z)$ в точке $z=1$.

В случае, когда $h(n)$ – конечнозначная, вполне мультипликативная функция натурального аргумента, из теоремы 1 получается

ТЕОРЕМА 2. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $h(n)$ – неглавный характер Дирихле;
- 2) существует последовательность полиномов Дирихле $T_n(s)$, равномерно сходящаяся в полуплоскости $\sigma > \sigma_0 > 1$ со скоростью $O\left(\frac{1}{\rho^n}\right)$, $\rho > 1$, к сумме соответствующего ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

Замечание. Теорема 2 дает важную характеристику L -функций Дирихле, отвечающих неглавным характерам Дирихле. Авторами показано,

что последовательность полиномов Дирихле $T_n(s)$ равномерно сходится к L -функции в любой ограниченной области комплексной плоскости. В связи с этим встаёт ряд задач, связанных с расположением нулей полиномов $T_n(s)$. Но в данной статье эти задачи рассматриваться не будут.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов В.Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 6. С. 805 – 813.
2. Кузнецов В.Н. О граничных свойствах степенных рядов с конечнозначными коэффициентами // Дифференциальные уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. С. 9 – 16.
3. Кузнецов В.Н. К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Теория функций и приближений: Тр. 3-й Сарат. зимней шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 2. С. 113 – 115.
4. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
5. Даугавет И.К. Введение в теорию приближений функций. Л.: Изд-во Ленинг. ун-та, 1977.

УДК 517.5

С. С. Волосивец

УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ СВЁРТКИ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЁННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ*

Пусть $f \in L_p(-\infty; +\infty)$, $1 < p \leq 2$. Как известно [1, с. 128], функции $F_N(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-N}^N f(t) e^{-ixt} dt$ сходятся в $L_{p'}(R)$ ($1/p + 1/p' = 1$) к некоторому пределу $\hat{f} \in L_{p'}(R)$, называемому преобразованием Фурье функции $f(x)$. При этом

$$\|\hat{f}\|_{L_{p'}(R)} \leq K(p) \|f\|_{L_p(R)}.$$

Дадим необходимые определения. Пусть $1 < p < +\infty$, f определена на R . Рассмотрим величину

$$\omega_{1/p}(f, \delta) = \sup_{-\infty < a < b < +\infty} \sup_{|\xi| \leq \delta} \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p},$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00390) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

где $\xi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$, а $|\xi| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ – диаметр разбиения.

Если для функции $f(x)$ модуль $\omega_{1-1/p}(f, \delta)$ ограничен константой, не зависящей от δ , то говорят, что $f(x)$ принадлежит множеству функций ограниченной p -вариации $V_p(R)$. Если же $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{1-1/p}(f, \delta) = 0$, то $f(x)$ называется p -абсолютно непрерывной функцией ($f \in C_p(R)$). Норма в пространствах $C_p(R)$ и $V_p(R)$ задается равенством

$$\|f\|_p = \max \left\{ \sup_{\delta > 0} \omega_{1-1/p}(f, \delta), \|f\|_\infty \right\}.$$

При $k \in N$, $k \geq 2$ по определению

$$\omega_{k-1/p}(f, \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1} f(x), |h|),$$

где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^{k-i} f(x + ih)$. Наконец, через $A_\sigma(f)_p$ будем обозначать наилучшее приближение $f \in C_p(R)$ целыми функциями экспоненциального типа не выше σ [2, с. 22].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L_p(R) \cap V_p(R)$, $g \in L_q(R) \cap C_q(R)$, где $1 < p, q \leq 2$. Если $0 < \gamma \leq p'q'/(p' + q')$, $m \in N$, и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\gamma} \omega_{m-1/q}^\gamma(g, \pi/n)$, то $f * g = \hat{f} \hat{g} \in L_\gamma(R)$.

Доказательство. Для доказательства оценим по неравенству Гельдера

$$\int_{2^l}^{2^{l+1}} |\hat{f}(x) \hat{g}(x)|^\gamma dx \leq \left(\int_{2^l}^{2^{l+1}} |\hat{f}(x)|^{p'} dx \right)^{\gamma/p'} \left(\int_{2^l}^{2^{l+1}} |\hat{g}(x)|^\beta dx \right)^{1-\gamma/p'}, \quad (1)$$

где $\beta = p'\gamma/(p' - \gamma)$.

Применим оценки из работы [3].

$$\int_{2^l}^{2^{l+1}} |\hat{f}(x)|^{p'} dx \leq C_1 2^{-lp'/p} \omega_{m-1/p}^{p'}(f, \pi/2^{l+1}) \leq C_2 2^{-lp'/p}$$

и

$$\int_{2^l}^{2^{l+1}} |\hat{g}(x)|^\beta dx \leq C_3 2^{-l(1-\beta)} \omega_{m-1/q}^\beta(g, \pi/2^{l+1}), \quad \beta \leq q'.$$

Подставляя их в (1), получаем

$$\int_{2^l}^{2^{l+1}} |\hat{f}(x) \hat{g}(x)|^\gamma dx \leq C_4 2^{l(1-2\gamma)} \omega_{m-1/q}^\gamma(f, \pi/2^{l+1}).$$

Суммируя эти оценки и используя равносильность сходимости рядов $\sum_{l=1}^{\infty} 2^{l(1-2\gamma)} \omega_{m-1/q}^\gamma(f, \pi/2^{l+1})$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\gamma} \omega_{m-1/q}^\gamma(g, \pi/n)$, доказываем теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g \in L_q(R) \cap C_q(R)$, $f \in L_p(R) \cap V_p(R)$, $1 < p, q \leq 2$, $0 < \gamma \leq p'q'/(p' + q')$. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\gamma} A_n^{\gamma}(f)_p,$$

то $\hat{f}(x)\hat{g}(x) \in L_{\gamma}(R)$.

Замечание. Методом доказательства теоремы 1 можно получить, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2\gamma} \omega_{m-1/q}^{\gamma}(f, \pi/n)$ следует существование $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} |\hat{f}(x)|^{\gamma} |\hat{g}(x)|^{\gamma} dx$, $\alpha > -1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.
2. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
3. Родин А.М. Условия интегрируемости преобразования Фурье p -абсолютно непрерывной функции // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 85 – 92.

УДК 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

О КРАЙНИХ ТОЧКАХ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Постановка задачи. Пусть $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\} \subset [0:1]$, $\Phi(\cdot)$ – дискретное многозначное отображение с образами в виде отрезков $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $k \in [0:N]$; $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$. Рассмотрим задачу

$$\rho(A) \stackrel{df}{=} \max_{k \in [0:N]} f(A, k) \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \quad (1)$$

где $f(A, k) = \max \{y_{2,k} - p_n(A, t_k), p_n(A, t_k) - y_{1,k}\}$.

Доказано [1], что решение задачи (1) существует. Пусть $\rho^* = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$, $\mathfrak{R} = \{A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\}$. В случае $N \leq n$ решение задачи (1) известно [1]. Считаем $N > n$.

Пусть $\sigma, \Delta \subseteq T$: $\sigma = \{t_{j_0} < t_{j_1} < \dots < t_{j_{n+1}}\}$, $\Delta = \{t_{q_0} < t_{q_1} < \dots < t_{q_n}\}$, $I(\sigma) = \{k \in [0:N] : t_k \in \sigma\}$, $I(\Delta) = \{k \in [0:N] : t_k \in \Delta\}$.

Рассмотрим подзадачу

$$\rho(A, \sigma) = \max_{k \in I(\sigma)} f(A, k) \xrightarrow{\text{def}} \min_{A \in R^{n+1}} ; \rho^*(\sigma) = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A, \sigma). \quad (2)$$

Нетрудно показать, что

$$\forall A \in R^{n+1} : \rho(A, \sigma) \leq \rho(A); \rho^*(\sigma) \leq \rho^*. \quad (3)$$

Амплитудными назовём функции

$$\varphi_0(\sigma, t_k) = \begin{cases} y_{2, j_k}, k - \text{чётно}, \\ y_{1, j_k}, k - \text{нечётно}, \end{cases} \quad \varphi_1(\sigma, t_k) = \begin{cases} y_{1, j_k}, k - \text{чётно}, \\ y_{2, j_k}, k - \text{нечётно}, \end{cases} \quad (4)$$

$$t_{j_k} \in \sigma, k \in [0:n+1].$$

Сформулируем для амплитудных функций задачи П.Л. Чебышева [2]

$$\begin{aligned} \rho_i(A, \sigma) &= \max_{k \in I(\sigma)} |\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A, t_{j_k})| \xrightarrow{\text{def}} \min_{A \in R^{n+1}}, \\ \rho_i^*(\sigma) &= \min_{A \in R^{n+1}} \rho_i(A, \sigma) = \rho_i(A_i^\sigma, \sigma), i = \overline{0,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим через $Z = \left\{ k \in [0:N] : \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = \rho^* \right\}$, $|Z|$ – количество элементов множества Z .

2. Вспомогательные факты. Ввиду принятых обозначений, теорему 1 из [1] можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы вектор $A^* \in R^{n+1}$ являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$\text{a) } \rho(A^*) = \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}; \quad \text{б) } \exists \sigma^* : \rho(A^*) = \rho_i^*(\sigma^*), i = 0 \text{ или } i = 1.$$

При этом $\rho^* = \rho(A^*)$.

Несложно показать, что из условия а) следует $Z \neq \emptyset$.

Приведём утверждение, эквивалентное теореме 2 из [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть A^* – некоторое решение задачи (1). Если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\text{а) } |Z| \geq n+1, \quad \text{б) } \exists \sigma^* : \rho^* = \rho_i^*(\sigma^*), i = 0 \text{ или } i = 1,$$

то решение A^* задачи (1) единственное.

В [3] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.

$$\exists A^* \in \mathfrak{R}, \exists \Delta^* : f(A^*, k) = \rho^*, \forall k \in I(\Delta^*). \quad (6)$$

3. Критерий распознавания крайних точек. Обозначим $E(\mathfrak{R})$ множество крайних точек множества \mathfrak{R} .

ТЕОРЕМА 4. Все векторы $A^* \in \mathfrak{R}$, которые удовлетворяют условию (6), и только они являются крайними точками множества \mathfrak{R} .

Доказательство. I. Достаточность. Пусть для вектора $A^* \in \mathfrak{R}$ выполняется условие (6). Покажем, что $A^* \in E(\mathfrak{R})$. Если решение единственное, утверждение теоремы очевидно.

Пусть $|\mathfrak{R}| = \infty$. Допустим, что утверждение теоремы не верно, то есть $A^* \notin E(\mathfrak{R})$. Последнее означает, что

$$\exists A^1, A^2 \in \mathfrak{R}, A^1 \neq A^2, \exists 0 < \lambda < 1: A^* = \lambda^* A^1 + (1 - \lambda^*) A^2. \quad (7)$$

В силу (6) $\forall k \in I(\Delta^*)$ либо

$$\begin{aligned} \rho^* &= f(A^*, k) = y_{2,k} - p_n(A^*, t_k) = \\ &= \lambda^*(y_{2,k} - p_n(A^1, t_k)) + (1 - \lambda^*)(y_{2,k} - p_n(A^2, t_k)) \leq (\lambda^* + 1 - \lambda^*) \rho^* = \rho^*, \end{aligned} \quad (8)$$

либо

$$\begin{aligned} \rho^* &= f(A^*, k) = p_n(A^*, t_k) - y_{1,k} = \\ &= \lambda^*(p_n(A^1, t_k) - y_{1,k}) + (1 - \lambda^*)(p_n(A^2, t_k) - y_{1,k}) \leq \lambda^* \rho^* + (1 - \lambda^*) \rho^* = \rho^*. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, в (8), (9) имеем равенства. Ввиду (7) $\lambda^*, (1 - \lambda^*) \in (0, 1)$. Следовательно,

$$y_{2,k} - p_n(A^1, t_k) = \rho^* = y_{2,k} - p_n(A^2, t_k),$$

либо

$$p_n(A^1, t_k) - y_{1,k} = \rho^* = p_n(A^2, t_k) - y_{1,k}.$$

Тогда $\forall k \in I(\Delta^*)$, $p_n(A^1, t_k) = p_n(A^2, t_k)$, при этом $|I(\Delta^*)| = n+1$. Итак, полиномы степени не выше n имеют равные значения в $(n+1)$ точках, а значит, $A^1 = A^2$, что противоречит (7).

II. Необходимость. Пусть $A^* \in E(\mathfrak{R})$. Покажем, что имеет место (6).

1. В том случае, если $Z = \emptyset$ или $|Z| \geq n+1$ в силу теорем 1, 2 решение единственное, является крайней точкой и удовлетворяет (6).

2. Пусть $1 \leq |Z| < n+1$. Предположим, утверждение теоремы не верно.

Тогда $\exists MK = \{k_0, k_1, \dots, k_{N-n}\} \subseteq \{k \in [0:N] : f(A^*, k) < \rho^*\}$. Заметим, что $Z \cap MK = \emptyset$, поскольку $\forall k \in Z, f(A^*, k) = \rho^*$.

3. Пусть $k_0 \in MK$, обозначим через $A^i, i=1,2$, решение системы

$$\begin{cases} p_n(A^i, t_k) = p_n(A^*, t_k), & k \in [0:N] \setminus MK, \\ p_n(A^i, t_{k_0}) = p_n(A^*, t_{k_0}) + (3 - 2i)\varepsilon. \end{cases} \quad (10)$$

Возьмём $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Тогда ввиду рассуждений предыдущего пункта $\max_{k \in [0:N]} f(A^i, k) = \rho^*$. Следовательно, $A^i \in \mathfrak{R}$, при этом $A^i \neq A^*, i = 1, 2$ и $A^1 \neq A^2$.

4. Заметим, что $\forall \lambda \in R, \forall k \in [0:N] \setminus MK$,

$$P_n(\lambda A^1 + (1-\lambda)A^2, t_k) = \lambda P_n(A^1, t_k) + (1-\lambda)P_n(A^2, t_k) \stackrel{(10)}{=} P_n(A^*, t_k).$$

Далее, ввиду (10) $\lambda = 1/2$ удовлетворяет уравнению

$$P_n(\lambda A^1 + (1-\lambda)A^2, t_{k_0}) = P_n(A^*, t_{k_0}).$$

5. Итак, значения полиномов $P_n\left(\frac{1}{2}(A^1 + A^2), t\right)$ и $P_n(A^*, t)$ совпадают в $(n+1)$ точках, значит, эти полиномы совпадают. Тогда $A^* = \frac{1}{2}(A^1 + A^2)$, $A^1, A^2 \in \mathfrak{R}, A^1 \neq A^2$. Получили противоречие тому, что $A^* \in E(\mathfrak{R})$. Теорема доказана полностью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Выгодчикова И.Ю. О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 25 – 27.
2. Демянинов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
3. Выгодчикова И.Ю. Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 27 – 31.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

К ГЕОМЕТРИИ ДИНАМИКИ СО СВЯЗЯМИ ОДНОГО КЛАССА ТОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В работе [1] было показано, что движение материальной точки переменной массы совпадает с геодезической эквипроективной связности. Используя условия [2], при которых эквипроективная связность является римановой, был выделен класс точек, эквивалентных голономным системам постоянной массы. В первой части настоящей статьи находятся условия метризуемости связности специального вида, заданной в неголономном многообразии [3]. Во второй части приводятся пример из динамики точки с переменной массой, демонстрирующий важность проблемы метризуемости допустимой связности [3].

1. Рассмотрим неголономное многообразие X_n^m , заданное вместе с инволютивным оснащением X_n^{n-m} (см., напр., [3]). Интегрируемость оснащения позволяет обобщить некоторые результаты из работы [4], где оснащение интегрируемо уже потому, что его размерность равна единице. Пусть $\nabla : F_0^1(X_n^m) \times F_0^1(X_n^m) \rightarrow F_0^1(X_n^m)$ – допустимая связность, где $F_q^p(X_n^m)$ – модуль допустимых тензорных полей типа (p, q) (см. [3]). Помимо связности ∇ введём в рассмотрение два ковариантных дифференцирования $\tilde{\nabla} : F_0^1(X_n^m) \times F_0^1(X_n) \rightarrow F_0^1(X_n)$, $\bar{\nabla} : F_0^1(X_n^{n-m}) \times F_0^1(X_n^m) \rightarrow F_0^1(X_n^m)$, полагая по определению $\tilde{\nabla}(\bar{u}, \bar{v}) = \nabla(\bar{u}, pr_1\bar{v}) + pr_2[\bar{u}, pr_2\bar{v}]$, $\bar{\nabla}(\bar{u}, \bar{v}) = pr_1[\bar{u}, \bar{v}]$, где операторы $pr_1 : F_0^1(X_n) \rightarrow F_0^1(X_n^m)$, $pr_2 : F_0^1(X_n) \rightarrow F_0^1(X_n^{n-m})$ определяются обычным образом. Действия $\tilde{\nabla}$, $\bar{\nabla}$ естественным образом продолжаются на тензорные поля произвольного типа. Используя специальные системы координат [3], приходим к равенствам вида

$$\begin{aligned}\nabla_{[a} \nabla_{b]} V^c &= \frac{1}{2} K_{abc}^e V^c + M_{ab}^p \partial_p V^c, \\ \tilde{\nabla}_p \nabla_b V^c - \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_p V^c &= P_{pbe}^c V^e.\end{aligned}$$

Обобщая известные определения (см. [4]) на случай произвольной коразмерности, назовём K и P первым и вторым тензорами Схоутена соответственно. Многообразие X_n^m с симметричной связностью будем обозначать через A_n^m . Назовём пространство A_n^m локально-аффинным, если $K = P = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пространство A_n^m является локально-аффинным тогда и только тогда, когда найдётся такая (специальная) карта $\alpha(X^\alpha)$, относительно которой $\Gamma_{bc}^a = 0$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, m$; $p, q = m + 1, \dots, n$).

Будем называть A_n^m симметрическим пространством, если $\nabla K = \tilde{\nabla} P = 0$. Предположим, что в данном X_n^m введены две различные допустимые симметричные связности ∇ , $\bar{\nabla}$. Тогда мы получим два неголономных многообразия A_n^m и \bar{A}_n^m , соответствующих одному и тому же X_n^m . Предположим, что геодезические для A_n^m и \bar{A}_n^m совпадают. Тогда, также как и в голономном случае, можно показать, что коэффициенты связностей ∇ , $\bar{\nabla}$ должны находиться в следующей зависимости (см. [4]):

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c + \delta_a^c \Phi_b + \delta_b^c \Phi_a,$$

где Φ_a – допустимый ковектор.

Такие A_n^m , \bar{A}_n^m будем называть находящимися в проективном соответствии. В случае, когда A_n^m – локально-аффинное, тензоры Схоутена связности $\bar{\nabla}$ представимы в виде

$$\bar{K}_{abc}^e = -2\delta_{[a}^e g_{b]c} + 2g_{[ab]}\delta_c^e,$$

$$\bar{P}_{pbc}^e = \delta_b^e S_{pc} + \delta_c^e S_{pb},$$

где $g_{ab} = \bar{\partial}_a \varphi_b - \varphi_a \bar{\partial}_b$, $S_{pb} = \partial_p \varphi_b$, $e_a = \partial_a - \Gamma_a^p \partial_p$ в $F_0^1(X_n^m)$.

Пусть теперь \bar{A}_n^m – симметрическое пространство. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Проективно-аффинное пространство является симметрическим тогда и только тогда, когда $\nabla g = 0$, $\bar{\nabla}S = 0$.

Учитывая легко проверяемое равенство $\bar{\nabla}eS_{pb} = \partial_p g_{ab}$, получим следствие теоремы 2.

Следствие. Для того чтобы проективно-аффинное пространство было симметричным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\nabla g = 0$, $\partial_p g = 0$.

Потребуем дополнительно выполнения условия $\partial_p \varphi_c = 0$. В этом случае $\bar{P}_{pab}^c = 0$ и $g_{ab} = \partial_a \varphi_b - \varphi_a \partial_b$. Повторяя с этого момента почти словно рассуждения П. А. Широкова [2], получаем, что условия интегрируемости уравнений сводятся к тому, что вектор φ_a является градиентом: $\varphi_a = \partial_a \varphi$, $\partial_p \varphi = 0$. Если положить $\varphi = -\frac{1}{2} \log f$, то оказывается, что φ является решением уравнения $\nabla g = 0$ тогда и только тогда, когда $f = \lambda_{ab} X^a X^b + 2\lambda_a X^a + \lambda$. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Проективно-аффинное симметрическое пространство A_n^m , связность которого определяется градиентом φ_a с условием $\varphi_p = 0$, является римановым пространством тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \dots & \lambda_m \\ \lambda_1 & \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_m & \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mm} \end{vmatrix}.$$

2. Назовём (см. [1]) точку $M(X^1, X^2, X^3)$ евклидова пространства R_3 положением материальной точки \tilde{M} с переменной массой $m(X^\alpha)$, где $m(X^\alpha)$ интерпретируется как положительная функция $m: R_3 \rightarrow R$. Движением точки \tilde{M} под действием силы \bar{F} называется интегральная кривая уравнения $\frac{d}{dt} m \dot{\tilde{r}} = \bar{F}$, где \bar{F} – гладкое векторное поле на R_3 . Предположим, что на движение точки наложена связь, что означает, что траектория движения всюду касается некоторого неголономного многообразия X_3^2 .

Для определённости будем считать, что в R_3 задана естественная ортонормированная система координат $(X^\alpha) = (X^1, X^2, X^3)$ и что многообразие X_3^2 порождается полями вида $\bar{e}_1 = \partial_1 - X^2 \partial_3$, $\bar{e}_2 = \partial_2$. Таким образом, на движение точки \tilde{M} наложена связь $\dot{X}^3 = -\dot{X}^1 X^2$. Мы полагаем, что движение точки \tilde{M} подчиняется закону $\frac{d}{dt} m\dot{r} = \lambda \bar{n}$, где $\bar{n} = x^2 \partial_1 + \partial_3$, а λ – неопределённый множитель. Используя уравнение связи, находим, что $\lambda = -\frac{m\dot{x}^1 \dot{x}^2}{1 + (x^2)^2}$. Уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x}^1 + \partial_\beta m\dot{x}^\beta \dot{x}^1 = \frac{-x^2 m\dot{x}^1 \dot{x}^2}{1 + (x^2)^2}, \\ m\ddot{x}^2 + \dot{x}^2 \partial_\beta m\dot{x}^\beta = 0, \\ \dot{x}^3 = -\dot{x}^1 x^2. \end{cases} \quad (1)$$

Следуя [1], введём в R_3 связность с коэффициентами $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \delta_\beta^\alpha P_\gamma + \delta_\gamma^\alpha P_\beta$, где $P_\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln m}{\partial X^\gamma}$, $m = e^{2P}$. Проецируя эту связность вдоль $\langle \bar{n} \rangle$ на X_3^2 , а затем симметрируя полученную допустимую связность, получаем следующие выражения для коэффициентов допустимой симметричной связности:

$$\Gamma_{bc}^a = 2\partial_{(b}^a P_{c)} + T_{bc}^a, \quad (2)$$

где $P_c = \frac{1}{2} \bar{e}_c \ln m$, а отличными от нуля компонентами T_{bc}^a являются лишь $T_{21}^1 = T_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{x^2}{1 + (x^2)^2}$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Уравнения движения точки \tilde{M} (1) совпадают с уравнениями геодезической связности (2):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} m\dot{r} = \lambda \bar{n}, \\ \dot{x}^3 = -\dot{x}^1 x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\delta \dot{x}^a}{dt} = 0, \\ \dot{x}^3 = -\dot{x}^1 x^2. \end{cases}$$

Предположим, что связность (2) – метрическая и g – соответствующий допустимый метрический тензор: $\nabla g = 0$. Соответствующую точку назовем точкой типа K . Определим в R_3 метрический тензор G , полагая $G(\bar{e}_a, \bar{e}_b) = g(\bar{e}_a, \bar{e}_b)$, $G(\bar{e}_a, \bar{n}) = 0$, $G(\bar{n}, \bar{n}) = 1$.

ТЕОРЕМА 5. Материальная точка типа K эквивалентна механической системе постоянной массы с кинетической энергией $T = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta$ и связью X_3^2 .

Доказательство теоремы следует из известных результатов [5] о траекториях динамических систем со связями и из того, что ортогональная проекция связности Леви-Чивита метрики G на многообразие X_3^2 совпадает с исходной связностью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гохман А.В. К геометрии динамики одного класса точек переменной массы // Дифференциальная геометрия. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 1. С. 15 – 19.
2. Широков П.А. Проективно-евклидовы симметрические пространства: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 73 – 81.
3. Галаев С.В., Гохман А.В. Обобщённые гамильтоновы системы на многообразиях со связностью // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 16 – 19.
4. Вагнер В.В. Геометрия $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173 – 225.
5. Вершик А.М., Фаддеев Л.Д. Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики: Сб. статей / Под ред. М.Г. Веселова и др. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. Вып. II. С. 129 – 141.

УДК 517.84

О. Б. Горбунов

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА*

Рассмотрим краевую задачу $L = L(Q(x), \mu, \eta, \gamma, \alpha, \beta)$ вида

$$By'(x) + (Q_\gamma(x) + Q(x))y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$V_1^T(\alpha)y(0) = V_1^T(\beta)y(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, $Q_\gamma(x) = \frac{\mu}{x - \gamma} \begin{pmatrix} \sin 2\eta & \cos 2\eta \\ \cos 2\eta & -\sin 2\eta \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -q_1(x) \end{pmatrix}$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1) и Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $V(\alpha) = (V_1(\alpha), V_2(\alpha)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $\gamma \in (0, \pi)$ – фиксированное число, T – знак транспонирования. Здесь $q_k(x)$ – комплекснозначные функции, μ, η, α, β – комплексные числа. Для определенности будем предполагать, что $\operatorname{Re} \mu > 0$, $\mu + 1/2 \notin N$, $\alpha, \beta, \eta \in [-\pi/2, \pi/2]$, а также $q_k(x) \in W_1^1(0, \pi)$ и $|q_k(x)| (x - \gamma)^{-2\operatorname{Re} \mu} \in L_1(0, \pi)$.

В работах [1 – 3] построена специальная фундаментальная система решений для склейки в особой точке, получена её асимптотика, изучены свойства спектра задачи L , а также исследованы аналитические и асимптотические свойства функции Вейля задачи L . В частности, показано, что система (1) имеет решения $\Phi_1(x, \lambda)$ и $\Phi_2(x, \lambda)$ такие, что

$$V_1^T(\alpha)\Phi_1(0, \lambda) = V_2^T(\alpha)\Phi_2(0, \lambda) = 1, \quad V_1^T(\beta)\Phi_1(0, \lambda) = V_1^T(\alpha)\Phi_2(0, \lambda) = 0.$$

Функция $M(\lambda) := V_2^T(\alpha)\Phi_1(0, \lambda)$ называется *функцией Вейля*. Причём $\Phi_2(x, \lambda)$ будет целой по λ при фиксированном $x \neq \gamma$, а $\Phi_1(x, \lambda)$ имеет полюса с собственных значениях задачи L .

Будем говорить, что $L \in W$, если L имеет простой спектр, то есть характеристическая функция имеет только простые нули. Обозначим λ_k – собственные значения задачи L и $a_k = \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda)$.

Постановка обратной задачи

По спектральным данным $\{\lambda_k, a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ восстановить задачу L .

Отметим, что в [3] доказана теорема единственности решения поставленной обратной задачи, из которой следует, что, не нарушая общности, можно считать $\alpha = 0$.

Договоримся, что наряду с задачей L будем рассматривать задачу $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{\mu}, \tilde{\eta}, \gamma, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Если некоторый символ A обозначает объект задачи L , то \tilde{A} – аналогичный объект задачи \tilde{L} .

Пусть задачи $L, \tilde{L} \in W$ выбраны так, что

$$\alpha = \tilde{\alpha} = 0, \quad Q_\gamma(x) = \tilde{Q}_\gamma(x), \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k \tilde{a}_k| \xi_k < \infty, \quad (3)$$

где $\xi_k = |\lambda_k - \tilde{\lambda}_k| + |a_k \tilde{a}_k^{-1} - 1|$.

ЛЕММА. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_j(x, \lambda) = & \tilde{\Phi}_j(x, \lambda) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\Phi}_j(x, \lambda), \tilde{\Phi}_2(x, \lambda_k) \rangle}{\lambda - \lambda_k} a_k \Phi_2(x, \lambda_k) - \right. \\ & \left. - \frac{\langle \tilde{\Phi}_j(x, \lambda), \tilde{\Phi}_2(x, \tilde{\lambda}_k) \rangle}{\lambda - \tilde{\lambda}_k} \tilde{a}_k \Phi_2(x, \tilde{\lambda}_k) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\langle \Phi_2(x, \lambda), \Phi_2(x, \theta) \rangle}{\lambda - \theta} - \frac{\langle \tilde{\Phi}_2(x, \lambda), \tilde{\Phi}_2(x, \theta) \rangle}{\lambda - \theta} = \\
& = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\langle \tilde{\Phi}_2(x, \lambda), \tilde{\Phi}_2(x, \lambda_{k0}) \rangle}{\lambda - \lambda_{k0}} \frac{\langle \Phi_2(x, \lambda_{k0}), \Phi_2(x, \theta) \rangle}{\lambda_{k0} - \theta} a_{k0} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\langle \tilde{\Phi}_2(x, \lambda), \tilde{\Phi}_2(x, \lambda_{k1}) \rangle}{\lambda - \lambda_{k1}} \frac{\langle \Phi_2(x, \lambda_{k1}), \Phi_2(x, \theta) \rangle}{\lambda_{k1} - \theta} a_{k1} \right),
\end{aligned}$$

где $j = 1, 2$, $\langle y, z \rangle := \operatorname{det}(y, z)$, причём ряды сходятся равномерно при $|x - \gamma| \geq \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$.

Лемма доказывается с использованием интегральной формулы Коши и свойств функции Вейля $M(\lambda)$, полученных в [2].

Обозначим $\tilde{P}_{ni,kj}(x) = \frac{\langle \tilde{\Phi}_2(x, \lambda_{ni}), \tilde{\Phi}_2(x, \lambda_{kj}) \rangle}{\lambda_{ni} - \lambda_{kj}} a_{kj}$, $\lambda_{k0} = \lambda_k$, $\lambda_{k1} = \tilde{\lambda}_k$,

$a_{k0} = a_k$, $a_{k1} = \tilde{a}_k$, тогда из леммы следует

$$\Phi_2(x, \lambda_{ni}) = \Phi_2(x, \lambda_{ni}) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\tilde{P}_{ni,k0}(x) \Phi_2(x, \lambda_{k0}) - \tilde{P}_{ni,k1}(x) \Phi_2(x, \lambda_{k1})). \quad (4)$$

Соотношение (4) не годится для поиска $\Phi_2(x, \lambda_{ki})$, поскольку оператор в правой части как оператор, действующий из m в m , вообще говоря, не обратим. Однако соотношение (4) можно привести к виду

$$\tilde{\Psi}_{ni}^{<m>}(x) = \Psi_{ni}^{<m>}(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\tilde{H}_{ni,k0}(x) \Psi_{k0}^{<m>}(x) - \tilde{H}_{ni,k1}(x) \Psi_{k1}^{<m>}(x)), \quad (5)$$

где $m = 1, 2$, $\tilde{\Psi}_{n0}^{<m>}(x) = \chi_n (\tilde{\Phi}_{m2}(x, \lambda_{n0}) - \tilde{\Phi}_{m2}(x, \lambda_{n1}))$, $\chi_n = \begin{cases} \xi_n^{-1}, & \xi_n \neq 0, \\ 0, & \xi_n = 0, \end{cases}$

$$\tilde{\Psi}_{n1}^{<0>}(x) = \tilde{\Phi}_{m2}(x, \lambda_{n1}),$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{n0,k0}(x) & \tilde{H}_{n0,k1}(x) \\ \tilde{H}_{n1,k0}(x) & \tilde{H}_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_{n0,k0}(x) & \tilde{P}_{n0,k1}(x) \\ \tilde{P}_{n1,k0}(x) & \tilde{P}_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Правая часть (5) определяет линейный ограниченный оператор $E + \tilde{H}(x)$, действующий из m в m . Согласно второму соотношению леммы $(E + \tilde{H}(x))(E - H(x)) = E$, если поменять ролями задачи L и \tilde{L} , то $(E - H(x))(E + \tilde{H}(x)) = E$, значит, $E + \tilde{H}(x)$ – обратимый оператор.

Соотношение (5) назовём основным уравнением обратной задачи.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы числа $\{\lambda_k, a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $a_k \neq 0$, $\lambda_k \neq \lambda_n$, ($k \neq n$) были спектральными данными для задачи $L \in W$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) (асимптотика) существует задача $\tilde{L} \in W$, что имеет место (3);

2) (условие разрешимости основного уравнения) при каждом $x \neq \gamma$ линейный ограниченный оператор $E + \tilde{H}(x)$ имеет ограниченный обратный;

$$3) (B\kappa(x) - \kappa(x)B)|x - \gamma|^{-2\operatorname{Re}\mu} \in L_1(0, \pi),$$

$$\text{где } \kappa(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_k) \Phi_2^T(x, \lambda_k) a_k - \tilde{\Phi}_2(x, \tilde{\lambda}_k) \Phi_2^T(x, \tilde{\lambda}_k) \tilde{a}_k).$$

При выполнении этих условий $Q(x) = \tilde{Q}(x) + B\kappa(x) - \kappa(x)B$, $\beta = \tilde{\beta}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горбунов О.Б. О системе Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 21 – 25.

2. Горбунов О.Б. Спектральные свойства системы Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 34 – 37.

3. Горбунов О.Б. Об обратной задаче для системы Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 37 – 39.

УДК 511.23

Г. И. Гусев, А. И. Бобылев

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ЛЕММЫ ГЕНЗЕЛЯ О ПОДЪЁМЕ РЕШЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ НЕАРХИМЕДОВЫХ ПОЛЯХ

Пусть K – локально компактное неархimedово поле нулевой характеристики, V – кольцо целых элементов данного поля, P – его максимальный идеал, π – простой элемент из K , $\operatorname{ord}_\pi(\alpha)$ – π -адический показатель элемента $\alpha \in K$. $\mathcal{I}[[X_1, \dots, X_n]]$ – кольцо формальных степенных рядов от n переменных X_1, \dots, X_n над V .

Обозначим

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_i \geq 0, \alpha_i \in \mathbf{Z}; \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in K; \\ c &= (c_1, c_2, \dots, c_n), c_i \in V; \\ X &= (X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| - l \quad \text{норма } \alpha. \quad \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_\pi,$$

где $|x_i|_\pi = \rho^{\operatorname{ord}_\pi(x_i)}$, $(0 < \rho < 1)$ – норма, соответствующая показателю ord_π .

В статье рассмотрим формальные степенные ряды

$$f(x) = \sum a_\alpha x^\alpha \in V[[x]],$$

удовлетворяющие условию

$$\lim_{|\alpha|_I \rightarrow +\infty} |a_\alpha|_\pi = 0.$$

Тогда [1] ряд $f(x)$ сходится в n -мерном шаре

$$S_n(0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in V^n\},$$

и, следовательно, $f(x)$ аналитична на компакте V^n .

Обозначим через

$$T_c(f(x)) = \sum a_\alpha^*(x - c)^\alpha$$

ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке $c \in V^n$. $t_\gamma(f) = \min_{|\alpha|_I \geq \gamma} v_\pi(a_\alpha)$,

$$t_\gamma^*(f, c) = \min_{|\alpha|_I \geq \gamma} v_\pi(a_\alpha^*), \quad \gamma \in N.$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА (об инвариантности t_γ^* относительно сдвигов).

Для аналитической функции $f(x)$ и для произвольных $c \in V^n$, $\gamma \in N$, справедливы равенства

$$t_\gamma^*(f, c) = t_\gamma(f).$$

Доказательство. Ввиду условия $c \in V^n$ произвольный коэффициент a_α^* ряда $T_c(f(x))$ является целочисленной линейной комбинацией вида

$$a_\alpha^* = \sum_{|\beta|_I \geq |\alpha|_I} n_\beta(c) a_\beta, \quad n_\beta(c) \in V, \quad (1)$$

представляющей собой ряд, сходящийся к элементу $a_\alpha^* \in V$ при любом $\alpha \in Z_0^n$, где Z_0 – множество целых неотрицательных чисел. При этом [1]

$\lim_{|\alpha|_I \rightarrow +\infty} a_\alpha^* = 0$. Аналогично выражается a_α через a_β^* :

$$a_\alpha = \sum_{|\beta|_I \geq |\alpha|_I} n_\beta^*(c) a_\beta^*, \quad n_\beta^*(c) \in V. \quad (2)$$

Тогда из (1) и (2) получаем

$$\begin{cases} \min_{|\alpha|_I \geq \gamma} v_\pi(a_\alpha^*) \geq \min_{|\alpha|_I \geq \gamma} v_\pi(a_\alpha) \\ \min_{|\alpha|_I \geq \gamma} v_\pi(a_\alpha) \geq \min_{|\alpha|_I \geq \gamma} v_\pi(a_\alpha^*) \end{cases}$$

Таким образом, для произвольных $c \in V^n$, $\gamma \in N$

$$t_\gamma^*(f, c) = t_\gamma(f).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что в точке $c \in V^n$ первый дифференциал аналитической функции $f(x)$ на компакте V^n не равен тождественно нулю. Обозначим

$$v_1(f, c) = \min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{ord}_\pi \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

и положим

$$\beta^* = \beta(f, c) = \min \{ \beta \mid v_1(f, c) < t_2(f) + \beta, \beta \in \mathbb{Z}_0 \}.$$

Тогда на компакте $K(c, \rho^{\beta^*}) = c + \pi^{\beta^*} V^n$ ряд Тейлора $T_c f$ изометрически эквивалентен своей линейной части.

ТЕОРЕМА 2 (модификация леммы Гензеля). В обозначениях теоремы 1 уравнение

$$T_c f(x) = 0$$

разрешимо в компакте $K(c, \rho^{\beta^*})$ тогда и только тогда, когда разрешимо в этом же компакте линейное уравнение

$$f(c) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(x_i - c) = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сепп Ж.П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.

УДК 517.938; 519.711.3

Е. В. Дивисенко, В. В. Можилкин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

1. Математические модели механических систем описываются краевой задачей для вектора $X(z, t)$

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + B \frac{\partial X}{\partial t} &= F(z, t, X, \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \frac{\partial^3 X}{\partial z^3}, \frac{\partial^4 X}{\partial z^4}), \\ X(z, 0) &= f(z), \quad \left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{t=0} = g(z), \\ X(0, t) &= q(t), \quad \left. \frac{\partial X}{\partial z} \right|_{z=0} = u(t), \\ X(1, t) &= v(t), \quad \left. \frac{\partial X}{\partial z} \right|_{z=1} = w(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь z – пространственная переменная, t – время. Некоторые компоненты вектора X могут зависеть только от переменной t .

Важной задачей исследования свойств решений системы (1) является определение предельных циклов и периодических решений. Одним из подходов к решению данной задачи является анализ с помощью рядов Фурье [1]. Суть этого подхода такова. Вектор X представляется отрезком ряда Фурье по переменной t . Коэффициенты ряда определяются из решения краевой задачи системы ОДУ по переменной z . Общее решение представляет собой линейную комбинацию нескольких линейно независимых частных решений однородной системы ОДУ и частного решения неоднородного уравнения в виде линейной функции. В результате подстановок строится нелинейное векторное уравнение для частоты колебаний и коэффициентов отрезка ряда Фурье, которое решается численно.

Такой подход позволяет определить периодические решения. Однако, если подобное решение не удается построить, это не гарантирует его отсутствия. Этот метод достаточно жестко навязывает структуру решения исходной краевой задачи (1), которая не может быть реализована в общем случае. Если решение нелинейной алгебраической системы не найдено, или оно не удовлетворяет физическим требованиям, формально этот факт свидетельствует только о том, что конкретный решатель не справился с задачей. Данный метод сильно усложняется при применении его к исследованию произвольных движений механических систем. Поэтому целесообразно строить приближенное решение (1) таким образом, чтобы не навязывать поведение решения во времени. Одним из возможных подходов является метод прямых.

2. Разобьём счётную область $z \in [0,1]$, $t \geq 0$ на n полос прямыми

$$z = z_i = ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = 1/n.$$

Аппроксимируем производные по пространственной переменной z конечно-разностными соотношениями

$$\left. \frac{\partial^r X}{\partial z^r} \right|_{z=ih} = \sum_{j=-p}^q a_j^r X_{i+j}, \quad X_{i+j} = X(t, z_{i+j}).$$

Центральная разностная аппроксимация производной $X_i^{(4)}$ ($2 \leq i \leq n-2$) с $p, q = 2$, коэффициентами

$$a = \left[\frac{1}{h^4}, -4 \frac{1}{h^4}, 6 \frac{1}{h^4}, -4 \frac{1}{h^4}, \frac{1}{h^4} \right]$$

имеет порядок аппроксимации $504h^4y(\xi, t)$, $z_{i-2} \leq \xi \leq z_{i+2}$.

Построим соответствующие разностные аппроксимации в окрестности границ $z = 0$, $z = 1$, учитывающие граничные условия.

Разностная аппроксимация четвёртой производной по z в точке z_1 имеет вид

$$X_1^{(4)} = \sum_{j=-1}^5 a_j X_{1+j} + b \frac{\partial X}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (2)$$

где

$$(a,b) = \left[-\frac{43}{5} \frac{1}{h^4}, 14 \frac{1}{h^4}, -\frac{13}{2} \frac{1}{h^4}, \frac{4}{9} \frac{1}{h^4}, \frac{1}{h^4}, -\frac{2}{5} \frac{1}{h^4}, \frac{1}{18} \frac{1}{h^4}, -\frac{14}{3} \frac{1}{h^3} \right].$$

Разностная аппроксимация четвёртой производной по z в точке z_{n-1} имеет вид

$$X_{n-1}^{(4)} = \sum_{j=-5}^1 a_j X_{1+j} + b \frac{\partial X}{\partial z} \Big|_{z=1}. \quad (3)$$

Её коэффициенты

$$(a,b) = \left[\frac{1}{18} \frac{1}{h^4}, -\frac{2}{5} \frac{1}{h^4}, \frac{1}{h^4}, \frac{4}{9} \frac{1}{h^4}, -\frac{13}{2} \frac{1}{h^4}, 14 \frac{1}{h^4}, -\frac{43}{5} \frac{1}{h^4}, \frac{14}{3} \frac{1}{h^3} \right].$$

Порядок аппроксимации соотношений (2), (3) равен $2184h^4 y(\xi, t)$, для (2) $\xi \in [0, 2h]$, а для (3) $\xi \in [1, 1-2h]$.

Для аппроксимации вторых и третьих производных от X по z воспользуемся следующими соотношениями.

Граница $z=0$. Разностная аппроксимация имеет вид

$$\frac{\partial^r X}{\partial z^r} \Big|_{z=ih} = \sum_{j=0}^q a_j^r X_j + b \frac{\partial X}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Для аппроксимации второй производной с четвёртым порядком справедлива формула с $q=3$ и коэффициентами

$$(a,b) = \left[-\frac{415}{72} \frac{1}{h^2}, 8 \frac{1}{h^2}, -3 \frac{1}{h^2}, 9 \frac{1}{h^2}, -\frac{1}{8} \frac{1}{h^2}, -\frac{25}{6} \frac{1}{h} \right].$$

Её погрешность аппроксимации равна $-48h^4 y(t, \xi)$, $\xi \in [0, 4h]$.

Граница $z=1$. Разностная аппроксимация имеет вид

$$\frac{\partial^r X}{\partial z^r} \Big|_{z=ih} = \sum_{j=-p}^0 a_j^r X_{n+j} + b \frac{\partial X}{\partial z} \Big|_{z=1}.$$

Для аппроксимации второй производной с четвёртым порядком получается формула с $p=4$ и коэффициентами

$$(a,b) = \left[-\frac{1}{8} \frac{1}{h^2}, \frac{8}{9} \frac{1}{h^2}, -3 \frac{1}{h^2}, 8 \frac{1}{h^2}, -\frac{415}{72} \frac{1}{h^2}, \frac{25}{6} \frac{1}{h} \right].$$

Её погрешность аппроксимации равна $-48h^4 y(t, \xi)$, $\xi \in [1-4h, 1]$.

Для аппроксимации третьей производной с четвёртым порядком получается формула с $p=5$ и коэффициентами

$$(a,b) = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{h^3}, -\frac{61}{16} \frac{1}{h^3}, 13 \frac{1}{h^3}, -\frac{107}{4} \frac{1}{h^3}, \frac{77}{2} \frac{1}{h^3}, -\frac{343}{16} \frac{1}{h^3}, \frac{45}{4} \frac{1}{h^2} \right].$$

Её погрешность аппроксимации равна $-1644h^4 y(t, \xi)$, $\xi \in [1-4h, 1]$.

В результате подстановки разностных формул в краевую задачу (1) получим задачу Коши для системы ОДУ вида

$$\begin{aligned} A\ddot{X}_i + B\dot{X}_i &= F(z_i, t, X_1, \dots, X_{n-1}), \\ X_i(0) = f_i, \quad \dot{X}_i &= g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта задача Коши решается любым численным методом для ОДУ.

Система (4) может быть исследована аналитически. Легко определить её особые точки и поведение решения в их окрестности. Это позволяет качественно оценить поведение динамической системы, не ограничиваясь задачами нахождения предельных циклов и периодических решений.

Применение методов теории катастроф [2] к анализу системы (4) позволит получить информацию о характере переходных процессов в механической системе.

Данная методика была реализована программно в системе MatLab и была успешно применена к исследованию динамики упругого манипулятора.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андрейченко К.П., Андрейченко Д.К. Математическое моделирование динамических систем. Саратов, 2000.
2. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1980.

УДК 519.85

А. С. Дудова

УСЛОВИЯ ЗВЁЗДНОСТИ ЛЕБЕГОВА МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИИ*

1. Давно известное в действительном и комплексном анализе понятие звёздного множества ныне активно используется в рамках абстрактного выпуклого анализа [1]. Напомним, что множество $A \subset R^n$ называется звёздным относительно точки $x^* \in A$, если

$$x^* + \alpha(x - x^*) \in A, \quad \forall x \in A, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Это – широкий класс множеств, включающий в себя выпуклые множества, конусы, объединение выпуклых множеств с непустым пересечением. Операции сложения, умножения на число сохраняют звёздность. Кроме того, если у некоторых звёздных множеств есть общие точки звёздности, то есть относительно которых они являются звёздными, то пересечение и объединение таких множеств также будет звёздным. Это говорит о том, что с та-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

кими множествами можно конструктивно работать и, в частности, рассматривать экстремальные задачи, в которых допустимые множества аргументов являются звёздными.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на R^n и для некоторого фиксированного числа λ её нижнее лебегово множество $G(\lambda) = \{x \in R^n : f(x) \leq \lambda\}$ не пусто, а точка $x^* \in G(\lambda)$. Получим условия звёздности множества $G(\lambda)$ относительно точки x^* при дополнительном предположении о дифференцируемости по направлениям функции $f(x)$ в точках множества уровня $C(\lambda) = \{x \in R^n : f(x) = \lambda\}$. Договоримся далее понимать под

$$f'(x, g) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [f(x + \alpha g) - f(x)],$$

$$\gamma_f(x) = \{g \in R^n : f'(x, g) < 0\}, \quad \gamma_{1,f}(x) = \{g \in R^n : f'(x, g) \leq 0\}.$$

2. Необходимое условие звёздности даёт

ТЕОРЕМА 1. Если множество $G(\lambda)$ является звёздным относительно точки $x^* \in G(\lambda)$, то

$$f'(x, x^* - x) \leq 0, \quad \forall x \in C(\lambda). \quad (1)$$

Доказательство. По условию теоремы для любой точки $x \in C(\lambda)$ выполняются соотношения: $f(x) = \lambda$, $f(x + \alpha(x^* - x)) \leq \lambda$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Отсюда следует неравенство $f(x + \alpha(x^* - x)) - f(x) \leq 0$, поделив левую и правую части которого на α и выполнив операцию \lim при $\alpha \downarrow 0$, получим (1). \square

Теперь получим достаточные условия звёздности.

ТЕОРЕМА 2. Если точка $x^* \in G(\lambda)$ такова, что для любой точки $x \in C(\lambda)$ выполняется хотя бы одно из условий:

- a) $f'(x, x^* - x) < 0,$
- б) $f'(x, x^* - x) \leq 0, \quad \bar{\gamma}_f(x) = \gamma_{1,f}(x),$

то множество $G(\lambda)$ является звёздным относительно точки x^* .

Доказательство. 1. Предположим противное, то есть найдётся точка $x_0 \in G(\lambda)$ и точка $y \in (x^*, x_0)$, в которой $f(y) > \lambda$. Поскольку функция $f(\cdot)$ является непрерывной, то существует $r > 0$ такое, что

$$f(x) > \lambda, \quad \forall x \in B(y, r) = \{x \in R^n : \|x - y\| \leq r\} \quad (2)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Нетрудно видеть [2], что функция

$$F(t) = \min_{x \in B(y, r)} f(x + t(x_0 - x^*))$$

является непрерывной по $t \in R$. Следовательно, поскольку

$$F\left(\|y - x_0\|/\|x_0 - x^*\|\right) = \min_{x \in B(x_0, r)} f(x) \leq \lambda$$

и в силу (2) имеем $F(0) = \min_{x \in B(y, r)} f(x) > \lambda$, то существует $t_0 \in [0, \|y - x_0\|/\|x_0 - x^*\|]$ такое, что

$$F(t_0) = \lambda, \quad F(t) > \lambda, \quad \forall t \in [0, t_0]. \quad (3)$$

Обозначим через $y(t_0) \in B(y + t_0(x_0 - x^*), r)$: $F(t_0) = f(y(t_0)) = \lambda$.

Нетрудно показать, что из (3) следует

$$\|y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0)\| = r. \quad (4)$$

2. Теперь докажем, что

$$\langle y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0), x^* - y(t_0) \rangle > 0. \quad (5)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - операция скалярного произведения.

Очевидно, что вектора $x_0 - x^*$ и $y + t_0(x_0 - x^*) - x^*$ являются сопротивленными, то есть существует $\alpha > 0$ такое, что

$$x_0 - x^* = \alpha(y + t_0(x_0 - x^*) - x^*).$$

Поэтому, если предположить, что неравенство (5) неверно, то, используя (4), получаем

$$\begin{aligned} \langle x_0 - x^*, y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0) \rangle &= \alpha \langle y + t_0(x_0 - x^*) - x^*, y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0) \rangle = \\ &= \alpha \|y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0)\|^2 - \alpha \langle y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0), x^* - y(t_0) \rangle > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

С другой стороны, для точки $c(\varepsilon) = y + (t_0 - \varepsilon)(x_0 - x^*)$ имеем

$$\begin{aligned} \|c(\varepsilon) - y(t_0)\|^2 &= \|y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0)\|^2 - 2\varepsilon \langle x_0 - x^*, y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0) \rangle + \\ &\quad + \varepsilon^2 \|x_0 - x^*\|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (5), (6) и (7) следует, что при достаточно малых положительных ε выполняется $\|c(\varepsilon) - y(t_0)\| < r$. Отсюда вытекает

$$F(t_0 - \varepsilon) \min_{x \in B(y, r)} f(x + (t_0 - \varepsilon)(x_0 - x^*)) = \min_{x \in B(c(\varepsilon), r)} f(x) \leq f(y(t_0)) = \lambda,$$

что противоречит (3). Неравенство (5) доказано.

3. Непосредственно из (4) и (5) следует, что при достаточно малых положительных β выполняется

$$\|y(t_0) + \beta(x^* - y(t_0) - y - t_0(x_0 - x^*))\| < r.$$

Отсюда следует вывод, что найдутся $\beta_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$y(t_0) + \beta g \in B(y + t_0(x_0 - x^*), r), \quad \forall \beta \in (0, \beta_0), \quad g \in B(x^* - y(t_0), \varepsilon). \quad (8)$$

Так как в соответствии с (4) имеем $F(t_0) = \min_{x \in B(y + t_0(x_0 - x^*), r)} f(x) = \lambda$, то в силу (8) получаем

$$f(y(t_0) + \beta g) \geq \lambda, \quad \forall \beta \in (0, \beta_0), \quad g \in B(x^* - y(t_0), \varepsilon).$$

Отсюда, если учесть, что $f(y(t_0)) = \lambda$, имеем

$$f'(y(t_0), g) \geq 0, \quad \forall g \in B(x^* - y(t_0), \varepsilon).$$

Теперь легко сделать вывод, что

$$f'(y(t_0), x^* - y(t_0)) \geq 0, \quad \bar{\gamma}_f(y(t_0)) \neq \gamma_{1,f}(y(t_0)),$$

то есть ни одно из условий теоремы не выполняется. \square

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Rubinov A. Abstract Convexity and Global Optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
2. Дем'янов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

УДК 517.54

А. М. Захаров, Д. В. Прохоров

СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ*

Пусть S – класс голоморфных однолистных в единичном круге U функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad z \in U. \quad (1)$$

Проблема коэффициентов однолистных функций заключается в исследовании множеств значений систем начальных коэффициентов разложения (1). Настоящая статья посвящена описанию характера седловой точки множества $V_3 = \{(\operatorname{Re} a_2, \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Re} a_3) : f \in S\}$, доставляемой функцией

$$K_2(z) = \frac{z}{1 - z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1} \in S.$$

Функция K_2 соответствует точке $(0,0,1)$ на границе множества V_3 [1, с. 205]. Все граничные точки множества V_3 являются граничными точками множества достижимости управляемой системы, порождённой уравнением Левнера [2]. Поэтому они могут быть найдены при помощи процесса оптимизации. Те из граничных точек, которые описываются скользящим оптимальным режимом, выражаются как значение $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ решения управляемой системы дифференциальных уравнений [2]

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01-01-00123) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -2[\lambda \cos u_1 + (1-\lambda) \cos u_2], \quad x_1(0) = 0, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2[\lambda \sin u_1 + (1-\lambda) \sin u_2], \quad x_2(0) = 0, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -4x_1[\lambda \cos u_1 + (1-\lambda) \cos u_2] - 4x_2[\lambda \sin u_1 + (1-\lambda) \sin u_2] + \\ &\quad + 2(t-1)[\lambda \cos 2u_1 + (1-\lambda) \cos 2u_2], \quad x_3(0) = 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$, с непрерывными управляемыми функциями u_1 и u_2 .

Обозначив правые части системы (2) через

$$\lambda g_k(t, x, u_1) + (1-\lambda)g_k(t, x, u_2), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad k = 1, 2, 3,$$

составим функцию Гамильтона $H(t, x, \Psi, u) = \sum_{k=1}^3 g_k(t, x, u)\Psi_k$, где

$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$, $\Psi_3 = 1$, а Ψ_1 и Ψ_2 являются решением сопряжённой системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_1}{dt} &= 4[\lambda \cos u_1 + (1-\lambda) \cos u_2], \\ \frac{d\Psi_2}{dt} &= 4[\lambda \sin u_1 + (1-\lambda) \sin u_2].\end{aligned}\tag{3}$$

Непрерывные управления u_1 и u_2 удовлетворяют принципу максимума Понтрягина вдоль оптимальной траектории $x(t)$.

Точки $(0, 0, 1)$ на границе множества V_3 , доставляемой функцией K_2 , соответствуют значениям $\lambda = 1/2$, $u_1 = \pi/2$ и $u_2 = -\pi/2$ в системе (2), откуда следует, что $x_1(t) = x_2(t) = 0$ и $x_3(t) = 2t - t^2$, $0 \leq t \leq 1$. Этим значениям параметров λ , u_1 и u_2 отвечают нулевые сопряжённые координаты $\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = 0$. Условие $(\Psi_1(1), \Psi_2(1), \Psi_3(1)) = (0, 0, 1)$ означает [3], что в точке $(0, 0, 1)$ на границе множества V_3 вектор $(0, 0, 1)$ является нормалью к граничной поверхности множества V_3 . Точка $(0, 0, 1) \in V_3$, доставляемая функцией K_2 , не может быть локально экстремальной для функционала $L(f) = \operatorname{Re} a_3$, а только седловой, поскольку функция K_2 отображает единичный круг U на плоскость с двумя разрезами, тогда как экстремальные функции имеют в качестве образа круга U плоскость с одним разрезом [4].

Исследуем характер седловой точки $(0, 0, 1) \in V_3$. Границные точки множества V_3 из окрестности точки $(0, 0, 1)$ описываются при помощи варьирования параметров λ , $\xi_1 = \Psi_1(0)$ и $\xi_2 = \Psi_2(0)$ в системах (2), (3) с условиями сохранения скользящего режима [2].

ЛЕММА 1. Условие достижения максимума функции Гамильтона $H(0, 0, \xi, u)$, $\xi = \Psi(0)$, в двух точках на отрезке $[-\pi, \pi]$ возможно лишь при $\xi_2 = \Psi_2(0) = 0$.

Доказательство леммы 1 проводится элементарными средствами, поскольку $H(0,0,\xi,u)$ является тригонометрическим многочленом второго порядка относительно u .

Таким образом, согласно лемме 1 окрестность точки $(0,0,1)$ на границе множества V_3 параметризуется переменными (p,q) из окрестности точки $(0,0)$, где $\lambda = 1/2 + p$ и $\xi_1 = \Psi_1(0) = q$.

Для (p,q) из окрестности точки $(0,0)$ рассмотрим функцию

$$F: (p,q) \rightarrow x_3(1), F(0,0) = 1,$$

где $p = \lambda - 1/2$ и $q = \Psi_1(0)$ в системах (2), (3). Функция F является локальным параметрическим представлением граничной поверхности множества V_3 . Седловой характер точки $(0,0,1) \in V_3$ описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. Функция F имеет в точке $(0,0)$ локальный максимум по переменному p и локальный минимум по переменному q .

Доказательство. Дифференцируя третье уравнение системы (2) по p и q в точке $(0,0)$, находим, что

$$\frac{d(x_3)_p}{dt} \Big|_{(p,q)=(0,0)} = \frac{d(x_3)_q}{dt} \Big|_{(p,q)=(0,0)} = 0,$$

откуда следует, что $(x_3)_p(t) = (x_3)_q(t) = 0$ в точке $(p,q) = (0,0)$.

Вторично дифференцируя третье уравнение системы (2) по p и q в точке $(0,0)$, находим, что

$$\frac{d(x_3)_{pp}}{dt} \Big|_{(p,q)=(0,0)} = 8(x_1)_p(u_1)_p - 16(x_2)_p + 8(t-1)(u_1)_p^2, \quad (x_3)_{pp}(0) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d(x_3)_{qq}}{dt} \Big|_{(p,q)=(0,0)} = 8(x_1)_q(u_1)_q + 8(t-1)(u_1)_q^2, \quad (x_3)_{qq}(0) = 0. \quad (5)$$

Для нахождения частных производных $(u_1)_p$ и $(u_1)_q$ воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Оптимальное управление u_1 при всех (p,q) является корнем уравнения $H_u(t,x,\Psi,u) = 0$. Дифференцируя функцию Гамильтона H по p и q , из последнего уравнения находим, что

$$(u_1)_p = -\frac{(\Psi_1)_p + 2(x_1)_p}{4(t-1)}, \quad (u_1)_q = \frac{(\Psi_1)_q + 2(x_1)_q}{4(t-1)}. \quad (6)$$

Осталось найти частные производные функций x_1 , x_2 , Ψ_1 по переменным p и q .

Сравнивая первые уравнения систем (2) и (3) с начальным условием $\Psi_1(0) = q$, заключаем, что

$$\Psi_1 = -2x_1 + q, \quad (7)$$

откуда следует, что $(\Psi_1)_p(t) = -2(x_1)_p(t)$. Подставляя это значение в (6),

находим, что $(u_1)_p(t) = 0$. Дифференцируя второе уравнение системы (2) по p , получим дифференциальное уравнение

$$\left. \frac{d(x_2)_p}{dt} \right|_{(p,q)=(0,0)} = 4, \quad (x_2)_p(0) = 0,$$

которое приводит к вычислению частной производной $(x_2)_p(t) = 4t$. Подставляя найденное выражение в (4), элементарными вычислениями находим, что $(x_3)_{pp}(1) = -32$. Отрицательное значение частной производной $(x_3)_{pp}(1)$ при нулевой частной производной $(x_3)_p(1) = 0$ означает наличие локального максимума функции F по переменному p в точке $(p, q) = (0, 0)$.

Аналогично из равенства (7) следует, что $(\Psi_1)_q(t) = -2(x_1)_q(t) + 1$.

Подставляя это значение в (6), находим, что $(u_1)_q(t) = \frac{-1}{4(t-1)}$.

Дифференцируя первое уравнение системы (2) по q , получим дифференциальное уравнение

$$\left. \frac{d(x_1)_q}{dt} \right|_{(p,q)=(0,0)} = \frac{-1}{2(t-1)}, \quad (x_1)_q(0) = 0,$$

которое приводит к вычислению на отрезке $[0, 1]$ частной производной $(x_1)_q(t) = (-\log(1-t))/2$. Подставляя найденное выражение в (5), элементарными вычислениями находим, что

$$(x_3)_{qq}(t) = 2\log^2(1-t) + \frac{1}{2}\log(1-t). \quad (8)$$

Положительное значение частной производной $(x_3)_{qq}(t)$ для всех t , как угодно близких к 1, при нулевой частной производной $(x_3)_q(1) = 0$ означает наличие локального минимума функции F по переменному q в точке $(p, q) = (0, 0)$, что заканчивает доказательство теоремы 2.

Замечание. Из формулы для частной производной $(x_1)_q(t)$ и (8) следует, что граничная поверхность множества V_3 не является гладкой в точке $(0, 0, 1)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
2. Прохоров Д.В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659 – 1677.
3. Прохоров Д.В. Геометрические методы в проблеме коэффициентов аналитических функций // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Саратов, 2001. Т.1, вып. 2. С. 43 – 55.
4. Duren P. Univalent functions. N.Y.; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1983.

М. Ю. Игнатьев

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ НА ПОЛУОСИ*

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x, x > 0; \quad (1)$$

$$q(0, t) = q_{xx}(0, t) = 0; \quad (2)$$

$$q(x, 0) = q_0(x). \quad (3)$$

Уравнение Кортевега-де Фриза (1) относится к числу уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния, который позволяет эффективно решать задачу Коши на всей оси. Смешанные задачи для таких уравнений активно изучаются в последние годы. Их исследование связано с целым рядом принципиальных трудностей и потребовало развития новых подходов [1]. Наибольший интерес вызывают задачи, которые могут быть решены с помощью соответствующих модификаций метода обратной задачи рассеяния. В частности, в работе [2] изучалась и была в основном решена задача (1) – (3) в классе функций, быстро убывающих при $x \rightarrow \infty$. В настоящей статье на основе подхода, предложенного в [2], и методов теории обратных задач для гиперболических уравнений предлагается процедура, позволяющая при выполнении некоторых условий построить решение задачи (1) – (3) и не налагающая никаких ограничений на поведение решения при $x \rightarrow \infty$.

Алгоритм 1.

1. Найти функцию $u(x, \xi)$, $0 \leq x \leq \xi < \infty$ из уравнения

$$u(x, \xi) + \frac{1}{2} \int_0^x q_0(s) ds \int_s^{\xi+x} u(s, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_x^{\xi+x} q_0(s) ds \int_s^{\xi+x-s} u(s, \tau) d\tau = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Подсчитать функцию $r_0(\xi) := -2u_x(0, \xi)$, $\xi \geq 0$.

2. Найти функцию $V(t, \xi)$, $t, \xi \geq 0$, являющуюся решением задачи

$$\begin{cases} V_t = 4V_{\xi\xi\xi}; \\ V(0, \xi) = r_0(\xi); \\ V(t, 0) = V_\xi(t, 0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Подсчитать функцию $m(t) := 4V_{\xi\xi}(t, 0)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1) и Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).

3. Найти $K_1(t, \xi), K_2(t, \xi)$, $t > 0, -t < \xi < t$, решая при каждом фиксированном $t > 0$ систему уравнений

$$\begin{cases} K_1(t, \xi) = \int_{-\xi}^t K_2(t, \tau) m(\xi + \tau) d\tau + m(\xi + t), \\ K_2(t, \xi) = \int_{-\xi}^t K_1(t, \tau) m(\xi + \tau) d\tau. \end{cases} \quad (6)$$

Подсчитать для всех $t, \xi \geq 0$

$$\begin{aligned} Q_1(t, \xi) &:= \int_{-t}^t K_1(t, \tau) V(t + \tau, \xi) d\tau, \\ Q_2(t, \xi) &:= \int_{-t}^t K_2(t, \tau) V(t + \tau, \xi) d\tau + V(2t, \xi). \end{aligned} \quad (7)$$

4. Найти $r(t, \xi)$, $t > 0, \xi \geq 0$, решая при каждом фиксированном $t > 0$ свёрточное уравнение

$$r(t, \xi) = \int_0^\xi Q_1(t, \xi - s) r(t, s) ds + Q_2(t, \xi). \quad (8)$$

5. Найти $K(x, \xi, t)$, $t > 0, x > 0, -x < \xi < x$, решая при каждом фиксированном $t > 0$ и каждом фиксированном $x > 0$ уравнение

$$K(x, \xi, t) = \int_{-\xi}^x K(x, s, t) r(t, \xi + s) ds + r(t, \xi + x), \quad \xi \in [-x; x]. \quad (9)$$

Найти $q(x, t) := 2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть:

1) существует решение задачи (5), непрерывное вместе с производными $V_t, \partial^j V / \partial \xi^j$, $j = \overline{1, 4}$ при $\xi \geq 0, t \geq 0$;

2) уравнения (6) и (9) однозначно разрешимы при каждом $t > 0$ и каждого $t > 0, x > 0$ соответственно.

Тогда $q(x, t)$, построенная по алгоритму 1, является решением задачи (1) – (3).

Доказательство теоремы основывается на приводимых ниже леммах. Для удобства записи условимся в обозначениях. Точка над символом всюду далее обозначает производную по времени t . Штрих в обозначении функций $V(t, \xi), K_1(t, \xi), K_2(t, \xi), Q_1(t, \xi), Q_2(t, \xi), r(t, \xi)$ от переменных (t, ξ) – производную по ξ .

ЛЕММА 1. Справедливы соотношения

$$\begin{cases} \dot{K}_1 - K'_1 = v(t)K_2 \\ \dot{K}_2 + K'_2 = v(t)K_1 \end{cases}, \text{ где } v(t) = 2K_1(t,t).$$

ЛЕММА 2. Справедливы соотношения

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = v(t)Q_2 \\ \dot{Q}_2 = v(t)Q_1 + 8Q''_2 \end{cases},$$

$$Q_1^{(j)}(t,0) = 0, j = 0, 1, 3, Q_2^{(j)}(t,0) = 0, j = 0, 1, 3, Q''_2(t,0) = \frac{1}{8}v(t).$$

ЛЕММА 3.

$$r(t,0) = r'(t,0) = 0, r''(t,0) = \frac{1}{8}v(t), r'''(t,0) = 0, \dot{r} - 8r''' = vr * r,$$

где свёртка – по ξ , т.е. $(r * r)(t, \xi) = \int_0^\xi r(t, \xi - s)r(t, s)ds$.

ЛЕММА 4. Функция

$$M(x, \xi, t) := L(x, \xi, t) - 3q(x, t)[K_x + K_\xi](x, \xi, t) - v(t)K(x, \xi, t),$$

где $L := \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^3 K - \dot{K}$ является решением однородного уравнения

$$M(x, \xi, t) = \int_{-\xi}^x M(x, s, t)r(t, \xi + s)ds.$$

ЛЕММА 5. $q_0(x) = 2 \frac{d}{dx} K_0(x, x)$, где $K_0(x, \xi), x > 0, \xi \in [-x; x]$ – решение уравнения

$$K_0(x, \xi) = \int_{-\xi}^x K_0(x, s)r_0(\xi + s)ds + r_0(\xi + x), \quad (10)$$

причём уравнение (10) однозначно разрешимо для каждого $x > 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Fokas A.S. Differential Forms, Spectral Theory, and Boundary Value Problems // Contemporary Mathematics: Proc. of an AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on the Legacy of Inverse Scattering Transform in Nonlinear Wave Propagation. Mount Holyoke College, South Hadley, MA, June 17-21, 2001. Providence, Rhode Island, 2001. Vol. 301. The Legacy of the Inverse Scattering Transform in Applied Mathematics. P. 69 – 92.
2. Хабибуллин И.Т. Начально-краевая задача для уравнения КдФ на полуоси с однородными краевыми условиями // ТМФ. 2002. Т. 130, вып. 1. С 31 – 53.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ P -ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТАХ*

В статье изучаются алгебраические свойства проективно-планарных (сокращенно P -планарных) автоматов. Под P -планарным автоматом будем понимать полугрупповой структурированный автомат [1] $A=(X,\Gamma,X',\delta,\eta)$ с множеством состояний X , наделённым структурой проективной плоскости [2] $\Pi=(X,L)$, множеством выходных сигналов X' , наделённым структурой проективной плоскости $\Pi'=(X',L')$, полугруппой входных сигналов Γ , функцией переходов δ и функцией выходных сигналов η , удовлетворяющих известным аксиомам полугруппового автомата [1]. При этом для любого $\gamma \in \Gamma$ функция переходов $\delta_\gamma: x \mapsto \delta(x, \gamma)$ ($x \in X$) является эндоморфизмом проективной плоскости Π , а функция выходных сигналов $\eta_\gamma: x \mapsto \eta(x, \gamma)$ ($x \in X$) является гомоморфизмом проективной плоскости Π в проективную плоскость Π' . Обозначать такой автомат будем также символом $A=(\Pi,\Gamma,\Pi',\delta,\eta)$.

Важный пример P -планарного автомата даёт универсальный P -планарный автомат $\text{Atm}(\Pi,\Pi')=(\Pi,\text{End}\Pi \times \text{Hom}(\Pi,\Pi'),\Pi',\delta,\eta)$. Множеством состояний такого автомата является проективная плоскость $\Pi=(X,L)$ с множеством точек X , множеством выходных сигналов – проективная плоскость $\Pi'=(X',L')$ с множеством точек X' . Полугруппой его входных сигналов является полугруппа Γ пар отображений $(\phi,\psi) \in \text{End}\Pi \times \text{Hom}(\Pi,\Pi')$ с операцией умножения $(\phi,\psi) \cdot (\phi_1,\psi_1) = (\phi_1 \circ \phi, \psi_1 \circ \psi)$. Функция переходов δ и функция выходных сигналов η определяются по формулам: $\delta(x, \gamma) = \phi(x)$, $\eta(x, \gamma) = \psi(x)$ при любых $x \in X$, $\gamma \in \Gamma$, где $\gamma = (\phi, \psi)$.

Очевидно, что автомат $\text{Atm}(\Pi,\Pi')$ является P -планарным автоматом. Более того, этот автомат является универсальным притягивающим объектом в категории P -планарных автоматов с множеством состояний Π и множеством выходных сигналов Π' , т.е. обладает следующим универсальным свойством: для всякого P -планарного автомата $A=(\Pi,\Gamma,\Pi',\delta,\eta)$ существует и притом единственный гомоморфизм по входным сигналам [1] этого автомата в автомат $\text{Atm}(\Pi,\Pi')$.

Пусть Γ – полугруппа пар отображений (ϕ,ψ) , где ϕ – преобразование множества X , а ψ – отображение множества X в множество X' . Тогда Γ определяет на множествах X и X' следующие канонические отношения:

$$\lambda_\Gamma = \cup \{ \phi^3 | (\phi,\psi) \in \Gamma, \text{ для некоторого } \psi \};$$

$$\chi_\Gamma = \cup \{ \psi^3 | (\phi,\psi) \in \Gamma, \text{ для некоторого } \phi \};$$

$$R_\Gamma = \{ (x_1, x_2, x_3) \in X^3 : X^3 / \Delta_{X'} \subset \lambda_\Gamma^{-1}(x_1, x_2, x_3) \};$$

* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

$\mathcal{Q}_\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 : X^3 \subset \lambda_\Gamma(x_1, x_2, x_3)\};$
 $R'_\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 : X^3 / \Delta_{x^3} \subset \chi_\Gamma^{-1}(x_1, x_2, x_3)\}; Q'_\Gamma = X^3 \setminus R'_\Gamma,$

где $\varphi^3(x_1, x_2, x_3) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3));$

$\lambda_\Gamma^{-1} = \cup \{(\varphi^{-1})^3 | (\varphi, \psi) \in \Gamma, \text{ для некоторого } \psi\};$

$\Delta_X^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 : x_i = x_j, \text{ для некоторых } 1 \leq i \neq j \leq 3\}.$

Алгебраические системы $M_\Gamma = (X, R_\Gamma)$ и $M'_\Gamma = (X', R'_\Gamma)$ будем называть каноническими релятивами полугруппы Γ .

Полугруппу пар отображений Γ будем называть 3-ограниченно замкнутой, если она содержит все такие пары отображений (φ, ψ) , где φ – преобразование множества X , ψ – отображение множества X в X' , что для любого трехэлементного множества $Y \subset X$ выполняются равенства $\varphi|Y = \psi_1|Y \text{ и } \psi|Y = \psi_2|Y$ при некоторых $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in \Gamma$.

Для некоторого тернарного отношения R на множестве X множество $Y \subset X$ называется R -связным, если $Y^3 \subset R$.

Тернарное отношение $R \subset X^3$ будем называть эквивалентностью на множестве X , если оно удовлетворяет следующим условиям:

(T1) $(x, x, x) \in R$ для любого $x \in X$;

(T2) $(x_1, x_2, x_3) \in R \Rightarrow (x_2, x_1, x_3), (x_1, x_3, x_2) \in R$;

(T3) для любых попарно различных элементов $x_1, x_2 \in X$ и любых $x, y \in X$ $(x, x_1, x_2), (x_2, x_1, y) \in R \Rightarrow (x, x_1, y) \in R$.

При этом эквивалентность R называется нетривиальной, если выполняется условие

(T4) $R \neq X^3$,

и квазиуниверсальной, если выполняется условие

(T5) для любых $x_1, x_2 \in X$ найдётся такой элемент $x_3 \in X$, что $(x_1, x_2, x_3) \in R$.

Для произвольной проективной плоскости $\Pi = (X, L)$ определим отношение коллинеарности по следующей формуле:

$B(\Pi) = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 : \text{точки } x_1, x_2, x_3 \text{ принадлежат некоторой прямой } l \in L\}.$

ЛЕММА. Пусть $\Pi = (X, L)$ и $\Pi' = (X', L')$ – проективные плоскости и Γ – полугруппа входных сигналов универсального P -планарного автомата $\text{Atm}(\Pi, \Pi')$. Тогда канонические отношения R_Γ и R'_Γ полугруппы Γ удовлетворяют следующим условиям:

1) отношения коллинеарности точек $B(\Pi)$ и $B(\Pi')$ совпадают, соответственно, с каноническими отношениями R_Γ и R'_Γ полугруппы Γ ;

2) отношения R_Γ и R'_Γ являются нетривиальными квазиуниверсальными эквивалентностями на множествах X и X' , соответственно;

3) множество $Y \subset X$ в том и только том случае является прямой проективной плоскости Π , если оно является максимальным R_Γ -связным множеством;

4) множество $Y \subset X'$ в том и только том случае является прямой проективной плоскостью Π' , если оно является максимальным R'_Γ -связным множеством;

5) для любого преобразования φ множества X , условие $\varphi \in \text{End}\Pi$ равносильно тому, что $\varphi^3(R_\Gamma) \subset R_\Gamma$;

6) для любого отображения ψ множества X в множество X' , условие $\psi \in \text{Hom}(\Pi, \Pi')$ равносильно тому, что $\psi^3(R'_\Gamma) \subset R'_\Gamma$;

7) для любого преобразования φ множества X , условие $\varphi \in \text{End}\Pi$ равносильно тому, что для всех $Y \subset X$, удовлетворяющих условию $|Y| \leq 3$, найдется $(\varphi_1, \psi_1) \in \Gamma$, для которой выполняется равенство $\varphi|Y = \varphi_1|Y$;

8) для любого отображения ψ множества X в множество X' , условие $\psi \in \text{Hom}(\Pi, \Pi')$ равносильно тому, что для всех $Y \subset X$, удовлетворяющих условию $|Y| \leq 3$, найдется $(\varphi_2, \psi_2) \in \Gamma$, для которой выполняется равенство $\psi|Y = \psi_2|Y$.

Основной результат статьи посвящён решению задачи конкретной характеризации универсальных P -планарных автоматов.

ТЕОРЕМА. Пусть $A = (X, \Gamma, X', \delta, \eta)$ полугрупповой автомат и Γ рассматривается как полугруппа пар отображений (φ, ψ) , где φ – преобразование множества X , ψ – отображение множества X в X' . Тогда A в том и только том случае является универсальным P -планарным автоматом $\text{Atm}(\Pi, \Pi')$ для некоторых проективных плоскостей $\Pi = (X, L)$ и $\Pi' = (X', L')$, если выполняются следующие условия:

1) полугруппа Γ является 3-ограниченно замкнутой;

2) канонические отношения R_Γ и R'_Γ являются нетривиальными квазиуниверсальными эквивалентностями на множествах X и X' соответственно;

3) для любой пары $(\varphi, \psi) \in \Gamma$ и любых $(x_1, x_2, x_3) \in X$ выполняются свойства:

$$(x_1, x_2, x_3) \in R_\Gamma \Rightarrow \varphi^3(x_1, x_2, x_3) \in R_\Gamma,$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in R_\Gamma \Rightarrow \psi^3(x_1, x_2, x_3) \in R'_\Gamma.$$

Причём в этом случае существует единственный (с точностью до изоморфизма) универсальный P -планарный автомат с множеством состояний X и множеством выходных сигналов X' , для которого полугруппа пар отображений Γ является полугруппой входных сигналов.

Нетривиальной частью доказательства теоремы является проверка достаточности ее условий. Если полугруппа Γ является 3-ограниченно замкнутой и её канонические отношения R_Γ, R'_Γ удовлетворяют условиям 1) – 3), то эти отношения определяют проективные плоскости $\Pi = (X, L)$ и $\Pi' = (X', L')$, множествами прямых которых являются множества всех максимальных R_Γ -связных и R'_Γ -связных множеств соответственно. Чтобы показать, что $\Gamma = \text{End}\Pi \times \text{Hom}(\Pi, \Pi')$, достаточно проверить равенства $\text{End}\Pi = \text{End}M_\Gamma$ и $\text{Hom}(\Pi, \Pi') = \text{Hom}(M_\Gamma, M'_\Gamma)$. Доказательство первого равен-

ства аналогично доказательству теоремы в [3]. Включение $\Gamma \subset \text{Hom}(M_\Gamma, M'_\Gamma)$ следует из условия 8) леммы. Обратное включение доказывается с помощью аксиом проективной плоскости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гвардия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.
2. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970.
3. Ишина С.И. Об универсальных проективно-планарных автоматах // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 54 – 58.

УДК 515.126.83

А. Б. Коноплев

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧЕК ДО ОБРАЗОВ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $X = R^n, Y = R^m, Z = X \times Y, F : X \rightarrow 2^Y$ – многозначное отображение с замкнутыми образами. Рассмотрим функцию расстояния (ФР) от точек до образов многозначного отображения в произвольной норме

$$d_F(z) = \inf_{v \in F(x)} \|y - v\|, \quad z = (x, y).$$

Введём обозначения $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{dom}F \times Y, \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in Z$,

$$W(z_0) = \{w \in Y \mid \|y_0 - w\| \leq d_F(z_0)\}, \quad Q(z_0) = W(z_0) \cap F(x_0),$$

$$\Psi_Y = \{\psi : [0, \alpha_0] \rightarrow Y \mid \exists \alpha_0 > 0, \alpha^{-1}\psi(\alpha) \rightarrow 0, \alpha \downarrow 0\},$$

$$L_F(z_0, v, x) = \{y \in Y \mid \exists \alpha_0 > 0, w(\alpha) \in W(z_0), \psi(\alpha) \in \Psi_Y:$$

$$w(\alpha) \rightarrow v, \alpha \downarrow 0, w(\alpha) + \alpha y + \psi(\alpha) \in F(x_0 + \alpha x), \alpha \in [0, \alpha_0]\},$$

$$\tilde{K}(x_0, v, x) = \{y \in Y \mid \exists \alpha_0 > 0, \psi(\alpha) \in \Psi_Y :$$

$$v + \alpha y + \psi(\alpha) \in F(x_0 + \alpha x), \alpha \in [0, \alpha_0]\}, \quad H(\alpha) = \alpha^{-1}[d_F(z_0 + \alpha \bar{z}) - d_F(z_0)].$$

Как и в [1], будем считать, что $\inf \emptyset = +\infty$.

Получим оценку сверху для верхней производной Дини ФР.

ТЕОРЕМА 1. Справедливо неравенство

$$d_F^\uparrow(z_0, \bar{z}) \equiv \overline{\lim}_{\alpha \downarrow 0} H(\alpha) \leq \inf_{v \in Q(z_0)} \inf_{\zeta \in L_F(z_0, v, \bar{x})} \frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial (\bar{y} - \zeta)}. \quad (1)$$

Доказательство. Если для всех $v \in Q(z_0)$ множество $L_F(z_0, v, \bar{x}) = \emptyset$, то неравенство (1) становится тривиальным. Если же существуют точки $v \in Q(z_0)$, для которых $L_F(z_0, v, \bar{x}) \neq \emptyset$, то внешний инфимум в правой части (1) очевидно достигается именно в этих точках. Возьмём произвольно точку $v \in Q(z_0)$, для которой $L_F(z_0, v, \bar{x}) \neq \emptyset$, и

точку $\zeta \in L_F(z_0, v, \bar{x})$. В соответствии с определением $L_F(z_0, v, \bar{x})$ существуют $\alpha_0 > 0$, $w(\alpha) \in W(z_0)$, $\psi(\alpha) \in \Psi_Y$ такие, что справедливо

$$w(\alpha) + \alpha\zeta + \psi(\alpha) \in F(x_0 + \alpha\bar{x}), \quad \alpha \in [0, \alpha_0], \quad w(\alpha) \rightarrow v, \quad \alpha \downarrow 0.$$

Пусть последовательность $\{\alpha_k\}$ такова, что $\alpha_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} H(\alpha_k) = d_F^{\downarrow}(z_0, \bar{z})$. Используя лемму 1 из [2], получаем

$$\begin{aligned} d_F(z_0 + \alpha_k \bar{z}) &\leq \|y_0 + \alpha_k \bar{y} - w(\alpha_k) - \alpha_k \zeta - \psi(\alpha_k)\| \leq \\ &\leq \|y_0 - w(\alpha_k)\| + \alpha_k \frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial(\bar{y} - \zeta)} + \psi_1(\alpha_k) \leq d_F(z_0) + \alpha_k \frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial(\bar{y} - \zeta)} + \psi_1(\alpha_k), \end{aligned}$$

где $\psi_1(\alpha_k) \in \Psi_R$. Отсюда извлекаем неравенство

$$H(\alpha_k) \leq \frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial(\bar{y} - \zeta)} + \frac{\psi_1(\alpha_k)}{\alpha_k},$$

которое ввиду произвольности выбора $v \in Q(z_0)$ и $\zeta \in L_F(z_0, v, \bar{x})$ ведёт к оценке (1). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображение F замкнуто в точке x_0 , равномерно ограничено в точке x_0 и допускает аппроксимацию первого порядка [3, с. 54] в каждой точке (x_0, v) для $v \in Q(z_0)$ по направлению \bar{x} относительно множества $L_F(z_0, v, \bar{x})$. Тогда ФР является дифференцируемой в точке z_0 по направлению \bar{z} и справедлива формула

$$d'_F(z_0, \bar{z}) = \inf_{v \in Q(z_0)} \inf_{\zeta \in L_F(z_0, v, \bar{x})} \frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial(\bar{y} - \zeta)}. \quad (2)$$

Доказательство. Учитывая неравенство (1), достаточно показать, что

$$d_F^{\downarrow}(z_0, \bar{z}) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} H(\alpha) \geq \inf_{v \in Q(z_0)} \inf_{\zeta \in L_F(z_0, v, \bar{x})} \frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial(\bar{y} - \zeta)}. \quad (3)$$

Из условий теоремы следует, что $L_F(z_0, v, \bar{x}) \neq \emptyset$ для всех $v \in Q(z_0)$. Следовательно, по теореме 1 имеем $\overline{\lim}_{\alpha \downarrow 0} H(\alpha) < +\infty$. Это означает, что существует $c = const$ такая, что $H(\alpha) \leq c$ для всех достаточно малых α . Умножим обе части этого неравенства на α и перейдём к верхнему пределу по $\alpha \downarrow 0$. Получим $\overline{\lim}_{\alpha \downarrow 0} \alpha H(\alpha) \leq 0$. Отсюда после преобразований получаем неравенство

$$\overline{\lim}_{\alpha \downarrow 0} d_F(z_0 + \alpha \bar{z}) \leq d_F(z_0). \quad (4)$$

Пусть последовательность $\{\alpha_k\}$ такова, что $\alpha_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} H(\alpha_k) = d_F^{\downarrow}(z_0, \bar{z})$. Пусть далее $v(\alpha_k) \in Q(z_0 + \alpha_k \bar{z})$. Так как $Q(z_0 + \alpha_k \bar{z}) \subset F(x_0 + \alpha_k \bar{x})$, а отображение F равномерно ограничено в

точке x_0 , то последовательность $\{v(\alpha_k)\}$ ограничена. Без потери общности будем считать её сходящейся к некоторому элементу \bar{v} . В силу замкнутости отображения F в точке x_0 имеем

$$\bar{v} \in F(x_0). \quad (5)$$

Воспользуемся неравенством (4) и получим

$$\begin{aligned} d_F(z_0) &\geq \liminf_{\alpha \downarrow 0} d_F(z_0 + \alpha \bar{x}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} d_F(z_0 + \alpha_k \bar{x}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_0 + \alpha_k \bar{y} - v(\alpha_k)\| = \|y_0 - \bar{v}\|. \end{aligned} \quad (6)$$

С другой стороны, с учётом соотношения (5), имеет место неравенство

$$d_F(z_0) \leq \|y_0 - \bar{v}\|. \quad (7)$$

Объединяя соотношения (5)-(7), получаем

$$\bar{v} \in Q(z_0). \quad (8)$$

В соответствии с условиями теоремы и соотношением (8) отображение F допускает аппроксимацию первого порядка в точке (x_0, \bar{v}) по направлению \bar{x} относительно $L_F(z_0, \bar{v}, \bar{x})$. Это означает, что существуют $\zeta_k \in L_F(z_0, \bar{v}, \bar{x})$, $\psi(\alpha_k) \in \Psi_Y$ такие, что

$$v(\alpha_k) = \bar{v} + \alpha_k \zeta_k + \psi(\alpha_k). \quad (9)$$

Используя равенство (9), получим

$$\begin{aligned} d_F(z_0 + \alpha_k \bar{x}) - d_F(z_0) &= \|y_0 + \alpha_k \bar{y} - v(\alpha_k)\| - \|y_0 - \bar{v}\| = \\ &= \|y_0 + \alpha_k \bar{y} - \bar{v} - \alpha_k \zeta_k - \psi(\alpha_k)\| - \|y_0 - \bar{v}\| = \alpha_k \frac{\partial \|y_0 - \bar{v}\|}{\partial (\bar{y} - \zeta_k)} + \psi_1(\alpha_k), \end{aligned}$$

где $\psi_1(\alpha_k) \in \Psi_R$. Отсюда

$$H(\alpha_k) = \frac{\partial \|y_0 - \bar{v}\|}{\partial (\bar{y} - \zeta_k)} + \frac{\psi_1(\alpha_k)}{\alpha_k} \geq \inf_{v \in Q(z_0)} \inf_{\zeta \in L_F(z_0, v, \bar{x})} \frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial (\bar{y} - \zeta)} + \frac{\psi_1(\alpha_k)}{\alpha_k}.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство (3). Объединяя неравенства (1) и (3), получаем требуемое равенство (2). Теорема доказана.

В монографии [3, с. 63] была получена формула производной по направлениям маргинальной функции общего вида при более строгих, чем в теореме 2, ограничениях на отображение F . Её аналог для ФР имеет вид

$$d'_F(z_0, \bar{x}) = \inf_{v \in Q(z_0)} \inf_{\zeta \in K(x_0, v, \bar{x})} \frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial (\bar{y} - \zeta)}. \quad (10)$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы 2 производная по направлениям ФР не всегда может быть вычислена по формуле (10). Приведём соответствующий

Пример. $X = R$, $Y = R^2$, $\|y\| = \max\{|y^{(1)}|, |y^{(2)}|\}$,

$$F(x) = \{y = (y^{(1)}, y^{(2)}) \in R^2 \mid (x-1)^2 + (y^{(1)})^2 = 1, y^{(2)} = 0\},$$

$$z_0 = (x_0, y_0) = (0, 0, 1), \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0, 0).$$

Очевидно, данное отображение F замкнуто и равномерно ограничено в каждой точке эффективной области. Нетрудно убедиться, что, $Q(z_0) = \{v = (0, 0)\}$, $\frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial (\bar{y} - \zeta)} = -\zeta^{(2)}$, $L_F(z_0, v, \bar{x}) = R \times R^-$, $\tilde{K}(x_0, v, \bar{x}) = \emptyset$, отображение F допускает аппроксимацию первого порядка в точке z_0 по направлению \bar{x} относительно $L_F(z_0, v, \bar{x})$. Подсчёт производной ФР в точке z_0 по направлению \bar{z} по формуле (2) даёт $d'_F(z_0, \bar{z}) = 0$. В то же время подсчёт $d'_F(z_0, \bar{z})$ по формуле (10) даёт неверный результат, так как $\tilde{K}(x_0, v, \bar{x}) = \emptyset$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Минченко Л.И., Борисенко О.Ф., Грицай С.П. Многозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. Минск: Навука і тэхніка, 1993.
2. Дудов С.И. Дифференцируемость по направлениям функции расстояния // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 3, С. 29 – 52.
3. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

УДК 519.4

В. В. Кривобок

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ L -ФУНКЦИИ АРТИНА В ПРОИЗВЕДЕНИЕ L -ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

Пусть K – нормальное расширение числового поля k степени n и G – группа Галуа этого расширения. Пусть $\{M(g)\}_{g \in G}$ – представление группы G в группу матриц размерности $n \times n$ и χ – характер этого представления

$$\chi(g) = Sp M(g), \quad g \in G.$$

L – функция Артина, определяется следующим образом:

$$L(s, \chi, K/k) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(F(\wp))}{N(\wp)^s} \right)^{-1}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

где произведение берётся по всем неразветвлённым дивизорам поля k и где $F(\wp)$ – автоморфизм Фробениуса дивизора \wp .

Известная гипотеза Артина [1] утверждает возможность аналитического продолжения L -функции (1) в случае неглавного характера χ целым образом на комплексную плоскость.

Существенным результатом в направлении решения гипотезы Артина был результат Брауэра [1], который заключается в следующем.

Рассматривается семейство циклических подгрупп $\{H_\alpha\}$ группы G и семейство характеров $\{\chi_{\alpha_j}\}$ этих циклических подгрупп. Браузер показал, что неабелев характер χ можно разложить в виде линейной комбинации индуцированных характеров $\chi_{\alpha_j}^*$ с целыми коэффициентами. Отсюда сразу следует представление L -функции Артина в следующем виде:

$$L(s, \chi, K/k) = \frac{\prod_i L_i(s, \chi_i, K/k_{\alpha_i})^{n_i}}{\prod_j L_j(s, \chi_j, K/k_{\alpha_j})^{n_j}}, \quad (2)$$

где χ_i, χ_j – характеристы циклических групп $G(K/k_\alpha)$. Из представления (2) следует мероморфность L -функции Артина.

Встает вопрос: можно ли указать такую систему характеров $\{\chi_{\alpha_i}\}$ циклических подгрупп, что неабелев характер χ можно представить в виде

$$\chi = \sum_i n_{\alpha_i} \chi_{\alpha_i}^*, \quad (3)$$

где n_{α_i} – рациональные, положительные числа? Положительный ответ на этот вопрос доказывает гипотезу Артина.

Но, к сожалению, циклических подгрупп группы G явно мало для представления (3) с положительными коэффициентами. Это видно на примере абелевой, бесквадратной группы G , где разложение Браузера становится совершенно прозрачным. В этом случае на основании разложения Браузера для L -функции получается следующее представление:

$$L^n(s, \chi, K/k) = \frac{\prod_{\alpha \neq \{e\}} L(s, \chi_\alpha, K/k_\alpha)^{d_\alpha}}{\zeta_K(s)^{m-1}}, \quad (4)$$

где $d_\alpha = \frac{[G]}{[H_\alpha]}$, m – число циклических подгрупп группы G .

Таким образом, чтобы, исходя из (4), показать, что $L(s, \chi, K/k)$ – целая функция, необходимо научиться раскладывать функции $L(s, \chi_\alpha, K/k_\alpha)$ в произведение более "мелких" сомножителей и после сокращения получить разложение функции $L(s, \chi, K/k)$ в произведение сомножителей такого рода.

В этом направлении автор доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть циклическое расширение $k_\alpha \subset K$ допускает вложение в циклическое круговое расширение $k_\alpha \subset L$. Тогда существует такое круговое расширение поля рациональных чисел $Q \subset M_\alpha$, что имеет место разложение

$$L(s, \chi_\alpha, K/k_\alpha) = \prod_j L_j(s, \chi_{\alpha,j}, M_\alpha/Q),$$

где $\chi_{\alpha,j}$ – характеристы Дирихле, согласованные с расширением $Q \subset M_\alpha$ и такие, что $\chi_\alpha(\varphi) = \chi_{\alpha,j}(N(\varphi))$.

Замечание. Есть основания надеяться, что привлечение характеристик внешних циклических расширений позволит получить необходимое разложение Брауэра.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хейльброн X. ζ -функции и L -функции // Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса, А. Фрелиха. М., 1969.

УДК 511.3

В. Н. Кузнецов, Е. В. Сорокина

ПРОДОЛЖИМОСТЬ ЦЕЛЫМ ОБРАЗОМ НА КОМПЛЕКСНУЮ ПЛОСКОСТЬ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ L -РЯДОВ ДИРИХЛЕ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим L -ряды Дирихле двух числовых полей k_1 и k_2 , отвечающие характеристикам Дирихле χ_1 и χ_2 ,

$$L_1(s, \chi_1, k_1) = \sum_a \frac{\chi_1(a)}{N(a)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it; \quad (1)$$

$$L_2(s, \chi_2, k_2) = \sum_B \frac{\chi_2(B)}{N(B)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it. \quad (2)$$

Под скалярным произведением L -рядов Дирихле (1) и (2) здесь понимается следующий ряд:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{N(a)=N(B)=n} \chi_1(a) \chi_2(B) \right) / n^s.$$

Относительно скалярного произведения двух L -рядов Дирихле авторами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k_1 и k_2 – абелевы расширения поля Q , χ_1 и χ_2 – неглавные характеристики Дирихле числовых полей с взаимнопростыми над Q модулями. Тогда скалярное произведение соответствующих L -рядов Дирихле определяет целую функцию.

В основе доказательства теоремы 1 лежит метод редукции к степенным рядам, разработанный в работах [1 – 3], суть которого заключается в том, что многие задачи, связанные с изучением аналитических свойств

ряда Дирихле, сводятся к изучению определённых граничных свойств соответствующего (с теми же коэффициентами, что и у ряда Дирихле) степенного ряда. В данном случае авторам удалось определить класс степенных рядов, обладающих определёнными граничными свойствами, которому принадлежат степенные ряды, отвечающие L -функциям Дирихле чи- словых полей. А именно, используя технику, разработанную в [4], авторы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть L -функция Дирихле абелевого поля k $L(s, \chi, k)$ определяет ряд Дирихле вида

$$L(s, \chi, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it.$$

Тогда функцию $g(z)$, определённую соответствующим степенным рядом

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

можно представить в виде

$$g(z) = R(z) + \tilde{g}(z),$$

где $R(z)$ – рациональная функция с полюсами, расположенными на единичной окружности, а $\tilde{g}(z)$ в любой точке $z = e^{i\varphi}$ имеет конечные радиальные производные любого порядка, т. е.

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \tilde{g}^{(m)}(re^{i\varphi}) = \alpha_{\varphi}^{(m)}.$$

Как видно из определения скалярного произведения двух L -функций Дирихле, соответствующий степенной ряд является обычным адамаровским композитом степенных рядов, отвечающих этим L -функциям. Поэтому для степенных рядов, удовлетворяющих условиям теоремы 2, авторы доказали аналог теоремы Адамара об умножении особенностей. А именно, доказана

ТЕОРЕМА 3. Пусть степенные ряды

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{и} \quad g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда их адамаровский композит

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

также удовлетворяет условиям теоремы 2, т. е.

$$g(z) = R(z) + \tilde{g}(z).$$

При этом полюсы рациональной функции $R(z)$ могут находиться лишь среди произведений полюсов соответствующих рациональных функций $R_1(z)$ и $R_2(z)$.

Утверждение теоремы 1 получается как следствие теоремы 2 и теоремы 3 и того факта, доказанного в [3], что целостность ряда Дирихле рав-

носильна существованию в точке $z=1$ радиальных производных любого порядка у соответствующего степенного ряда.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов В.Н. К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Теория функций и приближений: Тр. 3-й Сарат. зимней шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 2. С. 113 – 115.
2. Кузнецов В.Н. Метод редукции к степенным рядам в задаче о целостности композита рядов Дирихле // Теория функций и приближений: Тр. 4-й Сарат. зимней шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989. Ч. 1. С. 147 – 149.
3. Кузнецов В.Н. К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Дифференциальные уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 9. С. 23 – 29.
4. Кузнецов В.Н., Сорокина Е.В. К вопросу о целостности композита L -функций числовых полей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 31 – 43.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В статье рассматривается задача максимизации функционала

$$H[u_1(\cdot), u_2(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)] =$$

$$= M \min[f_1(\xi_1)u_1(\xi_1) + g_2(\xi_2)v_2(\xi_2), g_1(\xi_1)v_1(\xi_1) + f_2(\xi_2)u_2(\xi_2)]$$

при ограничениях $u_i(\xi_i) + v_i(\xi_i) \leq h_i(\xi_i)$, $i=1,2$, где ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, ξ_i имеет плотность $p_i(\cdot)$, сосредоточенную на отрезке $[a_i, b_i]$, функции $f_i(\cdot), g_i(\cdot), h_i(\cdot)$ положительны и непрерывны, $i=1,2$. Функционал такого типа можно интерпретировать как общее количество продукции двух типов (при соблюдении комплектности), выпускаемой двумя производителями, каждый из которых имеет свою информацию о случайных факторах, характеризующих условия производства. Задачи такого типа относятся к задачам параллельной стохастической оптимизации [1].

Данная вариационная задача сводится к экстремальной задаче максимизации дифференцируемой функции одной переменной на отрезке. Кроме того, указан явный вид оптимальных управлений.

Очевидно, оптимальные управление должны удовлетворять условиям $u_i(\xi_i) + v_i(\xi_i) = h_i(\xi_i)$, $i=1,2$. Учитывая это и сделав замену переменных, можно преобразовать исходную задачу к задаче максимизации функционала

$$H[\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot)] =$$

$$= M \min[F_1(\xi_1)\alpha_1(\xi_1) - G_2(\xi_2)\alpha_2(\xi_2), F_2(\xi_2)\alpha_2(\xi_2) - G_1(\xi_1)\alpha_1(\xi_1)] \quad (1)$$

при ограничениях

$$-t_i^-(\cdot) \leq \alpha_i(\cdot) \leq t_i^+(\cdot), \quad i=1,2, \quad (2)$$

где все функции положительны и непрерывны, $F_i(\cdot) + G_i(\cdot) \equiv 1, \quad i=1,2$.

В дальнейшем везде, где встречаются индексы i, j предполагается, что $i=1,2, \quad j=1,2, \quad i \neq j$.

ТЕОРЕМА 1. Управления $\alpha_i(\cdot)$, доставляющие максимум функционалу (1) при ограничениях (2), обладают следующими свойствами:

$$\forall x_j \in [a_j, b_j] \left[P\{\alpha_i(\xi_i) \geq \alpha_j(x_j)\} \geq G_j(x_j) \vee \alpha_j(x_j) = -t_j^-(x_j) \right]. \quad (3)$$

$$\forall x_j \in [a_j, b_j] \left[P\{\alpha_i(\xi_i) \leq \alpha_j(x_j)\} \geq F_j(x_j) \vee \alpha_j(x_j) = t_j^+(x_j) \right]. \quad (4)$$

С использованием данных условий оптимальности можно получить следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $F_i(\cdot)$, $t_i^+(\cdot)$ являются возрастающими, функции $t_i^-(\cdot)$ – неубывающими, причём при всех $x_i \in [a_i, b_i]$ $F_i(x_i) \geq \frac{1}{2}$. Тогда среди управлений, доставляющих максимум функционалу (1) при ограничениях (2), есть неотрицательные неубывающие.

Замечание. В дальнейшем условия теоремы 2 считаются выполнеными, и в качестве $\alpha_i(\cdot)$ рассматриваются только неотрицательные неубывающие функции.

Обозначим функцию распределения случайной величины ξ_i через $H_i(\cdot)$, $i=1,2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть система уравнений

$$\begin{cases} H_1(x_1) = F_2(x_2) \\ F_1(x_1) = H_2(x_2) \end{cases} \quad (5)$$

имеет не более чем конечное число решений. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если от уровня c_1 до уровня c_2 оптимальные управление $\alpha_1(\cdot)$ и $\alpha_2(\cdot)$ непрерывно возрастают, то при всех $c \in [c_1, c_2]$ или $\alpha_1^{-1}(c) = r_1(c)$, или $\alpha_2^{-1}(c) = r_2(c)$, где $r_i(\cdot)$ – функция, обратная $t_i^+(\cdot)$.

2. У оптимальных управлений $\alpha_1(\cdot)$ и $\alpha_2(\cdot)$ может быть не более чем конечное число точек разрыва. Возможные пары точек разрыва функций $\alpha_1(\cdot)$ и $\alpha_2(\cdot)$ удовлетворяют системе (5).

В дальнейшем условия теоремы 3 считаются выполненными.

Пусть $c_0 = \inf \{c : H_i(r_i(c)) > F_j(r_j(c))\}$. Определим для $t_i^+(\alpha_i) \leq c \leq c_0$ функцию $\gamma_i(c)$ равенством

$$\gamma_i(c) = \begin{cases} r_i(c), & \text{если } H_j(r_j(c)) \leq F_i(r_i(c)), \\ F_i^{-1}H_j(r_j(c)), & \text{если } H_j(r_j(c)) > F_i(r_i(c)). \end{cases}$$

При $c < t_i^+(\alpha_i)$ положим $\gamma_i(c) = a_i$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\max_{1 \leq i \leq 2} t_i^+(\alpha_i) \leq c_1 < c_2 < c_0$, $\alpha_1(\cdot)$ и $\alpha_2(\cdot)$ – пара оптимальных управлений. Тогда если при всех $c \in [c_1, c_2]$ $\alpha_j^{-1}(c) = r_j(c)$, то при всех $c \in [c_1, c_2]$ $\alpha_i^{-1}(c) = \gamma_i(c)$.

Пусть $(x_1^1, x_1^2) \dots (x_1^n, x_1^n) \dots (x_j^1, x_j^n) \dots (x_j^n, x_j^n)$ – корни системы (5). Построим точки $(\bar{x}_1^k, \bar{x}_2^k)$ следующим образом:

$$x_i^0 = b_i, \bar{x}_1^{k+1} = \max \left(a_i, \max \left(x_i^l : x_i^l < \bar{x}_i^k, Q(x_i^l, x_j^l, \bar{x}_i^k, \bar{x}_j^k) > 0 \right) \right),$$

$$\text{где } Q(x_i^l, x_j^l, x_i^r, x_j^r) = H_i(x_i^l)H_j(x_j^l) - H_i(x_i^r)H_j(x_j^r) + \int_{x_i^l}^{x_i^r} F_i(x_i) p_i(x_i) dx_i + \\ + \int_{x_j^l}^{x_j^r} F_j(x_j) p_j(x_j) dx_j.$$

Положим $c_k = \min_{1 \leq i \leq 2} t_i^+(\bar{x}_i^k)$ и определим функции $\lambda_i(\cdot)$ равенствами $\lambda_i(x_i) = c_k$ при $\bar{x}_i^k < x_i \leq \bar{x}_i^{k+1}$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что система уравнений

$$\begin{cases} H_1(x_1) = F_2(x_2) \\ F_1(x_1) = H_2(x_2) \\ \gamma_1^{-1}(x_1) = \gamma_2^{-1}(x_2) \end{cases} \quad (6)$$

не имеет решений при $a_i \leq x_i \leq \gamma_i^{-1}(c_0)$. Определим семейства управлений $\{\alpha_i^c(\cdot)\}_{0 \leq c \leq c_0}$ следующим образом:

$$\alpha_i^c(x_i) = \begin{cases} \min(c, \gamma_i^{-1}(x_i)), & a_i < x_i \leq \zeta_i(c), \\ \lambda_i(x_i), & \zeta_i(c) < x_i \leq b_i, \end{cases}$$

где $\zeta_i(c) = \min \{ \bar{x}_i^k : \bar{x}_i^k > \gamma_i(c), \bar{x}_j^k > \gamma_j(c) \}$. Тогда оптимальная пара управлений $(\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot))$ принадлежит семейству пар управлений $\{\alpha_1^c(\cdot), \alpha_2^c(\cdot)\}_{0 \leq c \leq c_0}$.

Замечание 1. Задача максимизации функционала (1) при ограничениях (2) свелась к задаче максимизации функции одной переменной

$H(c) = M \min[F_1(\xi_1) \alpha_1^c(\xi_1) - G_2(\xi_2) \alpha_2^c(\xi_2), F_2(\xi_2) \alpha_2^c(\xi_2) - G_1(\xi_1) \alpha_1^c(\xi_1)]$ на отрезке $[0, c_0]$.

Замечание 2. Если функции $\gamma_i^{-1}(\cdot)$ дифференцируемы, то функция $H(c)$ дифференцируема, и для её производной справедливо равенство

$$H'(c) = \prod_{i=1}^2 \int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{\zeta_i(c)} p_i(x_i) dx_i - \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{\zeta_i(c)} G_i(x_i) p_i(x_i) dx_i + \\ + \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{\zeta_i(c)} F_i(x_i) p_j(x_i) dx_i \int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{b_j} p_j(x_j) dx_j.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Radner R. Teams // Decision and Organisation. C.B. McGuire and R. Radner Eds. Amsterdam, 1971.

УДК 517.5

В. П. Курдюмов

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ*

Рассматривается задача нахождения асимптотических формул для собственных функций (с.ф.) и собственных значений (с.зн.) оператора Штурма-Лиувилля

$$L : y'' + q(x)y, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad x \in [0,1],$$

где $q(x) \in L[0,1]$.

В литературе [1, 2] известны асимптотические формулы для с.зн. оператора L с тем большей степенью точности, чем больше предполагаемая гладкость функции $q(x)$.

В настоящей статье использованием классических методов спектральной теории выводятся явные асимптотические формулы для нормированных с.ф. и с.зн. оператора L без дополнительных предположений о гладкости $q(x)$.

Результат, аналогичный полученному в настоящей статье, использованием явного представления решения системы однородных дифференциальных уравнений и операторного подхода В.А. Садовничего получен В.А. Винокуровым и В.А. Садовничим в [3].

Отметим, что метод настоящей статьи может быть применен для нахождения асимптотических формул для с.ф. и с.зн. и для интегро-дифференциальных операторов, например, вида

$$y'' + q(x) \int_0^1 p(t) y'(t) dt, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad x \in [0,1], \text{ где } q(x), p(x) \in L_2[0,1].$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

Введём невозмущенный оператор $L_0 : y''$, $y(0) = y(1) = 0$, $x \in [0,1]$, с.ф. и с.зн. которого имеют вид $e_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$, $\lambda_n = -(n\pi)^2$, $n=1,2,\dots$. Пусть $S = \{\rho : \text{Im } \rho \geq -1\}$, γ_n — круговые контуры единичного радиуса с центрами в точках $\rho_n = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ и S_1 — область, полученная из области S удалением кружков, ограниченных контурами γ_n . Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L и $R_{0,\lambda}$ — резольвента оператора L_0 .

ЛЕММА 1. Для ядра $G_0(x,t,\lambda)$ резольвенты $R_{0,\lambda}$ в области S_1 справедлива оценка

$$|G_0(x,t,\lambda)| \leq \frac{C_1}{|\rho|}.$$

ЛЕММА 2. В области S_1 при $|\rho| > C_1 \|q\|$ R_λ существует и справедлива формула

$$R_\lambda f = R_{0,\lambda} f + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (R_{0,\lambda} q)^k R_{0,\lambda} f, \quad (1)$$

где q — оператор умножения на $q(x)$, $\|q\|$ — норма в $L[0,1]$ и ряд в (1) сходится равномерно по $x \in [0,1]$.

Обозначим через $G(x,t,\lambda)$ ядро R_λ и через $G_k(x,t,\lambda)$ — ядро оператора $(-1)^k (R_{0,\lambda} q)^k R_{0,\lambda}$, $k=1,2,\dots$

Из леммы 2 следует, что в области S_1 при $|\rho| > C_1 \|q\|$

$$G(x,t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(x,t,\lambda), \quad (2)$$

и ряд (2) сходится равномерно по $x, t \in [0,1]$.

Обозначим через Γ_n образы контуров γ_n при отображении $\lambda = -\rho^2$ и через \tilde{S}_1 — область, полученную из λ -плоскости удалением окрестностей, ограниченных Γ_n .

ЛЕММА 3. В области \tilde{S}_1 справедливы формулы

$$G_0(x,t,\lambda) = - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e_{\mu}(x)e_{\mu}(t)}{\lambda - \lambda_{\mu}}, \quad G_1(x,t,\lambda) = - \sum_{\mu_1, \mu_2=1}^{\infty} \frac{e_{\mu_1}(x)e_{\mu_2}(t)[\mu_1, \mu_2]}{(\lambda - \lambda_{\mu_1})(\lambda - \lambda_{\mu_2})},$$

$$G_2(x,t,\lambda) = - \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3=1}^{\infty} \frac{e_{\mu_1}(x)e_{\mu_2}(t)[\mu_1, \mu_3][\mu_2, \mu_3]}{\prod_{r=1}^3 (\lambda - \lambda_{\mu_r})},$$

$$G_3(x,t,\lambda) = - \sum_{\mu_1, \dots, \mu_4=1}^{\infty} \frac{e_{\mu_1}(x)e_{\mu_2}(t)[\mu_1, \mu_4][\mu_3, \mu_4][\mu_2, \mu_3]}{\prod_{r=1}^4 (\lambda - \lambda_{\mu_r})},$$

$$G_k(x, t, \lambda) = - \sum_{\mu_1, \dots, \mu_{k+1}=1}^{\infty} \frac{e_{\mu_1}(x)e_{\mu_2}(t)[\mu_1, \mu_{k+1}][\mu_3, \mu_{k+1}] \prod_{r=1}^{k-1} [\mu_r, \mu_{r+1}]}{\prod_{r=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_{\mu_r})}, k = 4, 5, \dots$$

Здесь $[\mu_i, \mu_j] = \int_0^1 e_{\mu_i}(t)e_{\mu_j}(t)q(t)dt$ и все ряды сходятся равномерно по $x, t \in [0, 1]$, $\lambda \in \tilde{S}_1$.

ЛЕММА 4. Пусть $\tilde{\Phi}_n(x)$ – с.ф. оператора L , соответствующая с. зн. v_n , $\psi_n(x)$ – с.ф. оператора, сопряжённого к L , соответствующая с.зн. \bar{v}_n ,

$$\varphi_n(x) = \frac{\tilde{\Phi}_n(x)(e_n, \psi_n)}{(\tilde{\Phi}_n, \psi_n)}, \quad (f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

$$g_k(x, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \int G_k(x, t, \lambda) d\lambda e_n(t) dt.$$

Тогда при $n > \pi^{-1}(2\pi C_1^2 \|q\| + C_1 \|q\| + 1)$ и произвольном $m = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\left| \varphi_n(x) - e_n(x) + \sum_{k=1}^m g_k(x, n) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |g_k(x, n)|.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha(n) = 4 + \ln(n-1)$ и $a = \frac{8}{\pi^2}$, тогда при n , удовлетворяющих неравенствам $n \geq 2a\alpha(n)\|q\| + 1$, $\ln(n-1) \geq C_1 + \pi C_1^2$ и произвольном $m = 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\left| \varphi_n(x) - e_n(x) + \sum_{k=1}^m g_k(x, n) \right| \leq n^{-m-1} 2\sqrt{2}a^{m+1}\alpha^{m+1}(n)\|q\|^{m+1},$$

$$|g_m(x, n)| \leq n^{-m} \sqrt{2}a^m\alpha^m(n)\|q\|^m,$$

$$\left| v_n + (n\pi)^2 - \frac{[n, n] - \sum_{k=1}^m (q(x)g_k(x, n), e_n(x))}{1 - \sum_{k=2}^{m+1} (g_k(x, n), e_n(x))} \right| \leq n^{-m-1} 4a^{m+1}\alpha^{m+1}(n)(1 + \|q\|)^{m+1},$$

$$\left| \frac{(q(x)g_m(x, n), e_n(x))}{1 - \sum_{k=2}^{m+1} (g_k(x, n), e_n(x))} \right| \leq n^{-m} 4a^m\alpha^m(n)\|q\|^{m+1}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
2. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
3. Винокуров В.А., Садовничий В.А. // ДАН. 1998. Т. 358, № 3, С. 298 – 301.

УДК 517.5

А. Л. Лукашов

ОБ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ*

Известно [1], что информационная энтропия Больцмана-Шенна на квантовомеханических систем может быть в ряде случаев выражена в терминах информационной энтропии классических ортогональных многочленов. Дадим

Определение. Информационной энтропией многочленов $q_n(x)$, ортонормальных по отношению к весу $\rho(x)$, называется величина

$$S_n = - \int q_n^2(x) \ln q_n^2(x) \rho(x) dx.$$

В настоящее время появилось много работ, в которых изучаются асимптотики этих величин на конечном или бесконечном интервале [2,3], но лишь в нескольких случаях (для многочленов Чебышева первого и второго рода [1]) найдены точные значения этих величин. Приведем один такой результат.

ТЕОРЕМА 1. [1]. Если $q_n(x)$ – ортогональные многочлены Чебышева первого рода (относительно веса $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$), то при $n \geq 1$

$$S_n = \pi(\ln 2 - 1). \quad (1)$$

Заметим, что вес $\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ совпадает с плотностью равновесной меры отрезка $[-1; 1]$ [4]. Кроме того, нам не встретилось ни одной работы, посвященной вычислению информационных энтропий для многочленов, ортонормированных на несвязных множествах.

Цель данной статьи – сообщить о довольно любопытном обобщении теоремы 1 на случай нескольких отрезков. Ортогональным многочленам на нескольких отрезках посвящено большое количество работ (см., напр., об-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

зор [5], а также недавние работы [6,7]). Наиболее естественные обобщения свойств многочленов Чебышева наблюдались в случае, когда на системе из нескольких отрезков существует многочлен, наименее уклоняющийся от нуля с максимально возможным числом точек уклонения. В терминах равновесных мер этот случай характеризуется тем, что равновесные меры каждого из отрезков, составляющих систему, – рациональные числа (см., напр., обзор [7]).

ТЕОРЕМА 2. Если $q_n(x)$ – многочлены, ортонормальные относительно плотности равновесной меры $\mu_E(x)$ системы отрезков $E = [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{2l-1}, a_{2l}]$, и равновесные меры каждого из отрезков $[a_{2j-1}, a_{2j}]$ – рациональные числа вида $\frac{m_j}{N}$, то при всех $n = kN$, где k – натуральное, для информационной энтропии S_n многочленов q_n (при $\rho(x) = \mu_E(x)$) имеет место формула $S_n = \ln 2 - 1$.

Доказательство. Известно (см., напр., [6]), что плотность равновесной меры $\mu_E(x)$ имеет вид $\mu_E(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{-H(x)}} \chi_E(x)$, где $u(x)$ – полином степени $l-1$ со старшим коэффициентом 1, однозначно определяемый равенствами $\int_{a_{2j}}^{a_{2j+1}} \frac{u(x)}{\sqrt{-H(x)}} dx = 0, j = 1, \dots, l-1$; $H(x) = \prod_{j=1}^{2l} (x - a_j)$; $\chi_E(x)$ – характеристическая функция множества E .

Далее, из результатов работы [9] следует, что при выполнении условий теоремы многочлены $T_{n,E}(x)$, наименее уклоняющиеся от нуля на E , являются ортогональными многочленами степени не выше $n+l-2$ со знакочередующимся весом

$$h(x) = (-1)^j \frac{1}{\sqrt{-H(x)}}, \text{ для } x \in (a_{2j-1}, a_{2j}), j = 1, \dots, l.$$

Но тогда, очевидно, они будут ортогональны многочленам степени $n-1$ с весом $\mu_E(x)$, то есть совпадут с точностью до постоянного множителя с многочленами $q_n(x)$. Несложный подсчёт с использованием представлений многочленов $T_{n,E}(x)$ из [9] даёт представление

$$q_n(x) = \sqrt{2} \cos n\pi \int_{a_1}^x \mu_E(x) dx.$$

Кроме того, $q_n(x)$ удовлетворяют тождеству Абеля-Пелля

$$\frac{q_n^2(x)}{2} - Q_{n-l}^2(x) H(x) = 1 \quad (2)$$

для некоторого полинома Q_{n-l} степени $n-l$.

Тогда $q'_n(x) = -\sqrt{2}nQ_{n-1}(x)u(x)$, $(Q_{n-1}(x)\sqrt{-H(x)})' = \frac{n\pi}{\sqrt{2}}q_n(x)\mu_E(x)$,

а отсюда и из тождества (2) получаем

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{1}{\pi} \int q_n^2(x) \ln q_n^2(x) \frac{|u(x)|}{\sqrt{-H(x)}} dx = -\frac{2}{\pi_E} \int \frac{|u(x)| \ln q_n^2(x)}{\sqrt{-H(x)}} dx + \\ &+ \frac{1}{\pi_E} \int \frac{|u(x)| q_n^2(x) \ln q_n^2(x)}{\sqrt{-H(x)}} dx - \frac{4}{\pi_E} \int Q_{n-1}^2(x) \sqrt{-H(x)} |u(x)| dx = \\ &= -2 \int_E \ln q_n^2(x) \mu_E(x) dx - S_n - \frac{4}{\pi_E} \int_E \frac{|u(x)|}{\sqrt{-H(x)}} dx + \frac{2}{\pi_E} \int q_n^2(x) \frac{|u(x)|}{\sqrt{-H(x)}} dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл, в силу нормировки, равен 2, третий интеграл равен π , поскольку представляет собой равновесную меру всей системы отрезков Е, умноженную на π , в первом интеграле можно сделать замену $\mu_E(x)dx = d\theta$ и воспользоваться формулой

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln |\cos n\theta|^2 d\theta = -2 \ln 2,$$

что приводит к требуемому результату.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Yáñez R.J., Van Assche W., Dehesa J.S. Position and momentum information entropies of the D-dimesional harmonic oscillator and hydrogen atom // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 50. P. 3065 – 3079.
2. Aptekarev A.I., Dehesa J.S., Yáñez R.J. Spatial entropy of central potentials and strong asymptotics of orthogonal polynomials // J. Math. Phys. 1994. Vol. 35, № 9. P. 4423 – 4426.
3. Buyarov V.S., Dehesa J.S., Martinez-Finkelshtein A., Saff E.B. Asymptotics of the information entropy for Jacobi and Laguerre polynomials with varying weights // J. Approxim. Theory. 1999. Vol. 99. P. 153 – 166.
4. Saff E.B., Totik V. Logarithmic potentials with external fields. Berlin: Springer, 1997.
5. Peherstorfer F. Orthogonal and extremal polynomials on several intervals // J. Comp. Appl. Math. 1993. Vol. 48. P. 187 – 205.
6. Lukashov A.L., Peherstorfer F. Automorphic orthogonal and extremal polynomials // Canad. J. Math. 2003. Vol. 55. P. 576 – 608.
7. Суетин С.П. Об асимптотических свойствах диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 12. С. 105 – 135.
8. Содин М.Л., Юдицкий П.М. Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах вещественной оси // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, вып. 2. С. 1 – 61.
9. Peherstorfer F. On Bernstein – Szegő orthogonal polynomials on several intervals II : orthogonal polynomials with periodic recurrence coefficients // J. Approxim. Theory. 1999. Vol. 65. P. 123 – 161.

**ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МАТРИЦЫ ВЕЙЛЯ-ЮРКО
ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
НА ПОЛУОСИ***

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы вида

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x, \rho) y^{(k)} = 0, \quad P_k(x, \rho) = \sum_{i=k}^n \rho^{n-i} p_{ki}(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad (1)$$

$$U_\xi(y) = y^{(n-\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{n-\xi} \rho^k u_{k\xi}(\rho) y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi}(\rho) = \sum_{i=0}^k \frac{\beta_{k,k+1}^{(\xi)}}{\rho^i}.$$

Полагаем, что $p_{kk}, \beta_{k,k+1}^{(\xi)}$ – константы, $p_{ki}(x) \in L(0, \infty)$, $i = \overline{k+2, n}$. $p_{k,k+1}(x) \in W^1(0, \infty)$, $k = \overline{1, n-1}$, где $W^1(0, \infty)$ – множество функций $f(x)$ таких, что $f(x)$ абсолютно непрерывны и $f(x), f'(x) \in L(0, \infty)$, $p_{ki}(x) \in L(0, \infty)$, $i = \overline{k+2, n}$.

Пусть $\{R_k\}_{k=1}^n$ – корни характеристического уравнения

$$F(R) := \sum_{k=0}^n p_{kk} R^k = 0 \quad (p_{nn} := 1).$$

Считаем, что $R_k - R_j \neq 0$, $k \neq j$ и $R_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$.

Известно, что комплексную ρ -плоскость можно разбить на конечное число секторов S_v так, что в каждом из них корни $\{R_k\}_{k=1}^n$ можно занумеровать следующим образом:

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n) \quad \forall \rho \in S_v. \quad (2)$$

Пусть элементы вектор-функции $\Phi(x, \rho) = [\Phi_m(x, \rho)]_{m=1}^n$ являются решениями (1) при условиях $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$ ($\xi = \overline{1, m}$), а также $\Phi_m(x, \rho) = O(e^{\rho R_m x + \alpha_m(x)})$, где корни $\{R_m\}_{m=1}^n$ занумерованы в порядке (2), и

$$\alpha_m(x) = - \int_0^x \frac{\sum_{j=0}^{n-2} p_{j,j+1}(\xi) R_m^j d\xi}{F'(R_m)}.$$

Обозначим $M_{mk}(\rho) = U_k(\Phi_m)$, $k = \overline{m+1, n}$.

Определение. Функции $M_{mk}(\rho)$, $k = \overline{m+1, n}$ называются функциями Вейля-Юрко, а матрица $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m,k=1,n}$, $M_{mk}(\rho) = \delta_{mk}$, $k = \overline{1, m}$ называется матрицей Вейля-Юрко.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1) и Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).

Обозначим

$$\omega_{\xi}(R) = R^{n-\xi} \sum_{i=0}^{n-\xi} \frac{\beta_{ii}^{(\xi)}}{R_i}, \quad \Omega(j_1, \dots, j_p) = \det(\omega_{j_v}(R_k))_{v,k=1,\overline{p}}.$$

Пусть для всех $p = \overline{1, n-1}$, $\Omega(1, p) \neq 0$. Это условие должно выполняться для любого сектора S_v с его собственной нумерацией корней $\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$.

В статье [1] были исследованы некоторые аналитические и структурные свойства матрицы Вейля-Юрко. Однако в [1] не удалось точно описать области регулярности и непрерывности функций Вейля-Юрко. В данной статье этот недостаток исправлен.

Пусть S_v ($v = \overline{1, N}$) – сектора, в которых выполнено неравенство (2), Γ_v – луч, разделяющий два соседних сектора. Пусть при $\rho \in \Gamma_j$ выполнено условие

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\rho R_1) &< \dots < \operatorname{Re}(\rho R_{m_1}) = \dots = \operatorname{Re}(\rho R_{m_1+p_1}) < \dots \\ &< \operatorname{Re}(\rho R_{m_s}) = \dots = \operatorname{Re}(\rho R_{m_s+p_s}) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n). \end{aligned}$$

Обозначим

$$N_j = \{m : m = \overline{m_1, m_1 + p_1 - 1, \dots, m_s, m_s + p_s - 1}\}, \quad J_m = \{j : m \in N_j\},$$

$$\gamma_m = \bigcup_{j \in J_m} \Gamma_j, \quad \Sigma_m = C \setminus \gamma_m - \rho\text{-плоскость с разрезами вдоль лучей } \gamma_m, \quad \overline{\Sigma_m} -$$

замыкание Σ_m (берега разрезов различаются).

ТЕОРЕМА. Функции Вейля-Юрко $M_{mk}(\rho)$ при $k > m$ регулярны в Σ_m за исключением не более чем счтного, ограниченного множества полюсов Λ'_m и непрерывна в $\overline{\Sigma_m}$ за исключением ограниченного множества Λ_m . Точнее, при $j \in J_m$, $\rho \in \Gamma_j \setminus \Lambda_m$ существуют конечные пределы

$$M_{mk}^{\pm}(\rho) = \lim M_{mk}(z), \quad z \rightarrow \rho, \quad z \in \Sigma_m, \quad \pm(\arg z - \Theta_j) > 0.$$

Доказательство теоремы основано на исследовании аналитических и асимптотических свойств фундаментальной системы решений типа Биркгофа уравнения (1), построенной в [2] и на свойствах матрицы Вейля-Юрко, исследованных в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лукомский Д.С. О матрице Вейля для пучков дифференциальных операторов на полуоси // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 69 – 71.
2. Лукомский Д.С. Обратная задача для пучков дифференциальных операторов высших порядков: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2002. 103 с.

РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ХЕНСТОКА*

1. Постановка задачи и основные результаты. Если f, g – 2π -периодические, $f \in L_p(0, 2\pi)$, $g \in L_q(0, 2\pi)$, $p \geq 1, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f g dx = \frac{a_0(f) a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) a_k(g) + b_k(f) b_k(g), \quad (1)$$

где $a_k(f), b_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f . Мы рассмотрим случай, когда f интегрируема в смысле Хенстока и попытаемся выяснить, какой должна быть функция g , чтобы равенство (1) выполнялось и в каком смысле надо понимать интеграл в левой части (1). Ответ сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\varphi(x) = \left(1 + \log \frac{2\pi}{x}\right)^{-\alpha} \quad (0 < x < 2\pi, \alpha > 1), \quad f \in R^*(0, 2\pi) \quad \text{и} \quad 2\pi\text{-периодична.}$$

Пусть также $g(x)$ абсолютно непрерывна, 2π -периодична, $g'(x)$ принадлежит пространству Марцинкевича M_φ . Тогда справедливо равенство (1), где интеграл слева есть интеграл Хенстока.

Это утверждение есть непосредственное следствие следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Если $\varphi(x), f, g$ такие же, как в теореме 1, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R^*) \int_0^{2\pi} g(x)(f(x) - S_n(f, x)) dx = 0, \quad (2)$$

а интеграл в (2) понимается в смысле Хенстока.

2. Основные понятия и вспомогательные утверждения. Напомним, что интегралом Хенстока функции f на отрезке $[a, b]$ называется число $I(f)$ такое, что для любого $\epsilon > 0$ найдётся функция $\delta(x) > 0$ на $[a, b]$ такая, что для любого отмеченного разбиения $\vec{X} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$, состоящего из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ и точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и такого, что $|x_k - x_{k-1}| < \delta(\xi_k)$, выполняется неравенство

$$\left| I(f) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| < \epsilon.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00390) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

Интеграл Хенстока будем обозначать символом $(R^*) \int_a^b f$, а совокупность всех функций, интегрируемых в смысле Хенстока, через $R^*(a,b)$.

Если $b-a=2\pi$, то функции $f \in R^*(a,b)$ будем считать 2π -периодическими. Если $f \in R^*(a,b)$, $g \in AC(a,b)$, то известно [1, с. 187], что $fg \in R^*(a,b)$ и справедливо равенство

$$(R^*) \int_a^b fg = g(x)F(x)|_a^b - (L) \int_a^b g'(x)F(x)dx, \quad (3)$$

где $F(x) = (R^*) \int_0^x f(t)dt$ – неопределенный интеграл Хенстока функции f .

Пусть далее $\psi(x)$ – положительная убывающая на $(0,2\pi)$ функция такая, что $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{t\psi(t)} < \infty$, $\varphi(x)$ – возрастающая вогнутая на $[0,2\pi]$ функция, $\varphi(0)=0$. Через Λ_ψ обозначим пространство Лоренца

$$\Lambda_\psi = \left\{ f : \|f\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^{2\pi} \frac{f^*(t)dt}{\psi(t)t} < +\infty \right\}$$

и через M_φ – пространство Марцинкевича

$$M_\varphi = \left\{ f : \|f\|_{M_\varphi} = \sup_{\delta>0} \frac{1}{\varphi(\delta)} \int_0^\delta f^*(t)dt < +\infty \right\}.$$

Если $\psi(t) = \left(1 + \log \frac{2\pi}{t}\right)^\alpha$ ($\alpha > 1$), то справедлива следующая теорема, доказанная в [2] для системы Уолша, но справедливая и для тригонометрической системы

ТЕОРЕМА 3. Если $F \in \Lambda_\psi$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - S_n(F)\|_{\tilde{\psi}} = 0, \text{ где}$$

где $\tilde{\psi}(t) = \left(1 + \log \frac{2\pi}{t}\right)^{\alpha+1}$, а $S_n(F)$ – частичная сумма ряда Фурье функции F .

3. Доказательство основных результатов. Вначале докажем теорему 2. Так как $f \in R^*(a,b)$, $g \in AC(a,b)$, то

$$(R^*) \int_0^{2\pi} g(f - S_n(f)) = gV|_0^{2\pi} - (L) \int_0^{2\pi} g'V, \text{ где } V(x) = (R^*) \int_0^x (f(t) - S_n(f,t))dt.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha_0(f) = 0$. В этом случае

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx.$$

Из определения $V(x)$ и условия $a_0(f) = 0$ следует, что $V(x)$ непрерывна, $V(0) = 0, V(2\pi) = 0$. Поэтому

$$(R^*) \int_0^{2\pi} g(f - S_n(f)) dt = -(L) \int_0^{2\pi} g' V dt. \quad (4)$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^x f(t) dt - \sum_{k=1}^n a_k(f) \int_0^x \cos kt dt + b_k(f) \int_0^x \sin kt dt = F(x) - \\ &- \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k(f)}{k} \sin kx - \frac{b_k(f)}{k} \cos kx \right) + c_n, \end{aligned}$$

где $c_n = -\sum_{k=1}^n \frac{b_k(f)}{k} = \text{const}$ при фиксированном n . Так как g абсолютно

непрерывна и g' конечна почти всюду, то для интеграла $\int_a^x g'$ справедлива формула Ньютона-Лейбница. Учитывая этот факт, находим

$$(L) \int_0^{2\pi} g' V = (L) \int_0^{2\pi} g' \left(F(x) - \sum_{k=1}^n \frac{a_k(f)}{k} \sin kx - \frac{b_k(f)}{k} \cos kx \right) dx. \quad (5)$$

Но

$$\frac{a_k(f)}{k} = b_k(F), \quad \frac{b_k(f)}{k} = -a_k(F). \quad (6)$$

Соединяя (4)-(6), получаем равенство

$$(R^*) \int_0^{2\pi} g(f - S_n(f)) dt = -(L) \int_0^{2\pi} g'(F - S_n(F)) dt.$$

Но интеграл справа [3, с. 152] есть линейный функционал в пространстве $\Lambda_{\tilde{\psi}}$. Оценивая его, получаем

$$\left| (R^*) \int_0^{2\pi} g(f - S_n(f)) dt \right| = \left| (L) \int_0^{2\pi} g'(F - S_n(F)) dt \right| \leq \|g'\|_{M_\phi} \cdot \|F - S_n(F)\|_{\Lambda_{\tilde{\psi}}}, \quad (7)$$

где функции ϕ и $\tilde{\psi}$ связаны соотношением $\frac{dt}{t\tilde{\psi}(t)} = d\phi(t)$.

Так как F непрерывна, то $F \in \Lambda_\psi$ при любой функции ψ , удовлетворяющей условию

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\psi(t)} \frac{dt}{t} < \infty,$$

в частности, при $\psi(t) = \left(1 + \log \frac{2\pi}{t}\right)^\alpha$ ($\alpha > 1$). Но по теореме 3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - S_n(F)\|_{\Lambda_{\widetilde{\psi}}} = 0$, для $\widetilde{\psi}(t) = \left(1 + \log \frac{2\pi}{t}\right)^{\alpha+1}$. Поэтому из (7) и следует утверждение теоремы 2, так как $\phi(x) = \left(1 + \log \frac{2\pi}{x}\right)^{-\alpha}$.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$(R^*) \int_0^{2\pi} g(f - S_n(f)) = \alpha_n \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (R^*) \int_0^{2\pi} gf &= (R^*) \int_0^{2\pi} gS_n(f) + \alpha_n = \frac{a_0(g) + a_0(f)}{2} + \\ &+ \sum_{k=1}^n (a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)) + \alpha_n. \end{aligned}$$

Так как $\alpha_n \rightarrow 0$, то теорема 2 доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Gordon R.A. The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock. AMS. Providence, 1994.
2. Лукомский С.Ф. О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L^∞ // Мат. заметки. 2001. Т. 70, вып. 6. С. 882 – 889.
3. Крейн С.П., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

УДК 518:517.944

А. Д. Луньков

МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

В работе [1] была рассмотрена задача расчёта нестационарных температурных полей со случайным тепловыделением в двумерных многосвязных областях. Было задано уравнение теплопроводности

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + q. \quad \Delta - \text{двумерный оператор Лапласа}. \quad (1)$$

Были заданы начальные значения температуры и граничные условия 3-го рода, функция тепловыделения q – случайный процесс вида

$$q = q_0 + q_1 f(t). \quad (2)$$

Здесь f и q_0 – детерминированные (неслучайные) функции, q_1 – случайная величина с заданным распределением.

Решение искалось в виде случайного процесса

$$\theta(x, y, t) = \theta_0(x, y, t) + q_1 \theta_1(x, y, t). \quad (3)$$

После подстановки (3) и (2) в (1), а также в начальные и граничные условия, стохастическая задача разделялась на две детерминированные. Разделив случайные и неслучайные составляющие уравнений (это было возможно благодаря тому, что случайная величина в каждом уравнении присутствует только одна), мы получили две краевые задачи – для уравнений теплопроводности с переменными температуры θ_0 и θ_1 соответственно. Эти задачи решаются независимо друг от друга. Линейная комбинация двух решений, полученная в соответствии с (3), удовлетворяла исходной краевой задаче для (1). Точный вид краевых задач и пример расчётов приведены в [1].

Методика и примеры решения нестационарных детерминированных задач теплопроводности известны и для разнородных тел, т.е. для тел, состоящих из m подобластей, различающихся коэффициентами теплопроводности. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\rho_i c_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \lambda_i \Delta \theta_i + \lambda_i \Delta \theta_i + q_i(x, y, t), \quad i=1..m. \quad (4)$$

На внешней границе каждой подобласти заданы условия 3-го рода

$$\lambda_i \frac{\partial \theta_i}{\partial n} + \alpha \theta_i = \alpha \theta_{\text{ик}}. \quad (4a)$$

Заданы начальные условия

$$\theta_i(x, y, 0) = h_{0i}(x, y). \quad (46)$$

Такие задачи рассмотрены, например, в [2].

Внесём изменение в задачу. Пусть $q_i = q_{0i} + q_{1i} f_i(t)$. Тепловыделение в каждой подобласти – случайный процесс того же вида, что и в представлении (2). Тогда q_{0i}, f_i – детерминированные функции, $\bar{q}_1 = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1m})$ – случайный вектор. Таким образом, мы получили задачу теплопроводности со случайным тепловыделением в составной области.

Используя метод, описанный в [1], ищем решение уравнения теплопроводности в i -й подобласти в виде

$$\theta_i(x, y, t) = \theta_{0i}(x, y, t) + q_{1i} \theta_{1i}(x, y, t). \quad (5)$$

Подставив это представление в (4), (4a), (46), разделив случайные и неслучайные (содержащие и не содержащие q_{1i}) составляющие каждого уравнения, получим новые уравнения, являющиеся компонентами новых краевых задач. Разделяя уравнения (4)-(46), полагаем, что в каждом из них множители при случайной составляющей в сумме равны нулю, тогда в

каждом уравнении равна нулю и совокупная неслучайная составляющая. Имеем три уравнения для θ_0 и три для θ_1 :

$$\frac{\partial \theta_{1i}}{\partial t} = \Delta \theta_{1i} + f_i(t); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta_{0i}}{\partial t} = q_{0i} + \Delta \theta_{0i}. \quad (7)$$

$$\lambda_i \frac{\partial \theta_{1i}}{\partial n} + \alpha \theta_{1i} = 0, \quad (6a)$$

$$\theta_{1i}(x, y, 0) = 0, \quad (6b)$$

$$\lambda_i \frac{\partial \theta_{0i}}{\partial n} + \alpha \theta_{0i} = \alpha \theta_{0j}, \quad (7a)$$

$$\theta_{0i}(x, y, 0) = h_{0i}(x, y). \quad (7b)$$

Не определены условия на границах между областями ни в (4), ни в (6)-(7). Пусть это условия 4-го рода: $\lambda_i \frac{\partial \theta_i}{\partial n} = \lambda_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n}; \theta_i = \theta_j, i \neq j$.

Описанный выше способ разделения основного уравнения и краевых условий чаще всего неприменим в отношении граничных условий 4-го рода даже в том случае, когда q_{1i} и q_{1j} зависимы (за исключением связи вида $q_{1i} = Cq_{1j}$). Мы ослабляем эти граничные условия, полагая, что температуры и тепловые потоки должны быть равны только в среднем. Кроме того, мы предполагаем, что постоянные составляющие функции температур θ_{0i} и θ_{0j} на границе между i -й и j -й подобластью равны. Тогда и условия на внутренних границах мы можем разделить.

Получаем

$$\lambda_i \frac{\partial \theta_{1i}}{\partial n} M q_{1i} = \lambda_j \frac{\partial \theta_{1j}}{\partial n} M q_{1j}; \theta_{1i} M q_{1i} = \theta_{1j} M q_{1j}, i \neq j; \quad (6b)$$

$$\lambda_i \frac{\partial \theta_{0i}}{\partial n} = \lambda_j \frac{\partial \theta_{0j}}{\partial n}; \theta_{0i} = \theta_{0j}, i \neq j. \quad (7b)$$

В качестве температуры в i -й подобласти в уравнении (6) теперь необходимо рассматривать $\theta_{1i} M q_{1i}$. Умножим левые и правые части равенств (6), (6a), (6b) на среднее значение q_{1i} с целью получения стандартной условий теплопроводности. Заметим, что тогда изменится и функция тепловыделения, и другие функции, присутствующие в краевых условиях. После этого преобразованные (6),(6a),(6b), а также соотношения (6b) определяют краевую задачу для $\theta_{1i} M q_{1i}$. Уравнение (7) и краевые условия (7a),(7b),(7b) определяют краевую задачу для θ_{0i} .

Полученные таким образом краевые задачи мы решаем методом, описанным в [2], [3]. Зная средние значения случайных величин q_{1i} , мы найдём значения температуры для каждой фиксированной точки в

соответствии с (5). Решения, полученные по (5), будут удовлетворять уравнению (4), условиям (4а), (4б), а также дополнительным условиям на внутренних границах. Эти дополнительные условия – (6в) и (7в). Подобно тому, как это сделано в [1], можно получить основные числовые характеристики температуры как случайного процесса. Были проведены расчёты для некоторых модификаций задач, описанных в [2], [3].

Рассмотрено также обобщение представлений (2)-(3) для задачи (1) на любое конечное число случайных величин – слагаемых, определяющих тепловыделение и температуру в фиксированной точке области:

$$q = q_0 + \sum_{i=1}^n q_i f_i(t); \quad \theta = \theta_0 + \sum_{i=1}^n \theta_i f_i(t).$$

Для нахождения некоторого решения краевой задачи из [1] нет необходимости накладывать какие-либо условия на случайные составляющие ряда. Мы получаем n краевых задач и решаем их независимо друг от друга. Линейная комбинация всех решений в фиксированной точке даст нам решение уравнения (1) в этой точке.

Метод, описанный в [2], применим и к трёхмерным (в частности, к осесимметричным) телам, нестационарные уравнения теплопроводности для которых исследованы в [3], [4]. Здесь отличие от [2] – лишь в некоторых граничных условиях и в методах решения краевых задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Луньков А.Д. Задачи теплопроводности со случайным тепловыделением // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 83 – 86.
2. Луньков А.Д. Плоские нестационарные задачи теплопроводности в составных областях // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 163 – 166.
3. Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.
4. Генерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.

УДК 519.21

В. Н. Михайлов, В. Ю. Михайлов

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Рассмотрим однородную цепь Маркова с конечным числом состояний n и непрерывным временем t , с матрицей интенсивностей переходов $A = \{\lambda_{ij}\}; i, j = 1, \dots, n; \lambda_{ij} \geq 0$ при $j \neq i$ и $\lambda_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$. Обозначим через

$p_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в со-

стоянии i , $i=1,\dots,n$. Тогда вектор-столбец $\bar{p}(t)=(p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))^T$ должен удовлетворять уравнениям Колмогорова [1]

$$\frac{d\bar{p}(t)}{dt} = A^T \cdot \bar{p}(t), \quad \bar{p}(0) = \bar{p}_0, \quad \sum_{i=1}^n p_i(0) = 1. \quad (1)$$

Пусть \bar{a} – произвольный n -мерный вектор и $\bar{l}=(1,1,\dots,1)^T$ – n -мерный вектор, компоненты которого равны 1. Запишем (1) в эквивалентной форме

$$\frac{d\bar{p}(t)}{dt} = (A^T - \bar{a} \cdot \bar{l}^T) \cdot \bar{p}(t) + \bar{a} \cdot \bar{l}^T \cdot \bar{p}(t);$$

так как $\bar{l}^T \cdot \bar{p}(t) = p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_n(t) = 1$, то

$$\frac{d\bar{p}(t)}{dt} = B \cdot \bar{p}(t) + \bar{a}, \quad B = A^T - \bar{a} \cdot \bar{l}^T. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Если \bar{q} – собственный вектор матрицы A^T , соответствующий собственному значению ноль, то есть $A^T \cdot \bar{q} = \bar{o}$, то решение уравнения (2) имеет вид

$$\bar{p}(t) = e^{B \cdot t} \cdot \bar{p}(0) + (1 - e^{-t}) \cdot \bar{q}, \quad (3)$$

где $\bar{a} = \bar{q}$ в матрице B .

Действительно, дифференцируя (3), будем иметь

$$\frac{d\bar{p}(t)}{dt} = B \cdot e^{B \cdot t} \cdot \bar{p}(0) + e^{-t} \cdot \bar{q}. \quad (4)$$

С другой стороны, правая часть (2) преобразуется следующим образом:

$$B \cdot \bar{p}(t) + \bar{a} = B \cdot e^{B \cdot t} \cdot \bar{p}(0) + (1 - e^{-t}) \cdot B \cdot \bar{q} + \bar{q}, \quad (5)$$

но $B \cdot \bar{q} = (A^T - \bar{q} \cdot \bar{l}^T) \cdot \bar{q} = A^T \cdot \bar{q} - \bar{q} \cdot \bar{l}^T \cdot \bar{q} = -\bar{q}$, поэтому (5) совпадает с (4), что и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если существует вектор \bar{a} , для которого матрица B – невырожденная, то решение уравнения (2) имеет вид

$$\bar{p}(t) = e^{B \cdot t} \cdot \bar{p}(0) + B^{-1} \cdot (e^{B \cdot t} - E) \cdot \bar{a}, \quad (6)$$

где E – единичная матрица.

Доказательство проводится непосредственной подстановкой (6) в (2).

Рассмотрим стационарное распределение вероятностей $\bar{p}(t) = \bar{q}$, $t \geq 0$. Из (1) и (2) следует, что вектор \bar{q} , должен удовлетворять уравнениям

$$A^T \cdot \bar{q} = 0 \text{ или } B \cdot \bar{q} + \bar{a} = 0.$$

Таким образом, для вычисления \bar{q} надо найти собственный вектор матрицы A^T . Если найдём вектор \bar{a} такой, что существует обратная матрица B^{-1} , то $\bar{q} = -B^{-1} \cdot \bar{a}$, то есть стационарное распределение находится без вычисления собственного вектора.

Цепь Маркова называется эргодической, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t) = \bar{q}$ для любого начального распределения вероятностей $\bar{p}(0)$, где \bar{q} – стационарное распределение.

ТЕОРЕМА 3. Для эргодичности цепи Маркова необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор \bar{a} такой, что $e^{B \cdot t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Необходимость. Пусть цепь Маркова эргодическая, то есть $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t) = \bar{q}$ и \bar{q} – стационарное решение. При этом условии выполняется равенство (3). Совершим в нём предельный переход при $t \rightarrow \infty$, в результате получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{B \cdot t} \cdot \bar{p}(0) = 0.$$

Так как это верно для любого начального распределения $\bar{p}(0)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{B \cdot t} = 0.$$

Достаточность. Пусть существует вектор \bar{a} такой, что $e^{B \cdot t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае обратная матрица B^{-1} существует и верно соотношение (6). Совершая в нём предельный переход при $t \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t) = -B^{-1} \cdot \bar{a}$$

для любого начального распределения $\bar{p}(0)$.

Покажем, что $\bar{q} = -B^{-1} \cdot \bar{a}$ является стационарным распределением, то есть $A^T \cdot \bar{q} = 0$.

Имеем

$$B \cdot \bar{q} = -\bar{a} \text{ или } (A^T - \bar{a} \cdot \bar{l}^T) \cdot \bar{q} = A^T \cdot \bar{q} - \bar{a} \cdot \bar{l}^T \cdot \bar{q} = A^T \cdot \bar{q} - \bar{a} = -\bar{a},$$

поэтому $A^T \cdot \bar{q} = 0$, то есть \bar{q} – стационарное распределение.

ЛЕММА. Для эргодической цепи Маркова имеет место соотношение

$$e^{A \cdot t} = e^{B^T \cdot t} + (1 - e^{-t}) \cdot S^T,$$

где $S = \bar{q} \cdot \bar{l}^T$, $B = A^T - S$, то есть $\bar{a} = \bar{q}$.

Будем считать, что система приносит доход d_{ii} в единицу времени своего пребывания в состоянии x_i и доход d_{ij} при переходе из состояния x_i в состояние x_j [2, 3]. Обозначим $v_i(t)$ математическое ожидание суммарного дохода за время t , если процесс начинается из состояния x_i .

Введём обозначения

$$g_i = d_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_{ij} \cdot d_{ij}, \quad \bar{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T, \quad \bar{v}(t) = (v(t)_1, v(t)_2, \dots, v(t)_n)^T.$$

Тогда для вектора полных доходов $\bar{v}(t)$ имеет место соотношение

$$\frac{d\bar{v}(t)}{dt} = \bar{g} + A \cdot \bar{v}(t). \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 4. Если цепь Маркова – эргодическая, то есть $A^T \cdot \bar{q} = \bar{o}$ и $B = A^T - \bar{q} \cdot \bar{l}^T$, то решение уравнения (7) имеет вид

$$\bar{v}(t) = \left[e^{B^T \cdot t} + (1 - e^{-t}) \cdot S^T \right] \cdot \bar{v}(0) + \left[(B^T)^{-1} \cdot (e^{B^T \cdot t} - E) + S^T \cdot (t + e^{-t} - 1) \right] \cdot \bar{g}.$$

При $t \rightarrow \infty$ из этого соотношения получаем асимптотическое представление для вектора полных ожидаемых доходов

$$\bar{v}(t) \approx S^T \cdot \bar{g} \cdot t + \left[S^T \cdot \bar{v}(0) - ((B^T)^{-1} + S^T) \cdot \bar{g} \right],$$

что совпадает с результатом, полученным в [2] другим путём. Для дискретных цепей Маркова подобный результат получен в [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
2. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Советское радио, 1964.
3. Козлова С.И., Мастяева И.Н. Динамическое программирование / Моск. экон.-стат. ин-т. М., 1984.
4. Козлова С.И., Михайлов В.Н. Асимптотические оценки вероятностей состояний однородных цепей Маркова // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 64 – 67.

УДК 519.212

В. Н. Михайлов, С. А. Точилкина

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе [1] был предложен алгоритм расчёта распределения функции от конечного числа независимых дискретных случайных величин. В работе [2] показано, что алгоритм решения этой задачи имеет экспоненциальную вычислительную сложность. Рассмотрим частный, но важный для практического исследования случай, когда необходимо найти распределение суммы независимых одинаково распределённых случайных величин $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где $n=2^k$.

Введём обозначения

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta_2 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, \dots, \quad \eta_k = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Случайная величина η_1 является суммой двух случайных величин ξ_1 и ξ_2 , случайную величину η_2 можно рассматривать как сумму двух независимых случайных величин η_1 и η'_1 : $\eta_2 = \eta_1 + \eta'_1$, где $\eta'_1 = \xi_3 + \xi_4$. Очевидно, случайная величина η'_1 распределена одинаково с η_1 . Наконец, $\eta_k = \eta_{k-1} + \eta'_{k-1}$, где η_{k-1}, η'_{k-1} одинаково распределённые независимые случайные величины, являющиеся суммами $n/2$ исходных случайных величин ξ_i . Следова-

тельно, алгоритм вычисления суммы случайных величин можно разбить на k последовательных шагов, причём, на каждом шаге происходит построение закона распределения суммы двух независимых одинаково распределённых дискретных случайных величин, образованных на предыдущем шаге.

Пусть независимые случайные величины η и η' могут принимать значения $x_1 < x_2 < \dots < x_s$ соответственно с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_s . Сумма случайных величин $\eta + \eta'$ будет принимать значения $x_{ij} = x_i + x_j$ с вероятностями $p_{ij} = p_i p_j$, $i = \overline{1, s}, j = \overline{1, s}$. Образуем из значений x_{ij} матрицу X

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \dots & & & \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{ss} \end{pmatrix}.$$

Матрица X является симметричной, так как $x_i + x_j = x_j + x_i$. Далее, $x_{ij} < x_{ij+1}$, так как $x_i + x_j < x_i + x_{j+1}$, аналогично $x_{ij} < x_{i+1j}$, таким образом, в каждой строке и в каждом столбце элементы матрицы строго возрастают. Для построения распределения $\eta + \eta'$ необходимо найти все одинаковые элементы, вычислить их вероятности, учитывая независимость, и расположить выделенные элементы в возрастающем порядке. При этом надо учитывать симметричность матрицы и возрастание элементов по столбцам и строкам. Так как $x_{ij} = x_{ji}$, то следует вычислять только диагональные элементы матрицы и элементы, находящиеся ниже главной диагонали, то есть $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{is}$, $i = \overline{1, s}$, при этом

$$P\{\eta + \eta' = x_{ij}\} = 2p_i \cdot p_j.$$

Следовательно случайная величина $\eta + \eta'$ будет иметь не более $s \cdot (s+1)/2$ различных значений и число операций алгоритма здесь будет пропорционально этой величине.

Если обозначить через s_i максимально возможное число различных значений случайной величины η_i , то будем иметь

$$s_i = \frac{s_{i-1}(s_{i-1} + 1)}{2}, i = \overline{1, k}, s_0 = m,$$

и общее число переборов S , необходимых для вычисления распределения случайной величины $\eta_k = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, будет равно $S = \sum_{i=1}^k s_i$.

Заметим, что при использовании для решения этой задачи общего алгоритма [1] число таких переборов будет равно m^n . Имеем $m^n \approx 2^{k-1} S$, т.е. число операций в предлагаемом алгоритме значительно сокращается. Надо учитывать также, что для некоторых дискретных случайных величин число различных значений их суммы будет меньше, чем s_i , и время расчёта распределения уменьшается еще более. Например, вычислительный эксперимент показал, что для $m=3$ и $n=20$ прямой расчёт распределения продолж

жался на компьютере более 2 часов. Применение быстрого алгоритма расчёта дало возможность вычислить закон распределения суммы при $m=3$ и $n=1024$. В качестве примера в табл. 1 приводим результаты расчёта распределения суммы 512 случайных величин ξ_i , имеющих следующий ряд распределения.

Таблица 1

ξ_i	0	1	2
p_i	0.25	0.25	0.5

В табл. 2 приводим некоторые значения X (их общее количество равно 1025) в законе распределения ξ – суммы 512 случайных величин, вероятности этих значений $P(\xi=X)$, вероятности $P(\xi < X)$ и $P(\xi \leq X)$, значения F_{NORM} функции распределения, вычисленной в соответствии с предельной теоремой по нормальному закону.

Таблица 2

X	$P(\xi=X)$	$P(\xi < X)$	$P(\xi \leq X)$	F_{NORM}
550	0.00000028	0.00000098	0.00000126	0.00000083
565	0.00000847	0.00003478	0.00004325	0.00003216
580	0.00013793	0.00069975	0.00083768	0.00069193
595	0.00122603	0.00799958	0.00922561	0.00823104
610	0.00591074	0.05262915	0.05853989	0.05490967
625	0.01534233	0.20407710	0.21941943	0.21199919
640	0.02125447	0.48792393	0.50917840	0.50000000
655	0.01555425	0.77971276	0.79526701	0.78800081
670	0.00594144	0.94270207	0.94864351	0.94509033
685	0.00116838	0.99158077	0.99274915	0.99176896

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Михайлов В.Н., Точилкина С.А. Метод расчёта закона распределения функции от дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 86 – 89.
2. Михайлов В.Н., Точилкина С.А. Распределение векторной функции от независимых дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 93 – 96.

УДК 681.3

В. В. Мозжилкин, О. М. Ромакина

ДОКУМЕНТИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ БАЗ ДАННЫХ

Разработка и документирование больших баз данных (БД) представляет собой серьёзную проблему вследствие значительного объёма информации, хранящейся в БД. По этой причине важны средства компактного описания проектных решений. В настоящее время широко используются CASE – средства, основанные на графической реализации модели сущ-

ность – связь [1]. К ним относятся Erwin [2] и Data Modeler языка UML [3]. Они позволяют в наглядной форме проектировать и документировать БД. Однако анализ графических документов, содержащих большое количество таблиц и связей, достаточно сложен. В [2] эта задача упрощается, если при описании вводить рабочие области, строго говоря, предназначенные для решения других задач. Рабочие области изолированы друг от друга, и взаимодействия между ними можно определить лишь искусственно, вводя специальные пересечения областей, содержащие требуемые связи.

Помимо схем отношений и связей при документировании больших БД необходимо в строгой лаконичной форме определить триггеры и хранимые процедуры, представляющие собой поименованные блоки кода SQL. Однако полное их описание даётся или в вербальной форме в соответствующих определениях или заметках, или приходится детально изучать сам текст на SQL, что неудобно.

В [4] для описания БД оперативного управления процессом грузовых перевозок по железной дороге используется теоретико-множественный подход, который позволяет в компактной строгой форме определить информационное наполнение БД. Но в нём нет определения схемы отношения. Фактически предлагается структура кортежей без определения ключей, не являющаяся реляционной. Поэтому связи на них задать невозможно. Этот язык можно использовать при формулировке требований к информационной среде, но необходим дополнительный этап собственно проектирования БД.

В данной статье предлагается для документирования больших БД использовать непосредственно аппарат реляционной алгебры [5]. Домены задаются либо непосредственным указанием множества значений, либо указанием множества операций, порождающих множество значений. Исходные таблицы задаются своими схемами отношений. Производные таблицы определяются с помощью суперпозиции операторов реляционной алгебры. Формально все возможные связи можно определить, отслеживая ключи, принадлежащие одноименным доменам. Однако, помимо того, что этот неявный подход чрезвычайно затрудняет понимание структур связей и не позволяет определить совокупность реализованных в БД связей, он не даёт возможности задавать кардинальные числа связей. Поэтому предлагается использовать систему обозначений, близкую к стандарту IDEF1X [6].

Для описания триггеров и хранимых процедур предлагается использовать обобщение алгебраических спецификаций типов данных [7] для схем отношений.

Язык для описания структур баз данных включает в себя следующие конструкции.

Для описаний схем отношений введём следующие обозначения.

Пусть r, s – отношения со схемой R ,

u – отношение со схемой R_1 ,

v – отношение со схемой R_2 и $R_2 \subseteq R$, $R' = R - R_2$,

t – любой кортеж в r ,

A, B – атрибуты, $A \in R$, $B \notin R - A$, где $\text{dom}(A) = \text{dom}(B)$,

X – подмножество из R .

Для построения производных таблиц будем использовать следующие операторы реляционной алгебры [5]: объединения, пересечения, взятия разности отношений, оператор выбора, оператор выбора всех кортежей из базового отношения, оператор проекции, оператор деления, оператор переименования, операторы θ -соединения и θ -выбора.

Пусть $\text{PK}(r) = A_j$ – первичный ключ отношения r , A_j – атрибут отношения r ; $\text{CK}(r) = A_k$ – альтернативный ключ отношения r , A_k – атрибут отношения r ; $\text{FK}(r)u$ (delete option, update option) = A_i – внешний ключ отношения r , где базовым отношением является отношение u , A_i – атрибут отношения r .

Здесь

update – операция обновления объекта ссылки внешнего ключа;

delete – операция удаления объекта ссылки внешнего ключа;

$\text{option} = \{\text{restricted}, \text{cascades}\}$;

restricted – ограничение совершения операции над базовым отношением u до момента, когда не будет существовать соответствующих значений внешнего ключа в отношении r ;

cascades – каскадирование совершения операции над базовым отношением u , также совершая операцию над соответствующими значениями внешнего ключа в отношении r .

Для работы с null-значениями необходимо ввести дополнительные обозначения:

A_j null not allowed (в качестве значений данного атрибута null-значения недопустимы);

A_j null allowed (в качестве значений атрибута допустимы null-значения).

Введём специальные конструкции для определения связей между отношениями. Пусть R_1 , R_2 – схемы отношений. Условные связи 1:1 между ними по соответствуию ключей k_{11}, \dots, k_{im} отношения R_i ($i=1,2$) определим следующим образом:

$$R_1 \xleftarrow{k_{11}=k_{21}, \dots, k_{1m}=k_{2m}} R_2.$$

Условные связи 1: M задаются следующим образом:

$$R_1 \xrightarrow{k_{11}=k_{21}, \dots, k_{1m}=k_{2m}} R_2.$$

Если одно из отношений в связи обязано иметь по крайней мере один экземпляр, то оно помечается точкой.

При описании связи схемы отношений можно задавать явно, но можно использовать ранее определённые имена отношений.

При совпадении имён ключей в связываемых отношениях можно вместо равенства ключей использовать только имя ключа.

Можно определить, если необходимо, рабочие области, перечислив множества отношений, их образующих, с указанием связей внутри области. Связать рабочие области можно, определив необходимые связи между отношениями, принадлежавшими разным рабочим областям. В этом случае следует использовать составные имена отношений:

<Имя_рабочей_области>.<Имя_отношения>.

Данная методика была использована при разработке БД сменно-сугубого планирования грузовых железнодорожных перевозок [8].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Цикритзис Д., Лоховски Ф. Модели данных. М.: Финансы и статистика, 1985.
2. Маклаков С.В. BPWin и Erwin. Case средства разработки информационных систем. М.: Диалог-ММИФИ, 1999.
3. Мюллер Р.Д. Базы данных и UML. М.: Лори, 2002.
4. Гершвальд А.С. Оптимизация оперативного управления процессом грузовых перевозок на железнодорожном транспорте. М.: Интекст, 2001.
5. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.
6. Описание стандартов. IDEF1X. www.citforum.ru
7. Замулин А.В. Системы программирования баз данных и знаний. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, 1990.
8. Блинов Ю.А., Иванов В.А., Ковалев А.Д., Мозжилкин В.В., Орёл А.А. Применение генетических алгоритмов к задаче оперативного планирования грузопотоками на железной дороге // Компьютерные науки и информационные технологии: Тез. докл. междунар. конф., посвящ. памяти проф. А.М. Богомолова. Саратов, 14 – 18 мая 2002 г. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. С. 10.

УДК 517.51.518

И. Д. Молоденкова

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть $f(x) \in W_2^2[a,b]$, где $W_2^2[a,b]$ одномерное пространство Соболева с нормой $\|f\|_{W_2^2} = \left(\int_a^b [f^2(x) + (f''(x))^2] dx \right)^{1/2}$. Пусть k_α – интегральные операторы ($\alpha > 0$ – параметр) с ядрами $k_\alpha(x,t)$ такие, что $k_\alpha f \in C[a,b]$ и $\|k_\alpha f - f\|_{C[a,b]} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Рассмотрим два класса функций:

- 1) $\tilde{\mu}_2^2[-\pi, \pi] = \{f(x) \in W_2^2[-\pi, \pi]: f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi), k = 0, 1; \|f\|_{W_2^2} \leq 1\},$
- 2) $\mu_2^2[0,1] = \{f(x) \in W_2^2[0,1]: \|f\|_{W_2^2} \leq 1\},$

и величины $\Delta(\delta, k_\alpha, \mu) = \sup \{ \|k_\alpha f_\delta - f\|_{C[a,b]} : f \in \mu[a,b], \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta \}$, где $\mu = \tilde{\mu}_2^2[-\pi, \pi]$ в случае 1) и $\mu = \mu_2^2[0,1]$ в случае 2).

Указанные классы были рассмотрены Г. В. Хромовой [1], и на них ею были получены точные и оптимальные по порядку оценки погрешности приближенных решений уравнений 1-го рода, в частности, задачи восстановления функций вместе с их производными. В данной статье методика Хромовой получения таких оценок применена к операторам, построенным в [2, 3].

Для осредняющих интегральных операторов с ядрами $k_H(x,t) = \sum_{i=1}^S \alpha_i(x) \phi_i(t)$ [2,3], переводящих сплайны в их производные, доказана

ТЕОРЕМА. При достаточно малых δ справедлива двусторонняя оценка:

$$D\delta^{1/2} \leq \Delta(\delta, A_{H(\delta)}, \mu) \leq 2D\delta^{1/2},$$

где для $\mu = \tilde{\mu}_2^2[-\pi, \pi]$ A_H – операторы, зависящие от параметра $H = \frac{2\pi}{n+1}$, n – натуральное число, переводящие тригонометрические сплайны, введённые П.-Ж. Лораном, в их производные (см. [2]), $H(\delta) = \frac{K}{B}\delta$,

$$D = \max_S \max_x \left(\sum_{i=1}^S (\alpha_i(x))^2 \sum_{j=1}^S \alpha_j(x_S) \left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot \sum_{l=1}^4 \frac{\lambda_l^3 c h \lambda_l \pi}{4 s h \lambda_l \pi} \right)^{1/4},$$

$$B = \max_S \left(\frac{m}{S} \right)^{l_1} \left(\frac{1}{q} \sum_{j=1}^S \alpha_j(x_S) \left(j - \frac{1}{2} \right) \sum_{l=1}^4 \frac{\lambda_l^3 c h \lambda_l \pi}{4 s h \lambda_l \pi} \right)^{1/2},$$

$$k = \max_S \max_x \left(\frac{S}{m} \right)^{l_1} \left(q \sum_{i=1}^S (\alpha_i(x))^2 \right)^{1/2},$$

где $S = 3$, $m = 13$, $q = 14$, $l_1 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\pi$, при $x \in \left[-\pi, x_1 - \frac{\delta_1}{2} \right]$,

$x_3 = x_n + \frac{\delta_1}{2}$ при $x \in \left[x_n + \frac{\delta_1}{2}, \pi \right]$; $S = 5$, $m = 6$, $q = 7$, $l_1 = \frac{1}{2}$, $x_5 = x_l + \frac{\delta_1}{2}$,

при $x \in \left[x_l + \frac{\delta_1}{2}, x_{l+1} - \frac{\delta_1}{2} \right]$, $l = \overline{1, n-1}$; $S = 7$, $m = 1$, $q = 1$, $l_1 = 1$,

$x_7 = x_l - \frac{\delta_1}{2}$ для $x \in \left[x_l - \frac{\delta_1}{2}, x_l + \frac{\delta_1}{2} \right]$, $l = \overline{1, n}$; $\delta_1 = \frac{H}{7}$; $\alpha_i(x)$, $\alpha_j(x_S)$ получаются из систем (см. [2]); для $\mu = \mu_2^2[0,1]$ A_H – операторы, зависящие от

параметра $H = \frac{1}{n}$, n – натуральное число, переводящие кубические полиномиальные сплайны дефекта один в их производные (см. [3]), $H(\delta) = \frac{K}{B} \delta$,

$$D = \max_s \max_x \left(\frac{1}{8} \sum_{i=1}^S (\alpha_i(x))^2 \sum_{j=1}^S \alpha_j(x_s) \left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \lambda_l c_{m_l} e^{(\lambda_m - \lambda_l)x_s} \lambda_m (\lambda_l + 1) \right)^{1/4},$$

$$B = \max_s \frac{l_1}{5^C} \left(\frac{1}{8m} \sum_{j=1}^S \alpha_j(x_s) \left(j - \frac{1}{2} \right) \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \lambda_l c_{m_l} e^{(\lambda_m - \lambda_l)Z} x_s \lambda_m (\lambda_l + 1) \right)^{1/2},$$

$$k = \max_s \max_x \frac{5^C}{l_1} \left(m \sum_{i=1}^S (\alpha_i(x))^2 \right)^{1/2},$$

где $\lambda_l = \sqrt[4]{-1}$, c_{m_l} – константы [4], $S = 4$, $C = \frac{1}{2}$, $m = 8$, $l_1 = 3$, $x_4 = x_0$ при $x \in \left[x_0, x_1 - \frac{\delta_1}{2} \right]$, $x_4 = x_{n-1} + \frac{\delta_1}{2}$ при $x \in \left[x_{n-1} + \frac{\delta_1}{2}, x_n \right]$; $S = 4$, $C = \frac{1}{2}$, $m = l_1 = 1$, $x_4 = x_l + \frac{\delta_1}{2}$ при $x \in \left[x_l + \frac{\delta_1}{2}, x_{l+1} - \frac{\delta_1}{2} \right]$, $l = \overline{1, n-2}$; $S = 5$, $C = m = l_1 = 1$, $x_5 = x_q - \frac{\delta_1}{2}$ при $x \in \left[x_q - \frac{\delta_1}{2}, x_q + \frac{\delta_1}{2} \right]$, $q = \overline{1, n-1}$; $\delta_1 = \frac{H}{5}$; $\alpha_i(x)$, $\alpha_j(x_s)$ ищутся из систем (см. [3]).

Доказательство следует из известной двусторонней оценки [5], оценки $\|A_H\|_{L_2 \rightarrow C} = \frac{K}{\sqrt{H}}$ и асимптотического равенства

$$\Delta_1^1(A_H, \mu) = BH^{\frac{1}{2}} + o(H^{\frac{1}{2}})$$

(см. в случае 1) [6]), в случае 2) для получения $\Delta_1^1(A_H, \mu)$ использована та же методика, что и в [6] с функцией Грина

$$G(\xi, h) = \frac{1}{8} \sum_{l=1}^4 \lambda_l e^{-\lambda_l \eta} \left[\pm e^{\lambda_l \xi} + \sum_{m=1}^4 c_{m_l} e^{\lambda_m \xi} \right],$$

где $\lambda_l = \sqrt[4]{-1}$, c_{m_l} – константы, зависящие от краевых условий; знак "+" соответствует $\eta > \xi$; знак "-" $\eta < \xi$ (см. [4]); дифференциального оператора \hat{L} ($\hat{L}y = y^{(4)} + y$, $y^{(k)}(0) = y^{(k)}(-1) = 0$, $k = 2, 3$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г.В. Об оценках погрешности приближённых решений уравнений первого рода // ДАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605 – 609.
2. Молоденкова И.Д. Построение операторов, восстанавливающих производные // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. С. 95 – 98.
3. Хромова Г.В., Молоденкова И.Д. Методы приближённого решения задачи восстановления функций: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Ч. II.
4. Хромова Г.В. О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений I рода // Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. 1994. № 4. С. 3 – 10.
5. Хромова Г.В. О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вест. Моск. ун-та. Сер. 15. 1993. № 1. С. 13 – 18.
6. Хромова Г.В., Молоденкова И.Д. Об одной модификации задачи Колмогорова-Никольского // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2002. Вып. 4. С. 155 – 159.

УДК 511.3

С. И. Небалуев

ТОЛЕРАНТНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПУТЕЙ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ПОДНЯТИИ ТОЛЕРАНТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В теорию толерантных пространств удаётся перенести значительную часть алгебро-топологической техники [1]. В частности, получена полная теория толерантных накрытий [2]. Доказательство теоремы о классификации толерантных накрытий существенно опирается на основную теорему о поднятии толерантного отображения, которая в свою очередь использует свойства толерантного пространства путей. Целью статьи является изложение упомянутого выше.

Толерантное пространство – это пара (X, τ) , где X – множество, а $\tau \subset X \times X$ – рефлексивное и симметричное отношение. Отображения толерантных пространств, сохраняющие толерантность, называются *толерантными*.

В теории толерантной гомотопии вместо единичного отрезка используются толерантные пространства (I_n, ι_n) , где $n \in N$,

$$I_n = \left\{ \frac{k}{n} \mid k = \overline{0, n} \right\}, \quad \frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \Leftrightarrow |k - l| \leq 1.$$

Толерантное отображение $\omega_n : (I_n, \iota_n) \rightarrow (X, \tau)$ назовем *толерантным путём в пространстве* (X, τ) длины n . Для любого $m \in N$ такого, что $m \geq n$, определим толерантный путь $\omega_{m,n} : (I_m, \iota_m) \rightarrow (X, \tau)$

$$\omega_{m,n}\left(\frac{k}{m}\right) = \begin{cases} \omega_n\left(\frac{k}{n}\right), & k = \overline{0, n}; \\ \omega_n(1), & k = \overline{n, m}. \end{cases}$$

Удобно считать $\omega_{m,n} = \omega_n$ для $m \leq n$.

На категории толерантных гомотопических типов определён функционатор, сопоставляющий каждому толерантному пространству (X, τ) с выделенной точкой $x_0 \in X$ фундаментальную группу $\pi(X, x_0)$, а каждому толерантному отображению f – индуцированный гомоморфизм f_π .

Определение 1. Линейно связное толерантное пространство (X, τ) назовем ограниченным, если минимальные длины путей, соединяющих точки пространства (X, τ) , ограничены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Толерантно стягиваемое пространство (X, τ) является линейно связным ограниченным пространством с тривиальной фундаментальной группой.

Толерантное пространство (Z, τ) с определением $a \sim b \Leftrightarrow |a - b| \leq 1$ является линейно связным, с тривиальной фундаментальной группой, но неограниченным.

Определение 2. Толерантное пространство (X, τ) назовем неограниченным толерантно стягиваемым, если его можно представить в виде $X = \bigcup_{M=1}^{\infty} X_M$ так, что $X_M \subset X_{M+1}$ ($\forall M \geq 1$), и $(X_M, \tau|_{X_M})$ – ограниченные стягиваемые пространства ($\forall M \geq 1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Неограниченное толерантно стягиваемое пространство (X, τ) односвязно, т. е. имеет тривиальную фундаментальную группу.

Пусть теперь $((Y, \theta), y_0)$ – линейно связное толерантное пространство с отмеченной точкой $y_0 \in Y$. Обозначим через $\wp(Y, y_0)$ множество всевозможных толерантных путей $\omega_n : (I_n, \iota_n) \rightarrow (Y, \theta)$ с началом в точке $\omega_n(0) = y_0$. Определим на множестве путей $\wp(Y, y_0)$ отношение толерантности ξ , положив при $m \geq n$

$$\omega_n \xi \omega'_m \Leftrightarrow \left[(\forall k, l = \overline{0, m}) |k - l| \leq 1 \Rightarrow \omega_{m,n}\left(\frac{k}{m}\right) \theta \omega'_m\left(\frac{l}{m}\right) \right].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\omega_n, \omega'_m \in \wp(Y, y_0)$, то

$$\omega_n \xi \omega'_m \Leftrightarrow (\forall M, M' \in N) \omega_{M,n} \xi \omega'_{M',m}.$$

Возьмем $M \in N$ и определим подпространство в $(\wp(Y, y_0), \xi)$

$$\wp_M(Y, y_0) = \{\omega_n \in \wp(Y, y_0) \mid n \leq M\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для всех натуральных $M \in N$ толерантные пространства путей $(\wp_M(Y, y_0), \xi)$ являются ограниченными толерантно стягивающими.

Доказательство. Строим толерантное отображение

$$F : \wp_M(Y, y_0) \times I_{M+1} \rightarrow \wp_M(Y, y_0),$$

осуществляющее стягивание, определив $F(\omega_n, \frac{l}{M+1})$ как толерантный путь $\omega_{M,n}^{(l)}$ в пространстве (Y, θ) такой, что

$$\omega_{M,n}^{(0)} = \omega_n;$$

$$\omega_{M,n}^{(1)} = \omega_{M,n};$$

$$(\forall l = \overline{2, M+1})(\forall k = \overline{0, M}) \quad \omega_{M,n}^{(l)}\left(\frac{k}{M}\right) = \begin{cases} \omega_{M,n}\left(\frac{k}{M}\right), & 0 \leq k \leq M - (l-1); \\ \omega_{M,n}\left(\frac{M-(l-1)}{M}\right), & M - (l-1) \leq k \leq M. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Толерантное пространство путей $(\wp_M(Y, y_0), \xi)$ является неограниченным толерантно стягиваемым пространством.

Определение 3. Толерантное отображение $p : (\bar{X}, \bar{\tau}) \rightarrow (X, \tau)$ назовем толерантным накрытием, если для среза $\tau(x)$ по любой точке $x \in X$ имеем:

$$1) \quad p^{-1}(\tau(x)) = \bigcup_{y \in p^{-1}(x)} \bar{\tau}(y);$$

$$2) \quad y_1, y_2 \in p^{-1}(x), y_1 \neq y_2 \Rightarrow \bar{\tau}(y_1) \cap \bar{\tau}(y_2) = \emptyset;$$

$$3) \quad (\forall y \in p^{-1}(x)) \quad p : \bar{\tau}(y) \rightarrow \tau(x) \text{ – толерантный гомеоморфизм.}$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему о поднятии толерантного отображения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p : ((\bar{X}, \bar{\tau}), \bar{x}_0) \rightarrow ((X, \tau), x_0)$ – пунктированное толерантное накрытие, и (Y, θ) – линейно связное толерантное пространство. Тогда пунктированное толерантное отображение

$$f : ((Y, \theta), y_0) \rightarrow ((X, \tau), x_0)$$

имеет поднятие

$$f' : ((Y, \theta), y_0) \rightarrow ((\bar{X}, \bar{\tau}), \bar{x}_0),$$

т. е. $p \circ f' = f$ тогда и только тогда, когда

$$f_\pi(\pi(Y, y_0)) \subset p_\pi(\pi(\bar{X}, \bar{x}_0)).$$

Здесь через $\pi(Y, y_0), \pi(\bar{X}, \bar{x}_0)$ обозначены фундаментальные группы пространств (Y, θ) и (X, τ) , а через f_π, p_π – гомоморфизмы, индуцированные отображениями f и p .

Доказательство. Необходимость следует из функториальных свойств фундаментальной группы. Для доказательства достаточности следует рассмотреть толерантное отображение $\psi = f \circ \phi$, где

$$\phi : (\wp(Y, y_0), \xi) \rightarrow (Y, \theta)$$

такое, что $\phi(\omega_n) = \omega_n(1)$, и воспользоваться теоремой 1 для построения отображения $\psi' : (\wp(Y, y_0), \xi) \rightarrow (\bar{X}, \bar{\tau})$, накрывающего $\psi = p \circ \psi'$. Затем строим $f' = \psi' \circ \phi^{-1}$ – искомое поднятие для f .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Небалуев С.И. Алгебро-топологические характеристики толерантных пространств // Математика и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. С. 105-107.
2. Небалуев С.И. Фундаментальная группа толерантного пространства и толерантные накрытия // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докл. V междунар. конф. Тула, 2003. С. 166 – 167.

УДК 519.4

В. Е. Новиков

СПЕКТР ПОНЯТИЙ НА n -АРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ*

Эта статья является продолжением статей [1, 2] и посвящена дальнейшим исследованиям понятий на n -арных отношениях. В ней дан перечень основных определений, включая спектр понятий n -арного отношения, и приведены некоторые результаты исследований спектра понятий бинарных отношений. Основной результат статьи показывает, что любое конечное бинарное отношение определяется своим спектром понятий с точностью до подобия.

Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$ – некоторое n -арное отношение и элементы $x_{i_1} \in M_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in M_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Будем говорить, что k -система $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ *входит* в ρ , если существует n -система, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \rho$, в которой элементы x_{i_1}, \dots, x_{i_k} присутствуют в качестве соответствующих компонент. Если $k=1$, то просто говорим: элемент $x_i \in M_i$, $1 \leq i \leq n$, *входит* в ρ .

Рассмотрим конечные непустые подмножества из множества натуральных чисел, упорядоченных естественным образом. Упорядоченные множества условимся обозначать $\bar{i}_k = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_k$, при этом положим $\bar{i}_1 = i_1$, $\bar{n} = (1, 2, \dots, n)$. Указанные множества будем использовать в качестве индексов, обозначая $M_{i_1} \times \dots \times M_{i_k} = M_{\bar{i}_k}$, $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = x_{\bar{i}_k}$, $\{M_{i_1}, \dots, M_{i_k}\} = \{M_{\bar{i}_k}\}$, $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} = \{x_{\bar{i}_k}\}$. Задачи, связанные с теорией реляционных баз данных [3], естественно приводят к следующим трём унарным операциям над отношениями.

Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$, $1 \leq k, s \leq n$ и $a_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k}$. Тогда формула

$$\pi_{\bar{i}_k}(\rho) = \{x_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k} \mid x_{\bar{i}_k} \text{ входит в } \rho\}$$

будет определять *оператор проекции n -арного отношения ρ на $M_{\bar{i}_k}$* , формула

* Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 99-1224).

$$\sigma_{\{a_{i_k}\}}(\rho) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \rho \mid a_{i_k} \text{ входит в } (x_1, \dots, x_n)\}$$

определит оператор выбора на n -арном отношении ρ по k -системе $a_{i_k} \in M_{\bar{i}_k}$, а множество

$$\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle := \pi_{\bar{j}_k} (\sigma_{\{x_{\bar{i}_s}\}}(\rho))$$

будем называть элементарным \bar{j}_k -срезом ρ через $x_{\bar{i}_s}$.

Многие свойства этих операторов приведены в [1] и [2]. Элементарный срез в свою очередь приводит к определению дуального среза.

Пусть по-прежнему $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$, $1 \leq k, s \leq n$ и $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$. Множество

$$\hat{\rho}_{\bar{j}_k}(X) := \bigcap_{x_{\bar{i}_s} \in X} \rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle$$

будем называть дуальным \bar{j}_k -срезом ρ через подмножество X .

Таким образом, дуальный \bar{j}_k -срез на множестве $M_{\bar{j}_k}$ выделяет подмножества с некоторой общностью атрибутов из $M_{\bar{i}_s}$, именно то, что мы привыкли понимать под понятиями. Для дуального среза справедливо следующее свойство: из $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$ следует $X \subseteq \hat{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X)$.

Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ и $1 \leq s \leq n$. Подмножество $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$ будем называть \bar{i}_s -понятием n -арного отношения ρ , если существует \bar{j}_k , $1 \leq k \leq n$, такой что

$$X = \hat{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X).$$

При этом \bar{j}_k будем называть определяющей системой атрибутов \bar{i}_s -понятия X , элементы множества X будем называть его объектами.

По свойствам дуального среза в множестве всех \bar{i}_s -понятий всегда присутствуют $M_{\bar{i}_s}$, \emptyset и $\{x_{\bar{i}_s}\}$, для всякого $x_{\bar{i}_s} \in M_{\bar{i}_s}$, входящего в ρ . Понятия $M_{\bar{i}_s}$ и \emptyset назовём универсальными, а $\{x_{\bar{i}_s}\}$ – индивидуальным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Объект может быть сам себе атрибутом только для индивидуальных понятий.

В классической логике и в теории реляционных баз данных объект редко описывается атрибутом, имеющим совпадение с этим объектом. Мы также будем исключать из рассмотрения \bar{i}_s -понятия с определяющей системой атрибутов $\bar{j}_k \supseteq \bar{i}_s$. При этом из множества \bar{i}_s -понятий будет исключаться лишь некоторое множество индивидуальных понятий. Обозначим $C_\rho(M_{\bar{i}_s})$ – множество всех \bar{i}_s -понятий отношения ρ , $C'_\rho(M_{\bar{i}_s})$ – множество всех \bar{i}_s -понятий, исключая \bar{i}_s -понятия с определяющей системой атрибутов $\bar{j}_k \supseteq \bar{i}_s$. При этом \bar{i}_s -понятия с определяющей системой атрибутов \bar{j}_k , где $\bar{j}_k \cap \bar{i}_s = \emptyset$, назовём \bar{i}_s -понятиями внешнего атрибута. Если $\bar{j}_k \subseteq \bar{i}_s$, то говорим о \bar{i}_s -понятии внутреннего атрибута. Наконец, если

$\bar{j}_k \cap \bar{i}_s \neq \emptyset$ и $\bar{j}_k \subsetneq \bar{i}_s$, то говорим о \bar{i}_s -понятии смешанного атрибута. К примеру, в случае бинарного отношения $\rho \subseteq M_{\bar{2}}$ множество $C'_\rho(M_1)$ совпадает с множеством 1-понятий внешнего атрибута отношения ρ .

Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ и $1 \leq s \leq n$. Множество $C_\rho(M_{\bar{i}_s})$ является частично упорядоченным по включению. Множество всех частично упорядоченных множеств понятий n -арного отношения ρ , рассматриваемых с точностью до изоморфизма, назовём спектром понятий отношения ρ . Определение полной решётки можно найти в [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Спектр понятий любого бинарного отношения состоит не более чем из трёх полных решёток.

Естественно возникает вопрос о том, возможно ли построение бинарного отношения, для которого данная произвольная полная решётка содержалась бы в его спектре? Решение этой задачи можно получить из основного результата в [5] (The Basic Theorem on Concept Lattices).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для всякой полной решётки L можно построить бинарное отношение $\rho \subseteq M_{\bar{2}}$, в котором множество 1-понятий внешнего атрибута $C'_\rho(M_1)$ образует решётку, изоморфную L .

Бинарные отношения $\rho \subseteq A_{\bar{2}}$, $\varsigma \subseteq B_{\bar{2}}$ называют подобными, если существуют подстановка $\tau \in S_2$ и биекции $f_1 : A_1 \rightarrow B_{\tau(1)}$, $f_2 : A_2 \rightarrow B_{\tau(2)}$ такие, что $(a_1, a_2) \in \rho$ равносильно $(f_{\tau(1)}(a_{\tau(1)}), f_{\tau(2)}(a_{\tau(2)})) \in \varsigma$.

Следующие результаты касаются анализа спектра понятий бинарного отношения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\rho \subseteq A_{\bar{2}}$, $\varsigma \subseteq B_{\bar{2}}$. Если решётки $C_\rho(A_1)$, $C_\rho(A_2)$ изоморфны соответственно решёткам $C_\varsigma(B_1)$, $C_\varsigma(B_2)$, то отношения ρ и ς подобны.

Замечание. Очевидно, предложение 4 останется в силе, если в его условии решётки $C_\rho(A_1)$, $C_\rho(A_2)$ будут изоморфны соответственно решёткам $C_\varsigma(B_2)$, $C_\varsigma(B_1)$.

ТЕОРЕМА. Два конечных бинарных отношения подобны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же спектр понятий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков В.Е О системах замыканий на n -арных отношениях. Саратов, 2002. 12 с. Деп. в ВИНТИ 17.04.02 № 717 - В2002.
2. Новиков В.Е Решётки понятий n -арных отношений // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 111 – 113.
3. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.
4. Биркгоф Г. Теория решёток. М.: Наука, 1984.
5. Ganter B., Wille R. Formal Concept Analysis: mathematical foundations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

**ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА
ИНДИВИДУАЛЬНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ИСХОДОВ
И МНОЖЕСТВА ДЕЛЕЖЕЙ В ИГРАХ
С КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ**

Игра n -лиц с квазиупорядоченными исходами определяется как набор объектов

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F \rangle, \quad (1)$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i , A – множество исходов, ω_i – отношение квазипорядка, выражающее предпочтения игрока i , $F : \prod_{i \in N} X_i \rightarrow A$ – функция реализации.

Игра вида (1) игроков $\{1, \dots, n\}$ содержит реализационную структуру $\langle (X_i)_{i \in N}, A, F \rangle$ и оценочную структуру $\langle A, (\omega_i)_{i \in N} \rangle$.

Исход a называется *индивидуально-рациональным*, если ни один игрок не имеет на него возражений в форме своей стратегии. Множество индивидуально-рациональных исходов обозначается $D(G)$. Индивидуально-рациональный исход, на который нет возражений у коалиции всех игроков, называется дележом. Множество дележей обозначается $\bar{D}(G)$.

Решением игры обычно служит либо всё множество индивидуально-рациональных исходов, либо некоторое его подмножество.

В статье даётся характеристика множества индивидуально-рациональных исходов в играх вида (1).

Предположим, что нам задана оценочная структура, т.е. $\langle A, (\omega_i)_{i \in N} \rangle$ и в множестве A выделено некоторое подмножество $C \subseteq A$. Требуется «восстановить» игру с квазиупорядоченными исходами так, чтобы её оценочная структура совпала с заданной, а подмножество C совпало с множеством индивидуально-рациональных исходов в построенной игре. Эта задача решается для случая, когда множество A конечное.

Будем использовать следующие обозначения. Для произвольного множества $B \subseteq A$ и любого элемента $a \in A$ полагаем:

$MAX_i B$ – множество максимальных элементов подмножества B , относительно квазипорядка ω_i ($i \in N$);

$MIN_i B$ – множество минимальных элементов подмножества B , относительно квазипорядка ω_i ($i \in N$);

$M_i(a) = \{a' \in A : a' >^{\omega_i} a\}$ – множество строгих мажорант элемента a относительно квазипорядка ω_i ($i \in N$);

$m_i(a) = \{a \in A : a^{\omega_i} < a\}$ – множество строгих минорант элемента a относительно квазипорядка ω_i ($i \in N$).

ТЕОРЕМА (характеризация множества индивидуально-рациональных исходов в играх с квазиупорядоченными исходами).

Пусть A – конечное множество, на котором заданы отношения квазипорядка $\omega_1, \dots, \omega_n$. Для того чтобы подмножество $C \subseteq A$ совпадало с подмножеством индивидуально-рациональных исходов некоторой игры вида (1), необходимо и достаточно, чтобы подмножество $C' = A \setminus C$ допускало представление в виде объединения n подмножеств C_1, \dots, C_n таких, что:

1) для любого $a_i^* \in MAX_i C_i$ выполняется $\bigcap_{i \in N} M_i(a_i^*) \neq \emptyset$;

2) пусть $i \in N$, $a \in C_i$, $a' \in A$. Тогда включение $M_i(a) \subseteq M_i(a')$ влечёт $a' \in C_i$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G – игра вида n лиц с квазиупорядоченными исходами вида (1), $C = D(G)$. Положим $C_i = U_i^*(G)$ ($i \in N$). Тогда $C' = \bigcup_{i \in N} U_i^*(G)$. Проверим выполнение условий 1 и 2 теоремы.

1. Возьмем $a_i^* \in MAX_i U_i^*(G)$ ($i \in N$). Покажем, что $\bigcap_{i \in N} M_i(a_i^*) \neq \emptyset$.

Так как $a_i^* \in U_i^*(G)$ ($i \in N$), то по определению множества строго гарантированных исходов выполняется

$$\left(\exists x_i^* \in X_i \right) \forall y \in X_{N \setminus i} F(x_i^*, y) > a_i^* \quad (i \in N). \quad (2)$$

В ситуации $x^* = (x_i^*)$ соотношения (2) будут иметь вид $F(x^*) > a_i^*$ ($i \in N$), т.е. $F(x^*) \in M_i(a_i^*)$ ($i \in N$). Таким образом, $F(x^*) = \bigcap_{i \in N} M_i(a_i^*)$, откуда

$$\bigcap_{i \in N} M_i(a_i^*) \neq \emptyset.$$

2. Пусть $i \in N$, $a \in U_i^*(G)$, $a' \in A$ и выполнено включение $M_i(a) \subseteq M_i(a')$. Покажем, что $a' \in U_i^*(G)$. В самом деле, принадлежность $a \in U_i^*(G)$ означает, что существует такая стратегия $x_i^* \in X_i$, что $(\forall y \in X_{N \setminus i}) F(x_i^*, y) > a$. По определению $M_i(a) \subseteq M_i(a')$, поэтому из $F(x_i^*, y) > a$ следует $F(x_i^*, y) > a'$. Таким образом, выполняется

$$\left(\exists x_i^* \in X_i \right) \left(\forall y \in X_{N \setminus i} \right) F(x_i^*, y) > a'.$$

Получаем, что x_i^* – возражение игрока i на исход a' , т.е. $a' \in U_i^*(G)$.

Укажем теперь основную идею доказательства достаточности. Построим игру G с квазиупорядоченными исходами вида (1) в которой $C_1 = U_1^*(G), \dots, C_n = U_n^*(G)$. Для построения игры G надо задать: 1) множества стратегий X_i ($i \in N$), 2) функцию реализации $F : \prod_{i \in N} X_i \rightarrow A$. Так как

подмножества C_1, \dots, C_n по условию непусты, то множества их максимальных элементов относительно соответствующих квазипорядков также непусты. Пусть $\{*a_1^i, \dots, *a_{m_i}^i\} = MAX_i C_i$ ($i \in N$), $p_i = \max_{1 \leq j_i \leq m_i} |M_i(*a_{j_i}^i)|$ и $p = \max\{p_1, \dots, p_n, n\}$. Положим $X_i = (x_1^i, \dots, x_{m_i}^i, y_{m_i+1}^i, \dots, y_{m_i+p}^i)$ ($i \in N$), где $1 \leq j_i \leq m_i$, $m_i + 1 \leq k_i \leq m_i + p$, причём первые m_i элементов множества X_i будут находиться во взаимно однозначном соответствии с элементами $*a_1^i, \dots, *a_{m_i}^i$. Функцию реализации F определим следующими правилами.

Правило 1. Если игрок i выбирает стратегию из подмножества своих стратегий $\{x_1^i, \dots, x_{m_i}^i\}$, а остальные игроки $l = N \setminus i$ выбирают стратегии из подмножеств стратегий $\{y_{m_i+1}^l, \dots, y_{m_i+p}^l\}$, то

$$F(y_{k_1}^1, y_{k_2}^2, \dots, y_{j_i}^i, \dots, y_{k_n}^n) \in M_i(*a_{j_i}^i).$$

Правило 2. Если все игроки выбирают свои стратегии из подмножеств стратегий $\{y_{m_i+1}^l, \dots, y_{m_i+p}^l\}$, то исходы в образуемых ситуациях должны являться минимальными элементами множества A относительно одного из порядков $\omega_1, \dots, \omega_n$. При этом должно выполняться следующее дополнительное условие: для любой стратегии $y_{k_i}^i$ ($m_i + 1 \leq k_i \leq m_i + p$) игрока i у игроков $l = N \setminus i$ существуют такие стратегии $y_{k_l}^l$, что $F(y_{k_1}^1, \dots, y_{k_i}^i, \dots, y_{k_n}^n) \in MIN_l A$.

Правило 3. Во всех остальных ситуациях исходы выбираются из множества $\bigcap_{i \in N} M_i(*a_{j_i}^i)$ ($1 \leq j_i \leq m_i$).

Итак, построена игра, функция реализации F которой удовлетворяет правилам 1 – 3, а оценочная структура есть $\langle A, (\omega_i)_{i \in N} \rangle$. Непосредственно проверяется, что в построенной игре $C_1 = U_1^*(G), \dots, C_n = U_n^*(G)$.

Проблема характеристизации множества дележей в играх с квазиупорядоченными исходами вида (1) может быть сведена к решённой проблеме характеристизации множества индивидуально-рациональных исходов, благодаря следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть задана игра G вида (1) с квазиупорядоченными исходами. Тогда можно построить игру

$$\bar{G} = \langle N, (\bar{X}_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, \bar{F} \rangle$$
 так, что $D(\bar{G}) = D(G)$.

**ИГРЫ С КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ,
ИМЕЮЩИЕ ЕДИНСТВЕННЫЙ ИНДИВИДУАЛЬНО
РАЦИОНАЛЬНЫЙ ИСХОД**

Рассматривается задача характеристизации игр с квазиупорядоченными исходами, имеющих единственный индивидуально рациональный исход, а также единственный делёж. Игра с квазиупорядоченными исходами задается в виде системы

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F \rangle, \quad (1)$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i , A – множество исходов, ω_i – отношение квазипорядка на A , выражающее предпочтение игрока i , $F: \prod_{i \in N} X_i \rightarrow A$ – функция реализации. Декартово

произведение множеств стратегий игроков $X = \prod_{i \in N} X_i$ есть множество ситуаций игры G . Отношение эквивалентности $\varepsilon = \bigcap \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = \omega_i \cap \omega_i^{-1}$ называется *естественной эквивалентностью* игры G . Через $U_i^*(G)$ обозначается множество исходов игры G , недопустимых для игрока i :

$$U_i^*(G) = \{a \in A : (\exists x_i^* \in X_i)(\forall x \in X) = F(x \| x_i^*) > a\}.$$

$D(G) = (\bigcup_{i \in N} U_i^*(G))'$ есть множество индивидуально рациональных исходов игры G .

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – игра с квазиупорядоченными исходами вида (1), в которой каждое квазиупорядоченное множество $\langle A, \omega_i \rangle$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (ОВЦ). Для того чтобы исход $c^* \in A$ единственным с точностью до естественной эквивалентности ε индивидуально рациональным исходом в игре G , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1) U_i^*(G) \subseteq \{a \in A : a < c^*\} \quad (i \in N);$$

$$2) \bigcup_{j \in N} U_j^*(G) = \bigcup_{i \in N} \{a \in A : a < c^*\};$$

3) если исход a не эквивалентен исходу c^* относительно ε , то $a < c^*$ для некоторого $i \in N$.

Доказательство. Необходимость. 1. Зафиксируем $i \in N$. Пусть $a \in U_i^*(G)$. В силу условия ОВЦ для квазиупорядоченного множества $\langle A, \omega_i \rangle$ элемент a мажорируется некоторым максимальным элементом

a_i^* подмножества $U_i^*(G)$, то есть $a \leq a_i^*$, где $a_i^* \in \text{MAX } U_i^*(G)$. Предполагая, что при любом $j \neq i$ подмножество $U_j^*(G) \neq \emptyset$, зафиксируем для $j \neq i$ максимальные элементы $a_j^* \in \text{MAX } U_j^*(G)$. Так как при всех $k \in N$ имеет место $a_k^* \in U_k^*(G)$, то для любого $k \in N$ найдётся такая стратегия $x_k^* \in X_k$, что в произвольной ситуации $x \in X$ выполняется $F(x \| x_k^*) > a_k^*$. Таким образом, в ситуации $x^* = (x_k^*)_{k \in N}$ соотношение

$$F(x^*) > a_k^* \quad (2)$$

выполняется для всех $k \in N$. Так как a_k^* – максимальный элемент подмножества $U_k^*(G)$, из (2) следует, что для всех $k \in N$ $F(x^*) \notin U_k^*(G)$, откуда $F(x^*) \in \bigcap_{k \in N} (U_k^*(G))' = D(G)$. По условию единственности инди-

видуально рационального исхода получаем $F(x^*) \stackrel{\epsilon}{\sim} c^*$ и согласно (2) имеем при $k = i$

$$c^* \stackrel{\epsilon_i}{\sim} F(x^*) > a_i^* \geq a,$$

откуда $a < c^*$.

2. Включение слева на право выполняются в силу первого условия. Обратно, пусть исход a принадлежит правой части доказываемого равенства, то есть $a < c^*$ для некоторого $i \in N$. Предположим, что $a \notin \bigcup_{j \in N} U_j^*(G)$.

Тогда $a \in (\bigcup_{j \in N} U_j^*(G))' = D(G)$ и по условию единственности индивиду-

ально рационального исхода $a \sim c^*$, откуда $a \sim c^*$, что несогласно с условием $a < c^*$.

3. Пусть a не эквивалентен исходу c^* относительно ϵ . Тогда по условию единственности индивидуально рационального исхода $a \notin D(G)$, то есть исход a не допустимый для одного из игроков: $a \in U_i^*(G)$ при некотором $i \in N$. В силу первого условия получаем $a < c^*$.

Достаточность. Пусть в игре G вида (1) для исхода $c^* \in A$ выполнены условия 1 – 3. Предположим, что исход c^* не допустим для игрока $i \in N$. Тогда $c^* \in U_i^*(G)$ и согласно первому условию получаем $c^* < c^*$, что невозможно. Итак, исход c^* допустим для всех игроков, то есть $c^* \in D$. Возь-

мем любой исход $a \in D(G)$. Предположим, что a не эквивалентен исходу c^* относительно ϵ . Тогда согласно третьему условию для некоторого $i \in N$ будет $a < c^*$ и по второму условию $a \in U_i^*(G)$ для некоторого $j \in N$, то есть исход a не допустим для игрока j . Это противоречит тому, что $a \in D(G)$, что и завершает доказательство теоремы 1.

Следующий результат устанавливает связь между условием единственности индивидуально рационального исхода и равновесием по Нэшу специального типа. Докажем вначале одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Пусть $x^0 \in X$ – ситуация равновесия по Нэшу в игре G . Тогда

$$U_i^*(G) \subseteq \{a \in A : a <^{\omega_i} F(x^0)\}. \quad (3)$$

Действительно, возьмём $a \in U_i^*(G)$. Тогда существует такая стратегия x_i^* , для которой в любой ситуации $x \in X$ выполняется $F(x \| x_i^*) > a$, в частности $F(x^0 \| x_i^*) > a$. Так как x^0 – ситуация равновесия по Нэшу, $F(x^0 \| x_i^*) \leq F(x^0)$. Из последних двух соотношений получаем $F(x^0) > a$, что доказывает лемму.

В силу леммы для любой ситуации равновесия по Нэшу x^0 выполнено

$$\bigcup_{j \in N} U_j^*(G) \subseteq \bigcup_{i \in N} \{a \in A : a <^{\omega_i} F(x^0)\}. \quad (4)$$

Ситуацию равновесия по Нэшу назовем *специальной*, если для неё в (4) выполнено равенство.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы игра G , в которой для всех $i \in N$ выполнено условие ОВЦ, имела единственный с точностью до естественной эквивалентности ϵ индивидуально рациональный исход, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала специальная ситуация равновесия по Нэшу x^0 , для которой при всяком a , не эквивалентном относительно ϵ исходу $F(x^0)$, выполняется $a > F(x^0)$ при некотором $i \in N$.

Доказательство. Пусть c^* – единственный с точностью до ϵ индивидуально рациональный исход. Зафиксируем $a_i^0 \in \text{MAX } U_i^*(G)$ и пусть x_i^0 – стратегия игрока i , строго гарантирующая ему исход a_i^0 ($i \in N$). Как показано в доказательстве теоремы 1, исход в ситуации $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ является индивидуально рациональным исходом и по условию единственности $F(x^0) \sim^{\epsilon} c^*$. Возьмём $x_i \in X_i$. Исход ситуаций $x^0 \| x_i$ будет допустимым для всех игроков $j \neq i$. Возможны два случая.

Случай 1. Исход в ситуации $x^0 \parallel x_i$, допустим для игрока i . Тогда $F(x^0 \parallel x_i) \in D(G)$ и по условию единственности $F(x^0 \parallel x_i) \sim c^*$, откуда $F(x^0 \parallel x_i) \sim F(x_0)$, следовательно, $F(x^0 \parallel x_i) \sim F(x^0)$.

Случай 2. Исход в ситуации $x^0 \parallel x_i$ не допустим для игрока i . Тогда $F(x^0 \parallel x_i) \in U_i^*(G)$ и по первому условию теоремы 1 получаем $F(x^0 \parallel x_i) \sim c^* \sim F(x^0)$. Ввиду того, что $c^* \sim F(x^0)$, выполняется условие $c^* \sim F(x^0)$, откуда $F(x^0 \parallel x_i) \sim F(x^0)$.

Итак, в любом случае будет $F(x^0 \parallel x_i) \leq F(x^0)$, то есть x^0 – ситуация равновесия по Нэшу. Так как $F(x^0) \sim c^*$, то согласно второму и третьему условиям теоремы 1 получаем доказательство необходимости. Обратно, пусть x^0 – специальная ситуация равновесия, для которой выполнено указанное в теореме 2 дополнительное условие. Тогда для $c^* = F(x^0)$ выполнены все условия теоремы 1, откуда c^* – единственный индивидуально рациональный исход.

Замечание. Теоремы 1 и 2 дают также решение ответа на вопрос о существовании единственного дележа в играх с квазиупорядоченными исходами благодаря следующим утверждениям:

a) если c – единственный с точностью до естественной эквивалентности ϵ индивидуально рациональный исход в игре G , то c^* будет также единственным с точностью до ϵ дележом;

b) для игры G , в которой для каждого $i \in N$ выполнено условие ОВЦ, верно и обратное: если c – единственный с точностью до естественной эквивалентности ϵ делёж, то он будет также единственным с точностью до ϵ индивидуально рациональным исходом.

УДК 517.54

Е. В. Разумовская

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРОНУОЛЛА НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ БАЗИЛЕВИЧА

Функции Базилевича составляют широкий подкласс (B_α) однолистных функций. Если $f \in B_\alpha$, то [1]

$$f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t w(z, t)$$

$$\frac{dw(z,t)}{dt} = -\frac{w(z,t)}{e^{-\alpha t} p_1(w) + (1-e^{-\alpha t}) p_0(w)}, \quad (1)$$

$$w(z,0) = z,$$

где $p_0(w)$, $p_1(w)$ – функции класса Каратеодори (C) с разложением в единичном круге $p_0(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k w^k$, $p_1(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\beta_k w^k$, удовлетворяющие в нём условию $\operatorname{Re} p_0(w) > 0$, $\operatorname{Re} p_1(w) > 0$.

Задача об оценке $|f(z)|$ при фиксированном значении $|a_2| \leq |f''(0)/2|$, известная как задача Гронуолла, уже рассматривалась автором [2] в классе функций Базилевича. Однако результаты были получены при дополнительных требованиях вещественности коэффициентов α , β_1, γ_1 . Методом мажорантной области [3, 4] решим задачу без указанных ограничений.

Оператор

$$\begin{aligned} P_{d_1}[q](w) &= \frac{(1+\bar{d}_1+w(1+d_1))q(w)+1-\bar{d}_1+w(d_1-1)}{(1+\bar{d}_1-w(1+d_1))q(w)+1-\bar{d}_1-w(d_1-1)} = \\ &= \frac{\bar{d}_1 \frac{q-1}{q+1} + 1}{\bar{d}_1 \frac{q-1}{q+1} + w} + w \\ &= \frac{d_1 \frac{q-1}{q+1}}{\bar{d}_1 \frac{q-1}{q+1} + 1} = \frac{k+w}{k-w}, \\ &\quad \frac{d_1 \frac{q-1}{q+1}}{d_1 \frac{q-1}{q+1} - w} \end{aligned}$$

где $q(w) \in C$, однозначно отображает класс C на класс $C(d_1)$ функций $f \in C$ с фиксированным коэффициентом d_1 [5]. Отметим, что функция $\xi = \frac{k+w}{k-w}$ ($|k| > r$) отображает круг $E_r = \{w : |w| \leq r\}$ на круг

$$\left| \xi - \frac{|k|^2 + r^2}{|k|^2 - r^2} \right| \leq \frac{2|k|r}{|k|^2 - r^2},$$

который расширяется с уменьшением $|k|$. Образ круга E_r при отображении функциями класса C содержится в круге

$$D_r = \left\{ I : I - \frac{1+r^2}{1-r^2} \leq \frac{2r}{1-r^2} \right\}.$$

Функция $k = \frac{\bar{d}_1 \frac{q-1}{q+1} + 1}{d_1 \frac{q-1}{q+1}}$ отображает круг D_r на круг

$$|k - \frac{|d_1|^2(1-r^2)}{|d_1|^2-r^2}| \leq \frac{1-|d_1|^2 r}{|d_1|^2-r^2}$$

и поэтому в круге D_r

$$|k|_{\min} = \frac{r|d_1|+1}{|d_1|+r}. \quad (2)$$

Применим оператор P_d к функциям $p_0(w)$, $p_1(w)$, зафиксировав коэффициенты γ_1 и β_1 на классе функций C . Функция

$$g(w) = e^{-\alpha t} P_{\beta_1}[p](w) + (1 - e^{-\alpha t}) P_{\gamma_1}[p](w)$$

отображает круг E_r на круг

$$\begin{aligned} & \left| g - \left(e^{-\alpha t} \frac{|k_1|^2 + r^2}{|k_1|^2 - r^2} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{|k_2|^2 + r^2}{|k_2|^2 - r^2} \right) \right| \leq \\ & \leq \left(e^{-\alpha t} \frac{2|k_1|r}{|k_1|^2 - r^2} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{2|k_2|r}{|k_2|^2 - r^2} \right) \end{aligned}$$

и, значит, с учётом (2)

$$T_1 \leq \operatorname{Re} g(w) \leq T_2, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1-r^2}{1+r^2+2r|\beta_1|} e^{-\alpha t} + \frac{1-r^2}{1+r^2+2r|\gamma_1|} (1 - e^{-\alpha t}), \\ T_2 &= \frac{1+r^2+2r+|\beta_1|}{1-r^2} e^{-\alpha t} + \frac{1+r^2+2r+|\gamma_1|}{1-r^2} (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

Из (1) и (3) получаем неравенство

$$-\frac{1}{T_1} \leq \frac{d \log |w|}{dt} \leq -\frac{1}{T_2},$$

интегрирование которого даёт

$$J_1 \leq f(z) \leq J_2,$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{(1-s^2)s^{\alpha-1}ds}{(1+s^2+2s|\beta_1|)(s^2+2s|\gamma_1|+1)} \right]^{1/\alpha}, \\ J_2 &= \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{(1+s^2+2s|\beta_1|)s^{\alpha-1}}{(1-s^2)^{\alpha+1}} \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^{a|\beta_1|} ds \right]^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Имея связь между a_2 и a_1 , β_1 , γ_1

$$a_2 = 2 \frac{\beta_1 + \gamma_1 \alpha}{\alpha + 1}$$

и фиксируя $\frac{a_2(\alpha+1)}{2} = c$, введём вектор $\bar{x}(x_1, x_2, x_3)$, положив $x_1 = |\gamma_1|$, $x_2 = \arg \gamma_1$, $x_3 = \arg \beta_1$. Тогда $|\beta_1| = \alpha x_1 \cos(x_3 - x_2) + \sqrt{c^2 - \alpha^2 x_1^2 \sin^2(x_3 - x_2)}$. Находя максимум $J_2 = J_2(\bar{x})$ и минимум $J_1 = J_1(\bar{x})$, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in B_\alpha$, $\alpha \in R$, $z \in E = \{z : |z| < 1\}$. Тогда справедливы неравенства

$$J_1^* \leq f(z) \leq J_2^*,$$

где

$$J_1^* = \frac{|z|}{1 + |z|^2 + |z| \|a_2\|},$$

$$J_2^* = \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{2s^\alpha}{e(1-s^2)^{\alpha+1} \log \frac{1+s}{1-s}} \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^{\frac{1+s^2+s\|a_2\|(\alpha+1)}{2s}} ds \right]^{1/\alpha}.$$

Замечание. Отметим, что при снятии требований вещественности γ_1 и β_1 оценки не изменились.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Базилевич И.Е. Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций // Мат. сб. 1964. № 100. С. 628 – 630.
2. Разумовская Е.В. Оценка модуля функции Базилевича с фиксированным начальным коэффициентом. Саратов, 2002. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 07.10.2002 № 1681-В2002.
3. Szynal A., Szynal J., Wajler S. On the problem of Grownwall for convex and quasi starlike functions // Conf. Anal. Functions. Abstracts. Kozubnik, 1979. P. 56.
4. Прохоров Д.В., Шиналь Я. Оценка модуля функции Мокану с фиксированными начальными коэффициентами // Теория функций и приближений: Тр. Сарат. зимней школы. Саратов, 1982. Ч. 1. С. 156.
5. Pfaltzgraff J.A., Pinchuk B.A. Variational method for classes of meromorphic functions // J. Anal. Math. 1971. Vol. 24. P. 101 – 150.

УДК 517.5

А. В. Родина

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ

Ортогональные рациональные функции, общая теория которых была построена М. М. Джрабшияном [2], А. Бульхеелом, А. Гонсалес-Верой, Е. Хендриксеном, О. Ньядстадом [1], приобрели большое значение в последние десять лет в связи с многочисленными приложениями в теории

оптимального управления, теории прогнозирования, теории стохастических процессов и т.п. Тем не менее, явные представления ортогональных рациональных функций известны лишь для очень специальных случаев весов. Представление ортогональных рациональных функций на нескольких дугах единичной окружности по отношению к весам геронимусовского типа было получено А. Л. Лукашовым [3].

Целью данной статьи является перенос соответствующих результатов из [3] на случай нескольких отрезков вещественной оси.

Пусть заданы $2l, l \in \mathbb{N}$, точки $a_1, \dots, a_{2l}, a_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, 2l$,

$a_1 < a_2 < \dots < a_{2l}$, и пусть $E = \bigcup_{k=1}^l [a_{2k-1}, a_{2k}], H(x) = \prod_{k=1}^{2l} (x - a_k)$. Через R и

S обозначим многочлены степени l , знак которых при переходе от i -го к $(i+1)$ -му отрезку меняется, и которые удовлетворяют соотношению $R(x)S(x) = H(x)$.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im} \alpha_k > 0, k = 1, 2, \dots$. Пусть $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ – соответствующие конечные произведения Бляшке:

$$B_0 = 1, B_n = \prod_{k=1}^n \zeta_k(z), \zeta_k(z) = \frac{|1 + \alpha_k^2|}{1 + \alpha_k^2} \cdot \frac{z - \alpha_k}{z - \bar{\alpha}_k}.$$

Определим пространство рациональных функций $\mathbf{L}_n = \operatorname{span}\{B_0, \dots, B_n\}$.

Через $\phi_n(z)$ обозначим ортогонализацию $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ относительно весовой функции $\frac{R(z)}{(1+z^2)\sqrt{-H(z)}}$, то есть

$$\int_E \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} \frac{R(x)}{(1+x^2)\sqrt{-H(x)}} dx = 0 \text{ при } n \neq m, n, m \in \mathbb{N}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для данной рациональной функции $\phi_n(z) \in \mathbf{L}_n$, ортогональной относительно веса $\frac{R(z)}{(1+z^2)\sqrt{-H(z)}}$, существуют многочлен p степени $l-1$ и рациональная функция $\chi_n(z) \in \mathbf{L}_n$ такие, что

$$\phi_n^2(z)R(z) - \chi_n^2(z)S(z) = B_{n-1}(z)p(z) \frac{1+z^2}{z - \alpha_n}.$$

Доказательство. Пусть заданы $2l, l \in \mathbb{N}$, точки $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{2l}$, причём $\varphi_{2l} - \varphi_1 < 2\pi$; $E_{\varphi} = \bigcup_{k=1}^l [\varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}]$. Пусть, далее, $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, удовле-

твояющих условию $|\beta_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots$; $\{\tilde{B}_k\}_{k=0}^{\infty}$ — соответствующие ко-
нечные произведения Бляшке: $\tilde{B}_0 = 1$, $\tilde{B}_n(z) = \prod_{k=1}^n \left(-\frac{\bar{\beta}_k}{|\beta_k|} \right) \cdot \frac{z - \beta_k}{1 - \bar{\beta}_k z}$;

$\tilde{\mathbf{L}}_n = \text{span}\{\tilde{B}_0, \dots, \tilde{B}_n\}$. Через $\tilde{\phi}_n(z)$ обозначим ортогонализацию $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ от-
носительно весовой функции

$$f(\varphi, W) = \begin{cases} \frac{W(\varphi)}{r(\varphi)}, & \varphi \in E_{\varphi}; \\ 0, & \varphi \notin E_{\varphi}, \end{cases}$$

где $\pm \frac{1}{r(\varphi)} = \frac{(-1)^j}{\sqrt{Q(\varphi)}}$ при $\varphi \in (\varphi_{2j-1}, \varphi_{2j})$, $Q(\varphi) = \prod_{j=1}^{2l} \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_j}{2}\right)$:

$$\int_{E_{\varphi}} \overline{\tilde{\phi}_n(e^{i\varphi})} \tilde{\phi}_m(e^{i\varphi}) f(\varphi, W) d\varphi = 0 \text{ при } n \neq m, n, m \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Функцию $\tilde{\phi}_n(z) \in \tilde{\mathbf{L}}_n$ можно представить в виде $\tilde{\phi}_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod_{k=1}^n (1 - \bar{\beta}_k z)}$,

где $P_n(z) = a \prod_{k=1}^n (z - a_k)$ [1]. Применяя к данной функции дробно-линейное

отображение $w(z) = \frac{i+z}{iz+1}$, где z удовлетворяет условию $|z| < 1$, получим

$$\tilde{\phi}_n(z(w)) = \frac{(-1)^n a \prod_{k=1}^n (w - w(a_k))(ia_k + 1)}{\prod_{k=1}^n \left(w - w\left(\frac{1}{\bar{\beta}_k}\right)\right) (i + \bar{\beta}_k)}. \quad (2)$$

Получая аналогичным образом $\overline{\tilde{\phi}_n(z(w))}$, $f(z(w), W(z(w))) dw$ и учи-
тывая (1), имеем

$$\int_E \overline{\tilde{\phi}_n(z(w))} \tilde{\phi}_m(z(w)) \frac{R(z(w))}{(1 + w^2) \sqrt{-H(z(w))}} dw = 0 \text{ при } n \neq m, n, m \in \mathbb{N}.$$

Для функции $\tilde{\phi}_n(z) \in \tilde{\mathbf{L}}_n$ справедливо уравнение (5) из [3]:

$$\tilde{\phi}_n^2(z) W(z) - \tilde{\chi}_n^2(z) V(z) = \tilde{B}_{n-1}(z) \tilde{p}(z) \frac{z}{1 - \bar{\beta}_n z}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) представление (2) и представления, аналогичные
(2), для функций $\tilde{\chi}_n(z) \in \tilde{\mathbf{L}}_n$, $\tilde{B}_{n-1}(z)$ и $\frac{z}{1 - \bar{\beta}_n z}$, получим искомое уравнение
в случае нескольких отрезков вещественной оси.

Замечание. Используя данную теорему, можно получить, подобно теореме 2 из [3], представление для ортогональных рациональных функций в терминах автоморфных функций Шоттки-Бернсайда.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Bultheel A., Gonzalez-Vera P., Hendriksen E., Njastad O. Orthogonal rational functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
2. Джербашян М.М. Ортогональные системы рациональных функций на единичной окружности с заданным множеством полюсов //ДАН СССР. 1962. Т. 3. С. 1794 – 1798.
3. Лукашов А.Л. Ортогональные рациональные функции на нескольких дугах единичной окружности // Изв. НАН Армении. Сер. Математика. 2001. Т. 36, № 5. С. 52 – 61.
4. Peherstorfer F. On Bernstein-Szegő orthogonal polynomials on several intervals // SIAM J. Math. Anal. 1990. Vol. 21, № 2. P. 461 – 482.

УДК 519.83

В. В. Розен

СИТУАЦИИ К-РАВНОВЕСИЯ В ИГРАХ С КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

1. Игра n лиц с квазиупорядоченными исходами задаётся в виде системы

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F \rangle, \quad (1)$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i , A – множество исходов, ω_i – отношение квазипорядка, выражающее предпочтения игрока i , $F: \prod_{i \in N} X_i \rightarrow A$ – функция реализации. Всякое непустое подмножество $S \subseteq N$ называется *коалицией* в игре G . Для произвольной коалиции S определим множество её стратегий X_S и отношение предпочтения ω_S в виде

$$X_S = \prod_{i \in S} X_i, \omega_S = \bigcap_{i \in S} \omega_i. \quad (2)$$

Пусть $K \subseteq 2^N$ – некоторое семейство коалиций.

Определение 1. Ситуация $x^0 \in \prod_{i \in N} X_i = X$ называется *ситуацией K-равновесия*, если ни у какой коалиции $S \in K$ не существует такой стратегии $x_S \in X_S$, при которой

$$F(x^0 \| x_S) >_{\omega_S} F(x^0).$$

Ситуация *K-равновесия*, при которой $K = 2^N$, называется *ситуацией сильного равновесия*. Как известно, в играх численными выигрышами си-

туации сильного равновесия существуют весьма редко. В настоящей статье указан способ нахождения в игре (1) такого семейства коалиций K , для которого существует ситуация K -равновесия. В качестве следствия дано достаточное условие существования ситуаций сильного равновесия в играх с квазиупорядоченными исходами.

2. Для формулировки основного результата введём

Определение 2. Будем говорить, что исход $a \in A$ допустим для игрока $i=1, \dots, n$ в игре G , если не существует такой стратегии $x_i \in X_i$, для которой при всех $y_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$ выполняется

$$F(x_i, y_{N \setminus i}) > a.$$

Через $D_i(G)$ будем обозначать множество исходов, допустимых для игрока i в игре G . Множество исходов, допустимых для всех игроков, есть $D(G) = \bigcap_{i \in N} D_i(G)$. На множестве X_i стратегий игрока i введём отношение

β -доминирования стратегий, полагая для произвольных $x_i^1, x_i^2 \in X_i$:

$$x_i^1 \geq_{\beta_i} x_i^2 \Leftrightarrow \{F(x_i^1, y) : y \in X_{N \setminus i}\}^\uparrow \subseteq \{F(x_i^2, y) : y \in X_{N \setminus i}\}^\uparrow.$$

(\uparrow есть оператор взятия мажорант подмножества в квазиупорядоченном множестве $\langle A, \omega_i \rangle$). Подмножество $B \subseteq A$ называется антицепью относительно квазипорядка ω , если условия $a_1, a_2 \in B$, $a_1 \geq a_2$ влекут $a_1 \sim a_2$. Основной результат статьи представляет

ТЕОРЕМА. Пусть K – семейство тех коалиций $S \subseteq N$ игры G , для которых подмножество $D(G)$ является антицепью относительно квазипорядка ω_S . Тогда ситуация, состоящая из β_i -максимальных стратегий игроков, является ситуацией K -равновесия в игре G .

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

ЛЕММА 1. Множество $D_i(G)$ исходов, допустимых для игрока i в игре G , является мажорантно стабильным относительно квазипорядка ω_i .

ЛЕММА 2. Исход в ситуации, в которой игрок i использует β_i -максимальную стратегию, является допустимым для игрока i .

ЛЕММА 3. Исход в ситуации, в которой каждый игрок $i \in N$ использует β_i -максимальную стратегию, является допустимым.

Для доказательства теоремы рассмотрим ситуацию $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$, в которой каждая стратегия игры x_i^0 является β_i -максимальной ($i \in N$). По лемме 3 выполняется $F(x^0) \in D(G)$. Предположим, что существует такая коалиция $S \in K$ и стратегия $x_S \in X_S$, что

$$F(x^0 \| x_S) = F(x_S, x_{N \setminus S}^0) \stackrel{\omega_S}{>} F(x^0). \quad (3)$$

Тогда согласно (2) для каждого $i \in S$ выполняется $F(x_S, x_{N \setminus S}^0) \stackrel{\omega_S}{\geq} F(x^0)$ и по лемме 1 $F(x_S, x_{N \setminus S}^0) \in D_i(G)$ ($i \in S$). Рассмотрим теперь $j \in N \setminus S$. Так как стратегия x_j^0 является β_i -максимальной, то по лемме 2 будет $F(x_S, x_{N \setminus S}^0) \in D_j(G)$. Таким образом, $F(x_S, x_{N \setminus S}^0) \in \bigcap_{i \in N} D_i(G) = D(G)$. Условия $F(x^0), F(x_S, x_{N \setminus S}^0) \in D(G)$ и (3) приводят к противоречию с предположением, что $D(G)$ – антицепь относительно квазипорядка ω_S , что и завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Если в каждом квазиупорядоченном множестве $\langle A, \omega_i \rangle$ ($i \in N$) подмножество допустимых исходов игры $D(G)$ является антицепью, то ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$, состоящая из β_i -максимальных стратегий игроков, будет ситуацией сильного равновесия.

Действительно, пусть $S \subseteq N$ – любая коалиция игры G . Предположим, что для $a, b \in D(G)$ имеет место $a \stackrel{\omega_S}{\geq} b$. Тогда при каждом $i \in S$ согласно (2) будет $a \stackrel{\omega_i}{\geq} b$ и по свойству антицепи $a \stackrel{\varepsilon_i}{\sim} b$. Получаем $a \stackrel{\varepsilon_S}{\sim} b$, где $\varepsilon_S = \omega_S \cap \omega_S^{-1}$. Показали, что $D(G)$ является антицепью относительно любого квазипорядка ω_S ($S \subseteq N$). По доказанной теореме ситуация x^0 будет ситуацией сильного равновесия в игре G .

3. Для конкретизации полученного результата обратимся к игре n лиц в нормальной форме с функциями выигрыша игроков

$$\Gamma = \langle N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle.$$

Функция выигрыша u_i игрока есть отображение множества X ситуаций игры Γ в R . Игру Γ можно рассматривать как игру с квазиупорядоченными исходами, в которой в качестве множества исходов берётся $A = \{u = (u_1(x), \dots, u_n(x)) : x \in X\}$, а отношение предпочтения игрока i определено условием $u \leq^{\omega_i} v \Leftrightarrow u_i \leq v_i$. Положим $\alpha_i = \supinf_{x_i, y_{N \setminus i}} u_i(x_i, y_{N \setminus i})$.

Стратегия $x_i^0 \in X_i$, на которой достигается супремум функции $\inf_{y_{N \setminus i}} u_i(x_i, y_{N \setminus i})$, называется *осторожной стратегией* игрока i . Осторожная стратегия игрока i является также β_i -максимальной. Исход $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ будет допустимым исходом в игре Γ тогда и только тогда, когда $a_i \geq \alpha_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Игра Γ называется *несущественной* в смысле Мулена [1], если множество её допустимых исходов однозначно. Так как в этом случае множество допустимых исходов игры будет антицепью относительно любого квазипорядка, то по следствию доказанной теоремы получаем известный результат, что ситуация в осторожных

стратегиях будет ситуацией сильного равновесия в несущественной игре с функциями выигрыша игроков [1, с. 28, теорема 1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мулен Э. Теория игр. М.: Мир, 1985.
2. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. М.: Книжный дом. Университет – Высшая школа, 2002.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

О СИЛЬНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТЕЙШЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 5-го ПОРЯДКА С НЕОДНОРОДНЫМИ НЕРАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ^{*}

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L , порождённый дифференциальным выражением $l(y) = y^{(5)}(x)$ с граничными условиями

$$U_v(y) := \alpha_v y^{(v-1)}(0) + \alpha_{v0} y^{(v-2)}(0) + y^{(v-1)}(1) = 0, \quad v = \overline{1,5},$$

где $\alpha_v, \alpha_{v0} \in \mathbf{C}$, $\alpha_{10} = 0$ и $(\alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{40}, \alpha_{50}) \neq (0, 0, 0, 0)$. В случае $\alpha_{20} = \alpha_{30} = \alpha_{40} = \alpha_{50} = 0$, то есть когда краевые условия однородны, в [1] описаны все возможные нерегулярные краевые условия и доказана полнота собственных функций оператора L в пространстве $L_2[0,1]$. В настоящей статье даётся описание некоторых сильно нерегулярных неоднородных краевых условий.

Пусть $\omega_j = \exp\left(\frac{(2j-1)\pi i}{5}\right)$, $j = \overline{1,5}$, есть корни 5-й степени из -1 ,

$\lambda = -\rho^5$. Как известно, функции $y_j(x, \rho) = \exp(\rho\omega_j x)$, $j = \overline{1,5}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения $l(y) - \lambda y = 0$.

Введём числа $a_k = \hat{\alpha}_k \omega_1^{k-1}$, $k = \overline{1,5}$, где $(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_5) = (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \Omega^{-1}$, $\Omega = (\omega_j^{s-1})_{j,s=1}^5$. Будем обозначать далее $U_v(y_j) = \tilde{v}_{vj}(\rho) + e^{\rho\omega_j} \tilde{w}_{vj}(\rho)$, где $\tilde{v}_{vj}(\rho) = \alpha_v(\rho\omega_j)^{v-1} + \alpha_{v0}$, $\tilde{w}_{vj}(\rho) = (\rho\omega_j)^{v-1}$, и положим

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$\tilde{V}_j(\rho) = \begin{bmatrix} v_{1j}(\rho) \\ v_{2j}(\rho) \\ \dots \\ v_{5j}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2(\rho\omega_j) \\ \dots \\ \alpha_5(\rho\omega_j)^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_{20} \\ \dots \\ \alpha_{50} \end{bmatrix}, \quad \tilde{W}_j(\rho) = \begin{bmatrix} w_{1j}(\rho) \\ w_{2j}(\rho) \\ \dots \\ w_{5j}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho\omega_j \\ \dots \\ (\rho\omega_j)^4 \end{bmatrix}.$$

Отметим на плоскости следующие точки: $0, \omega_j, \omega_j + \omega_k$ ($j \neq k$), $\omega_j + \omega_k + \omega_l$ ($j \neq k \neq l \neq j$), ..., $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5$. Очевидно, выпуклая оболочка M_0 этих точек есть правильный 10-угольник с вершинами в точках $\omega_1 + \omega_2, \omega_2 + \omega_3, \dots, \omega_5 + \omega_1$ («чётные» вершины) и $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_2 + \omega_3 + \omega_4, \dots, \omega_5 + \omega_1 + \omega_2$ («нечётные» вершины). Пусть M_0^0, M_0^1 и M_1 есть многоугольники, получающиеся из M_0 путём удаления соответственно нечётных, чётных и всех вершин. Очевидно, M_1 есть правильный 10-угольник с вершинами в точках $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5$ и $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4, \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5, \dots, \omega_5 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$.

Для характеристического определителя $\Delta(\rho)$ оператора L имеет место представление

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) &= \det(U_v(y_j))_{v,j=1}^5 = \\ &= |\tilde{V}_1(\rho) + e^{\rho\omega_1}\tilde{W}_1(\rho), \tilde{V}_2(\rho) + e^{\rho\omega_2}\tilde{W}_2(\rho), \dots, \tilde{V}_5(\rho) + e^{\rho\omega_5}\tilde{W}_5(\rho)| = \\ &= \{e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}\tilde{\Delta}_{12}(\rho) + e^{\rho(\omega_2+\omega_3)}\tilde{\Delta}_{23}(\rho) + \dots + e^{\rho(\omega_5+\omega_1)}\tilde{\Delta}_{15}(\rho)\} + \\ &+ \{e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\tilde{\Delta}_{123}(\rho) + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}\tilde{\Delta}_{234}(\rho) + \dots + e^{\rho(\omega_5+\omega_1+\omega_2)}\tilde{\Delta}_{125}(\rho)\} + \\ &+ \{e^{\rho\omega_1}\tilde{\Delta}_1(\rho) + e^{\rho\omega_2}\tilde{\Delta}_2(\rho) + \dots + e^{\rho\omega_5}\tilde{\Delta}_5(\rho)\} + \\ &+ \{e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}\tilde{\Delta}_{1234}(\rho) + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}\tilde{\Delta}_{2345}(\rho) + \dots + \\ &+ e^{\rho(\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\tilde{\Delta}_{1235}(\rho)\} + \tilde{\Delta}_{12345}(\rho) + \tilde{\Delta}_0(\rho), \end{aligned} \quad (1)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_0(\cdot) &= |\tilde{V}_1(\cdot)\tilde{V}_2(\cdot)\tilde{V}_3(\cdot)\tilde{V}_4(\cdot)\tilde{V}_5(\cdot)|, \quad \tilde{\Delta}_1(\cdot) = |\tilde{W}_1(\cdot)\tilde{V}_2(\cdot)\tilde{V}_3(\cdot)\tilde{V}_4(\cdot)\tilde{V}_5(\cdot)|, \dots, \\ \tilde{\Delta}_5(\cdot) &= |\tilde{V}_1(\cdot)\tilde{V}_2(\cdot)\tilde{V}_3(\cdot)\tilde{V}_4(\cdot)\tilde{W}_5(\cdot)|, \quad \tilde{\Delta}_{12}(\cdot) = |\tilde{W}_1(\cdot)\tilde{W}_2(\cdot)\tilde{V}_3(\cdot)\tilde{V}_4(\cdot)\tilde{V}_5(\cdot)|, \dots, \\ \tilde{\Delta}_{12345}(\cdot) &= |\tilde{W}_1(\cdot)\tilde{W}_2(\cdot)\tilde{W}_3(\cdot)\tilde{W}_4(\cdot)\tilde{W}_5(\cdot)|. \end{aligned}$$

Некоторые коэффициенты при экспонентах в (1) могут равняться нулю, но имеет место следующий результат.

ЛЕММА 1. Коэффициенты $\tilde{\Delta}_{jk...l}(\cdot)$ при экспонентах в (1) в каждой группе слагаемых, заключённых в фигурные скобки, равны нулю или отличны от нуля одновременно. \square

Отметим на плоскости точки $\omega_j, \omega_j + \omega_k, \omega_j + \omega_k + \omega_l, \dots$, соответствующие коэффициентам при ρ в показателях экспонент тех слагаемых в (1), при которых стоят ненулевые коэффициенты $\tilde{\Delta}_{jk...l}(\cdot)$. Выпуклая оболочка

лочка M_Δ этих точек в силу леммы 1 есть правильный 10- или 5-угольник, характеризующий степень вырожденности характеристического определителя (за исключением полностью вырожденных случаев, когда M_Δ вырождается в точку или совсем исчезает).

Если $M_\Delta = M_0$, то оператор L регулярен по Биркгофу [2, с. 66 – 67]. Если $M_\Delta = M_0^0$ или $M_\Delta = M_0^1$, то L слабо нерегулярен или нормален по терминологии [3]. Если $M_\Delta = M_1$, то L будет сильно нерегулярен. Кратко будем писать в этом случае $L \in NR_1$.

Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы $L \in NR_1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий при $x \in \mathbb{C}$:

$$(1) \quad a_5 = a_1 = a_2 = a_3 = x \in C, \quad a_4 \neq x;$$

$$(2) \quad a_4 = a_5 = a_1 = a_2 = x \in C, \quad a_3 \neq x;$$

$$(3) \quad \alpha_{20} \neq 0, \quad \alpha_{30} = \alpha_{40} = \alpha_{50} = 0 \quad \text{и}$$

$$\text{либо (3а)} \quad a_1 = \omega_1^{-2}x, \quad a_2 = \omega_1^{-4}x, \quad a_3 = \omega_1^{-6}x, \quad a_4 \neq \omega_1^{-8}x, \quad a_5 \neq x;$$

$$\text{либо (3б)} \quad a_5 = \omega_1^{-2}x, \quad a_1 = \omega_1^{-4}x, \quad a_2 = \omega_1^{-6}x, \quad a_3 \neq \omega_1^{-8}x, \quad a_4 \neq x;$$

$$(4) \quad \alpha_{30} \neq 0, \quad \alpha_{20} = \alpha_{40} = \alpha_{50} = 0 \quad \text{и}$$

$$\text{либо (4а)} \quad a_1 = \omega_1^{-4}x, \quad a_2 = \omega_1^{-8}x, \quad a_3 = \omega_1^{-12}x, \quad a_4 \neq \omega_1^{-16}x, \quad a_5 \neq x;$$

$$\text{либо (4б)} \quad a_5 = \omega_1^{-4}x, \quad a_1 = \omega_1^{-8}x, \quad a_2 = \omega_1^{-12}x, \quad a_3 \neq \omega_1^{-16}x, \quad a_4 \neq x;$$

$$(5) \quad \alpha_{40} \neq 0, \quad \alpha_{20} = \alpha_{30} = \alpha_{50} = 0 \quad \text{и}$$

$$\text{либо (5а)} \quad a_1 = \omega_1^{-6}x, \quad a_2 = \omega_1^{-12}x, \quad a_3 = \omega_1^{-18}x, \quad a_4 \neq \omega_1^{-24}x, \quad a_5 \neq x;$$

$$\text{либо (5б)} \quad a_5 = \omega_1^{-6}x, \quad a_1 = \omega_1^{-12}x, \quad a_2 = \omega_1^{-18}x, \quad a_3 \neq \omega_1^{-24}x, \quad a_4 \neq x;$$

$$(6) \quad \alpha_{50} \neq 0, \quad \alpha_{20} = \alpha_{30} = \alpha_{40} = 0 \quad \text{и}$$

$$\text{либо (6а)} \quad a_1 = \omega_1^{-8}x, \quad a_2 = \omega_1^{-16}x, \quad a_3 = \omega_1^{-24}x, \quad a_4 \neq \omega_1^{-32}x, \quad a_5 \neq x;$$

$$\text{либо (6б)} \quad a_5 = \omega_1^{-8}x, \quad a_1 = \omega_1^{-16}x, \quad a_2 = \omega_1^{-24}x, \quad a_3 \neq \omega_1^{-32}x, \quad a_4 \neq x.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рыхлов В.С. Кратная полнота собственных функций простейшего пучка 5-го порядка // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Twelfth Crimean Mathematical School-Symposium (KROMSH-XII). Sevastopol, Laspi, September 18–19 2001. Simferopol, 2001. P. 42 – 51.

2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1968.

3. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. Вып. 9. С. 190–229.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГЕЛЬДЕРА

Пусть $e_* = \{1, \dots, n\}$, $e \subset e_*$, $r \in \mathbb{N}^n$, r^e – проекция вектора r на $\mathbf{R}^e = \{x \in \mathbf{R}^n : x_i = 0, i \notin e\}$.

В статье рассматриваются обобщённые классы Гельдера, построенные в L_p по набору смешанных модулей гладкости порядков r^e , $e_0 \subseteq e \subseteq e_*$. Получена характеристика в терминах L_q -нормы ($p \leq q$ покординатно), непосредственным следствием которой является вложение в соответствующие классы в L_q . Квазинормы определены по аналогам Н-функционалов из [1]. При $e_0 = e$ обобщённые классы Гельдера строятся по одному модулю гладкости порядка $r \in \mathbb{N}^n$ и L_q -характеристика их уже известна [2, 3].

Для $a = (a_1, \dots, a_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ и $e \subset e_*$, $t^a = \prod_{i=1}^n t_i^{a_i}$, $t_e^a = \prod_{i \in e} t_i^{a_i}$,
 $\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right)$, неравенство $1 \leq a \leq t \leq \infty$ означает, что $1 \leq a_i \leq t_i \leq \infty$,
 $i = 1, \dots, n$; $-e = e_* \setminus e$. При $r \in Z_0^n$ ($Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$), $t \in \mathbf{R}^n$,
 $\Delta^r(t)f = \prod_{i=1}^n \Delta_i^{r_i}(t_i)f$, где $\Delta_i^{r_i}(t_i)f$ – разность функции f порядка r_i по направлению x_i с шагом t_i ; $\Delta^r(t; G)f(x) = \begin{cases} \Delta^r(t)f(x), & \text{если } [x, x + rt] \subset G; \\ 0, & \text{если } [x, x + rt] \not\subset G. \end{cases}$

Для функции φ одной переменной

$$J^t[\varphi(t)] = \int_0^t |\varphi(\tau)| \frac{d\tau}{\tau},$$

а в многомерном случаем при $t = (t_1, \dots, t_n)$

$$J^t = J^{t_1} \dots J^{t_n}, \quad J^{t^e} = \prod_{i \in e} J^{t_i}.$$

Будем говорить, что область $G \in \mathbf{R}^n$ принадлежат классу $C^{-e}(H)$, если существует конечное число K открытых множеств G_k и прямоугольных параллелепипедов $V_k^{-e} = \prod_{i \in -e} [0, \delta_i^k H_i]$, $\delta_i^k = \pm 1$, так что выполнены

условия $G = \bigcup_{k=1}^K G_k = \bigcup_{k=1}^K (G_k + V_k^{-e})$ и $G = \bigcup_{k=1}^K G_k^{(\delta)}$ при некотором $\delta > 0$, где

$$G_k^{(\delta)} = \{x : x \in G_k, \rho(x, \partial G_k \setminus \partial G) > \delta\}.$$

В одномерном случае функционал $H[\psi] = H[\psi(t)]$ определён на неотрицательных функциях $\psi(t)$, $0 < t < h$ и удовлетворяет условиям:

- 1⁰. $H[a\psi_1(t) + b\psi_2(t)] \leq CaH[\psi_1(t)] + CbH[\psi_2(t)]$ при любых $a \geq 0, b \geq 0$;
- 2⁰. $H[\psi_1(t)] \leq H[\psi_2(t)]$ при $\psi_1(t) \leq \psi_2(t)$.

Положительную функцию $\omega(t)$, $t > 0$ назовём почти возрастающей, если с некоторой постоянной C выполняется неравенство $\omega(t_1) \leq \omega(t_2)$ при $t_1 \leq t_2$.

Через S обозначим класс положительных функций ω , обладающих свойством: найдется такое $\alpha > 0$, что функция $t^{-\alpha}\omega(t)$ почти возрастает.

Скажем, что $\omega(t)$ и функционал H согласованы с оператором J' , если существует такое $\alpha > 0$, что

- 1) $t^{-\alpha}\omega(t)$ почти возрастает,
- 2) $H[t^{-\alpha}J'[t^\alpha\psi(t)]] \leq CH[\psi(t)]$.

В многомерном случае $H = \prod_{i=1}^n H_i$, где H_i , $i = 1, \dots, n$, перестановочные,

определенны на функциях переменной t_i и удовлетворяют условиям 1⁰ и 2⁰;

$\omega(t) = \prod_{i=1}^n \omega_i(t_i)$; $\omega \in S_e$, если для всех $i \in e$ $\omega_i(t_i) \in S$.

Будем говорить, что $\omega_e = \prod_{i \in e} \omega_i(t_i)$ и $H = \prod_{i \in e} H_i$ согласованы с оператором $J'^e = \prod_{i \in e} J^{t_i}$, если для каждого $i \in e$ $\omega_i(t_i)$ и H_i согласованы с оператором J^{t_i} .

Определение. Пусть $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $r \in Z_0^n$, $j \in Z^n$, $t \in \mathbf{R}_+^n$, G — область в \mathbf{R}^n .

Положим

$$\mu_{p,q}^r(t; G; f) = \left\| \dots \left\| \Delta^r(t; G)f(x + jt) \right\|_{l_{p_1, j_1}} \right\|_{L_{q_1}(0, t_1), x_1} \dots \left\| \left\| \Delta^r(t; G)f(x + jt) \right\|_{l_{p_n, j_n}} \right\|_{L_{q_n}(0, t_n), x_n} .$$

Определённую таким образом величину назовём q -интегральным p -модулем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r \in \mathbf{N}^n$, $e_0 \subset e_*$, область $G \in C^{-e_0}(H)$, $\omega \in S_{-e_0}$, ω_{e_0} и H_{e_0} согласованы с оператором J'^{e_0} . Тогда эквивалентны квазинормы

$$\sum_{e_0 \subseteq e \subseteq e_*} H_e \left[\frac{\sup_{t^{-e} \leq h^{-e}} \mu_{p,q}^{r^e}(t; G; f) t_e^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}}{\omega_e(t)} \right]$$

и

$$\sum_{e_0 \subseteq e \subseteq e_*} H_e \left[\frac{\left\| \Delta^{r^e}(t; G) f \right\|_{L_p}}{\omega_e(t) t_e^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}} \right].$$

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 имеет место неравенство

$$\sum_{e_0 \subseteq e \subseteq e_*} H_e \left[\frac{\left\| \Delta^{r^e}(t; G) f \right\|_{L_q}}{\omega_e(t)} \right] \leq C \sum_{e_0 \subseteq e \subseteq e_*} H_e \left[\frac{\left\| \Delta^{r^e}(t; G) f \right\|_{L_p}}{\omega_e(t) t_e^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}} \right].$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
2. Терехин А.П. Теоремы эквивалентности классов функций со смешанной производной // ДАН СССР. 1980. Т. 252, № 1. С. 52 – 55.
3. Терехин А.П. Смешанная q -интегральная p -вариация и теоремы об эквивалентности и вложении классов функций со смешанным модулем гладкости // Тр. МИАН. 1979. Т. 150. С. 306 – 319.

УДК 517.51

С. П. Сидоров

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ КОНЕЧНОМЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L^p *

Пусть $X = [0,1]$ и $1 \leq p < \infty$. Обозначим $L^p(X)$ пространство всех измеримых по Лебегу функций f , для которых $|f|^p$ есть интегрируемая по Лебегу на X функция с нормой

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $C(X)$ означает пространство непрерывных на X функций с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Обозначим P_n множество всех алгебраических полиномов q степени не выше n , таких, что $\|q^{(n)}\|_{C(X)} \leq n!$.

Если $\alpha_{k,n}$, $k=1,2,\dots,n$, есть точки из X и $l_{k,n}(x) \in L^p(X)$ (или $l_{k,n}(x) \in C(X)$), $k=1,2,\dots,n$, тогда оператор

$$L_n f(x) = \sum_{k=1}^n f(\alpha_{k,n}) l_{k,n}(x), \quad f \in L^p(X) \text{ (или } f \in C(X)),$$

есть линейный оператор, действующий из $L^p(X)$ (или $C(X)$) в $L^p(X)$ (или $C(X)$), который мы назовем I -оператором по сетке $\alpha = (\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n,n})$

и будем писать $L_n \in I_{n,\alpha}(L^p(X))$ (соответственно $L_n \in I_{n,\alpha}(C(X))$). Это означает, что значения функции в определённом конечном наборе точек определяют значение оператора от этой функции [1, с. 26].

Обозначим $I_n(L^p(X)) = \bigcup_{\alpha} I_{n,\alpha}(L^p(X))$, $I_n(C(X)) = \bigcup_{\alpha} I_{n,\alpha}(C(X))$.

В работе [2] показано, что

$$\inf_{L_n \in I_n(C(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{C(X)} = \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{C(X)},$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$. Инфимум достигается для интерполяционных операторов Лагранжа по сетке $\cos \frac{k\pi}{n}$, $k=0,1,\dots,n$.

Цель настоящей статьи – установить аналогичный результат в пространстве $L^p(X)$.

ТЕОРЕМА. Справедлива оценка

$$C_1(n, p) \leq \inf_{L_n \in I_n(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)} \leq C_2(n, p), \quad (1)$$

где

$$C_1(n, p) = \inf_{(c_0, \dots, c_{n-1})} \left(\int_X \left| x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \right|^p dx \right)^{1/p}, \quad C_2(n, p) = \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{L^p(X)}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\inf_{L_n \in I_n(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)} = \inf_{\alpha \subset X} \inf_{L_n \in I_{n,\alpha}(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)}. \quad (2)$$

Из [2] следует, что

$$\inf_{L_n \in I_{n,\alpha}(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} |q(x) - L_n q(x)| = \prod_{k=1}^n |\alpha_{k,n} - x|.$$

Используя свойства инфимума, мы можем заключить, что

$$\inf_{L_n \in I_{n,\alpha}(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)} \geq \left(\int \prod_{k=1}^n |\alpha_{k,n} - x|^p dx \right)^{1/p}.$$

Из (2) следует, что

$$\begin{aligned} \inf_{L_n \in I_n(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^p(X)} &\geq \inf_{\alpha \subset X} \left(\int \prod_{k=1}^n |\alpha_{k,n} - x|^p dx \right)^{1/p} = \\ &= \inf_{(c_0, \dots, c_{n-1})} \left(\int |x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i|^p dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

и нижняя оценка в (1) установлена.

С другой стороны, интерполяционный оператор Лагранжа по сетке

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$L_{n-1}^* f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \frac{(-1)^k T_n(x) \sqrt{1-x_k^2}}{n(x - x_{n-1})},$$

обладает следующими свойствами:

- 1) если $q \in P_{n-1}$, то $L_{n-1}^* q(x) \equiv q(x)$ на X ;
- 2) если $q(x) = x^n$, то $q(x) - L_n^* q(x) \equiv \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ на X .

Значит,

$$\inf_{L_n \in I_n(L^p(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{C(X)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{L^p(X)}. \quad \square$$

Приведём два простых следствия из теоремы для случаев $p=1$ и $p=2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Справедлива оценка

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \inf_{L_n \in I_n(L^1(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^1(X)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{L^1(X)}, \quad (3)$$

Доказательство. Из [3, с. 138 – 153] и [4, с. 244 – 313, 507 – 514] следует, что

$$\inf_{(c_0, \dots, c_{n-1})} \left| \int |x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i|^p dx \right| = \frac{1}{2^{n-1}}. \quad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедлива оценка

$$\frac{2^n (n!)^2 \sqrt{4n+2}}{(2n+1)!} \leq \inf_{L_n \in I_n(L^2(X))} \sup_{q \in P_n} \|q - L_n q\|_{L^2(X)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|_{L^2(X)}. \quad (4)$$

Доказательство. Из [5, с. 28 – 30] следует, что

$$\inf_{(c_0, \dots, c_{n-1})} \left(\int_X \left| x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \right|^2 dx \right)^{1/2} = \frac{2^n (n!)^2 \sqrt{4n+2}}{(2n+1)!}. \quad \square$$

Отметим, что оценки (3) и (4) асимптотически точны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. DeVore R.A. The approximation of continuous functions by positive linear operators. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1972.
2. Sidorov S.P. On some extremal properties of Lagrange interpolatory polynomials // J. Approx. Theory. 2002. Vol. 118, № 2. P. 188 – 201.
3. Коркин А.И., Золотарев Е.И. О некотором минимуме. Полн. собр. соч. Е. И. Золотарева: В 2 т. Л.: Изд-во АН СССР, 1931. Т.1.
4. Чебышев П.Л. Полн. собр. соч.: В 3 т. М.; Л., 1948. Т. 2.
5. Ахиезер Н.И. Лекции по теории приближений. М.: Наука, 1965.

УДК 517.15

Г. А. Сорокин

О ДВУХСТОРОННЕЙ ОЦЕНКЕ ФАКТОРИАЛА $n!$

Некоторые оценки величины $n!$ приведены в [1, с. 179 и с. 341]. В данной статье рассматривается двухсторонняя оценка $n!$, позволяющая для многих значений n вычислить $n!$ точнее, чем по формуле Стирлинга

$$n! = \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n e^{\Theta_n}},$$

где $\Theta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

При изложении применяется

ЛЕММА. Для любого натурального числа $n \geq 5$ справедливо равенство

$$\ln n! = \ln \left(\frac{3}{64} \sqrt{n} n^n \right) - \sum_{k=4}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k}. \quad (1)$$

Доказательство. Это равенство мы получим из тождества

$$\sum_{k=1}^n a_k = n a_{n+1} + \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}), \quad (2)$$

справедливого для любой последовательности $\{a_k\}$ и любого натурального $n \geq 1$. Равенство (2) проверяется непосредственно.

Положим в формуле (2) $a_k = \ln k$. Имеем

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = n \ln(n+1) + \sum_{k=1}^n k \ln \frac{k}{k+1},$$

В правой части этого равенства выделим из суммы последнее слагаемое, а оставшуюся сумму представим следующим образом:

$$\ln n! = n \ln n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k}{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k}{k+1} = \ln(\sqrt{n} n^n) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k}.$$

Выделив из последней суммы три первых слагаемых, будем иметь

$$\ln n! = \ln \left(\frac{3}{64} \sqrt{n} n^n \right) - \sum_{k=4}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k}.$$

Мы получили равенство (1).

С помощью леммы доказывается основная

ТЕОРЕМА. При любом натуральном $n \geq 4$ справедливо неравенство

$$\frac{3}{64} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{191}{48} + \frac{1}{12n}} \leq n! \leq \frac{3}{64} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{9423}{2368} + \frac{49}{592n}}. \quad (3)$$

Доказательство. При $n = 4$ неравенство (3) обращается в равенство. Для доказательства (3) при $n \geq 5$ рассмотрим следующие функции и их производные:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x \left(1 + \frac{49}{148} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right), \quad \psi(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right); \\ \varphi'(x) &= \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \frac{1-99x^2}{74}, \quad \psi'(x) = -\frac{4x^4}{3(1-x^2)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Далее достаточно выяснить знаки φ и ψ в промежутке $[0; 1/9]$. На этом отрезке $\psi(x)$ убывает от нуля, поэтому $\psi(x) \leq 0$.

$\varphi(x)$ в промежутке $(0; \sqrt{1/99}]$ возрастает от нуля, поэтому $\varphi(x) \geq 0$.

В промежутке $(\sqrt{1/99}; 1/9]$ $\varphi(x)$ убывает, но остаётся положительной, так как $\varphi(1/9) = 0,00001\dots$. Итак, на $[0; 1/9]$ $\varphi(x) \geq 0$. Отсюда и из неравенства $\psi(x) \leq 0$ следует, что

$$2x \left(1 + \frac{49}{148} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right) \leq \ln \frac{1+x}{1-x} \leq 2x \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} \right).$$

Разделим это неравенство на $2x$ и возьмём $x = 1/(2k+1)$, где $k \geq 4$ – произвольное натуральное число. Так как тогда

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{k+1}{k} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2k+1} \in [0; 1/9],$$

то мы получим неравенства

$$1 + \frac{49}{148} \cdot \frac{1}{4k(k+1)} \leq \left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k} \leq 1 + \frac{1}{12k(k+1)}.$$

Сложим эти неравенства по k от $k=4$ до $k=n-1$. В результате будем иметь

$$n - \frac{9423}{2367} - \frac{49}{592n} \leq \sum_{k=4}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{k+1}{k} \leq n - \frac{191}{48} - \frac{1}{12n}.$$

Из этого неравенства и леммы следует неравенство (3).

СЛЕДСТВИЕ 1. Для $n=4, 5, \dots, 1953$ формула (3) точнее формулы Стирлинга.

В самом деле, решив относительно n неравенство

$$\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi} < \frac{3}{64} e^{\frac{191}{48} + \frac{1}{12n}} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n,$$

получим

$$n \leq \frac{1}{12 \left(\ln \left(\frac{64}{3} \sqrt{2\pi} \right) - \frac{191}{48} \right)} = 1953,3\dots$$

СЛЕДСТВИЕ 2. При вычислении $n!$ по формуле (3) при любом $n \geq 4$ относительная ошибка будет меньше 0,02%.

Действительно, разделив (3) на его левую часть, получим

$$1 \leq \frac{n!}{\frac{3}{64} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{191}{48} + \frac{1}{12n}}} \leq e^{\frac{9423}{2368} - \frac{191}{48}} = 1,00014\dots$$

Отсюда видно, что ошибка меньше 0,02%.

В заключение сравним результаты вычисления $10!$ по формуле Стирлинга и по формуле (3).

По формуле Стирлинга $10! \approx 359696$, между тем как точное значение $10! = 3628800$. Относительная ошибка составляет 0,83%.

По формуле (3) $3628655 < 10! < 3628962$ левая и правая части этого неравенства дают приближенное значение $10!$ с относительной ошибкой, равной всего лишь 0,004%.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данилов В.Л., Иванова А.Н. и др. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. М.: Гостехиздат, 1961.

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ p -АДИЧЕСКИХ ВСПЛЕСКОВ*

В статье изучаются p -адические аналоги семейств функций всплесков. Установленные здесь соотношения для коэффициентов Фурье функций по элементам семейств p -адических всплесков позволяют (так же, как и в [1]) получить результаты о представляющих свойствах рассматриваемых систем.

Примем следующие обозначения:

Q_p – поле p -адических чисел ($p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$ – простое число);

$|\cdot|_p$ – норма p -адического числа; $\{\cdot\}_p$ – дробная часть p -адического числа;

$Z_p = \{x \in Q_p : |x|_p \leq 1\}$ – кольцо целых p -адических чисел;

$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0, 1, \dots, p-1\}^k$ – семейство всех конечных последовательностей

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, состоящих из чисел $0, 1, \dots, p-1$ (включая при $k=0$ пустую последовательность);

$|\alpha|=k$ – длина последовательности $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A$ (длину пустой последовательности полагаем равной нулю);

$\Delta(\alpha) = \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \{x \in Z_p : |x - \alpha_k - \alpha_{k-1}p - \dots - \alpha_1p^{k-1}|_p \leq p^{-k}\}$ – круг в Z_p ;

$|\Delta(\alpha)| = p^{-|\alpha|}$ – мера на полукольце $S = \{\emptyset\} \cup \{\Delta(\alpha) : \alpha \in A\}$, лебегово продолжение которой совпадает на Z_p с нормированной мерой Хаара в Q_p .

Пусть функция f имеет носитель $Supp f \subset Z_p$. Рассмотрим операторы

$$V_i f(x) = p^{1/2} f\left(\frac{x-i}{p}\right), \quad i = 0, 1, \dots, p-1.$$

Обозначим, далее, $V(\alpha) = V_{\alpha_k} \dots V_{\alpha_1}$ – произведение операторов, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A$, первым действует оператор V_{α_1} , последним – V_{α_k} , пустое произведение равно тождественному оператору I . Заметим, что $Supp V(\alpha)f \subset \Delta(\alpha)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00123) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

Определение. Семейство функций $\{V(\alpha)f : \alpha \in A\}$ назовем системой p -адических всплесков (или системой сжатий и сдвигов функции f).

Пусть $f \in L^p(Z_p)$ и $g \in L^{p'}(Z_p)$, $1 \leq p, p' \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Обозначим

$$\begin{aligned} (V(\alpha)f, g) &= \int_{Z_p} V(\alpha)f(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \\ &= \int_{\Delta(\alpha)} p^{k/2} f\left(\frac{x - \alpha_k - \alpha_{k-1}p - \dots - \alpha_1p^{k-1}}{p^k}\right) \cdot \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

— коэффициенты Фурье функции g по элементам $V(\alpha)f$ системы всплесков.

ТЕОРЕМА 1. При $1 < p \leq \infty$ справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |(V(\alpha)f, g)|^{p'} \right)^{1/p'} = \left| \int_{Z_p} f(x) dx \right| \|g\|_{p'}$$

Следует отметить, что при $p=1$ теорема 1 не верна (можно показать, что предел в левой части может не быть равным выражению в правой части рассматриваемого соотношения, более того, этот предел может вообще не существовать). В то же время имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. При $p=1$ справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^{k/2} \left(\max_{|\alpha|=k} |(V(\alpha)f, g)| \right) \geq \left| \int_{Z_p} f(x) dx \right| \|g\|_\infty.$$

Кроме того, если $f(x) \geq 0$ п. в., то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^{k/2} \left(\max_{|\alpha|=k} |(V(\alpha)f, g)| \right) = \int_{Z_p} f(x) dx \|g\|_\infty.$$

Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f \in L^\rho(Z_p)$, $1 \leq \rho \leq \infty$, имеет отличный от нуля интеграл:

$$\int_{Z_p} f(x) dx \neq 0.$$

Тогда для любого бесконечного множества натуральных чисел K величина

$$N(g) = N(g; f, K) = \sup_{\alpha \in K} p^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |(V(\alpha)f, g)|^{p'} \right)^{1/p'}$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $L^{p'}(Z_p)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

При доказательстве теорем 1 – 3 использованы некоторые общие результаты эргодической теории. Именно, следующие предложения 1 – 3 устанавливаются по хорошо известной общей для абстрактных динамических систем схеме (см., напр., Арнольд, Авец [2]).

Определим преобразование T кольца Z_p в себя посредством равенства

$$Tx = \frac{x}{p} \pmod{Z_p}.$$

Предложение 1. Преобразование T сохраняет меру Хаара:

$$|T^{-1}E| = |E|$$

для любого измеримого множества $E \subset Z_p$.

Предложение 2. Преобразование T является перемешиванием:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T^{-n}A \cap B| = |A| \cdot |B|$$

для любых измеримых множеств $A, B \subset Z_p$.

Рассмотрим оператор $Uf(x) = f(Tx)$, индуцированный преобразованием T . Оператор U изометрический в пространстве $L^p(Z_p)$, $1 \leq p \leq \infty$. Этот факт следует из леммы Купмана [3]. Справедлив аналог леммы Фейера:

Предложение 3. Для любых функций $f \in L^p(Z_p)$ и $g \in L^{p'}(Z_p)$, $1 \leq p, p' \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U^n f, g) = (f, 1)(1, g),$$

где 1 - функция, тождественно равная единице.

Далее, обозначим

$$I(\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} g(x) dx, \quad \alpha \in A.$$

Из аналога леммы Фейера (предложение 3), применённого к функции

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Delta(\alpha), \\ 0, & x \notin \Delta(\alpha), \end{cases}$$

получим соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta(\alpha)} U^n f(x) \overline{g(x)} dx = \overline{I(\alpha)} \int_{Z_p} f(x) dx.$$

При $n > |\alpha|$ имеем

$$\int_{\Delta(\alpha)} U^n f(x) \overline{g(x)} dx = p^{-n/2} \sum_{|\beta|=n-|\alpha|} (V(\alpha\beta)f, g),$$

откуда находим

$$\left| \int_{\Delta(\alpha)} U^n f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq p^{-k} p^{n/2} \max_{|\gamma|=n} |(V(\gamma)f, g)|.$$

Устремив здесь $n \rightarrow \infty$, получим предельное соотношение

$$|I(\alpha)| \cdot \left| \int_{Z_p} f(x) dx \right| \leq p^{-k} \lim_{n \rightarrow \infty} p^{n/2} \max_{|\gamma|=n} |(V(\gamma)f, g)|.$$

Отсюда

$$\left| \int_{Z_p} f(x) dx \right| \max_{|\alpha|=k} |p^k \int_{\Delta(\alpha)} g(x) dx| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} p^{n/2} \max_{|\gamma|=n} |(V(\gamma)f, g)|.$$

Осталось заметить, что

$$\|g\|_\infty \leq \sup_k \max_{|\alpha|=k} |p^k \int_{\Delta(\alpha)} g(x) dx|$$

(на самом деле здесь имеет место знак равенства), и получено первое из соотношений теоремы 2. Второе соотношение теоремы 2 сразу следует из первого соотношения и очевидной оценки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^{k/2} \max_{|\alpha|=k} |(V(\alpha)f, g)| \leq \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) dx \cdot \|g\|_\infty.$$

Теорема 1 доказывается аналогично (и даже проще). Теорема 3, как уже отмечалось, непосредственно следует из теорем 1 и 2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Терехин П.А. Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1999. № 8(447). С. 74 – 81.

2. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.

3. Коортман В.О. Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Spaces // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 1931. Vol. 17. P. 315 – 318.

УДК 517.51

В. Г. Тимофеев

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ЛАНДАУ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Полученные автором [1 – 3] результаты позволяют оценить наилучшую константу K_p в неравенстве

$$\|u'_{x_i}\|_p \leq K_p \|u\|_p^{1/2} \cdot \|\Delta u\|_p^{1/2}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

при любых $1 \leq p \leq \infty$.

Пусть

$$\Omega_p = \{u : u \in L_p, \Delta u \in L_p\},$$

где Δu понимается в смысле Соболева.

ТЕОРЕМА. При всех $1 \leq p \leq \infty$ для любой функции $u \in \Omega_p$ справедливо неравенство (1) с конечной константой K_p , причём для K_p справедливы оценки

$$1 = K_2 \leq K_p \leq K_\infty = K_1 = \sqrt{2}.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения [1], получаем, что для всякой функции $u \in \Omega_p$ верно интегральное представление

$$u'_{x_i} = -\frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2} \cdot (m-2)} \int_{\Pi_h} u(\xi) \frac{\partial^2 G(\xi, 0)}{\partial x_i \partial n_\xi} d\xi - \frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{m/2} \cdot (m-2)} \int_{\Pi_h} \Delta u(\xi) \frac{\partial G(\xi, 0)}{\partial x_i} d\xi,$$

$$i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Каждое слагаемое в правой части интегрального представления является свёрткой двух функций, одна из которых принадлежит L_p , а другая – L_1 . Известно [4, с. 201], что если $u \in L_p$, $g \in L_1$, то свёртка $u * g$ этих функций принадлежит L_p и

$$\|u * g\|_p \leq \|u\|_p \cdot \|g\|_1.$$

Поэтому из (2) следует, что $u_{x_i}^* \in L_p$ и, более того,

$$\|u_{x_i}^*\|_p \leq \left\| \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial n_\xi} \right\|_1 \cdot \|u\|_p + \left\| \frac{\partial G}{\partial x_i} \right\|_1 \cdot \|\Delta u\|_p$$

или

$$\|u_{x_i}^*\|_p \leq J_1 \cdot \|u\|_p + J_2 \cdot \|\Delta u\|_p, \quad (3)$$

где J_1 и J_2 были найдены автором ранее [1].

Поскольку

$$J_1 = \frac{1}{h}; \quad J_2 = \frac{h}{2}, \quad (4)$$

то, подставляя (4) в (3), получаем

$$\|u_{x_i}^*\|_p \leq \frac{1}{h} \|u\|_p + \frac{h}{2} \|\Delta u\|_p.$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства по h , приходим к (1). Неравенство (1) справедливо для всех $1 \leq p \leq \infty$. Это означает, что $K_p \leq \sqrt{2}$.

Ранее [1, 2] было установлено равенство $K_\infty = K_1 = \sqrt{2}$, которое даёт возможность утверждать, что для всех $1 \leq p \leq \infty$

$$K_p \leq K_1 = K_\infty = \sqrt{2}.$$

Получим теперь оценку снизу наилучшей константы K_p в (1). Если $u \in \Omega_p$, то

$$K_p \geq \frac{\|u_{x_i}^*\|_p^p}{\|u\|_p^{p/2} \|\Delta u\|_p^{p/2}}. \quad (5)$$

Положим

$$g(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \leq 0, \\ \text{бесконечно-дифференцируемая, если } 0 \leq x_i \leq \pi, \\ 0, & \text{если } x_i \geq \pi, \end{cases}$$

$$h_n(x_i) = g(x_i - n\pi)g(n\pi - x_i), \quad u_n(x) = \sin x_i \cdot h_n(x_1) \dots h_n(x_m)$$

для любого $x \in R^m$.

Вычислим для построенной функции $u_n(x)$ значение величин, входящих в правую часть (5). В чётном случае для $p = 2s$, $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{(2s-1)!! \cdot n\pi}{2^{s-1} \cdot s!} + O((2n\pi)^{m-1}),$$

$$\|u_n\|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{(2s-1)!!}{2^{s-1}} \frac{n\pi}{s!} + O((2n\pi)^{m-1}),$$

$$\|\Delta u_n\|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{(2s-1)!!}{2^{s-1}} \frac{n\pi}{s!} + O((2n\pi)^{m-1}). \quad (6)$$

В нечётном случае для $p = 2s+1$, $s = 1, 2, \dots$

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{2^{s+2} s! n}{(2s+1)!!} + O((2n\pi)^{m-1}),$$

$$\|u_n\|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{2^{s+2} \cdot s! n}{(2s+1)!!} + O((2n\pi)^{m-1}),$$

$$\|\Delta u_n\|_p^p = (2n\pi)^{m-1} \frac{2^{s+2} \cdot s! n}{(2s+1)!!} + O((2n\pi)^{m-1}). \quad (7)$$

Из (6), (7) при $n \rightarrow \infty$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|_p^p}{(\|u_n\|_p^p \cdot \|\Delta u_n\|_p^p)^{1/2}} = 1$, а это в силу (5) даёт оценку $K_p \geq 1$. Из [3] следует, что $1 = K_2$.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимофеев В.Г. Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Мат. заметки. 1985, Т. 37, № 5. С. 676 – 689.
2. Тимофеев В.Г. Наилучшее приближение в равномерной и L_2 -метриках оператора дифференцирования на некоторых классах функций многих переменных. Саратов, 1985. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 11.04.85. № 2451 - 85.
3. Тимофеев В.Г. Об одном экстремальном неравенстве типа Ландау с итерированными операторами Лапласа в $L_2(R^m)$ // Теория функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. Ч. 3. С. 112 – 115.
4. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

УДК 519.212

C. A. Точилкина

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ χ^2 ПИРСОНА

Для проверки гипотезы о законе распределения случайной выборки обычно используют асимптотические свойства статистики χ^2 Пирсона. Очевидно, что для выборки малого объёма данный подход будет давать погрешность. В статье рассматривается построение точного закона распределения статистики χ^2 Пирсона, приводятся результаты расчётов, которые сравниваются с соответствующим асимптотическим законом распределения χ^2 .

Пусть X_1, X_2, \dots, X_n – случайная выборка объёмом n из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$. Проверка простой гипотезы $H_0: F(x)=F_0(x)$, где $F_0(x)$ – некоторая заданная функция распределения, состоит в подсчёте статистики X^2 Пирсона и построении критической области, для чего и необходимо знать закон распределения статистики X^2 . Для нахождения статистики X^2 формируют набор взаимно не пересекающихся множеств E_1, E_2, \dots, E_k таких, что в объединении полностью покрывают множество возможных значений для распределения $F_0(x)$ из гипотезы H_0 .

Тогда каждое значение X_i попадает в одно из множеств E_j , причём относительно выдвинутого в гипотезе H_0 закона распределения $F_0(x)$ находят положительные вероятности $p_j=P(E_j | H_0)=P(X_i \in E_j | H_0)$, $j=1, \dots, k$, $\sum_{j=1}^k p_j = 1$.

Для каждой реализации случайной выборки известны числа n_j – количество элементов выборки, принадлежащих множеству E_j , где $\sum_{j=1}^k n_j = n$. Статистику X^2 Пирсона находят по формуле

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{np_i} - n. \quad (1)$$

С точки зрения теории вероятностей, случайная выборка интерпретируется как последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, тогда в случае выполнения гипотезы H_0 вектор (n_1, n_2, \dots, n_k) является случайным вектором, распределённым по полиномиальному закону с параметрами n и (p_1, p_2, \dots, p_k) . Таким образом, статистика X^2 Пирсона является и функцией от выборочных значений X_1, X_2, \dots, X_n , и функцией от случайного вектора, распределённого по полиномиальному закону распределения. Отсюда следует, что статистика X^2 подчиняется дискретному закону распределения, причём число её различных значений не более числа различных значений у случайного вектора, распределённого по полиномиальному закону с параметрами n и (p_1, p_2, \dots, p_k) , то есть не более чем C_{k+n-1}^{k-1} .

Таким образом, чтобы найти закон распределения статистики X^2 , необходимо перебрать все возможные размещения значений выборки X_1, X_2, \dots, X_n по множествам E_1, E_2, \dots, E_k и найти для каждой совокупности значений значение функции по формуле (1). С другой стороны, можно интерпретировать статистику Пирсона как функцию, определённую по формуле (1), от n независимых дискретных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, распределенных по закону $P(\xi_i=j)=p_j$, $j=1, k$, $i=1, n$. Тогда в (1) n_j – количество случайных величин из последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, равных по значению j . Подробнее расчёт закона распределения функции от независимых одинаково распределённых дискретных случайных величин рассмотрен в

[1]. На практике таким способом можно подсчитать до $n=16$. При больших значениях n значительно увеличивается время работы программы.

Для сокращения времени расчёта точного закона распределения статистики Пирсона можно использовать древовидную схему расчёта. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ – независимые случайные вектора, распределённые по полиномиальному закону с параметрами 1 и (p_1, p_2, \dots, p_k) . Это означает, что множество значений такого распределения совпадает с набором строк единичной матрицы размером $k \times k$, причём вероятность значения вектора η_i , соответствующего i строке единичной матрицы, равна p_i . Тогда случайный вектор $\eta = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, распределённый по полиномиальному закону с параметрами n и (p_1, p_2, \dots, p_k) , можно представить как сумму: $\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i$.

Применяя к полученному представлению η древовидную схему расчёта, получаем закон распределения случайного вектора η . После расчёта закона распределения η находим закон распределения статистики Пирсона как функцию от компонент случайного вектора η . На основе выше описанных двух методов расчёта на языке FORTRAN написаны подпрограммы, которые находят законы распределения статистики X^2 Пирсона для заданных n и набора вероятностей p_1, p_2, \dots, p_k . Результат расчёта закона распределения статистики X^2 для $n=16$, $p_1=p_2=p_3=1/3$, приведены в следующей таблице.

X	P	$P(X^2 \geq X)$	$P(X^2(2) \geq X)$	ϵ
0.1250	0.14063900	1.00000000	0.93941306	0.06058694
0.5000	0.11719917	0.85936100	0.77880078	0.08056021
0.8750	0.20091286	0.74216182	0.64564853	0.09651330
1.6250	0.13394191	0.54124896	0.44374731	0.09750165
2.0000	0.06278527	0.40730705	0.36787944	0.03942761
2.3750	0.10045643	0.34452178	0.30498277	0.03953901
3.1250	0.02870184	0.24406535	0.20961139	0.03445396
3.5000	0.05022822	0.21536351	0.17377394	0.04158957
3.8750	0.05580913	0.16513530	0.14406366	0.02107164
4.6250	0.03348548	0.10932617	0.09901341	0.01031276
5.3750	0.01435092	0.07584069	0.06805085	0.00778984
6.1250	0.02232365	0.06148977	0.04677062	0.01471915
6.5000	0.01674274	0.03916612	0.03877421	0.00039191
7.6250	0.00669710	0.02242338	0.02209288	0.00033050
8.0000	0.00089693	0.01572628	0.01831564	0.00258935
8.3750	0.00159455	0.01482935	0.01518420	0.00035485
9.1250	0.00608827	0.01323481	0.01043594	0.00279887
9.5000	0.00111618	0.00714654	0.00865170	0.00150516
9.8750	0.00304413	0.00603035	0.00717251	0.00114215
11.3750	0.00060883	0.00298622	0.00338805	0.00040183
12.5000	0.00076103	0.00237739	0.00193045	0.00044694
12.8750	0.00101471	0.00161636	0.00160040	0.00001596
14.0000	0.00025368	0.00060165	0.00091188	0.00031023
16.6250	0.00023416	0.00034797	0.00024543	0.00010254
17.3750	0.00007805	0.00011381	0.00016868	0.00005487

21.1250	0.00001673	0.00003575	0.00002587	0.00000988
21.5000	0.00001673	0.00001903	0.00002145	0.00000242
26.3750	0.00000223	0.00000230	0.00000187	0.00000043
32.0000	0.00000007	0.00000007	0.00000011	0.00000004

В двух первых столбцах таблицы приводится точный закон распределения статистики Пирсона X^2 – значения X и вероятности $P=P(X^2=X)$. В третьем столбце рассчитана вероятность "хвоста" для точного закона распределения статистики Пирсона X^2 , в четвёртом – вероятность "хвоста" для асимптотического закона распределения $\chi^2(2)$. Пятый столбец содержит абсолютную погрешность $\varepsilon=|P(X^2\geq X)-P(\chi^2(2)\geq X)|$ между вероятностью "хвоста" точного и асимптотического законов распределения. Анализ последних трёх столбцов показывает, что критическая область, построенная на основе асимптотического закона распределения, не совпадает с критической областью, построенной по точному закону. И для некоторых значений уровня значимости наблюдается значимая потеря точности. Приведённый пример с равными вероятностями $p_1=p_2=p_3=1/3$ даёт наименьшие отклонения от асимптотического закона, чем случаи, когда не выполняется требование $p_1=p_2=p_3$. Таким образом, в некоторых случаях следует использовать точный закон распределения статистики Пирсона.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Михайлов В.Н., Точилкина С.А. Метод расчёта закона распределения функции от дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 86 – 89.
2. Михайлов В.Н., Точилкина С.А. Распределение векторной функции от независимых дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 93 – 96.
3. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973.

УДК 517.51

С. В. Тышкевич

О КВАЗИПОЛИНОМАХ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНИЯЩИХСЯ ОТ НУЛЯ НА ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВАХ*

В работе И. В. Белякова [1] была рассмотрена задача наименьшего уклонения от нуля отображений Чебышева, свойства которых во многом повторяют свойства классических многочленов Чебышева, на дельтоиде

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

(области Штейнера). В связи с этим представляют интерес аналоги таких отображений для рациональных функций с фиксированным знаменателем – так называемые квазиполиномы.

Определение. Система заданных на некотором множестве M метрического пространства (содержащем не менее $n+1$ точки) непрерывных функций

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z) \quad (1)$$

называется чебышевской на этом множестве, если любой обобщённый полином $P_n(z) = P_n(\varphi_k, c_k; z)$ вида

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(z), \quad (2)$$

где c_k – числа, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет на M не больше, чем n различных корней.

Теорема Хаара утверждает, что для того чтобы для любой непрерывной на M функции $f(z)$ существовал единственный полином $P_n^*(z)$ её наилучшего равномерного приближения вида $P_n^*(z) = \sum_{k=0}^n c_k^* \varphi_k(z)$, необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^n$ была чебышевской на M .

Критерий того, что полином $P_n^*(z)$ является полиномом наилучшего приближения порядка n для заданной на M функции $f(z)$, даёт

ТЕОРЕМА Колмогорова (1948). Пусть на замкнутом ограниченном множестве M задано $n+1$ фиксированных непрерывных функций (1) и непрерывная функция $f(z)$, которую следует приблизить обобщёнными полиномами

$$P_n(z) = P_n(\varphi_k, c_k; z)$$

вида (2).

Тогда для того чтобы некоторый полином $P_n^*(z) = \sum_{k=0}^n c_k^* \varphi_k(z)$ был полиномом наилучшего равномерного приближения для функции $f(z)$ в том смысле, что

$$\|f(z) - P_n^*(z)\|_C = \inf_{P_n} \|f(z) - P_n(z)\|_C,$$

необходимо и достаточно, чтобы на множестве E всех e -точек из M при любом полиноме $P_n(z)$ вида (2) выполнялось неравенство

$$\min_{z \in E} \operatorname{Re} \left\{ P_n(z) \overline{[f(z) - P_n^*(z)]} \right\} \leq 0. \quad (3)$$

Цель данной статьи заключается в нахождении полинома, наименее уклоняющегося от нуля на заданном множестве, когда $\varphi_k(z)$ представляют собой произведения Бляшке.

Пусть $c_i, c'_i \in \mathbb{C}, i=0,1,\dots,n-1, n=1,2,\dots; a_k \in \mathbb{C}, k=1,2,\dots,n$.

Обозначим через Π множество функций $P_n(z)$ вида

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \prod_{k=1}^{n-i} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} + \sum_{i=0}^{n-1} c'_i \prod_{k=1}^{n-i-1} \frac{1 - \overline{a_k} z}{z - a_k}, \quad (4)$$

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

ТЕОРЕМА. Среди функций вида (4)

$$\min_{P_n \in \Pi} \max_{z \in S} |P_n(z)|$$

достигается только для функций

$$P_n^*(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} + \prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{a_k} z}{z - a_k}.$$

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим произведение

$$P_{n-1}(z) \overline{\{P_n^*(z) + \varepsilon\}}. \quad (5)$$

Записав $P_{n-1}(z)$ в виде

$$P_{n-1}(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \overline{a_k} z}{z - a_k} \left\{ c_0 \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \right)^2 + c_1 \frac{z - a_{n-1}}{1 - \overline{a_{n-1}} z} \prod_{k=1}^{n-2} \left(\frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \right)^2 + \dots + c_0 \right\},$$

заметим, что при обходе точкой z единичной окружности S в положительном направлении его аргумент увеличивается не более чем на $2(n-1)\pi$, в то время как аргумент второго множителя в (5), записанного в виде

$$\prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{a_k} z}{z - a_k} \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \right)^2 + 1 \right) + \varepsilon,$$

уменьшается на $2n\pi$, поэтому аргумент произведения (5) уменьшится по крайней мере на 2π . А значит, действительная часть произведения (5), по крайней мере, в одной точке $z_{0,\varepsilon} \in S$ станет неположительной (это произойдёт в точке $z_{0,\varepsilon}$, в которой или аргумент произведения (5) равен $\pi + 2m\pi, m=0,1,-1,\dots$, или же когда это произведение обратится в нуль). Устремляя ε к нулю по некоторой последовательности ε_l , некоторая подпоследовательность точек z_{0,ε_l} будет сходиться к точке z_0 , в которой будет выполняться неравенство

$$\operatorname{Re} \{P_{n-1}(z_0) \overline{P_n^*(z_0)}\} \leq 0.$$

Согласно критерию Колмогорова, получаем требуемое. \square

Полученный результат можно обобщить на случай, когда S представляет собой объединение нескольких дуг единичной окружности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беляков И.В. Минимальное уклонение от нуля отображений Чебышева, соответствующие равностороннему треугольнику // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 919 – 921.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами. М.: Наука, 1977.

УДК 517.51

В. И. Филиппов

СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ПОЛУЧАЮЩИЕСЯ ВОЗМУЩЕНИЕМ ЯДРА ФЕЙЕРА В $L_1(0, \pi)$ *

В работе [1] из ядра Фейера строится система вида

$$\begin{aligned} F_0(x) &\equiv 1, \quad F_k^{(n)} = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \left(\frac{\sin 2^n (x - (2k-1)\pi/2^n)}{\sin 1/2 (x - (2k-1)\pi/2^n)} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2^{2(n+1)}} \frac{1 - \cos(2^{n+1}\pi)}{1 - \cos(x - (2k-2)\pi/2^n)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $k = 1, \dots, 2^n$ и устанавливается, что система (1) является диадическим интерполяционным базисом в пространстве непрерывных 2π -периодических функций.

В данной статье рассматривается возмущение системы (1), а именно, система (8) и возмущение тригонометрической системы в пространстве $L_1(0, \pi)$. Существование устойчивости полных систем в банаховых пространствах рассматривалось в работе [2], а возмущение полных минимальных систем – в работах [3 – 5].

Приведём теоремы *A* и *B* об устойчивости полных минимальных систем так, как они приводятся в работе [4].

ТЕОРЕМА A (М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман [3]). Минимальная последовательность $X = \{x_k\}_1^\infty \subset S(B)$ устойчива в том смысле, что при любых $\{\varepsilon_k \geq 0\}_{k=1}^\infty$, для которых

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00390) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$q = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \|x_k^*\| < 1, \quad (2)$$

любая последовательность $Y = \{y_k\}_1^\infty$, где $\|y_k - x_k\| \leq \varepsilon_k$ ($k = 1, 2, \dots$), эквивалентна (и, более того, 0-изометрична) X и полнота X влечёт полноту Y .

Тем самым, Y – минимальна; более того, если X – базисная, то и Y – базисная, а если X – безусловная базисная, то и Y – безусловно базисная последовательность.

В том случае, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \|x_k^*\| < \infty,$$

указанные выше выводы также справедливы после удаления, быть может, конечного числа элементов из X и Y .

Назовём последовательность $U = \{u_k\}_1^\infty$ подчиненной $X = \{x_k\}_1^\infty$, если существует $C < 0$ такое, что при любых $\{a_k\}_1^\infty$ и $n = 1, 2, \dots$

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k u_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|. \quad (3)$$

Будем писать в этом случае $U \prec X$. Последовательность $\{x_k + u_k\}_1^\infty$ обозначим $X + U$, а $\{\varepsilon x_k\}_1^\infty$ обозначим εX .

ТЕОРЕМА B (Ю. Б. Тумаркин [5]). Пусть X – минимальная в B система и $U \prec X$ с некоторой константой C_0 в неравенствах (3). Тогда

при любом $\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{C_0}$ последовательность $Y = X + \varepsilon U$ эквивалентна X и

полнота X влечёт полноту $X + \varepsilon U$.

Следствие A [4]. Из теоремы B следует теорема A, так как условие (2) означает, что последовательность $Y = X + U \prec X$ с константой q в (3).

Действительно, пусть $x = \sum_{k=1}^n a_k x_k = \sum_{k=1}^n x_k^*(x)x_k$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n a_k u_k \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^n x_k^*(x)(y_k - x_k) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_k^*(x)| \|y_k - x_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^n \|x_k^*\| \varepsilon_k \right) \|x\| \leq q \|x\|. \end{aligned}$$

Приведём некоторые другие факты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение. Система $\{\varphi_n\} \subset L_p$, $0 < p < \infty$ называется системой представления в пространстве L_p , если для любой функции $f \in L_p$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|_p = 0.$$

Здесь $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\min\left(1, \frac{1}{p}\right)}$, $0 < p < \infty$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Рассмотрим функциональную систему $\{\varphi_n(t)\}_{n \in N} \in L_1(a, b)$ такую, что

$$\sup_n \sigma_n = \sigma < 1, \quad (4)$$

где $\sigma_n = \inf \left\{ \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \|\chi_{\mathcal{Q}}(t) - \lambda_n \varphi_n(t)\|_1 : \lambda \in R, \mathcal{Q} \subset (a, b) \right\}$. Если $\varepsilon > 0$ такое, что

$\sigma + \varepsilon = \sigma' < 1$, то существуют $\lambda_n \in R$, $\mathcal{Q}_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} [a_i^n, b_i^n]$ такие, что

$$\sigma'_n = \frac{1}{|\mathcal{Q}_n|} \|\chi_{\mathcal{Q}_n}(t) - \lambda_n \cdot \varphi_n(t)\|_1 \leq \sigma + \varepsilon = \sigma' < 1 \quad (5)$$

и также $\sup_n \sigma'_n \leq \sigma' < 1$. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ удовлетворяет условию

$$\forall N \in N, \text{ mes} \left\{ (a, b) \setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} \mathcal{Q}_n \right\} = 0. \quad (6)$$

Пусть $x_n = \min_i \{a_i^n\}$, $y_n = \max_i \{b_i^n\}$, обозначим $d(\varphi_n) = y_n - x_n$ и $\text{supp } \varphi_n = \{t : \varphi_n(t) \neq 0\}$. Пусть

$$d(\varphi_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad d(\varphi_n) \neq 0. \quad (7)$$

Ниже мы используем определение покрытия в смысле Витали [6, с. 30, 231].

ТЕОРЕМА C [7]. Предположим, что система

$$\{\varphi_n\}_{n \in N} \subset L_1(a, b), \quad -\infty < a < b < +\infty$$

удовлетворяет условиям (5) – (7) и для каждого $N \in N$ множество (a, b) покрывается в смысле Витали семейством $\{\mathcal{Q}_n\}_{n=N}^{\infty}$. Тогда если $N \in N$, то система $\{\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ является системой представления в $L_1(a, b)$.

ТЕОРЕМА D [8]. Если система функций $\{f_n\}$ является системой представления в пространстве $L_q(0, \pi)$, $0 < q < \infty$, то система $\{f_n\}$ является системой представления и в пространствах $L_p(0, \pi)$ для всех p , $0 < p < 1$, $p \leq q$.

Используя теоремы C и D, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\varphi_{n,k} - \cos 2^{n+1}x}{1 - \cos \left(x - \frac{2\pi(2k+1)}{2^n} \right)} \right| dx \leq 0.37, \quad n = 2, 3, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1.$$

Тогда существует число $n_0 \in N$ такое, что система

$$\frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1 - \varphi_{n,k}(x)}{1 - \cos \left(x - \frac{(2k+1)2\pi}{2^n} \right)} \right\}, \quad n = n_0 + 2, n_0 + 3, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1, \quad (8)$$

является системой представления в пространстве $L_p(0, \pi)$, $0 < p \leq 1$, и существует конкретный алгоритм приближения по системе (8) в этих пространствах.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть система 2π -периодических функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty \in L_1(0, 2\pi)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos kx - \varphi_k(x)| dx \leq \sigma_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Если

$$\frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{2^n - k}{2^n} \sigma_k \leq 0.37$$

для всех $n = 1, 2, \dots$, то система $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ полна в пространстве $L_1(0, \pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0, \pi)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$.

Следствие 1. Пусть система 2π -периодических функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty \in L_1(0, 2\pi)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos kx - \varphi_k(x)| dx \leq \sigma_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Если

$$\frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \leq 0.37,$$

то система $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ полна в пространстве $L_1(0, \pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0, \pi)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$.

Замечание 1. В теоремах *A* и *B* приводятся результаты об устойчивости полных минимальных систем. В теореме 1 рассматривается специальное возмущение системы (1), при этом системы (1) и (8), очевидно, не являются минимальными. А в теореме 2 более слабое возмущение, чем в теоремах *A* и *B*, но дается алгоритм представления по новой, полученной возмущением системе, что пока не представляется возможным сделать для всех систем при использовании теорем *A* и *B* в пространстве L_1 (так как процесс ортогонализации в L_1 не применим).

Заметим, что в работе [9] приводится более сильное возмущение в пространстве L_1 системы Хаара, чем в теореме *A* (ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \|x_k^*\|$ расходится), но свойство полноты остаётся устойчивым, при этом приводится алгоритм приближения по новой, полученной возмущением, системе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бочкарев С.В. Построение интерполяционного диадического базиса в пространстве непрерывных функций на основе ядер Фейера // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 172. С. 29 – 59.
2. Олевский А.М. Об устойчивости оператора ортогонализации Шмидта // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1970. Т. 34. С. 808 – 826.
3. Крейн М.Г., Мильман Д.П., Рутман М.А. Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха // Зап. мат. общества. Харьков, 1940. Т. 16, № 5. С. 97 – 112.
4. Мильман В.Д. Геометрическая теория пространств Банаха // УМН. 1970. Т. 25, вып. 3(153). С. 113 – 174.
5. Тумarkin Ю.Б. Устойчивость базисов в B -пространствах и других классах ЛВП // Теория функций, функциональный анализ и его применения: Сб. науч. тр. 1970. Вып. 14. С. 87 – 94.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
7. Filippov V.I. On the completeness and other properties of some function systems in L^p , $0 < p < \infty$ // JAT. 1998. Vol. 94. P. 42 – 53.
8. Filippov V.I. Linear continuous functionals and representation of functions by series in the spaces E_φ // Analysis Mathematica. 2001. Vol. 27, № 4. P. 239 – 260.
9. Филиппов В.И. О сильных возмущениях системы Хаара в пространствах $L_1(0,1)$ // Мат. заметки. 1999. Т. 66, вып. 4. С. 596 – 602.

В. А. Халова

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x (x-t)f(t)dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} (1-x-t)f(t)dt + \sum_{k=1}^m (f, v_k) g_k(x), \quad (1)$$

где $(f, v_k) = \int_0^1 f(t)v_k(t)dt$, $v_k(t) \in C^2[0,1]$, $g_k(x) \in C^2[0,1]$, системы функций

$\{v_k''(t)\}_1^m$, $\{g_k''(x)\}_1^m$ линейно независимые, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, $x \in [0,1]$.

Оператор (1) является одним из простейших операторов вида

$$Af(x) = \int_0^1 A(x,t) f(t)dt, \quad x \in [0,1], \quad (2)$$

некоторая производная ядра которого имеет разрыв 1-го рода на линиях $t=x$ и $t=1-x$. Основополагающие работы по исследованию спектральных разложений операторов такого вида принадлежат А. П. Хромову (см., напр., [1]). В работе [2] им совместно с В. В. Корневым для оператора

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)dt + \alpha \int_0^x A(x,t) f(t)dt$$

при некоторых условиях на ядро $A(x,t)$ была получена теорема равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) и разложений в тригонометрические ряды Фурье.

В данной статье получена аналогичная теорема для оператора (1).

Важным достоинством оператора (1) является то, что для него условия существования обратного оператора записываются в явном виде [3]. Существование оператора A^{-1} является необходимым условием для получения теоремы равносходимости [1].

Пусть [3] $\Delta = \det \left| \beta \delta_{kj} + (D^2 T g_k, v_j) \right|_1^m \neq 0$, где δ_{kj} – символ Кронекера, $D = \frac{d}{dx}$, $T = \alpha_1 E - \alpha_2 S$, E – единичный оператор, $Sf(x) = f(1-x)$. Тогда оператор A^{-1} существует и имеет место представление

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$A^{-1}y(x) = Ly(x) - \frac{\beta}{\Delta} \sum_{k,j=1}^m Lg_k(x)(Ly, v_j)\Delta_{jk},$$

где $L = \frac{1}{\beta} D^2 T$, Δ_{jk} – алгебраические дополнения определителя Δ ;
 $y(x)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma_p} [a_{\tau p} y^{(\tau)}(0) + b_{\tau p} y^{(\tau)}(1)] = (y, \varphi_p), \quad p = 1, 2, \quad (3)$$

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0, \varphi_p \in C[0,1].$$

Считаем, что условия (3), представляющие собой условия из теоремы 2 из [3] после нормировки, регулярны по Биркгофу [4, с. 66 – 67].

Рассмотрим задачу

$$z''(x) - \lambda \mathbf{D}z(x) = BF(x),$$

$$\sum_{\tau=0}^{\sigma_p} [P_\tau z^{(\tau)}(0) + Q_\tau z^{(\tau)}(1)] = 0, \quad p = 1, 2,$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $z_1(x) = z_2(1-x)$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $\sigma_1 = 1$,
 $\sigma_2 = 0$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$, $d^2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$, $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_1 \end{pmatrix}$,

$$P_\tau = \begin{pmatrix} p_\tau^1 & p_\tau^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_\tau = (-1)^\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_\tau^1 & -p_\tau^2 \end{pmatrix}, \quad p_\tau^1 = a_\tau + (-1)^\tau b_\tau, \quad p_\tau^2 = a_\tau - (-1)^\tau b_\tau,$$

λ – спектральный параметр.

Положим $\lambda = \rho^2$, $0 \leq \arg \rho \leq \pi$. Разобъём $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ на секторы $\gamma_{j-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_j$, $j = 1, \dots, s$ ($0 = \gamma_0 < \dots < \gamma_s = \pi$) таким образом, что числа $\omega_1 = -\omega_2 = 1$, $\omega_3 = -\omega_4 = d$ можно перенумеровать $\tilde{\omega}_j$, $j = 1, \dots, 4$ так, чтобы при любых ρ из рассматриваемого сектора выполнялось

$$\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_1 \leq \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_2 \leq 0 \leq \operatorname{Re} \tilde{\omega}_3 \leq \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_4.$$

Обозначим $S_{\delta_0} = \bigcup_{j=1}^s S_{\delta_0, j}$, где $S_{\delta_0, j}$ – область, получающаяся из сектора $\gamma_{j-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_j$ удалением всех нулей многочлена

$$a_{0,j} + a_{1,j} e^{-2\rho \tilde{\omega}_2} + a_{2,j} e^{-\rho(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)} + a_{3,j} e^{-2\rho \tilde{\omega}_1} + a_{4,j} e^{-2\rho(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)},$$

где $a_{k,j} \neq 0$, $k = 0, \dots, 4$, вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0 .

Удалим из области S_{δ_0} ещё точки ρ_k , $k=1,2,\dots$ вместе с круговыми окрестностями того же радиуса δ_0 , для которых $(\alpha_1 + \alpha_2)\rho_k^2$ или $(\alpha_1 - \alpha_2)\rho_k^2$ являются собственными значениями краевой задачи

$$y''(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1), \quad j=1,2,$$

где $y(x)$ – скалярная функция, и для оставшейся области сохраним обозначение S_{δ_0} .

Обозначим $p_{jk} = p_{ij}^k$, $i=2-j$, $k,j=1,2$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\Delta \neq 0$ и $(p_{11}p_{22})^2 \neq (p_{12}p_{21}d)^2$, $p_{jk} \neq 0$, $j,k=1,2$, и $\{g_k(x)\}^\infty$ – функции ограниченной вариации. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq x \leq 1-\delta} \left| S_r(f, x) - \frac{1}{2} \sigma_{r|d_1|}(f+g, x) - \frac{1}{2} \sigma_{r|d_2|}(f-g, x) \right| = 0,$$

где $S_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f, x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ для тех номеров k , для которых $(2k\pi)^2 < r$; $g(x) = f(1-x)$, $d_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $d_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ и r таково, что $\{\rho \mid |\rho| = \sqrt{r}, 0 \leq \arg \rho \leq \pi\} \subset S_{\delta_0}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т.114(156), № 3. С. 378 – 405.
2. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // ДАН. 2001. Т. 379, № 6. С. 741 – 744.
3. Халова В.А. Задача обращения одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С.125 – 127.
4. Наимарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука. 1969.

**О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ
ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ***

Обозначим через L оператор

$$Ly = y'(x), \quad U(y) = \int_0^1 p(t)y(t)dt = 0, \quad p(t) \in C[0,1] \cap V[0,1], \quad p(0)p(1) \neq 0. \quad (1)$$

В статье [1] аналог теоремы Жордана из тригонометрических рядов Фурье перенесен на случай рядов Фурье по собственным и присоединённым функциям (с.п.ф.) оператора L , а в [2] установлена равносуммируемость по Риссу таких разложений. В настоящей статье исследуется вопрос о равносходимости разложений по с.п.ф. оператора L в обычный тригонометрический ряд Фурье. Подобные результаты для другого весьма трудного для исследования вида функций $p(t)$ получены в [3 – 5] (в них рассмотре-

ны граничные условия $U(y) = \int_{-1}^1 p(t)y(t)dt = 0$, когда $p(t) = \frac{k(t)}{(1-|t|)^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $k(t) \in C[-1,1] \cap V[-1,1]$, $k(-1)k(1) \neq 0$, и даже когда $k(t)$ заменяется на $k(t)b(1-|t|)$, где $b(t)$ – слабо колеблющаяся функция).

Введём ещё оператор $L_0 : L_0y = y'(x)$, $U_0(y) = y(0) - y(1) = 0$. Его собственные функции представляют тригонометрическую систему $\{e^{2k\pi ix}\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Обозначим через R_λ и $R_{0,\lambda}$ резольвенты операторов L и L_0 , т.е., $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, $R_{0,\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, E – единичный оператор и λ – спектральный параметр.

ЛЕММА 1. Для любой $f(x) \in L[0,1]$

$$R_\lambda f - R_{0,\lambda} f = -\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} U(R_{0,\lambda} f), \quad \Delta(\lambda) = U(e^{\lambda x}).$$

Из всей комплексной λ -плоскости удалим собственные значения вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ . Полученную область обозначим через S_δ .

ЛЕММА 2. Если окружность $|\lambda| = r$ целиком лежит в S_δ , то при $x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$)

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$J_r(f) = \int_{|\lambda|=r} \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} U(R_{0,\lambda} f) d\lambda = O(\|f\|_1),$$

где $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ и оценка O не зависит от x и r .

ЛЕММА 3. Если $f(x)$ абсолютно непрерывна, причём $f'_0(x) \in L_2[0,1]$ и $U_0(f_0) = 0$, то при $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$$J_r(f_0) = -U(f_0) \int_{|\lambda|=r} \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)(\lambda - \mu)} d\lambda + O\left(\frac{1}{r}\|g\|_1\right),$$

где $g(x) = f'_0(x) - \mu f_0(x)$ и μ – фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора L_0 .

Обозначим через Δ_u^0 множество всех абсолютно непрерывных функций $f(x)$, для которых $f'(x) \in L_2[0,1]$ и $U_0(f) = U(f) = 0$.

ЛЕММА 4. Замыкание $\overline{\Delta_u^0}$ множества Δ_u^0 по норме $L[0,1]$ есть множество всех функций из $L[0,1]$, для которых $U(f) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Для всякой функции $f(x) \in L[0,1]$, для которой $U(f) = 0$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon} |S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)| = 0, \quad (2)$$

где $S_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора L для тех собственных значений λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(f, x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех k , для которых $|2k\pi| < r$.

Доказательство. По леммам 1 и 2 имеем

$$S_r(f, x) - \sigma_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} [R_\lambda f - R_{0,\lambda} f] d\lambda = O(\|f\|_1) \quad (3)$$

для всякой $f(x) \in L[0,1]$ и $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Далее, если $f_0(x) \in \Delta_u^0$, то по лемме 3

$$S_r(f, x) - \sigma_r(f_0, x) = O\left(\frac{1}{r}\|g\|_1\right). \quad (4)$$

Из (3) и (4) по теореме Банаха-Штейнгауза получаем, что (2) имеет место для $f(x) \in \Delta_u^0$. Отсюда по лемме 4 получаем утверждение теоремы.

Замечание. Условие $U(f) = 0$ отбросить, вообще говоря, нельзя. В самом деле, пусть $p(x) \equiv 1$. Тогда $\Delta(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[e^\lambda - 1]$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)(\lambda - \mu)} d\lambda = O\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{e^{\lambda x}}{e^\lambda - 1} d\lambda.$$

Последний интеграл при $x = \frac{1}{2}$ принимает значения 1 или -1, причём при возрастании r оба этих значения все время сменяют друг друга. Значит, при $x = \frac{1}{2}$ (2) не имеет место даже для любой абсолютно непрерывной функции $f(x)$, для которой $f'(x) \in L_2[0,1]$, $U(f) \neq 0$, $f(0) = f(1)$. Обычный же ряд Фурье такой функции всегда сходится, а по с.п.ф. оператора L расходится.

Приведём еще обобщение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что $p(x)$ m раз непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, причём $p^{(m)}(x) \in V[0,1]$ и $p^{(s)}(0) = p^{(s)}(1) = 0$ ($s = 0, \dots, m-1$), $p^{(m)}(0)p^{(m)}(1) \neq 0$. Тогда, если $f(x) \in L[0,1]$ и $\int_0^1 p^{(s)}(t)f(t)dt = 0$ ($s = 0, \dots, m$), то имеет место (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Молоденков В.А., Хромов А.П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов, 1972. Вып. 1. С. 17 – 26.
2. Молоденков В.А. Равносуммируемость по М. Риссу разложений по некоторым системам показательных функций // Мат. заметки. 1974. Т. 15, №3. С. 381 – 386.
3. Седлецкий А.М. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37, №5. С. 51 – 95.
4. Седлецкий А.М. О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1991. Т. 200. С. 299 – 309.
5. Седлецкий А.М. О суммируемости и сходимости негармонических рядов Фурье // ИАН. Серия математическая. 2000. Т. 64, № 3. С.152 – 168.

УДК 517.927.25

А. П. Хромов, Д. Г. Шалтыко

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ*

В данной статье исследуется вопрос о сходимости рядов по собственным и присоединенным функциям краевой задачи, определяемой дифференциальным уравнением

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$y''' + \lambda y = 0, \quad (1)$$

и трёхточечными распадающимися краевыми условиями

$$y(0) = y'(\alpha) = y(1) = 0 \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2)$$

Отметим, что задача о сходимости спектральных разложений в случае $\alpha = 0$ (и для более общих дифференциальных операторов n -го порядка с произвольными распадающимися краевыми условиями) получила окончательное решение в работе А. П. Хромова [1]. Исследованием же задачи вида (1) – (2) и даже более общими многоточечными краевыми задачами n -го порядка занимался Г. Фрайлинг [2]. Им были получены достаточные условия разложимости функций в ряды по собственным функциям таких задач.

В настоящей статье приводятся необходимые и достаточные условия разложения произвольной функции в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям задачи (1) – (2), что усиливает результаты [2] для случая краевой задачи (1) – (2). Тем самым даётся окончательное решение вопроса о разложении произвольной функции в ряды по собственным и присоединенным функциям задачи (1) – (2) на (0,1).

ТЕОРЕМА 1. Краевая задача (1) – (2) имеет бесконечно много собственных значений, которые можно разложить в две серии:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+h_1,1} &= -\rho_{k,1}^3, \quad \rho_{k,1} = \frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{(1-\alpha)\sqrt{3}} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k=1,2,\dots, \\ \lambda_{k+h_2,2} &= -\rho_{k,2}^3, \quad \rho_{k,2} = \frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\alpha\sqrt{3}} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k=1,2,\dots, \end{aligned}$$

где h_1, h_2 – некоторые целые числа. При этом все собственные значения, достаточно большие по модулю, простые.

Предположим, что $\{\Phi_{k,1}(x)\}$ и $\{\Phi_{k,2}(x)\}$ – соответствующие этим сериям собственные и присоединенные функции и $\{\Psi_{k,1}(x)\}$, $\{\Psi_{k,2}(x)\}$ – соответствующие биортогональные системы. Обозначим через $T_{a,b}$ правильный треугольник в комплексной плоскости с центром в точке a и одной из вершин в точке b .

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд $\sum a_k \varphi_{k,1}(x)$ сходится равномерно на $[x_0, x_1]$ ($0 < x_0 < x_1 < 1$), то он сходится абсолютно и равномерно в области T_{0,x_1} и его сумма $f_1(x)$ удовлетворяет условиям

$$f_1^{(3k)}(0) = 0 \text{ и } f_1^{(3k+1)}(\alpha) = 0 \text{ (если } \alpha \in T_{0,x_1}), \quad k=0,1,2,\dots$$

ТЕОРЕМА 3. Если ряд $\sum b_k \varphi_{k,2}(x)$ сходится равномерно на $[x_0, x_1]$ ($0 < x_0 < x_1 < 1$), то он сходится абсолютно и равномерно в области T_{1,x_0} и его сумма $f_2(x)$ удовлетворяет условиям

$$f_2^{(3k)}(1) = 0 \text{ и } f_2^{(3k+1)}(\alpha) = 0 \text{ (если } \alpha \in T_{1,x_0}), k = 0, 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что ряд $\sum a_k \varphi_{k,1}(x) + \sum b_k \varphi_{k,2}(x)$ сходится равномерно на $[0,1]$ к $f(x)$ и его части $\sum a_k \varphi_{k,1}(x)$ и $\sum b_k \varphi_{k,2}(x)$ сходятся к $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Тогда $f_1(x)$ ортогональна $\{\psi_{k,2}(x)\}$ и $f_2(x)$ ортогональна $\{\psi_{k,1}(x)\}$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что $f(x) \in L_2[0,1]$ и имеет вид

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ регулярна в $T_{0,1}$,
и удовлетворяет условиям

$$f_1^{(3k)}(0) = f_1^{(3k+1)}(\alpha) = 0, k = 0, 1, 2, \dots,$$

а $f_2(x)$ регулярна в $T_{1,0}$ и удовлетворяет условиям

$$f_2^{(3k)}(1) = f_2^{(3k+1)}(\alpha) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Предположим также, что $f_1(x)$ ортогональна системе $\{\psi_{k,2}(x)\}$, а $f_2(x)$ ортогональна системе $\{\psi_{k,1}(x)\}$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям задачи (1) – (2) сходится равномерно на любом отрезке $[a,b]$ из $(0,1)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. 1976. Т.19, № 5. С. 763 – 772.
2. Freiling G. Irregulare Mehrpunkt-Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen. HABILITATIONSSCHRIFT dem Fachbereich 11 – Mathematik. Duisburg, 1979.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ФУНКЦИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ*

В данной статье приведены интегральные представления функций из пространства $W_2^r[a, b]$, $r \geq 1$ – целое, $\|u\|_{W_2^r}^2 = \int_a^b [u^2(t) + (u^{(r)}(t))^2] dt$, в случае, когда на них наложены краевые условия. Эти представления являются аналогами ранее полученного автором [1] интегрального представления произвольной функции $u(x)$ из пространства $W_2^r[a, b]$:

$$u(x) = (G(\cdot, x), u(\cdot))_{W_2^r}, \quad (1)$$

где $G(t, x)$ – функция Грина дифференциального оператора \hat{L} :

$$\hat{ly} = (-1)^r y^{(2r)} + y, \quad (2)$$

$$y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0, \quad k = r, \dots, 2r - 1. \quad (3)$$

Пусть $u(x) \in W_2^r[a, b]$ удовлетворяет краевым условиям вида

$$U_i(u) = \sum_{k=0}^{r-1} a_{ki} u^{(k)}(a) + b_{ki} u^{(k)}(b) = 0, \quad (4)$$

$i = 1, \dots, m$, $1 \leq m \leq r$, a_{ki}, b_{ki} – константы, причём, $|a_{ki}|^2 + |b_{ki}|^2 > 0$ хотя бы для одного индекса i и одного индекса k ; линейные формы $U_i(u)$ линейно независимы.

Обозначим через L дифференциальный оператор, порождённый дифференциальным выражением $ly = y^{(r)}$ и краевыми условиями $U_i(y) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Обозначим через $U_i^*(y)$, $i = m+1, \dots, 2r$, линейные формы, сопряженные с $U_i(y)$ [2].

ТЕОРЕМА. Для функции $u(x) \in W_2^r[a, b]$ с краевыми условиями (4) справедливо представление вида (1). При этом $G(t, x)$ является функцией Грина дифференциального оператора \hat{L}' с дифференциальным выражением (2) и краевыми условиями, которые состоят из условий $U_i(y) = 0$, $i = 1, \dots, m$, и условий $U_i^*(y^{(r)}) = 0$, $i = m+1, \dots, 2r$.

Доказательство. Рассмотрим $2r$ раз непрерывно дифференцируемую по t при $t \neq x$ функцию $\Phi(x, t)$ и найдём условия, при которых она будет являться воспроизводящим ядром для функции $u(x)$ в простран-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

стве $W_2^r[a, b]$ с учётом краевых условий (4). Взяв r раз по частям интеграл $\int_a^b \Phi_t^{(r)}(x, t)u^{(r)}(t)dt$ и подставив результат в правую часть искомого представления, придем к равенству

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_a^x \left[(-1)^r \Phi_t^{(2r)}(x, t) + \Phi(x, t) \right] u(t) dt + \int_x^b \left[(-1)^r \Phi_t^{(2r)}(x, t) + \Phi(x, t) \right] u(t) dt + \\ & + \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \left[\Phi_t^{(r+k)}(x, x+0) - \Phi_t^{(r+k)}(x, x-0) \right] u^{(r-1-k)}(x) + \\ & + \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \left[\Phi_t^{(r+k)}(x, t) u^{(r-1-k)}(t) \right]_a^b. \end{aligned}$$

Привлекая теорию линейных дифференциальных операторов [2], получаем, что последнее равенство будет удовлетворяться, если функция $\Phi(x, t)$ как функция t будет функцией Грина дифференциального оператора \hat{L}' .

Приведём несколько частных случаев.

Пусть краевые условия (4) имеют вид:

- 1) $u(a) = u(b) = 0$;
- 2) $a_{01}u(a) + b_{01}u(b) = 0$;
- 3) $u^{(m)}(a) = u^{(m)}(b) = 0$, m – фиксированное;
- 4) $u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b)$, $k = 0, 1, \dots, r-1$.

Тогда краевые условия оператора \hat{L}' получаются из краевых условий (3):

в случае 1) – заменой условий $y^{(2r-1)}(a) = y^{(2r-1)}(b) = 0$ условиями $y(a) = y(b) = 0$; в случае 2) – заменой указанных выше условий условиями $a_{01}y(a) + b_{01}y(b) = 0$, $b_{01}y^{(2r-1)}(a) + a_{01}y^{(2r-1)}(b) = 0$; в случае 3) – заменой условий $y^{(2r-1-m)}(a) = y^{(2r-1-m)}(b) = 0$ условиями $y^{(m)}(a) = y^{(m)}(b) = 0$; в случае 4) – заменой всех условий (3) условиями $y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b)$, $k = 0, 1, \dots, 2r-1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г.В. О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений I рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1994. № 4. С. 3 – 10.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука. 1969.

Г. В. Хромова, Е. В. Шишкова

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИИ ВМЕСТЕ С ЕЁ ПРОИЗВОДНОЙ*

В данной статье получен точный порядок скорости аппроксимации функции и её производной интегральными операторами с полиномиальными финитными ядрами на некотором компактном классе непрерывных функций.

Рассмотрим семейство интегральных операторов

$$T_\alpha f = -\frac{3}{4\alpha^3} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} [(t-x)^2 - \alpha^2] f(t) dt.$$

Обозначим через T_α' интегральный оператор, ядро которого есть производная по x от ядра оператора T_α .

Известно [1], что если $f(x) \in C^1[a, b]$, то

$$|T_\alpha f - f| \rightarrow 0 \text{ и } |T_\alpha' f - f'| \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0$$

для любого $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим классы функций

$$M_2^r[a, b] = \{f(x) \in W_2^r[a, b] : \|f\|_{W_2^r} \leq 1\}, \quad r = 1, 2,$$

где $W_2^r[a, b]$ – одномерное пространство Соболева, и величины:

$$\Delta_1(T_\alpha, M_2^r) = \sup \{\|T_\alpha f - f\|_{C_\varepsilon} : f(x) \in M_2^r[a, b]\},$$

$$\Delta_1^{(1)}(T_\alpha, M_2^r) = \sup \{\|T_\alpha' f - f'\|_{C_\varepsilon} : f(x) \in M_2^r[a, b]\},$$

где C_ε – пространство непрерывных функций, принимающих постоянные значения на отрезках $[a, a + \varepsilon]$ и $[b - \varepsilon, b]$.

Поставим задачу Колмогорова-Никольского [2]: получить представления вида

$$\Delta_1(T_\alpha, M_2^r) = \varphi_{1r}(\alpha) + \psi_{1r}(\alpha), \quad \Delta_1^{(1)}(T_\alpha, M_2^r) = \varphi_{12}^{(1)}(\alpha) + \psi_{12}^{(1)}(\alpha),$$

где $\psi_{1r}(\alpha) = o(\varphi_{1r}(\alpha))$, $\psi_{12}^{(1)}(\alpha) = o(\varphi_{12}^{(1)}(\alpha))$, $r = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 1. Имеют место представления:

$$\Delta_1(T_\alpha, M_2^r) = \frac{3}{4\alpha^3} \sup_{\alpha + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon} \left(\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} [(\eta - x)^2 - \alpha^2] g_r(x, \eta, \alpha) d\eta - g_r(x, x, \alpha) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$r = 1, 2$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

$$\Delta_1^{(1)}(T_\alpha, M_2^2) = \frac{3}{2\alpha^3} \sup_{\alpha+\varepsilon \leq x \leq b-\varepsilon} \left(\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} (\eta-x) g_{2x}(x, \xi, \alpha) d\xi - g_{2x}''(x, x, \alpha) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{где } g_r(x, t, \alpha) = -\frac{3}{4\alpha^3} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} [(\eta-x)^2 - \alpha^2] G_r(t, \eta) d\eta - G_r(t, x),$$

$G_r(t, x)$ – функция Грина дифференциального оператора $\hat{L}: \{\hat{L}y = (-1)^r y^{(2r)} + y, y^{(k)}(0) = 0, y^{(k)}(1) = 0, k = r, \dots, 2r-1\}$.

Эта теорема является конкретизацией общей теоремы, приведённой в [3].

Для $r=1$ функция Грина имеет вид

$$G_1(t, x) = \begin{cases} \frac{ch(1-t)chx}{sh1}, & x \leq t, \\ \frac{ch(1-x)cht}{sh1}, & x \geq t. \end{cases} \quad (1)$$

Для $r=2$ получим вид $G_2(t, x)$ из её общего представления [4,3].

ЛЕММА. Функция Грина дифференциального оператора $\hat{L}: \hat{L}y = y^{(4)} + y, y'''(0) = y'''(1) = y''(0) = y''(1) = 0$ имеет вид

$$G_2(t, x) = \frac{1}{8} \sum_{l=1}^4 \lambda_l e^{-\lambda_l t} \left[\pm e^{\lambda_l t} + \sum_{m=1}^4 C_{ml} e^{\lambda_m t} \right], \quad (2)$$

где $\lambda_l = \sqrt[4]{-1}$, знак + соответствует $x \geq t$, знак – соответствует $x \leq t$,

$$C_{ml} = \frac{\Delta_{ml}}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 & \bar{\lambda}_1 & -\bar{\lambda}_1 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1} & -\lambda_1 e^{-\lambda_1} & \bar{\lambda}_1 e^{\bar{\lambda}_1} & -\bar{\lambda}_1 e^{-\bar{\lambda}_1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\lambda_1} & e^{-\lambda_1} & e^{\bar{\lambda}_1} & e^{-\bar{\lambda}_1} \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad \Delta_{ml} = \begin{cases} (-1)^k \Delta_{ml}^* \text{ для } l=1,2; \\ (-1)^{k+1} \Delta_{ml}^* \text{ для } l=3,4, \end{cases}$$

$k=1$ для $m=1,2$; 2 – для $m=3,4$, Δ_{ml}^* – определитель, получающийся из определителя Δ заменой m -го столбца на столбец $(-\lambda_l, \lambda_l e^{\lambda_l}, -1, e^{\lambda_l})^T$, $\lambda_l = \lambda_1$ при $l=1, -\lambda_1$ при $l=2, \bar{\lambda}_1$ при $l=3, -\bar{\lambda}_1$ при $l=4$.

Доказательство. Рассмотрим выражение функции Грина из [4, с. 47, 94] и конкретизируем его для случая оператора \hat{L} .

В определитель, стоящий в числителе выражения для функции Грина, подставим конкретные значения для $g(t, x)$, ρ , $U_i(g)$, $U_{ij} = U_i(e^{\lambda_j t})$; определитель, стоящий в знаменателе, приведём к виду,

фигурирующему в лемме, выразив все корни λ_l через λ_1 . Затем разложим определитель, стоящий в числителе, по первой строке, выпишем алгебраические дополнения элементов первой строки, преобразуем их к виду, указанному в лемме и тогда придём к утверждению леммы.

ТЕОРЕМА 2. Справедливы асимптотические по α при $\alpha \rightarrow 0$ представления:

$$\Delta_1(T_\alpha, M_2^1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{33}{70}} \alpha^{\frac{1}{2}} + O\left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\Delta_1(T_\alpha, M_2^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{252}} \alpha^{\frac{3}{2}} + O\left(\alpha^{\frac{5}{2}}\right),$$

$$\Delta_1^{(1)}(T_\alpha, M_2^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{33}{70}} \alpha^{\frac{1}{2}} + O\left(\alpha^{\frac{5}{2}}\right).$$

Доказательство представляет собой конкретизацию представлений из теоремы 1 с использованием выражений (1) и (2). Сначала находим асимптотические представления для функций $g_r(x, t, \alpha)$. Проделав достаточно громоздкие выкладки, разлагая в ряды гиперболические функции и экспоненты, зависящие от малого аргумента, убеждаемся, что слагаемые, имеющие порядок $O(1)$, взаимно уничтожаются, в результате приходим к выражению

$$g_1(x, t, \alpha) = -\frac{3\alpha}{16} - \frac{3}{8} \frac{(x-t)^2}{\alpha} + \frac{(x-t)^4}{16\alpha} + \frac{|t-x|}{2} + O(\alpha^2),$$

$$g_2(x, t, \alpha) = \frac{\alpha^2}{80} \sum_{l,m=1}^4 C_{ml} \lambda_l^3 e^{\lambda_m t - \lambda_l x} + \frac{1}{16} \left(\frac{\alpha^3}{6} + \frac{3\alpha(t-x)^2}{2} + \frac{(t-x)^4}{2\alpha} + \frac{(t-x)^6}{30\alpha^3} - \frac{|t-x|^3}{12} \right).$$

Из этих представлений, проделав аналогичную работу, получаем утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Хромова Г.В. О дифференцировании функций, заданных с погрешностью // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 1984. Вып. 6. С. 53 – 58.
- Хромова Г.В. Об оценках погрешности приближённых решений уравнений первого рода // ДАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605 – 609.
- Хромова Г.В. О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений I рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1984. № 4. С. 3 – 10.
- Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука. 1969.

А. В. Шаталина, А. Г. Свистельникова

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ЭРМИТА-ФЕЙЕРА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Пусть AC – множество аналитических в единичном круге $|z| < 1$ и непрерывных в его замыкании функций с равномерной нормой

$$\|f\| = \sup_{z \in \{|z| \leq 1\}} |f(z)|$$

и обычным модулем непрерывности $\omega(f, \delta)$; $M = \{z_{k,n}\}$ – треугольная матрица узлов интерполяции, $M \in \{|z|=1\}$, $\kappa = 0, 1, \dots, n-1$, $n = 1, 2, \dots$

Напомним, M называется правильной матрицей, если узлы каждой её n -й строки являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в единичный круг.

Пусть $\{H_{2n-1}(M, f, z)\}$ – последовательность многочленов Эрмита-Фейера степени $pr - 1$, $p \geq 2$, интерполирующих функцию f в узлах $z_{k,n}$.

Обозначим через Ω множество функций $\omega(\delta)$ типа модуля непрерывности, то есть непрерывных, полуаддитивных, неубывающих на полуоси $[0; \infty)$ функций таких, что $\omega(0) = 0$. Каждую функцию $\omega(\delta) \in \Omega$ назовем мажорантой.

Введём классы, заданные мажорантой:

$AC(\omega)$, $\omega \in \Omega$, – класс функций $f \in AC$, у которых $\omega(f, \delta) = O(\omega(\delta))$,

$AC^*(\omega)$, $\omega \in \Omega$, – класс функций $f \in AC$, у которых $\omega(f, \delta) = o(\omega(\delta))$.

Известно [1], что для любой функции $f \in AC$ интерполяционный процесс Эрмита-Фейера, построенный по правильной матрице, сходится к ней равномерно внутри круга. С. М. Лозинский [2] доказал существование функции $f \in AC$ такой, что последовательность многочленов не сходится к функции f в точке $z = 1$. Достаточным условием равномерной сходимости в замкнутом круге [1] является условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \ln n = 0. \quad (1)$$

Если рассматривать функции из введённых классов $AC(\omega)$ или $AC^*(\omega)$, то для них условие (1) очевидно перепишется следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0 \quad (2)$$

или

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega \left(\frac{1}{n} \right) \ln n < \infty. \quad (3)$$

Будут ли условия (2) и (3) не только достаточными, но и необходимыми для этих классов?

В качестве M рассмотрим конкретную матрицу узлов интерполяции, составленную из корней n -й степени из (-1) .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega \left(\frac{1}{n} \right) \ln n > 0. \quad (4)$$

Тогда существует функция $f \in AC(\omega)$, для которой процесс Эрмита-Фейера расходится всюду на единичной окружности.

Если выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega \left(\frac{1}{n} \right) \ln n = \infty, \quad (5)$$

то существует функция $f \in AC^*(\omega)$, для которой процесс Эрмита-Фейера неограниченно расходится всюду на единичной окружности.

Для произвольных правильных матриц с некоторым ограничением на распределение узлов найдена метрическая характеристика множества точек расходимости рассматриваемых процессов.

Определение. Говорят, что матрица узлов интерполяции M удовлетворяет условию (B_m) , пишут $M \in (B_m)$, если для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существуют числа $q = q(\varepsilon)$, m , для которых можно указать последовательность номеров $\{n_i\}$ такую, что для любого натурального μ существует натуральное v , для которых

$$\varepsilon \cdot \sum_{i=\mu}^v \frac{1}{n_i} \geq 2\pi, \quad n_v \leq n_\mu^q,$$

и все узлы z_{k,n_j} , z_{k,n_i} , $\mu \leq i \neq j \leq v$, расстояние между которыми меньше n_μ^{-2q} , принадлежат множеству B_m , содержащему не более m дуг окружности $|z|=1$, длиной меньше $2n_\mu^{-2q}$ каждая.

Примером таких матриц могут служить матрицы корней n -й степени из любого комплексного числа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M \in (B_m)$ – правильная матрица, и выполнено условие (4). Тогда существует функция $f \in AC(\omega)$, для которой процесс Эрмита-Фейера расходится почти всюду на единичной окружности, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_{2n-1}(M, f, z)| > 0$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_{2n-1}(M, f, z)| = 0$.

Если выполнено условие (5), то существует функция $f \in AC^*(\omega)$, для которой процесс Эрмита-Фейера неограниченно расходится почти всюду

на единичной окружности, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_{2n-1}(M, f, z)| = \infty$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z) - H_{2n-1}(M, f, z)| = 0$.

Сформулированные выше результаты ранее были получены для интерполяционного процесса Лагранжа [3]. Разработанный в [3] метод построения функций из класса $AC(\omega)$ или $AC^*(\omega)$, для которых процесс Лагранжа, построенный по правильной матрице $M \in (B_m)$ (либо по матрице корней n -й степени из (-1)), расходится почти всюду (либо всюду) на единичной окружности, применим для исследования других интерполяционных процессов. Установлено, что многочлены Эрмита-Фейера можно представить как сумму интерполяционного многочлена, аналогичного многочлену Лагранжа и некоторого «добавочного» слагаемого. Получены удобные для дальнейших рассуждений оценки этого слагаемого, что позволило использовать уже известные факты для построения функций с нужными свойствами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.
2. Лозинский С.М. Об интерполяционном процессе Fejer'a // ДАН СССР. 1939. Т. 24. С. 318 – 321.
3. Шаталина А.В. Расходимость интерполяционных процессов Лагранжа на единичной окружности. Саратов, 1990. 30 с. Деп. в ВИНТИ 19.07.90, № 4060-В90.

УДК 517.95

В. А. Юрко

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ БУССИНЕСКА НА ПОЛУОСИ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ*

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_t = i(2v_x - u_{xx}), \quad 3v_t = i(3v_{xx} - 2u_{xxx} - 2uu_x), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad u_0(x), v_0(x) \in L(0, \infty), \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u_1(t), \quad u_x|_{x=0} = u_2(t), \quad v|_{x=0} = v_1(t), \quad v_x|_{x=0} = v_2(t). \quad (3)$$

Система (1) после исключения $v(x, t)$ сводится к уравнению Буссинеска

$$3u_{tt} = u_{xxxx} + 2(u^2)_{xx}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).

Система (1) имеет пару Лакса, и поэтому краевая задача (1)-(3) может быть решена методом обратной спектральной задачи [1]. При этом спектральная задача соответствует линейному дифференциальному уравнению 3-го порядка, а в качестве основной спектральной характеристики берется матрица Вейля-Юрко этого оператора [2, 3].

Обозначим через J_n множество функций $f(x,t)$ таких, что функции

$\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial t^k} f(x,t), \quad 0 \leq j + 2k \leq n$ непрерывны при $x \geq 0, \quad t \geq 0$, интегрируемы

на полуоси $x \geq 0$ при любом фиксированном $t > 0$, и $x \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x,t) \in L(0,\infty)$.

Будем говорить, что $\{u(x,t), v(x,t)\} \in P$, если $u(x,t) \in J_3, v(x,t) \in J_2$. Решение задачи (1)-(3) будем искать в классе P .

Пусть $\{u(x,t), v(x,t)\}$ – решение задачи (1)-(3). При фиксированном $t \geq 0$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение 3-го порядка относительно x :

$$\ell y := y''' + uy' + vy = \lambda y, \quad x \geq 0.$$

Пусть $M_{mj}(t, \lambda)$, $1 \leq m < j \leq 3$ – функции Вейля-Юрко для ℓ , соответствующие линейным формам $U_\xi(y) := y^{(\xi-1)}(0)$, $\xi = \overline{1,3}$ (см. [2]-[3]). Обозначим $M_{mj}^0(\lambda) = M_{mj}(0, \lambda)$ – функции Вейля-Юрко для начальных данных $\{u_0, v_0\}$. Для случая полуоси $x \geq 0$ эволюционные уравнения на функции Вейля-Юрко являются нелинейными. Однако их можно свести к цепочке двух последовательно решаемых уравнений Риккати, каждое из которых, в свою очередь, может быть сведено к системе линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Точнее, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$Z_1(t, \lambda) := \begin{bmatrix} M_{12}(t, \lambda) \\ M_{13}(t, \lambda) \end{bmatrix}, \quad Z_2(t, \lambda) := M_{23}(t, \lambda),$$

$$Z_1^0(\lambda) := \begin{bmatrix} M_{12}^0(\lambda) \\ M_{13}^0(\lambda) \end{bmatrix}, \quad Z_2^0(\lambda) := M_{23}^0(\lambda),$$

и пусть

$$F_1 = iu_1/3, \quad F_2 = i(\lambda - v_1 + 2u_2/3), \quad F_3 = i(\lambda - v_1 + u_2/3), \quad F_4 = i(v_2 + 2i \frac{\partial}{\partial t} u_1)/3.$$

Тогда $Z_k(t, \lambda)$, $k = 1, 2$, являются решениями следующих задач Коши для уравнений Риккати:

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_k = A_k + B_k Z_k - Z_k C_k - Z_k D_k Z_k, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

$$Z_k(0, \lambda) = Z_k^0(\lambda), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} F_2 \\ F_4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -F_1 & 0 \\ F_3 & -F_1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= 2F_1, \quad D_1 = [0, i], \\ A_2 &= F_3, \quad B_2 = -F_1 - iM_{13}, \\ C_2 &= -F_1, \quad D_2 = -iM_{12}. \end{aligned}$$

Используя лемму Радона [4, с. 212], можно записать решение задачи Коши (4)-(5) в виде

$$Z_k(t, \lambda) = \frac{1}{W_k(t, \lambda)} Y_k(t, \lambda), \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

где $W_k(t, \lambda)$ и $Y_k(t, \lambda)$ являются решениями следующих задач Коши для линейных систем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} W_k \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & D_k \\ A_k & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_k \\ Y_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

при начальных условиях

$$W_k(t, \lambda) = 1, \quad Y_k(0, \lambda) = Z_k^0(\lambda). \quad (8)$$

Таким образом, мы получаем следующий алгоритм решения краевой задачи (1)-(3) для системы Буссинеска.

Алгоритм 1. (1) По начальным данным $\{u_0, v_0\}$ строим функции Вейля-Юрко $M_{mj}^0(\lambda)$, $1 \leq m < j \leq 3$.

(2) Последовательно при $k = 1, 2$ вычисляем $Z_k(t, \lambda)$ по формулам (6), где $W_k(t, \lambda)$ и $Y_k(t, \lambda)$ находятся из (7)-(8). Тем самым построены функции Вейля-Юрко $M_{mj}(t, \lambda)$, $1 \leq m < j \leq 3$.

(3) Находим функции $\{u(x, t), v(x, t)\}$, решая обратную спектральную задачу по функциям Вейля-Юрко $M_{mj}(t, \lambda)$, $1 \leq m < j \leq 3$, методом спектральных отображений [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Deift P., Tomei C., Trubowitz E. Inverse scattering and the Boussinesq equation // Comm. Pure Appl. Math. 1982. Vol. 35. P. 567 – 628.
2. Yurko V.A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
3. Юрко В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001. 499 с.
4. Freiling G., Yurko V.A. Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications. N. Y.: NOVA Science Publishers, 2001. 305 p.

УДК 629

Ю. В. Афанасьева, Ю. Н. Челноков

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
НОВЫХ КВАТЕРНИОННЫХ ОСКУЛИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ***

Рассматривается задача о встрече в центральном ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата (КА) с неуправляемым КА, движущимся по эллиптической кеплеровской орбите.

Задача о встрече двух КА формулируется как задача оптимального управления движением центра масс управляемого КА с подвижным правым концом траектории и решается на основе принципа максимума Понtryгина.

Для описания ориентации мгновенной орбиты управляемого КА используется новый кватернионный оскулирующий элемент орбиты, заменяющий собой три классических угловых элемента орбиты управляемого КА.

1. Постановка задачи. Поставим следующую задачу: требуется построить ограниченное по модулю управление \mathbf{p} :

$$0 \leq p \leq p_{\max} < \infty, \quad p = |\mathbf{p}|, \quad (1)$$

переводящее КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]

$$\begin{aligned} v_1' &= c^2 r^{-3} - fMr^{-2} + p_1, \quad r' = v_1, \quad c' = rp_2, \\ \varphi_{tr}' &= cr^{-2} + r(c^2 - fMr)^{-1} \cos \varphi_{tr} (cp_1 \cos \varphi_{tr} - (c + fMr c^{-1}) p_2 \sin \varphi_{tr}), \\ 2(\Lambda^{or})' &= \Lambda^{or} \circ \Omega_\xi, \\ \Omega_\xi &= \Omega_1 i_1 + \Omega_2 i_2 + \Omega_3 i_3 = (r/c)p_3(\cos \varphi_{tr} i_1 + \sin \varphi_{tr} i_2) - \\ &- r(c^2 - fMr)^{-1} \cos \varphi_{tr} (cp_1 \cos \varphi_{tr} - (c + fMr/c)p_2 \sin \varphi_{tr}) i_3, \\ (\varphi^*)' &= c^*(r^*)^{-2}, \quad r^* = p^*(1 + e^* \cos \varphi^*)^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

из заданного начального состояния

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \quad r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \quad c(0) = c^0, \quad \varphi_{tr}(0) = \varphi_{tr}^0, \quad \Lambda_j^{or}(0) = (\Lambda_j^{or})^0, \quad (j = 0..3), \\ \varphi^*(0) &= \varphi_0^*, \end{aligned} \quad (3)$$

в конечное состояние, удовлетворяющее соотношениям

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00988).

$$r(t_k) = r^*(t_k) = p^*/(1 + e^* \cos \varphi_k^*), v_1(t_k) = v_1^*(t_k) = (e^* c^*/p^*) \sin \varphi_k^*,$$

$$c(t_k) = c^*(t_k),$$

$$A_v = \text{vect}(\overline{\Lambda}^{or}(t_k) \circ \Lambda^*) = 0 \quad (4)$$

(здесь $\overline{\Lambda}^{or} = \Lambda_0^{or} - \Lambda_1^{or} i_1 - \Lambda_2^{or} i_2 - \Lambda_3^{or} i_3$ – кватернион, сопряжённый к Λ^{or}), и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{t_k} (1 + \alpha p^2(t)) dt, \alpha = \text{const} \geq 0.$$

В уравнениях (1) – (4) f – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела, p – вектор ускорения от тяги реактивного двигателя, $v_1, r, c, \varphi_{tr}, \Lambda^{or}$ – фазовые координаты управляемого КА; v_1, r, c характеризуют форму и размеры мгновенной орбиты управляемого КА, угловая переменная φ_{tr} характеризует положение управляемого КА на орбите, Λ^{or} – кватернионный оскулирующий элемент орбиты управляемого КА, характеризующий ее мгновенную ориентацию, $\Lambda^* = \text{const}$ – кватернион ориентации орбиты неуправляемого КА, величины со звездочками описывают движение неуправляемого КА.

2. Необходимые условия оптимальности. Задачу решаем, используя принцип максимума Понтрягина. Вводим дополнительную переменную g , удовлетворяющую дифференциальному уравнению $g' = 1 + \alpha p^2$ и начальному условию $g(0) = 0$. Вводим сопряжённые переменные $p, s_1, e, \chi_{tr}, M_j^{or}, \Phi^*$ и ψ_0 , соответствующие фазовым переменным $r, v_1, c, \varphi_{tr}, \Lambda_j^{or}, \varphi^*$ и переменной g .

Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_0(1 + \alpha p^2) + p v_1 + s_1(c^2 r^{-3} - f M r^{-2} + p_1) + e r p_2 + \chi_{tr} c r^{-2} + (\chi_{tr} - (1/2)N_1^{or}) r(c^2 - f M r)^{-1} \cos \varphi_{tr} (c p_1 \cos \varphi_{tr} - (c + f M r c^{-1}) p_2 \sin \varphi_{tr}) + (1/2)(N_1^{or} \cos \varphi_{tr} + N_2^{or} \sin \varphi_{tr}) r c^{-1} p_3 + \Phi^* c^* (p^*)^2 (1 + e^* \cos \varphi^*)^2, \quad (5)$$

где $\alpha \geq 0$; $N_1^{or}, N_2^{or}, N_3^{or}$ – компоненты кватерниона

$$N^{or} = N_0 + N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3 = \overline{\Lambda}^{or} \circ M^{or}.$$

Сопряжённая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -p, \dot{p} = F_1(s_1, c, r, \chi_{tr}, e, p, N^{or}, \varphi_{tr}), \dot{e} = F_2(s_1, c, r, \chi_{tr}, p, N^{or}, \varphi_{tr}), \\ \dot{\chi}_{tr} &= F_3(c, r, \chi_{tr}, p, N^{or}, \varphi_{tr}), (\Phi^*) = 2c^* e^* (p^*)^2 \Phi^* (1 + e^* \cos \varphi^*) \sin \varphi^*, \end{aligned} \quad (6)$$

$$2(M^{or})' = M^{or} \circ \Omega_Z^*, \Omega_Z^* = \Omega_\xi, \quad (6)$$

$$\psi_0' = 0. \quad (7)$$

В дальнейшем в силу принципа максимума и уравнения (7) в выражении (5) для функции H множитель ψ_0 полагается равным –1.

Оптимальное управление p^0 , найденное из условия максимума функции H , определяемой соотношением (5), по переменной p с учётом ограничения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} p_\eta^0 &= p_1^0 i_1 + p_2^0 i_2 + p_3^0 i_3 = p^0 n_\eta / |n|, \\ n_\eta &= G_1(s_1, r, c, e, \chi_{tr}, N^{or}, \varphi_{tr}), \end{aligned} \quad (8)$$

где p^0 при $\alpha > 0$ определяется соотношениями

$$p^0 = \begin{cases} (2\alpha)^{-1}|n|, & \text{если } (2\alpha)^{-1}|n| \leq p_{\max}, \\ p_{\max}, & \text{если } (2\alpha)^{-1}|n| > p_{\max}, \end{cases} \quad (9)$$

а при $\alpha = 0$ – соотношением

$$p^0 = p_{\max}. \quad (10)$$

Условия трансверсальности на правом конце траектории после исключения неопределённых множителей Лагранжа принимают вид:

при $t = t_k$

$$\begin{aligned} \Lambda_0^* M_0^{\text{or}} + \Lambda_1^* M_1^{\text{or}} + \Lambda_2^* M_2^{\text{or}} + \Lambda_3^* M_3^{\text{or}} &= 0, \\ \Phi^* + pe^* p^* (1 + e^* \cos \varphi^*)^2 \sin \varphi^* + s_1 e^* c^* (p^*)^{-1} \cos \varphi^* &= 0, \\ \chi_{tr} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию восемнадцати дифференциальных уравнений (2), (6) – (10), относительно переменных r , v_1 , c , φ , Λ_j , M_j , ($j = 0..3$), φ^* , p , s_1 , e , χ_{tr} , Φ^* . При интегрировании уравнений появится восемнадцать произвольных постоянных интегрирования, девятнадцатым неизвестным будет время t_k . Для определения постоянных и времени t_k имеем девятнадцать условий: пятнадцать граничных условий (3) – (4), три условия трансверсальности (11) и равенство гамильтониана нулю в конечный момент времени, имеющее место для оптимального управления p^0 .

3. Анализ задачи. Уравнения задачи имеют первые интегралы:

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{\text{or}}\|^2 &= 1, \|M^{\text{or}}\|^2 = \text{const}, H(r, v_1, c, \varphi_{tr}, \Lambda^{\text{or}}, \varphi^*, p, \chi_{tr}, M^{\text{or}}, \Phi^*, p^0) = 0, \\ M^{\text{or}} \circ \bar{\Lambda}^{\text{or}} &= N^* = \text{const}, \Phi^*(1 + e^* \cos \varphi^*)^2 = C_\varphi = \text{const}. \end{aligned}$$

Использование двух последних интегралов и кватернионной замены переменных $N^{\text{or}} = \bar{\Lambda}^{\text{or}} \circ M^{\text{or}}$ позволяет понизить порядок системы на шесть единиц без усложнения правых частей уравнений. Правые части уравнений (6) F_1 , F_2 , F_3 являются сложными функциями фазовых и сопряжённых переменных. Анализ этих уравнений показал, что при выполнении условия $\chi_{tr} = (1/2)N_3^{\text{or}}$ уравнения и соотношения краевой задачи существенно упрощаются, а порядок системы понижается ещё на единицу. Численное решение задачи показало, что указанное условие для изучаемых параметров задачи выполняется.

Заключение. В статье сформулирована новая краевая задача принципа максимума, к которой сводится задача о встрече двух КА при использовании новой модели орбитального движения КА.

Эта модель позволяет наиболее эффективно рассматривать общую задачу оптимального управления движением КА как композицию двух взаимосвязанных задач: задачи управления формой и размерами орбиты КА и задачи управления ориентацией орбиты КА, поскольку введённый новый кватернионный оскулирующий элемент непосредственно характеризует собой ориентацию мгновенной орбиты КА, в отличие от других, ранее использованных кватернионных переменных.

Получены первые интегралы уравнений краевой задачи, установлено условие, при выполнении которого уравнения краевой задачи существенно упрощаются.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челюков Ю.Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 1. С. 92 – 107.

УДК 539.3

К. Г. Бахтин, В. Н. Михайлов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСЧЁТА КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим упругий призматический стержень, составленный из различных материалов. Пусть постоянное по длине многосвязное поперечное сечение стержня D образуется из областей D_1, D_2, \dots, D_M , соответствующих материалам с различными модулями сдвига G_1, G_2, \dots, G_M . Обозначим через D_0 область, внешнюю к D ; через Γ_0 – внешнюю границу области D ; через Γ_k , $k = 1, 2, \dots, l$ – границы внутренних полостей и через L_{ij} – линии раздела между подобластями D_i и D_j . Поместим начало декартовой системы координат (x, y, z) в некоторой произвольной точке торцевого сечения стержня, направив ось z параллельно образующей боковой поверхности стержня. Известно [1], что задача расчёта кручения стержней сводится к решению уравнений Пуассона для функций напряжения $U_i(x, y)$ в каждой подобласти D_i

$$\nabla^2 U_i(x, y) = -2G_i, i = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

На границах L_{ij} между областями D_i и D_j должны выполняться условия сопряжения

$$U_i(x, y) = U_j(x, y), \frac{1}{G_i} \frac{\partial U_i(x, y)}{\partial n_{ij}} = \frac{1}{G_j} \frac{\partial U_j(x, y)}{\partial n_{ij}}, (x, y) \in L_{ij}, \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_{ij}}$ – производная по внешней к подобласти D_i нормали. На внешней границе Γ_0 и на границах полостей Γ_k , $k = 1, 2, \dots, l$ функция напряжений $U(x, y)$ должна удовлетворять граничному условию первого рода

$$U(x, y) = c_k, (x, y) \in \Gamma_k, k = 0, 1, \dots, l. \quad (3)$$

Постоянные c_k не известны (c_0 можно положить равной нулю) и находятся из условий

$$\int_{\Gamma_k} \frac{1}{G_i} \frac{\partial U_i}{\partial n} ds = -2\Omega, k=1,2,\dots,l, \quad (4)$$

где Ω – площадь полости, ограниченной контуром Γ_k и индекс i принимает значения номеров подобластей D_i , которые пересекают контур Γ_k .

Задача (1) – (3) при известных значениях постоянных c_k , $k=1,2,\dots,l$ совпадает с задачей расчёта температурных полей с постоянным тепловыделением и заданной температурой на границах области, которая сведена к граничному интегральному уравнению и решается численно для любых областей [2]. Этот способ может быть применён и для задачи кручения. Вопрос об определении неизвестных постоянных c_k может быть решён с помощью суперпозиции решений [3].

Недостаток такого подхода заключается в том, что на границах L_{ij} между подобластями с различными материалами будут найдены значения функции напряжения, в то время как для вычисления касательных напряжений, что и является целью расчёта кручения стержней, необходимо знать первые производные функции $U(x,y)$. Покажем, что можно получить интегральные уравнения, исключающие этот недостаток.

Пусть (x_0, y_0) – фиксированная точка, тогда для функции $U_i(x_0, y_0)$ имеет место представление [2]

$$P_i(x_0, y_0)U_i(x_0, y_0) = P_i(x_0, y_0)W_i(x_0, y_0) + \int_{L_i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial n_{ij}} \delta - U_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds - \\ - \int_{L_i} \left(\frac{\partial W_i}{\partial n_{ij}} \delta - W_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds, i=1,2,\dots,M, \quad (5)$$

где L_i – граница подобласти D_i ; $P_i(x_0, y_0) = \pi$, если $(x_0, y_0) \in L_i$, $P_i(x_0, y_0) = 0$, если точка (x_0, y_0) лежит вне области D_i , и $P_i(x_0, y_0) = 2\pi$, если $(x_0, y_0) \in D_i$; $\delta = \ln \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; $W_i(x, y)$ – частное решение уравнения (1).

Граница L_i состоит из участков L_{ij} , $j \in M_i$, где M_i – множество номеров подобластей D_j , граничащих с D_i . Учитывая это, запишем равенства (5) в следующем виде:

$$P_i(x_0, y_0)U_i(x_0, y_0) = P_i(x_0, y_0)W_i(x_0, y_0) + \sum_{j \in M_i} \int_{L_{ij}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial n_{ij}} \delta - U_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds - \\ - \sum_{j \in M_i} \int_{L_{ij}} \left(\frac{\partial W_i}{\partial n_{ij}} \delta - W_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds, i=1,2,\dots,M.$$

Просуммируем теперь эти соотношения по i от 1 до M :

$$\sum_{i=1}^M P_i(x_0, y_0) U_i(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^M P_i(x_0, y_0) W_i(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i} \int_{L_{ij}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial n_{ij}} \delta - U_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds - \\ - \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i} \int_{L_{ij}} \left(\frac{\partial W_i}{\partial n_{ij}} \delta - W_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) ds. \quad (6)$$

В этом выражении суммирование по внутренним границам между подобластями D_i и D_j производится дважды – по L_{ij} и L_{ji} . Объединим эти интегралы, при этом условимся оставлять в (6) контуры, для которых $j < i$, т.е. второй индекс меньше первого. Подмножество номеров $j > 0$ множества M_i , удовлетворяющих этому требованию, обозначим через M_i^* . Заметим ещё, что на L_{ij} выполняется равенство $\frac{\partial}{\partial n_{ij}} = -\frac{\partial}{\partial n_{ji}}$. С учётом этого и

условий (2), (3) соотношение (6) преобразуем к виду

$$\sum_{i=1}^M P_i(x_0, y_0) U_i(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^M P_i(x_0, y_0) G_i W(x_0, y_0) - \sum_{i=1}^M \int_{L_{i0}} G_i V \delta \, ds - \\ - \sum_{i=1}^M c_i \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}} \, ds + \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i^*} (G_j - G_i) \int_{L_{ij}} V \delta \, ds - \sum_{i=1}^M G_i \int_{L_{i0}} \left(\frac{\partial W}{\partial n_{ij}} \delta - W \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) \, ds - \\ - \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i^*} (G_i - G_j) \int_{L_{ij}} \left(\frac{\partial W}{\partial n_{ij}} \delta - W \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) \, ds. \quad (7)$$

Здесь $V = -\frac{1}{G_i} \frac{\partial U_i}{\partial n_{ij}}$, $W_i = G_i W$, $W = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Если точка (x_0, y_0) – внутренняя точка подобласти D_i , то

$$\sum_{i=1}^M P_i(x_0, y_0) U_i(x_0, y_0) = 2\pi U_k(x_0, y_0), \quad \sum_{i=1}^M P_i(x_0, y_0) W_i(x_0, y_0) = 2\pi G_k W(x_0, y_0).$$

В соотношение (7) входят интегралы только по внешним и внутренним границам области D . Возьмём в (7) точку (x_0, y_0) на границе области, тогда (7) будет являться граничным интегральным уравнением относительно функции $V(x, y)$, способ численного решения которого подробно изложен в [2]. Зная функцию V , можно найти касательное напряжение на внешних и внутренних границах области. Для нахождения напряжений во внутренних точках необходимо продифференцировать выражение (7) по x_0 и y_0 , что не вызывает принципиальных трудностей.

Для жёсткости C при кручении составного стержня имеет место формула

$$C = 2 \iint_D U(x, y) dx dy = -2 \sum_{i=1}^M G_i \iint_{D_i} f \, dx dy + \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i^*} (G_i - G_j) \int_{L_{ij}} V f \, ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^M G_i \int_{L_{i0}} Vf \, ds + \sum_{i=1}^l c_i \int_{\Gamma_i} \frac{\partial f}{\partial n_{ij}} \, ds,$$

где $f = \frac{1}{2}x^2$ и интеграл по области D_i от $f(x)$ может быть сведён к интегралу по границе D_i согласно [4]. Таким образом, жёсткость зависит только от функции $V(x, y)$ на внешних и внутренних границах области D .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
2. Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.
3. Вабищевич П.Н. Задачи упругого кручения цилиндрических стержней // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 63 – 72.
4. Михайлов В.Н. Автоматизация вычисления интегралов по плоским областям на ЭВМ // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. Вып. 9. С. 109 – 112.

УДК 551.5: 633.11

А. Л. Брежнев, И. А. Чернов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЯТНА ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПО СКЛОНОУ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ В ПОЧВУ

Предложена математическая модель, описывающая движение жидкой массы по наклонной поверхности с учётом фильтрации её в почву, что представляет интерес при расчёте экологического риска в аварийных ситуациях.

1. Пусть на горизонтальной плоскости при $t=0$ налит слой жидкости высотой Q . С течением времени за счёт фильтрации толщина слоя $H(t)$ начнет убывать. Рассмотрим сначала пропитку водонасыщенного грунта. Предположим, что вытеснение полное и поршневое, вязкости вытесняющей и вытесняемой жидкостей одинаковы. Если вести отсчёт от гидростатического распределения, то задача формулируется следующим образом:

$$p(z, t) = p_0 + \frac{1}{\beta} \ln(1 + \gamma \beta z) + u(z, t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$u(z, 0) = 0, u(\infty, t) = 0, u(0, t) = \gamma H(t), H(0) = Q.$$

Здесь β – коэффициент объёмной упругости жидкости, $\gamma = \rho g$ – удельный вес жидкости, κ – коэффициент пьезопроводности.

Решение записывается в виде теплового потенциала двойного слоя

$$u(z,t) = \gamma Q \operatorname{erfc}(z/(2\sqrt{\kappa t})) + \gamma \int_0^t H(\tau) \operatorname{erfc}(z/(2\sqrt{\kappa(t-\tau)})) d\tau.$$

Для нахождения закона падения уровня используем уравнение

$$\frac{dH}{dt} = \frac{k}{\rho g} \frac{\partial u(0,t)}{\partial z},$$

где k – коэффициент фильтрации.

Используя преобразование Лапласа, найдём

$$H(t) = Q \exp(k^2 t / \kappa) \operatorname{erfc}(k \sqrt{t / \kappa}).$$

Предположим, что грунт сухой. Обозначим h_k – высоту капиллярного поднятия, m – порозность грунта. Считая движение одномерным, обозначим $H(t)$ – высоту слоя жидкости над поверхностью грунта, $y_0(t)$ – глубину зоны промачивания.

Связь между этими величинами даётся формулой

$$H(t) + m y_0(t) = Q.$$

Используя это соотношение и закон Дарси, можно вывести дифференциальное уравнение, описывающее уменьшение высоты слоя жидкости $H(t)$ с течением времени [1],

$$\frac{dH}{dt} = k \frac{(1-m)H - hm_k - Q}{Q - H}. \quad (1)$$

Уравнение (1) имеет точное решение

$$t = \frac{1}{k(1-m)} \left[Q - H - \frac{(Q+h_k)m}{1-m} \ln \frac{Q+h_k m + (m-1)H}{(Q+h_k)m} \right]. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение (1) и его решение (2) имеют особенность в начальный момент времени при $t=0$, когда $Q=H$. Из формулы (2) можно найти разложение высоты $H(t)$ при малых значениях времени t

$$H = Q + A\sqrt{t} + O(t). \quad (3)$$

Тогда, дифференцируя (3), найдём скорость опускания слоя жидкости при малых t

$$\frac{dH}{dt} = \frac{A}{2\sqrt{t}} + O(1). \quad (4)$$

2. Пусть произошёл внезапный налив массы M жидкости на поверхность грунта. Сначала произойдёт растекание жидкости и образуется пятно, которое будем считать цилиндром высотой H и площадью S .

Рассмотрим движение этого цилиндрического пятна жидкости по наклонной пористой поверхности после внезапного налива. Будем считать, что форма пятна в плане не изменяется, и оно поступательно движется вниз по склону, при этом толщина пятна уменьшается вследствие фильтрации в грунт. Для описания этого движения воспользуемся уравнением Мещерского динамики точки переменной массы

$$\frac{d}{dt}(Mv) = \sum F_i. \quad (5)$$

где M – масса слоя, v – скорость, F_i – действующие силы.

Массу слоя представим в виде

$$M = \rho S H(t),$$

где ρ – плотность, S – площадь пятна, $H(t)$ – высота слоя.

Примем во внимание силу тяжести

$$P = Mg = \rho S H(t)g$$

и силу сопротивления движению пятна

$$F_c = k_c \rho S v,$$

обусловленную касательными напряжениями при скольжении слоя жидкости по неподвижной поверхности, закон сопротивления считаем линейным. Тогда, подставляя в уравнение (5) выражение массы и действующих сил, получим после преобразований дифференциальное уравнение в проекции на ось x

$$\frac{d}{dt}(Hv) = Hg \sin \alpha - k_c v,$$

где α – угол наклона поверхности к горизонту.

Отсюда получаем дифференциальное уравнение для скорости

$$H \frac{dv}{dt} = Hg \sin \alpha - k_c v - v \frac{dH}{dt}, \text{ где } \frac{dx}{dt} = v. \quad (6)$$

Законы изменения $H(t)$ были указаны выше для водонасыщенного и сухого грунта. Пусть движение пятна происходит по сухому грунту (формула (2)).

Уравнение (6) будем интегрировать численно, для этого необходимо отступить от особой точки при $t = 0$. Используя разложения (3), (4), аппроксимируем уравнение (6) при малых t

$$Q \frac{dv}{dt} = Qg \sin \alpha - k_c v - v \frac{A}{2\sqrt{t}}.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$v = g t \sin \alpha + C \exp((-k_c t - A \sqrt{t})/Q). \quad (7)$$

При $t = 0$ считаем пятно неподвижным ($v = 0$), отсюда находим значение постоянной интегрирования $C = 0$. Тогда в начальный промежуток времени получаем выражение для скорости v и перемещения x

$$v = g t \sin \alpha, \quad x = g t^2 \sin \alpha / 2, \quad (8)$$

откуда видно, что движение пятна начинается под действием силы тяжести.

Для численного интегрирования системы уравнений (6), (7) выберем следующие значения параметров: коэффициент фильтрации $k = 0.001 \text{ м/с}$, высота капиллярного поднятия $h_k = 0$, порозность $m = 0.5$, уклон $\sin \alpha = 0.1$, коэффициент сопротивления $k_c = 0.1$. Зададим высоту слоя $Q = 0.12 \text{ м}$ и

$H_{\text{нач}}=0.11$ м. Тогда из (2) найдём, что уменьшение слоя с высоты 0.12 м до 0.11 м произойдёт за время $t_{\text{нач}}=0.78$ с при этом из (6) получим скорость $v_{\text{нач}}=0.77$ м/с и перемещение $x_{\text{нач}}=0.31$ м. Используя эти данные как начальные условия, интегрируем систему (6), (7) численно до момента исчезновения слоя. Получаем, что перемещение пятна составит 32.4 м за время 71 с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гос.изд-во тех.-теорет. лит., 1952.

УДК 533.6.011:532.529

Е. Н. Гамаюнова

УДАРНО-ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ И ПОТОКИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ УДАРНЫХ ВОЛН

Проблема аналитического исследования ударно-волновых структур и потоков за ними при различных режимах нерегулярных и регулярных взаимодействий относительно слабых (интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0$, $P_{20} = (p_2 - p_0)/B_0$, $B_0 = \rho_0 c_0^2$) ударных волн (УВ) (с углом наклона α к вертикали) в газе и газожидкостной среде, характеризуемой параметром $R_0(\gamma)$, вызывает неизменный интерес исследователей.

Анализ общей постановки задачи взаимодействия УВ [1] сводится к построению во внутренних переменных $X, Y (\delta, Y)$ решения краевой задачи для компонент скорости μ, v системы уравнений коротких волн

$$\begin{aligned} 2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_Y + \mu &= 0, \quad \mu_Y = v_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)}, \\ R/c_0 t &= 1 + P_{10}R_0(\gamma)\delta, \quad \theta = P_{10}^{1/2}R_0^{1/2}(\gamma)Y, \quad \delta = X + \frac{1}{2}Y^2, \\ \frac{u}{c_0} &= P_{10}\mu, \quad \frac{v}{c_0} = P_{10}^{3/2}R_0^{1/2}(\gamma)v, \quad \frac{P - P_0}{B_0} = P_{10}P^{(1)}, \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = P_{10}H^{(1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющей на фронтах УВ (рис. 1) $\delta = \delta^*(Y)$ (A_1A_2 – Маха, $q_n = 0$; A_1B_1 – отражённого, $q_n = 1$; A_2B_2 – отражённого, $q_n = \eta$) условиям

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\delta^*}{dY} \right)^2 &= 2\delta - \mu - \mu_1, \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta^*}{dY} = v - v_1, \quad \mu = P^{(1)} = H, \\ \mu_1 &= q_n, \quad v_1 = -q_n(Y \pm \alpha^v), \quad \alpha^v = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{P_{10}^{1/2}R_0^{1/2}(\gamma)}, \quad \eta = \frac{P_{10}}{P_{20}} \end{aligned} \quad (2)$$

и асимптотическим условиям сращивания на границах с областями линейного (акустического) и квазидномерного решения (за отражёнными фронтами). α^v , η – параметры подобия задачи.

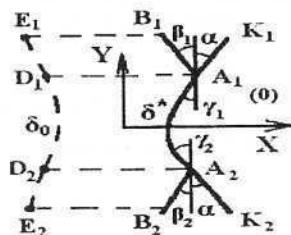


Рис. 1

Для описания течений в области возмущения за фронтами ударных волн используется класс точных параметрических решений (q – параметр) системы (1)

$$\begin{aligned}\mu &= \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q), \quad \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q) \\ v &= \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q),\end{aligned}\quad (3)$$

удовлетворяющий точно условиям (2) при $q = q^* = const$ ($q^* = q_0$ на фронте Maxa; $q^* = q_1$, $q^* = q_2$ на отражённых фронах).

Для построения полей давления и скоростей будем рассматривать условия динамической совместимости (2) на фронах ударных волн A_1A_2 , A_1B_1 , A_2B_2 и решения системы коротких волн, точно удовлетворяющие условиям ударного перехода, предложенные Б. И. Заславским (3). Подставляя (3) в систему уравнений коротких волн, переходя от переменных (δ, Y) к (q, Y) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Y , получим систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $\varphi_2(q_k)..\chi_0(q_k)$, которая после приведения к виду, разрешённому относительно производных, и решения с помощью программы аналитических вычислений "REDUS", имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi'_2 &= \frac{4\varphi_2q - \varphi_2 - 3\psi_3}{2f_0}, \quad \varphi'_1 = \frac{2\chi_1\varphi_2 + 2\varphi_1q - \varphi_1 - 2\psi_2}{2f_0}, \quad \varphi'_0 = \frac{\chi_1\varphi_1 - \varphi_0 - \psi_1}{2f_0}, \\ \chi'_0 &= \frac{-2\chi_0 + \chi_1^2 + 2\varphi_0}{2f_0}, \quad \chi'_1 = \frac{-2\chi_1q - \chi_1 + \varphi_1}{2f_0}, \quad \psi'_3 = \frac{2\varphi_2^2 - \varphi_2q + 3\psi_3q}{f_0}, \\ \psi'_2 &= \frac{-3\chi_1\varphi_2 + 3\chi_1\psi_3 + 6\varphi_1\varphi_2 + 4\psi_2q}{2f_0}, \quad \psi'_0 = \frac{-2\chi_0\varphi_1 + \chi_1\varphi_0 + \chi_1\psi_1 + 2\varphi_0\varphi_1}{2f_0},\end{aligned}\quad (4)$$

$$\psi'_1 = \frac{-4\chi_0\varphi_2 - \chi_1\varphi_1 + 2\chi_1\psi_2 + 4\varphi_0\varphi_2 + 2\varphi_0q + 2\varphi_1^2 + 2\psi_1q}{2f_0},$$

где $f_0 = \varphi_2 + 2q^2 - q$.

Начальные условия для интегрирования получаются непосредственно из подстановки точного решения Заславского (3) в условия динамической совместности (2) на фронте, предполагая, что фронтам ударных волн соответствуют значения $q = q^* = const$. После преобразований окончательно получим

$$\begin{aligned}\varphi_2(q^*) &= 2q^*(1-2q^*), \quad \varphi_1(q^*) = 2(1-2q^*)\chi_1(q^*), \\ \varphi_0(q^*) &= 2\chi_0(q^*) - \chi_1^2(q^*) - \bar{q}^*, \\ \psi_3(q^*) &= -4q^{*2}(1-2q^*), \quad \psi_2(q^*) = -6q^*(1-2q^*)\chi_1(q^*), \\ \psi_1(q^*) &= 2(3q^*-1)\chi_1^2(q^*) - 4q^*\chi_0(q^*) + (4q^*-1)\bar{q}^*, \\ \psi_0(q^*) &= -2\chi_0(q^*)\chi_1(q^*) + \chi_1^3(q^*) + \bar{q}^*(2\chi_1(q^*) \mp \alpha^\nu).\end{aligned}\quad (5)$$

Анализ решения вблизи фронта Маха показал, что уравнения имеют устранимую особенность $f_0 = 0$ при $q^* = -B$, $B = const$, которая исключается введением новой переменной p

$$p^2 = S(q + B), \quad S = sign(q + B).$$

Для отражённых фронтов введение новой переменной не требуется.

На рис. 2, 3 построены поля давлений (плотностей и продольной составляющей скорости) и ударные конфигурации по результатам интегрирования системы (4) при соответствующих условиях (5) на фронтах ударных волн для случаев $\eta = 0.5$, $\alpha^\nu = 1$ (см. рис. 2) и $\eta = 0.5$, $\alpha^\nu = 1.5$ (см. рис. 3).

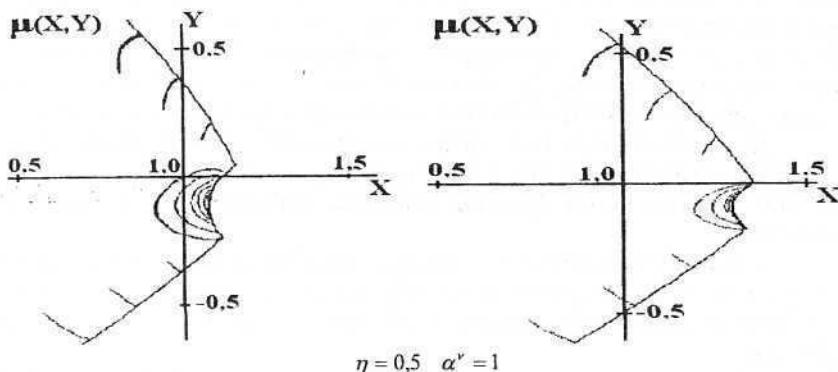


Рис. 2

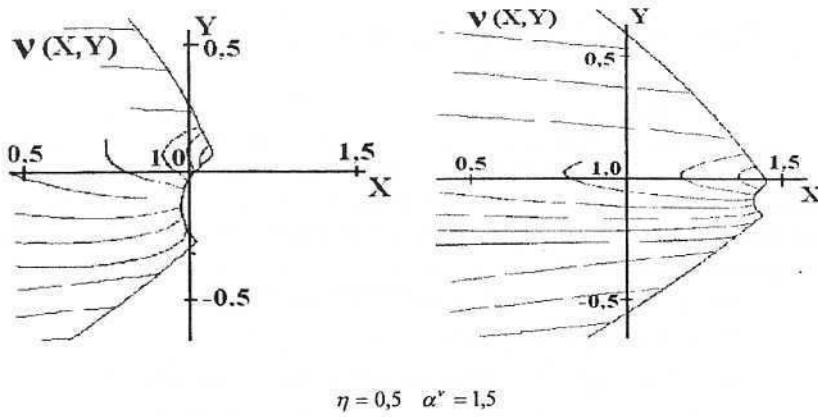


Рис. 3

Картинны течений характеризуют области больших градиентов параметров за фронтами УВ, отражают особенности развития ударно-волновых структур.

УДК 519.63:533

М. М. Карташов, В. В. Ридель

СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ МЕТОДА ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

В настоящее время широко используются численные методы для нахождения решения краевых задач с системами нелинейных уравнений в частных производных. К ним относятся многие задачи математической физики и механики сплошной среды. Необходимость применения численных методов обусловлена нелинейностью систем дифференциальных уравнений, большими градиентами полей, характеризующих решения.

Для решения этих задач можно использовать разные варианты метода взвешенных невязок [1], в том числе: 1) метод конечных разностей; 2) спектральный метод; 3) метод конечных объёмов; 4) метод конечных элементов.

В статье рассматриваются некоторые особенности применения этих методов в случае решения задач обтекания тел конечных размеров и возможный способ обеспечения необходимых для численных методов качеств.

1. Постановка задачи. Пусть имеется определённый в области D (замкнутое подмножество пространства $\{R^2, t\}$) с границей \bar{D} и гранич-

ными условиями $F(u)=0$ некоторый дифференциальный оператор для функции $u=u(x, y, t)$:

$$\bar{L}(u)=0, \quad (1)$$

тогда аппроксимирующий его дифференциальный оператор

$$L(u)=R_a, \quad (2)$$

где R_a – невязка, представляющая собой ошибку аппроксимации. Будем предполагать, что приближённое решение можно искать в виде

$$T(x, y, t)=a_{20}(t)x^2+a_{11}(t)xy+a_{02}(t)y^2+a_{10}(t)x+a_{01}(t)y+a_{00}(t), \quad (3)$$

где $a_n(t)$ – зависящие от времени коэффициенты, подлежащие определению. Далее, $R=L(T(x, y, t))$ – невязка от подстановки приближённого решения в аппроксимирующий дифференциальный оператор L .

Сформулируем вариационную задачу для нахождения решения: потребуем, чтобы функционал, характеризующий отклонение приближённого решения от точного во всей области искомого решения D , был равен нулю:

$$\int_D W_n R dD = 0, \quad (4)$$

где W_n – некоторые весовые функции, определяющие вариант метода взвешенных невязок.

Выпишем их для метода конечных объёмов (МКО) и метода с минимизацией квадрата невязки (ММКВ) соответственно:

$$W_n = 1, \quad W_n = \frac{\partial R}{\partial a_n}. \quad (5)$$

В первом случае мы получаем систему уравнений одного порядка с исходной системой дифференциальных уравнений. Во втором случае количество уравнений в системе возрастает в n раз, т.е. она замкнута и имеет порядок аппроксимации выше нулевого. Это отличие позволило предложить возможность комбинирования указанных двух методов для одновременного достижения их нужных качеств (в частности, консервативности).

2. Применение методов. Рассмотрим применение этих методов на примере уравнений движения сплошной среды:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} - \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{P}}) &= 0, \\ \frac{d(\rho E)}{dt} - \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{P}}) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где ρ – плотность, \mathbf{u} – вектор скорости, E – полная энергия, $\tilde{\mathbf{P}}$ – тензор внутренних напряжений. Если применить к этой системе МКО, то получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\sigma} \rho \mathbf{u} \cdot d\sigma &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_{\sigma} \rho (\mathbf{u})^2 \cdot d\sigma + \int_{\sigma} \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\sigma &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \int_{\sigma} \rho \mathbf{E} \mathbf{u} \cdot d\sigma + \int_{\sigma} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Эта система представляет собой формулировку интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. Её можно численно решать при условии, что искомые функции заменяются аппроксимациями нулевого порядка. Так как в этом случае она замкнута.

После применения ММКВ мы получим систему следующего вида:

$$\int_D \frac{\partial R_k}{\partial a_n} R_k dD = 0, \quad (8)$$

где R_k – k -е скалярное уравнение исходной системы после подстановки приближённого решения для ρ , \mathbf{u} , E ; a_n – n -й коэффициент аппроксимации для искомых функций. Так как всего скалярных функций, определяющих решение, – пять, а для биквадратичной аппроксимации необходимо шесть коэффициентов, всего коэффициентов – тридцать. Несложно подсчитать, что и уравнений тридцать. Итак, имеем замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений линейных относительно производных по времени от определяемых коэффициентов. После интегрирования по пространству решаем дифференциальную задачу для коэффициентов, например методом Эйлера.

При использовании МКО и уравнений механики сплошных сред этот метод обеспечивает консервативную схему для численного решения, что немаловажно для получения сходящегося решения. Как известно [2], в случае ММКВ решение получается с меньшими машинными затратами и более высокой точностью, но численная схема для этого метода не консервативна.

3. Модификация метода. Для того чтобы полученная система ММКВ (8) определяла консервативную схему, нужно первые пять уравнений системы заменить на уравнения из МКО (7). Таким образом, мы получим замкнутую консервативную систему из тридцати уравнений, которые решаются как в ММКВ. Данному методу уже не присущ такой недостаток, как неконсервативность. Рассмотренный подход легко реализуем в рамках уже существующего ПО на базе МКО и ММКВ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. / Пер. с англ. М.: Мир, 1991. Т. 1.
2. Численные методы в динамике жидкостей / Пер. с англ. / Под ред. О.М. Белоцерковского, В.П. Шидловского. М.: Мир, 1981.

УДК 539.9

Л. Ю. Коссович, А. Н. Кушеккалиев

ПОЛЕ РЕЛЕЯ В БЕСКОНЕЧНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

Рассмотрим нестационарное напряжённо-деформированное состояние (НДС) полосы, зависящее от продольной координаты $-\infty < x < \infty$, нормальной координаты $-h \leq z \leq h$ (h – полутолщина слоя) и времени t . Предположим, что на её поверхностях $z=\pm h$ действуют сосредоточенные силы. Если мы обозначим напряжения через σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), то следующие граничные условия на лицевых поверхностях соответствуют этой нагрузке:

$$\sigma_{33} = IH(\tau_2)\delta(\xi_h), \quad \sigma_{13} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1. \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения: ξ_h , ζ , τ_2 – безразмерные координаты и время ($\xi_h = x/h$, $\zeta = z/h$, $\tau_2 = tc_2/h$); $H(\tau_2)$ – функция Хевисайда; $\delta(\xi_h)$ – функция Дирака; I – амплитуда нагрузки; v_i – перемещения ($i = 1, 3$); c_2 – скорость распространения волны сдвига.

Рассматриваем только однородные начальные условия. Мы также ограничим себя случаем, когда расстояние, пройденное фронтом, соизмеримо с характерным значением длины L ($L \gg h$).

Формальное решение уравнений движения для линейной теории упругости получено с помощью двойного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Формула точного решения для изображения перерезывающего усилия имеет вид

$$N_1^{LF} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Ihi\chi\gamma^2}{sD_a} \left[\frac{sh\alpha}{\alpha} ch\beta - ch\alpha \frac{sh\beta}{\beta} \right], \quad (2)$$

где $D_a = \gamma^4 \frac{sh\alpha}{\alpha} ch\beta - \beta^2 \chi^2 ch\alpha \frac{sh\beta}{\beta}$, $\alpha^2 = \chi^2 + \kappa^2 s^2$, $\beta^2 = \chi^2 + s^2$,

$\gamma^2 = \chi^2 + \frac{1}{2}s^2$, $\kappa = c_2/c_1$, s – параметр преобразования Лапласа, χ – параметр преобразования Фурье.

Обратим сначала по теореме о вычетах преобразование Лапласа, а затем преобразование Фурье. Рассматриваем решение при $\xi_h > 0$ и точки

стационарной фазы первой моды при $\chi \rightarrow \infty$, т.е. область решения для поля Релея. Здесь имеет место одна из самых существенных составляющих решения – волновая составляющая, обусловленная поверхностными волнами Релея и носящая название поля Релея. Показатели изменяемости и динамичности здесь равны единице. Хорошо известно, что в случае теории типа Тимошенко разрывы соответствующих функций появляются на условном фронте поверхностных волн Релея. Фронт волны сдвига по теории типа Тимошенко, соответствующий фронту волны Релея, является фактически квазифронтом. В его окрестности трёхмерное решение хотя и быстро изменяется, но является непрерывным. В районе фронта поверхностных волн Релея при достаточно больших t напряжённое состояние имеет тенденцию распадаться на быстро и медленно изменяющиеся компоненты.

Воспользуемся асимптотикой для $\omega_1(\chi)$ при $\chi \gg 1$:

$$\omega_1(\chi) = k_R \chi - B \chi \exp(-k_R \chi), \quad (3)$$

$$\text{где } k_R = \frac{c_R}{c_2} < 1, \quad k = 2\sqrt{1 - k_R^2}, \quad B = \frac{2}{\frac{k_R}{1 - k_R^2} + \frac{\kappa^2 k_R}{1 - \kappa^2 k_R^2} - \frac{4k_R}{2 - k_R^2}},$$

c_R – скорость поверхностных волн Релея.

Стационарные точки фазы определяются асимптотикой

$$\chi_s = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{1}{\mu} \right) + \frac{1}{k} \ln \left(\ln \left(\frac{1}{\mu} \right) \right), \quad (4)$$

$$\text{где } \mu = \frac{\xi_0 - k_R k_c \tau_0}{B k_c \tau_0}.$$

Асимптотика функции $F(\chi)$ при $\chi \gg 1$ записывается в форме

$$F(\chi) = -\frac{B k_R^3}{4\pi (2 - k_R^2)(1 - k_R^2) \chi}. \quad (5)$$

Использование формулы метода перевала первого порядка приближения с учётом асимптотики (5) даёт при $\xi_0 - k_R k_c \tau_0 \ll k_c \tau_0$ следующее приближение:

$$N_1 = 2Ih \frac{C\eta^{1/2}}{\pi^{1/2} k^{1/2}} \frac{\cos(\Omega_1) + \sin(\Omega_1)}{\chi_s (\xi_0 - k_R k_c \tau_0)^{1/2}}, \quad (6)$$

$$\text{где } \Omega_1 = \frac{1 + \ln \left(\frac{1}{\mu} \right) \chi_s (\xi_0 - k_R k_c \tau_0)}{\ln \left(\frac{1}{\mu} \right)}.$$

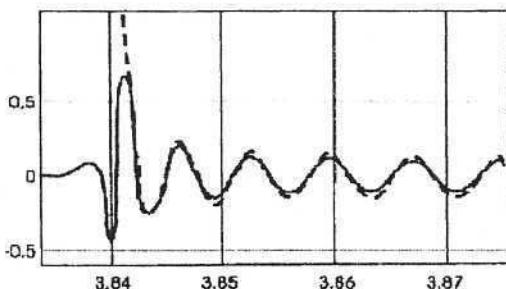
На фронте волны Релея решение (6) даёт разрыв, что противоречит трёхмерной теории упругости.

После обращение преобразования Лапласа с учётом асимптотики подинтегральной функции приведём к виду

$$N_1 = -2 \int_0^{\infty} F(\chi) \sin\left(\frac{\chi}{\eta} \left[(k_R k_c \tau_0 - \xi_0) - B k_c \tau_0 e^{-k\chi} \right]\right) d\chi, \quad (7)$$

где $F(\chi)$ определяется выражением (5).

На рисунке представлено поведение перерезывающего усилия в окрестности фронта Релея при $v = 0.3$, $k_R^2 = 0.86$, $\eta = 0.01$, $\tau_0 = 7$.



Сплошной линией на рисунке представлено решение, полученное по формуле (7), пунктирной линией – решение по формуле (6). Приближённые вычисление интеграла (7) наглядно продемонстрировали, как сглаживается на квазифронте разрыв решения по формуле (6).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айнола Л.Я., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. № 1. С. 3 – 63.
2. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986.
3. Петрашень Г.И. Двухмерная задача Лэмба для бесконечного упругого слоя, ограниченного параллельными плоскостями // ДАН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 783 - 786.
4. Kaplunov J.D., Kossovitch L.Y., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. N. Y.: Academic Press, 1998.

АНАЛИЗ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР И ПОТОКОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН

1. Рассматривается взаимодействие плоской (падающей) ударной волны BR интенсивности $\varepsilon = P_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$ со свободной поверхностью ОВ, которая разделяет две газожидкостные смеси (ГЖС) с давлением p_0 и массовыми газосодержаниями γ^+ сверху и γ^- снизу от ОВ (рис. 1). Свободная поверхность имеет угол α с направлением распространения волны. В верхней части картины возникает преломленный фронт BT, распространяющийся под некоторым углом β .

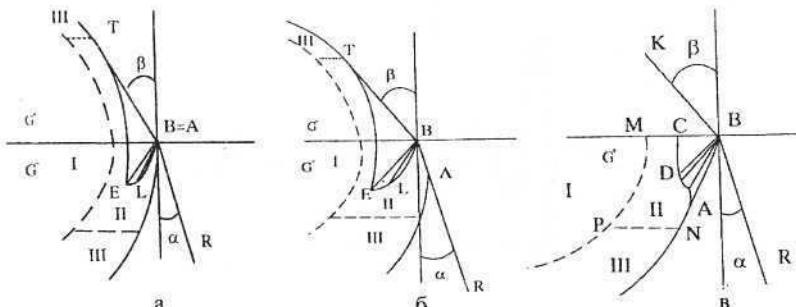


Рис. 1

При этом возможны следующие виды взаимодействия: регулярное (рис. 1, а), нерегулярное (рис. 1, б), с ударной волной, замыкающей зону разряжения (рис. 1, в). Картина характеризуется областями возмущения G^+ и G^- , для которых ставится краевая задача.

Уравнения движения ГЖС в автомодельных переменных $\xi = x/c_0 t$, $\eta = y/c_0 t$ имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}
 & (u - c_0 \xi) \frac{\partial p}{\partial \xi} + (v - c_0 \xi) \frac{\partial p}{\partial \eta} + p \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0, \\
 & (u - c_0 \xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (v - c_0 \xi) \frac{\partial u}{\partial \eta} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi}, \\
 & (u - c_0 \xi) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (v - c_0 \xi) \frac{\partial v}{\partial \eta} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \\
 & (u - c_0 \xi) \frac{\partial s}{\partial \xi} + (v - c_0 \xi) \frac{\partial s}{\partial \eta} = 0, \quad dp = c^2 d\rho + Ads, \quad \gamma = \text{const}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

На фронтах ударных волн BR, BA, DA имеем условия динамической совместности [1].

На линиях слабого разрыва BS, ET, BLE, где параметры непрерывны, имеем условия:

$$u=u_1, v=v_1, \rho=\rho_1, p=p_1, \text{ т. е. } P=0. \quad (2)$$

На свободной поверхности ОВ $\eta=\eta(\xi)$ или $F(\xi, \eta)=0$:

$$u_n^{(+)}=u_n^{(-)}=u_n, p^{(+)}=p^{(-)}. \quad (3)$$

Условия на границе с простой волнной разряжения BLEB имеют вид

$$u=u(Z), \quad v=v(Z), \quad Z=\frac{y-y_B}{x-x_B}=\frac{\eta-\eta_B}{\xi-\xi_B}, \quad (4)$$

берутся на "звуковую" линии решения $(u-c_0\xi)^2+(v-c_0\eta)^2=c^2$.

2. При асимптотическом анализе поставленной задачи при малых интенсивностях инициирующей волны P_{10} в областях возмущения для нахождения решения системы

$$\begin{cases} 2(\mu-\delta)\mu_\delta + v_y + \mu = 0, \\ \mu_y = v_\delta \end{cases} \quad (5)$$

имеем краевую задачу, удовлетворяющую условиям на фронтах ударных волн

$$\left(\frac{d\delta^*}{dY}\right)^2 = 2\delta^* - (\mu + \mu_1), \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta^*}{dY} = v_1 - v, \quad P^{*(1)} = \mu, \quad (6)$$

на линиях слабого разрыва

$$\delta'(Y) = \delta_0^- = 1, \quad \mu = \mu_1 = \delta_0^+ = 1, \quad v = v_1 = -(Y - \alpha^v). \quad (7)$$

Решение, описывающее волну разряжения, представлено асимптотически [1].

При анализе задачи удобно ввести параметры подобия

$$\alpha^v = \frac{\alpha}{P_{10}^{1/2} R_0^{-1/2}}, \quad c_\gamma = \frac{c_0^- - c_0^+}{c_0^- R_0^- P_{10}}, \quad q^- = \frac{p^- - p_0}{p_1 - p_0} = 1, \quad (8)$$

где индексы - и + относятся к параметрам на характеристиках c^- и c^+ соответственно.

$$\text{Искомыми величинами являются } q^+ = \frac{p^+ - p_0}{p_1 - p_0}; \quad \beta^v = \frac{\beta}{P_{10}^{1/2} R_0^{-1/2}}.$$

Регулярная рефракция. Скорость движения точки В на фронтах BR, BT вдоль оси ОХ есть (N^+, N^- – скорости распространения ударных волн)

$$N^+ \cos \alpha = N^- \cos \beta, \quad (9)$$

то есть имеем

$$\frac{c_0^- - c_0^+}{R_0^- c_0^- P_{10}} = \frac{c_0^+}{c_0^-} \left(\frac{R_0^+ B_0^-}{R_0^- B_0^+} q^+ - \frac{1}{2} \alpha^{v2} \right) - (q^- - \frac{1}{2} \beta^{v2}). \quad (10)$$

Отсюда при c_γ порядка 1 имеем

$$\beta^{v2} - \alpha^{v2} = q^- - q^+ + 2c_\gamma. \quad (11)$$

При существенно различных c_0^+ и c_0^- , когда c_γ порядка $1/P_{10}$ имеем

$$\cos\beta = (N^+/N^-) \cos\alpha = c_0^+ / c_0^- . \quad (12)$$

При конечных значениях угла β получаем β^ν порядка $1/P_{10}^{1/2}$.

Из анализа течения в волне разряжения следует

$$q^+ \beta^\nu = q^- \alpha^\nu + \frac{1}{3} \{ [2(\delta_B - q^+)]^{3/2} - [2(\delta_B - q^-)]^{3/2} \} . \quad (13)$$

Исключая β^ν из (11) и (13), окончательно получим

$$2c_\gamma = \frac{\{q^- \alpha^\nu + (1/3)[(\alpha^\nu)^2 + q^- - 2q^+]^{3/2} - (\alpha^\nu)^2 - q^-]^{3/2}\}^2}{q^{+2}} - \alpha^\nu - q^- + q^+ . \quad (14)$$

Выражения (13), (14) используются для нахождения q^+ , β^ν .

Нерегулярная рефракция. Фронт I отходит от свободной поверхности, вблизи которой возникает искривленный фронт Маха ВА, касательная к ВА в точке В имеет угол δ ; $\delta^\nu = \frac{\delta}{R_0^{1/2} P_{10}^{1/2}}$, $\delta^\nu = \sqrt{2\delta_B - \mu_B} = \delta_B^{1/2}$.

Отсюда, аналогично регулярному случаю, имеем при c_γ порядка 1:

$$\beta^{\nu 2} - \delta^{\nu 2} = q^- - q^+ + 2c_\gamma \text{ или } \beta^{\nu 2} = 2\delta_B - q^+ + 2c_\gamma . \quad (15)$$

При существенно различных c_0^+ и c_0^- , когда c_γ порядка $1/P_{10}$, будем иметь

$$\cos\beta = (N^+/N^-) \cos\delta = c_0^- / c_0^+ . \quad (16)$$

При конечных углах β , имеем β^ν порядка $1/P_{10}^{1/2}$.

Из анализа течения в волне разряжения следует

$$q^+ \beta^\nu = v_0^- + [2(\delta_B - q^+)]^{3/2} / 3, \quad d = v_0^- . \quad (17)$$

Исключая β^ν из (15) и (17), получим окончательное уравнение

$$2c_\gamma = [v_0^- + \frac{1}{3} [2(\delta_B - q^+)]^{3/2}]^2 / q^{+2} + q^+ - 2\delta_B . \quad (18)$$

Здесь согласно [1] удобно ввести зависимость $\delta_B = \delta_B(\alpha^\nu)$.

Выражения (17), (18) используются для нахождения q^+ , β^ν .

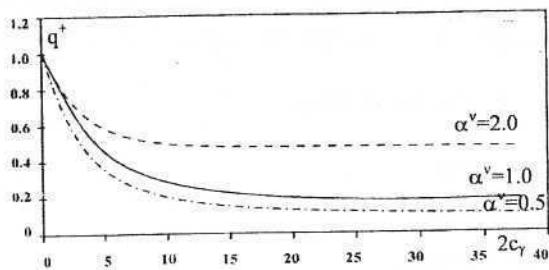


Рис. 2

На рис. 2 представлена зависимость

$$q^+ = q^+(c_\gamma, \alpha^\nu),$$

соответствующая следующим режимам:
регулярному,
нерегулярному
и переходному ($\alpha^\nu = 1$).

На рис. 3 изображены границы следующих областей в плоскости (α, ε) :

- нерегулярной B ,
- регулярной A ,
- регулярной с ударной волной,
- замыкающей зону разряжения A' ,

при различных газосодержаниях смеси γ в области G в случаях вырождения преломленной ударной волны, то есть когда $\gamma^+ = 0$.

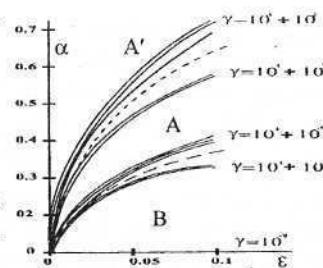


Рис. 3

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.Шиндягин Г.П., Ковалев А.Д. Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред. Саратов, 1990. Ч. 2.

УДК 539.3

Я. А. Парфёнова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ*

Рассматривается задача о распространении изгибных волн, возникающих в составных цилиндрических оболочках при ударном осесимметричном воздействии на торец. Составная оболочка представляет собой конструкцию, состоящую из двух упругих тонкостенных цилиндров различной толщины с общей срединной поверхностью. Второй цилиндр считается полубесконечным (рисунок).

Элементы оболочки выполнены из трансверсально-изотропных материалов, причём направление трансверсальной изотропии совпадает с осью конструкции и перпендикулярно торцу, к которому приложена нагрузка.

После попадания фронта падающей волны, порождённой приложением нагрузки на торец, на стык элементов оболочки возникает отражённая волна в первой части конструкции и прошедшая во второй. В

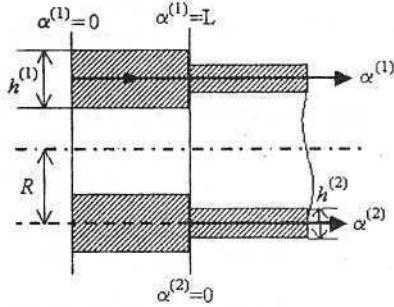


Схема составной цилиндрической оболочки

* Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант YSF 01/1-19).

статье для рассматриваемого нестационарного напряжённо-деформированного состояния (НДС) в рамках моментной составляющей теории Кирхгофа-Лява поставлена краевая задача и изложен ход её решения.

Для элементов оболочки введём координатные линии $\alpha^{(i)}$, где $\alpha^{(i)}$ – длина образующей (здесь и далее $i=1,2$). Левому торцу конструкции соответствует $\alpha^{(1)}=0$, стыку её элементов $\alpha^{(1)}=L$ ($\alpha^{(2)}=0$). Для геометрических и механических параметров приняты следующие обозначения: $v^{(i)}$ и $v'^{(i)}$ это – коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение в плоскости изотропии при растяжении в перпендикулярном ей направлении и сокращение в этом направлении при растяжении в плоскости изотропии, $E^{(i)}$ и $E'^{(i)}$ – модули Юнга для направлений в плоскости изотропии и направлений, перпендикулярных к ней, $\rho^{(i)}$ – плотности материалов, $2h^{(i)}$ – толщина каждой части оболочки, R – радиус срединной поверхности. Для определённости считаем $h^{(1)}>h^{(2)}$.

Изучим случай, когда падающая на стык волна вызывает отражённую волну, не дошедшую ещё до торца $\alpha^{(1)}=0$. Введём в рассмотрение безразмерные переменные:

$$\xi^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{R\eta_i^{1/2}}, \quad \tau = \frac{tc_3^{(i)}}{R}, \quad (1)$$

где $\eta_i = h^{(i)}/R$ – относительные параметры тонкостенности элементов оболочки, $c_3^{(i)} = \sqrt{E'^{(i)}/\rho^{(i)}(1-v^{(i)}v'^{(i)})}$. Кроме того, используем безразмерные величины для прогибов $w^{(i)}$, углов поворота $\Psi^{(i)}$, изгибающих моментов $G_1^{(i)}$ и перерезывающих сил $N_1^{(i)}$ (обозначим их символом $*$):

$$w^{(i)} = R w^{*(i)}, \quad \Psi^{(i)} = \eta_i^{-1/2} \Psi^{*(i)}, \quad (2)$$

$$G_1^{(i)} = \frac{2E'^{(i)}h^{(i)2}}{1-v^{(i)}v'^{(i)}} G_1^{*(i)}, \quad N_1^{(i)} = \frac{2E'^{(i)}h^{(i)}}{1-v^{(i)}v'^{(i)}} \eta_i^{1/2} N_1^{*(i)}.$$

Система разрешающих уравнений для прогибов срединной поверхности элементов оболочки $w^{(i)}$ имеет вид

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w^{*(i)}}{\partial \xi^{(i)4}} + \omega^{(i)2} w^{*(i)} + \frac{\partial^2 w^{*(i)}}{\partial \tau^{(i)2}} = 0, \quad (3)$$

$$\text{где } \omega^{(i)2} = \frac{E^{(i)}(1-v^{(i)}v'^{(i)})}{E'^{(i)}}.$$

Ударное воздействие на торец моделируется граничными условиями

$$w^{*(1)} = 0, \quad G_1^{*(1)} = I H(\tau^{(1)}) \quad \text{при} \quad \xi^{(1)} = 0. \quad (4)$$

Здесь I – амплитуда нагрузки, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

На стыке частей оболочки задаётся равенство прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил. С учётом связи между прогибом и компонентами НДС [1], граничные условия на стыке имеют вид

$$w^{*(1)} = w^{*(2)}, \quad \frac{\partial w^{*(1)}}{\partial \xi^{(1)}} = \mu^{-1/2} \frac{\partial w^{*(2)}}{\partial \xi^{(2)}},$$

$$\frac{\partial^2 w^{*(1)}}{\partial \xi^{(1)2}} = \frac{\mu^2}{D} \frac{\partial^2 w^{*(2)}}{\partial \xi^{(2)2}}, \quad \frac{\partial^3 w^{*(1)}}{\partial \xi^{(1)3}} = \frac{\mu^{3/2}}{D} \frac{\partial^3 w^{*(2)}}{\partial \xi^{(2)3}} \text{ при } \xi^{(1)} = l. \quad (5)$$

Здесь $\mu = \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}}$ – малый параметр, $D = \frac{E^{(1)}(1 - v^{(2)}v'^{(2)})}{E^{(2)}(1 - v^{(1)}v'^{(1)})}$. Задача решается

при начальных условиях покоя.

Безразмерная краевая задача (3) – (5) аналогична задаче о распространении нестационарных изгибных волн в изотропной составной цилиндрической оболочке [2] (отличаются только коэффициенты $\omega^{(i)2}$). Поэтому далее изложен лишь ход решения задачи. Решения для падающей, отражённой и прошёдшей волн имеют тот же вид, что и соответствующие решения в случае составной оболочки из изотропных материалов, полученные в [2], и здесь не приводятся.

Для того чтобы решить поставленную задачу, использовался метод интегрального преобразования Лапласа по временной переменной. В изображениях по Лапласу система разрешающих уравнений (3) становится системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Решение в изображениях для падающей волны найдено с помощью граничных условий на торце. Удовлетворяя граничным условиям на стыке, при условии малости параметра отношения толщин частей оболочки ($\mu \ll 1$), получаем решения в изображениях для отражённой и прошёдшей волн. Следует отметить, что решение для изгибающего момента для прошёдшей волны $G_1^{*(2)} = O(\mu^2)$.

Обращение решений в изображениях выполняется асимптотическими методами. Для начального временного интервала $\tau^{(1)} = O(1)$ оригиналы решений были получены методом разложения изображения в ряд по отрицательным степеням корня квадратного из параметра преобразования. В результате оригиналы решений представляются в виде линейных комбинаций известных функций [1, 2] $D_{n,c}(y_1^{(i)}, \tau^{(1)})$, $D_{n,s}(y_1^{(i)}, \tau^{(1)})$, $DE_{n,c}(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \tau^{(1)})$ и $DE_{n,s}(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \tau^{(1)})$ ($y_j^{(i)} = y_j^{(i)}(\xi^{(i)})$, $j = 1, 2$).

С ростом времени эти решения становятся неэффективными. Поэтому при $\tau^{(1)} \gg 1$ решения строятся как суперпозиции соответствующих статических решений и интегралов Меллина для изображений. Оценка инте-

гралов проводится методом перевала (в качестве большого параметра выбрано $\tau^{(1)}$).

Были проведены расчёты для составной оболочки, элементы которой выполнены из фибро-эпоксидного композита: $\omega^2 = 0.031$, $\mu = 0.1$, $c = 1$, $D = 1$. Они показали, что, как и в случае изотропной составной оболочки, существуют области согласования между полученными асимптотиками решений. Для падающей волны это временной интервал $7.0 < \tau^{(1)} < 12.0$, для отраженной - $11.0 < \tau^{(1)} < 12.0$. В этих интервалах асимптотики совпадают с точностью 0.03.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи в теории упругих тонких оболочек. Саратов, 1986.
2. Малинский И.Г., Парфёнова Я.А. Изгибные волны в составных цилиндрических оболочках // Механика деформируемых сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 14. С. 116 – 122.

УДК 629

Т. В. Пимкина, Ю. Н. Челноков

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПОНИЖЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Рассматривается задача об оптимальном управлении орбитальным движением космического аппарата (КА) в ньютоновском гравитационном поле. Для построения оптимальных управлений и траекторий движения управляемого КА (УКА) используются уравнения движения центра масс КА, записанные во вращающейся системе координат (с.к.), и принцип максимума Понтрягина. В качестве минимизируемого функционала используется интегральный квадратичный функционал качества. Управление (вектор ускорения от тяги реактивного двигателя) полагается ограниченным по модулю. Предложены нелинейные преобразования координат, поникающие размерность краевой задачи оптимизации.

1. Постановка задачи управления. Требуется определить ограниченное по модулю управление \bar{p} :

$$0 \leq p \leq p_{\max} < \infty, \quad p = |\bar{p}|, \quad (1)$$

переводящее КА, движение которого описывается уравнениями [1]

$$\dot{v}_1 = c^2 / r^3 - fM / r^2 + p_1, \quad \dot{r} = v_1, \quad \dot{\phi}^* = rp_2, \quad (2)$$

$$2\bar{\lambda} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}_{\eta}, \quad \bar{\omega}_{\eta} = (rp_3 / c)\bar{i}_1 + (c/r^2)\bar{i}_3, \quad \dot{\phi}^* = c^*(1 + e^* \cos \phi^*)^2 / p^{*2}, \quad (3)$$

из заданного начального состояния

$$t_0 = 0 : r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \quad c(0) = c^0, \quad \bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}^0, \quad \varphi^*(0) = \varphi_0^* \quad (4)$$

в конечное состояние, удовлетворяющее соотношениям

$$\text{при } t = t_k : r = r^* = p^*/(1 + e^* \cos \varphi_k^*), \quad v_1 = v_1^* = (e^* c^* \sin \varphi_k^*)/p^*, \quad c = c^* \quad (5)$$

$$\text{vect}(\tilde{\lambda}(t_k) \circ \bar{\lambda}^*(t_k)) = 0, \quad \bar{\lambda}^* = \bar{\Lambda}^* \circ [\cos(\varphi_k^*/2) + i_3 \sin(\varphi_k^*/2)], \quad \varphi_k^* = \varphi^*(t_k) \quad (6)$$

и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{t_k} (\alpha_1 + \alpha_2 p^2(t)) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0. \quad (7)$$

Входящие в (3), (4) – (6) переменные и параметры $r^*, v_1^*, c^*, \bar{\lambda}^*, \bar{\Lambda}^*, \varphi^*, p^*, e^*$ описывают движение в центральном ньютоновском гравитационном поле неуправляемого КА (НКА), с которым должен встретиться УКА. Здесь $\bar{r}^*, \bar{V}^*, \bar{c}^* = \bar{r}^* \times \bar{V}^* = \text{const}$ – радиус-вектор, вектор скорости и векторный интеграл площадей НКА соответственно; $r^* = |\bar{r}^*|$, $c^* = |\bar{c}^*| = \text{const}$; v_1^* – проекция вектора скорости \bar{V}^* на ось η_1^* с.к. η^* (оси η_1^* и η_3^* направлены вдоль векторов \bar{r}^* и \bar{c}^* соответственно); $\bar{\lambda}^*$ – кватернион ориентации с.к. η^* в инерциальной с.к. X , $\tilde{\bar{\lambda}}$ – сопряжённый кватернион, $\bar{\Lambda}^* = \text{const}$ – кватернион ориентации орбиты НКА, компоненты $\Lambda_j^*, j = \overline{0, 3}$ которого могут быть выражены через постоянные угловые элементы орбиты $\Omega_u^*, I^*, \omega^*$ этого КА; φ^* – истинная аномалия НКА; p^*, e^* – параметр и эксцентриситет орбиты НКА. Величины $p^*, e^*, c^*, \bar{\Lambda}^*, \varphi_0^*$ считаются заданными. Отметим, что конечное значение φ_k^* истинной аномалии φ^* , характеризующее конечное положение НКА на его орбите, не фиксируется и подлежит определению в результате решения задачи, кроме этого, конечное состояние УКА принадлежит многообразию (5), (6), содержащему φ_k^* , поэтому данная задача является задачей с подвижным правым концом. Функционал (7) характеризует расход энергии на перевод КА из начального в конечное состояние и время, затрачиваемое на этот перевод. При $dm/dt = \text{const}$ (m – масса НКА) данный функционал характеризует расход массы КА и время, затрачиваемое на перевод КА из начального в конечное состояние. При $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ функционал $J = t_k$ (задача быстродействия).

2. Необходимые условия оптимальности. Поставленная задача решается на основе принципа максимума Понтрягина. Для этого вводятся сопряжённые переменные $\bar{\mu}, \rho, s_1, e, \Phi^*, \psi_0$, соответствующие переменным $\bar{\lambda}, r, v_1, c, \varphi^*, g$, где g удовлетворяет при минимизации функционала

ла (7) дифференциальному уравнению (ДУ) $\dot{g} = \alpha_1 + \alpha_2 p^2$ и начальному условию $g(t_0) = 0$, строится функция Гамильтона-Понтрягина H , записывается система уравнений для сопряжённых переменных.

Оптимальное управление \bar{p}^0 , найденное из условия максимума функции H по переменной \bar{p} с учётом ограничения (1), имеет вид

$$\bar{p}_\eta^0 = p_1^0 \bar{i}_1 + p_2^0 \bar{i}_2 + p_3^0 \bar{i}_3 = p^0 \bar{n}_\eta / |\bar{n}|, \quad (p_j^0 \equiv p_j^{opt}, j = \overline{1,3}), \quad (8)$$

$$\bar{n}_\eta = s_1 \bar{i}_1 + e r \bar{i}_2 + [r v_1 / (2c)] \bar{i}_3, \quad |\bar{n}| = \left[s_1^2 + r^2 (e^2 + v_1^2 / (4c^2)) \right]^{1/2}. \quad (9)$$

При минимизации функционала (7) в случаях

$$\begin{aligned} \alpha_2 > 0: \quad p^0 &= \begin{cases} (2\alpha_2)^{-1} |\bar{n}|, & (2\alpha_2)^{-1} |\bar{n}| \leq p_{\max}, \\ p_{\max}, & (2\alpha_2)^{-1} |\bar{n}| > p_{\max}; \end{cases} \\ \alpha_2 = 0: \quad p^0 &= p_{\max}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь v_1 – компонента кватерниона $\bar{v} = v_0 + v_1 \bar{i}_1 + v_2 \bar{i}_2 + v_3 \bar{i}_3 = \tilde{\lambda} \circ \bar{\mu}$.

Таким образом, задача сводится к интегрированию 16-ти ДУ относительно переменных $r, v_1, c, \varphi^*, \lambda_j, \rho, s_1, e, \Phi^*, \mu_j$, ($j = \overline{0,3}$).

В результате анализа задачи в рассмотрение вводится новая кватернионная переменная $\bar{v} = \tilde{\lambda} \circ \bar{\mu}$, связанная с кватернионным первым интегралом уравнений задачи $\bar{v}^* = \bar{\mu} \circ \tilde{\lambda} = const$ соотношением $\bar{v} = \tilde{\lambda} \circ \bar{v}^* \circ \bar{\lambda}$.

Учёт первых интегралов краевой задачи оптимизации и использование переменных v_j , ($j = \overline{1,3}$), являющихся компонентами кватерниона \bar{v} , позволяет понизить порядок полученной системы ДУ на 6 единиц для любого управления \bar{p} , упростить их и привести к виду

$$\dot{v}_1 = c^2 / r^3 - fM / r^2 + p_1, \quad \dot{r} = v_1, \quad \dot{c} = rp_2, \quad (11)$$

$$\dot{s}_1 = -\rho, \quad \dot{\rho} = [(3c^2 / r - 2fM)s_1 + cv_3] / r^3 - ep_2 - v_1 p_3 / (2c), \quad (12)$$

$$\dot{e} = -(2cs_1 / r + v_3 / 2) / r^2 + rv_1 p_3 / (2c^2), \quad (13)$$

$$\dot{v}_1 = cv_2 / r^2, \quad \dot{v}_2 = -cv_1 / r^2 + rv_3 p_3 / c, \quad \dot{v}_3 = -rv_2 p_3 / c. \quad (14)$$

Система уравнений (11) – (14) и уравнение для φ^* из (3) образуют систему 10-го порядка относительно переменных $r, v_1, c, \varphi^*, \rho, s_1, e, v_j$ ($j = \overline{1,3}$). При их интегрировании появятся 10 произвольных постоянных, 11-м неизвестным будет время t_k . Для определения 6-ти неизвестных постоянных и времени служат: граничное условие (5), кватернионное условие

$$\tilde{\lambda}(t_k) \circ \bar{v}(t_k) \circ \tilde{\lambda}(t_k) = \tilde{\lambda}(t_0) \circ \bar{v}(t_0) \circ \tilde{\lambda}(t_0), \quad (15)$$

полученное из (6) и кватернионного первого интеграла, условие трансверсальности

$$C_{\varphi} + p^* e^* \rho(t_k) \sin \varphi_k^* + (1 + e^* \cos \varphi_k^*)^2 \left[\frac{e^* c^*}{p^*} s_1(t_k) \cos \varphi_k^* + \frac{1}{2} v_3(t_k) \right] = 0, \quad (16)$$

где C_{φ} – постоянная интегрирования,
и первый интеграл

$$H^0 = -\left(\alpha_1 + \alpha_2 p^{02}\right) + \rho v_1 + s_1 \left(\frac{c^2}{r^3} - \frac{fM}{r^2} + p_1^0 \right) + e r p_2^0 + \frac{r v_1 p_3^0}{2c} + \frac{c v_3}{2r^2} + \frac{c^* C_{\varphi}}{p^{*2}} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, исходная краевая задача оптимального управления орбитальным движением КА, описываемая системой 16-ти нелинейных ДУ, сведена к краевой задаче, описываемой системой 10-ти нелинейных ДУ, правые части которых не только не усложнились, но и упростились.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч.1 // Космические исследования. 2001. Т. 39, № 5. С. 502 – 517.

УДК 301.15.15.07.02

Я. Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ И УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВСТРЕЧЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ*

В статье представлены результаты расчётов для решения пространственной задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина о встрече двух космических аппаратов (КА), один из которых движется по эллиптической орбите только под действием силы притяжения к центру. Для решения задачи используются кватернионные или векторные элементы орбиты, в которых уравнения движения КА являются регулярными и обладают структурой, удобной для численного решения задач оптимального управления с применением ЭВМ. Рассмотрены два варианта функционала, определяющего качество процессов управления.

1. Движение совокупности управляемого и неуправляемого космических аппаратов в безразмерных кватернионных элементах орбит А и В описывается уравнениями [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} &= -\epsilon Q F_1 \sin \varphi, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = \epsilon Q F_1 \cos \varphi, \quad \frac{dt}{d\varphi} = u^2 \sqrt{2Q}, \quad Q = A^2 + B^2, \quad \mathbf{q} = P(u)p, \\ \mathbf{F}_1 &= u^2 \mathbf{q} + (\mathbf{w}, \mathbf{q}) \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad \mathbf{w} = -A \sin \varphi + B \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00988).

$$\mathbf{u}_a = A_a \cos \varphi_a + B_a \sin \varphi_a, \quad \mathbf{w}_a = -A_a \sin \varphi_a + B_a \cos \varphi_a, \quad \frac{d\varphi_a}{d\varphi} = \frac{u^2}{u_a^2} \left(\frac{Q}{Q_a} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad Q_a = A_a^2 + B_a^2,$$

на безразмерный управляемый параметр p тяги наложено ограничение $|p| \leq 1, \varepsilon$ – отношение максимальной тяги к характерному значению силы притяжения аппарата к центру, φ – независимая переменная, t – безразмерное время. Величины с нижним индексом «а» относятся к неуправляемому аппарату, при этом кватернионы A_a, B_a – постоянные величины.

В начальный момент времени состояние управляемого и неуправляемого КА определяется соотношениями

$$t=0, \quad \varphi=0, \quad \mathbf{A}=\mathbf{A}_{ii}, \quad \mathbf{B}=\mathbf{B}_{ii}, \quad \varphi_a=0. \quad (2)$$

Качество процесса управления определяется одним из двух вариантов функционала

$$I = \int_0^{t_k} (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon |p|) dt = \int_0^{\varphi_k} (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon |p|) u^2 (2Q)^{\frac{1}{2}} d\varphi, \quad (3)$$

$$I = \int_0^{t_k} (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2) dt = \int_0^{\varphi_k} (\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2) u^2 (2Q)^{\frac{1}{2}} d\varphi, \quad (4)$$

представляющими собой свёртки с весовыми множителями $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2$) двух критериев, определяющих длительность процесса и суммарную величину импульса тяги, отнесённой к единице массы КА, для первого варианта (3) и энергии для второго варианта (4), затраченных на процесс управления. В момент мягкой встречи положения и скорости аппаратов совпадают.

Требуется найти управление, удовлетворяющее ограничению, которое для управляемой системы (1), начинающей движение из начального состояния (2), обеспечивает мягкую встречу и сообщает минимальное значение одному из функционалов (3) или (4) в зависимости от варианта задачи.

2. Для решения краевых задач, описанных в [1, 2], к которым принцип максимума Понтрягина сводит решение задач оптимального управления, разработан метод, сочетающий модифицированный метод Ньютона и метод градиентного спуска.

В расчётах полагалось, что управляемый аппарат начинает движение от точки В круговой орбиты Земли, лежащей в плоскости Oxy , а неуправляемый аппарат движется от точки А по круговой орбите с радиусом орбиты Марса и с углом наклона, равным 18.67° .

На рис. 1 в безразмерных переменных изображены траектории движения космических аппаратов и компоненты оптимального управления для первого варианта функционала (3) со следующими значениями весовых множителей: $\alpha_1=0.2, \alpha_2=2$ и $\varepsilon=0.1$.

Траектории и управления на рис. 2 соответствуют второму варианту функционала (4) со значениями $\alpha_1=0.2$, $\alpha_2=40$, $\varepsilon=0.2$.

В таблице представлены в безразмерных переменных координаты положений и вектора скорости космических аппаратов в начальный и конечный моменты времени.

Во второй и третьей строках таблицы указаны координаты положения и скорости управляемого и неуправляемого аппаратов в начальный момент времени соответственно. В четвертой и пятой строках указаны положения и скорости аппаратов в момент мягкой встречи для первого и второго вариантов функционала соответственно.

Координаты положений отнесены к радиусу орбиты Земли, а вектора скорости к скорости движения Земли по орбите, в безразмерных переменных земному году соответствует 2π . Для первого варианта функционала длительность перелёта составляет 1.8132 земного года, а для второго – 1.8059.

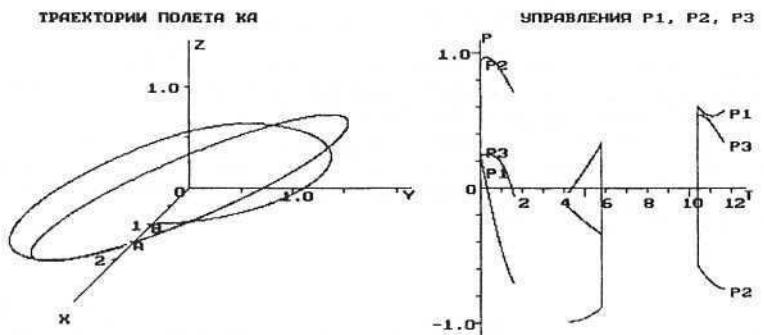


Рис. 1

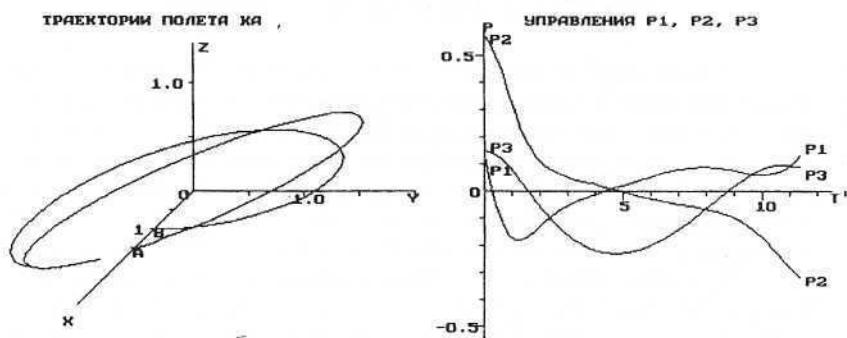


Рис. 2

<i>t</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>v_x</i>	<i>v_y</i>	<i>v_z</i>
0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
0.0	1.52	0.0	0.0	0.0	0.7684	0.2597
11.3929	1.4887	-0.2901	-0.0981	0.1634	0.7527	0.2544
11.3467	1.48087	-0.3248	-0.1098	0.1836	0.7486	0.2530

На рис. 1 видно, что оптимальное управление в случае функционала (3) состоит из пяти этапов, среди которых первый, третий и пятый являются активными, где $|p|=1$, а второй и четвёртый – пассивными, $|p|=0$. Длительности этапов в порядке их следования в безразмерных переменных равны 1.5965, 2.5799, 1.6771, 4.2468, 1.2926. При этом суммарная длительность пассивных этапов составляет 59.92% от общей длительности перелёта. В случае функционала (4) вектор управления представляет собой непрерывную функцию времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я.Г. Кватернионные элементы орбиты в задаче оптимального управления для встречи двух космических аппаратов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 210 – 213.
2. Сапунков Я.Г. Применение кватернионных элементов орбиты в задаче оптимального управления космическим аппаратом // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: Материалы междунар. конф. ИПТМУ РАН. Саратов, 2002. С. 107 – 109.

УДК 533.6011

Я. Г. Сапунков, Г. П. Шиндяпин, В. А. Поршинев, Н. В. Федорец

ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕТОНАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ ОТ ГЕОМЕТРИИ КАМЕРЫ И ДИФФУЗОРА

В работах [1, 2] на основе одномерного приближения был предложен метод расчёта движения продуктов детонации и воздуха в цилиндрической детонационной камере длиной l_1 , соединённой с коническим диффузором с углом отклонения образующей конуса от оси симметрии β и длиной l_0 . В настоящей статье приведены результаты расчётов движения газов в детонационном двигателе для различных размеров диффузора. Исследуется влияние формы диффузора на суммарный импульс давления.

Краткое описание постановки задачи и метода решения. В [2] для расчёта движения продуктов детонации взрывчатой смеси, которая в начальный момент времени заполняла цилиндрическую камеру, и воздуха, заполнившего конический диффузор, была поставлена краевая задача для систем дифференциальных уравнений движения газообразных сред с

соответствующими начальными и граничными условиями. Движение продуктов детонации на начальном этапе, когда детонационная волна в режиме Чепмена-Жуге распространяется от закрытого конца камеры до сечения, в котором камера соединяется с диффузором, описывается автомодельным решением, представленном в [1]. После завершения этого этапа в детонационном двигателе начинается совместное движение продуктов детонации и воздуха, разделённых контактным разрывом.

Для решения краевой задачи были составлены две программы на языке *PASCAL*, в которых были реализованы разные методы расчёта движения воздуха в диффузоре. В первой программе движение воздуха между контактным разрывом и открытым концом диффузора вычислялось по формулам, которые определяют движение идеального газа под действием поршня в трубе переменного сечения, так как контактный разрыв можно рассматривать как поршень нулевой массы, а для расчёта движения продуктов детонации в камере и диффузоре использовался метод Лакса-Вендроффа. Во второй программе для определения параметров движения продуктов детонации и воздуха без выделения ударной волны использовался метод Лакса-Вендроффа. При этом явно выделялся только контактный разрыв, который разделяет продукты детонации и воздух. Сравнение результатов расчёта по первому и второму методам, реализованных в описанных выше программах, показывает на их хорошее соответствие друг другу. Это связано с тем, что воздух быстро вытесняется из диффузора продуктами детонации и основной вклад в суммарный импульс детонационного двигателя вносит движение продуктов детонации в камере и диффузоре и распределение давления в них. Расчёты и проведённые эксперименты показывают, что наличие диффузора существенно увеличивает суммарный импульс давления детонационного двигателя.

Ниже приводятся некоторые результаты расчёта движения газов в детонационном двигателе.

Расчёты по определению суммарного импульса давления. Расчёты движения продуктов детонации и воздуха в детонационном двигателе с диффузором проводились для различных значений угла β и длины диффузора l_0 , чтобы оценить влияние размеров диффузора на суммарный импульс. Расчёты проводились для взрывчатой смеси, в которой величина $h^2 = 2q\rho_1/p_0$, где q – количество тепла, выделяющегося при сгорании единицы массы взрывчатой смеси, равно 60, ρ_1 – плотность взрывчатой смеси, p_0 – атмосферное давление. Отношения теплоёмкостей $\gamma_0 = 1.4$ в воздухе, $\gamma_1 = 1.38$ во взрывчатой смеси, $\gamma_2 = 1.28$ в продуктах детонации. Длина цилиндрической камеры l_1 в расчётах полагалась неизменной и равной 0.283 м. Суммарный импульс в случае камеры с диффузором определялся с учётом атмосферного давления в окружающей среде и с учётом геометрии диффузора. Результаты расчётов представлены в табл. 1, в которой приведены значения отношений суммарного импульса при наличии диффузора к суммарному импульсу двигателя без диффузора.

Таблица 1

$I_{0,M} \setminus \beta, {}^\circ$	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0
0.05	1.0733	1.0870	1.1003	1.1134	1.1246	1.1350	1.1411
0.075	1.1105	1.1306	1.1506	1.1683	1.1844	1.1967	1.2120
0.1	1.1445	1.1730	1.1994	1.2238	1.2459	1.2639	1.2832
0.125	1.1739	1.2092	1.2431	1.2730	1.2999	1.3230	1.3383
0.15	1.2001	1.2446	1.2849	1.3230	1.3567	1.3856	1.4113
0.175	1.2256	1.2777	1.3246	1.3684	1.4086	1.4459	1.4775
0.2	1.2545	1.3158	1.3716	1.4215	1.4680	1.5126	1.5619
0.225	1.2886	1.3594	1.4237	1.4816	1.5345	1.5833	1.6289

Из данных, приведённых в табл. 1, видно, что с увеличением длины диффузора и с увеличением угла его раскрытия суммарная величина импульса увеличивается.

Пример расчёта параметров течения в камере и диффузоре.

Ниже приведены некоторые результаты расчёта при тех же исходных данных для случая, когда $I_0=0.15$ м, $\beta=10^\circ$. В этом случае число Маха для детонационной волны относительно взрывчатой смеси равно 5.36, скорость её движения составляет 1778 м/с, и она проходит через всю камеру, заполненную взрывчатой смесью, за 0.00016 с. Давление в продуктах детонации непосредственно за фронтом повышается в 17.82 раза, и скорость их движения 755 м/с. К моменту завершения детонации область покоя в продуктах детонации имеет протяжённость 0.146 м, и давление в ней в 6.58 раз выше атмосферного. В этот момент времени в сечении, в котором цилиндрическая камера соединяется с диффузором, возникает произвольный разрыв, в результате чего образуются ударная волна, контактный разрыв и волна разрежения. Начальная скорость движения ударной волны по воздуху равна 1184 м/с, в этот момент времени давление за ней повышается в 14.67 раза. Начальная скорость движения контактного разрыва, разделяющего продукты детонации и воздух, прошедший через ударную волну, равна 909 м/с. Давление на дне камеры в продуктах детонации не изменяется в течение 0.00043 с. В момент времени 0.00035 с ударная волна достигает выходного сечения диффузора, и воздух начинает вытекать через него в окружающее пространство. В этот момент времени контактный разрыв находится в сечении диффузора с $x = 0.408$ м. В момент времени 0.0043 с контактный разрыв достигает выходного сечения диффузора. В этот момент времени весь воздух вытеснен из диффузора и начинается истечение продуктов детонации.

В табл. 2 для некоторых моментов времени, указанных в первой строке, представлено во второй строке отношение давления на дне камеры к атмосферному давлению, а в третьей строке такая же величина в среднем сечении диффузора. Моменты времени указаны в 10^{-2} с.

Таблица 2

0.0431	0.0663	0.0856	0.1050	0.1243	0.1436	0.1668	0.1823
6.579	3.815	2.711	1.978	1.351	0.912	0.584	0.443
3.815	1.825	1.841	1.002	1.000	0.653	0.950	0.903

В момент времени 0.001848 с в выходном сечении диффузора скорость движения продуктов детонации становится отрицательной, т. е. воздух начинает поступать через это сечение в двигатель. Расчёт проводился до этого момента времени. Из табл. 2 видно, что давление на дне камеры в этом промежутке времени монотонно уменьшается, давление в среднем сечении диффузора сначала уменьшается, затем его изменение принимает колебательный характер.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я.Г., Шиндягин Г.П., Поршинев В.А., Федорец О.Н. Математическая модель детонационного двигателя // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 178 – 181.
2. Сапунков Я.Г., Шиндягин Г.П., Поршинев В.А., Федорец В.Н. Вычислительный эксперимент по определению газодинамических параметров в камере детонационного двигателя // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 213 – 216.

УДК 232.5; 232.135

А. И. Сафончик, М. И. Сафончик

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ «ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ» ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Рассматривается неустановившееся течение вязкопластичной среды между параллельными плоскостями, одна из которых остаётся неподвижной, а другая начинает двигаться из состояния покоя с некоторой скоростью.

В отличие от вязкой и обычной Бингамовской жидкостей течение возникает лишь в области, непосредственно примыкающей к движущейся пластине, а остальная часть среды остаётся неподвижной. Область течения растёт, охватывая всё новые слои жидкости, пока не займёт всё пространство между пластинами.

Решение этой задачи связано с определёнными трудностями, так как она относится к классу не вполне корректно поставленных задач (область течения в начальный момент отсутствует и негде задавать начальное условие), а граница области течения изменяется во времени по неизвестному закону.

Для решения используется метод Колоднера [1], по-видимому, единственный из известных на сегодня методов решения подобных задач.

Считая площадь пластин достаточно большой, течение можно рассматривать как плоскопараллельное. Для нахождения единственной отличной от нуля компоненты скорости необходимо решить следующую краевую задачу:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \quad (0 < y < h(t), \quad 0 < t < T), \quad (1)$$

$$V_x(0, t) = U(t), \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow h(t)-0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\tau_c - \tau_d}{\eta}, \quad (3)$$

$$\lim_{y \rightarrow h(t)-0} V_x = 0, \quad (4)$$

$$h(0) = 0, \quad h(T) = H. \quad (5)$$

Здесь ρ – плотность, η – структурная вязкость, τ_c и τ_d – статическое и динамическое предельные напряжения сдвига, $h(t)$ – нижняя граница зоны течения, T – момент времени, когда вся область между пластинами придёт в движение. Начало декартовой системы координат расположено на движущейся пластине, а оси координат направлены вдоль движущейся пластины и внутрь слоя.

Следуя методу Колоднера, распространим определение решения на область $h(t) < y < \infty$, полагая там $V_x \equiv 0$. Сначала строится вспомогательное решение при дополнительных условиях:

$$V_x(0, t) = \phi(t), \quad (6)$$

$$V_x(y, 0) = V_x(\infty, t) = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow h(t)+0} V_x(y, t) - \lim_{y \rightarrow h(t)-0} V_x(y, t) = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{y \rightarrow h(t)+0} \frac{\partial V_x}{\partial y} - \lim_{y \rightarrow h(t)-0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\tau_c - \tau_d}{\eta}. \quad (9)$$

Для единственности решения потребуем, чтобы оно было ограниченным, а $\left| \frac{\partial V_x}{\partial y} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$. Решение этой вспомогательной задачи записывается в виде

$$V_x(y, t) = \int_0^t \hat{\phi}(\xi) erfc \left(\frac{y}{2\sqrt{v(t-\xi)}} \right) d\xi - \frac{\tau_c - \tau_d}{2\eta} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(y-h(\xi))^2}{4v(t-\xi)}} d\xi, \quad (10)$$

$$\phi(t) = U(t) + \frac{\tau_c - \tau_d}{2\eta} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{h(\xi)^2}{4v(t-\xi)}} d\xi. \quad (11)$$

Здесь $U(t)$ – скорость пластины, $v = \frac{\eta}{\rho}$.

Потребовав теперь, чтобы

$$\lim_{y \rightarrow h(t)+0} V_x(y, t) = 0, \quad (12)$$

$$\lim_{y \rightarrow h(t)+0} \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

получим два уравнения для определения неизвестной границы $h(t)$. В работе [2] показано, что если $h(t)$ является решением уравнения (12), то $V_x \equiv 0$ в области $h(t) < y < \infty$ и, следовательно, уравнение (13) выполняется автоматически. Выпишем уравнения (11) и (12) более подробно:

$$\int_0^t \phi(\xi) erfc\left(\frac{h(t)}{2\sqrt{v(t-\xi)}}\right) d\xi - \frac{\tau_c - \tau_d}{2\eta} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(h(t)-h(\xi))^2}{4v(t-\xi)}} d\xi = 0, \quad (14)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{v\pi}} \int_0^t \frac{\phi(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{h(t)^2}{4v(t-\xi)}} d\xi + \frac{\tau_c - \tau_d}{2\eta} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{v\pi}} \int_0^t \frac{h(t)-h(\xi)}{(t-\xi)^{3/2}} e^{-\frac{(h(t)-h(\xi))^2}{4v(t-\xi)}} d\xi \right) = 0. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) относительно функции $h(t)$ являются сложными интегро-дифференциальными уравнениями. Эффективных методов их решения нет. Для их решения применён метод обратных задач, заключающийся в том, что задаётся закон изменения функции $h(t)$ ищется функция $U(t)$, соответствующая этому закону. Относительно функции $U(t)$ уравнения (14) и (15) являются линейными интегральными уравнениями Вольтерра. Функция $h(t)$ ищется в виде кусочно-ломаной линии, угловые коэффициенты наклона которой на каждом временном шаге определяются из условия совпадения значения истинной скорости в конце этого шага со значением скорости, найденной при решении обратной задачи.

Для оценки погрешности предлагаемого метода построено точное решение одной обратной задачи. Пусть $h(t) = 2\sigma\sqrt{vt}$ (такой закон изменения границы присущ всем известным автомодельным задачам стефановского типа). Уравнения (14) и (15) в этом случае примут вид

$$\int_0^t \dot{U}(\xi) erfc\left(\sigma\sqrt{\frac{t}{t-\xi}}\right) d\xi = \frac{\tau_c - \tau_d}{4\eta} (2B - AC)\sqrt{\frac{vt}{\pi}}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{v\pi}} \int_0^t \frac{\dot{U}(\xi)}{\sqrt{t-\xi}} e^{-\frac{\sigma^2 t}{t-\xi}} d\xi = \frac{\tau_c - \tau_d}{2\eta} \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} E - \frac{2AD}{\pi} \right). \quad (17)$$

Здесь A, B, C, D, E обозначают найденные значения интегралов:

$$A = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma^2 x}{1-x}}}{\sqrt{1-x}} dx = 2 \left(1 - \sigma e^{\sigma^2} \sqrt{\pi} erfc(\sigma) \right),$$

$$B = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma^2 (1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt{1-x}} dx = 2 \left(e^{-\sigma^2} + 2\sigma\sqrt{\pi} erf(\sigma) - \sigma^2 \pi e^{\sigma^2} erfc(\sigma) erfc(-\sigma) \right),$$

$$C = e^{-\sigma^2} A, \quad D = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{1-x}}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx = \pi erfc(\sigma),$$

$$E = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}} e^{-\sigma^2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx = \pi e^{\sigma^2} erfc(\sigma) erfc(-\sigma) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} erf(\sigma).$$

Единственным решением уравнения (16) является функция $U(t) = M \sqrt{\frac{vt}{\pi}}$,

где $M = \frac{\tau_c - \tau_d}{2\eta} \frac{2B - AC}{C}$, а уравнение (17) выполняется автоматически. Если ввести характерную скорость U_0 , то скорость пластины будет представляться формулой

$$U(t) = U_0 \sqrt{\frac{\tau_c - \tau_d}{\eta} t}. \quad (18)$$

Постоянная σ в законе изменения границы будет решением уравнения

$$\sigma e^{\sigma^2} = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\tau_c - \tau_d}}. \quad (19)$$

Распределение скоростей в зоне течения задается формулой

$$V_x(y, t) = U_0 \sqrt{\frac{\tau_c - \tau_d}{\eta} t} \left(e^{-\frac{y^2}{4vt}} - \frac{y}{2\sigma\sqrt{vt}} e^{-\sigma^2} + \frac{y\sqrt{\pi}}{2\sqrt{vt}} \left(erfc(\sigma) - erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) \right) \right). \quad (20)$$

Результаты расчётов по предлагаемому методу будут обсуждаться в наших дальнейших работах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kolodner J.J. Free boundary problem for the heat equation with applications of change of phase // Comm. On Pure and Appl. Math. 1956. Vol. IX, № 1.
2. Сафончик А.И. Некоторые задачи неустановившегося течения вязкопластичных сред: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1962. 109 с.

УДК 232.5; 232.135

М. И. Сафончик

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ “ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ” ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Данная статья посвящена реализации идеи сведения задачи о неустановившемся течении вязкопластичной среды к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, изложенной в работе [1]. В качестве примера рассмотрен переход от одного стационарного режима течения по наклонной плоскости к другому при изменении угла наклона этой плоскости к горизонту.

Предположим, что слой вязкопластичного материала толщины H длительное время двигался под действием силы тяжести вдоль плоскости, наклонённой под углом α_1 к горизонту. Течение со временем стабилизировалось, и распределение скоростей приобрело вид, который в безразмерных переменных выражается известной формулой

$$\bar{V}_x(\bar{y}) = \begin{cases} \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{(2-\bar{y})\bar{y} \sin \alpha_1}{2} - \lambda \bar{y} \text{Sen} & (0 \leq \bar{y} \leq \bar{h}_0), \\ \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{(2-\bar{h}_0)\bar{h}_0 \sin \alpha_1}{2} - \lambda \bar{h}_0 \text{Sen} & (\bar{h}_0 \leq \bar{y} \leq 1) \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{h}_0 = 1 - \frac{\text{Fr} \text{Sen}}{\text{Re}} \frac{1}{\sin \alpha_1}$ — толщина зоны вязкопластичного течения.

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам

$$y = H\bar{y}, \quad V_x(y) = U_0 \bar{V}_x(\bar{y}), \quad t = \frac{H^2}{v} \bar{t}. \quad (2)$$

Входящие в (1) параметры Рейнольдса, Сен-Венана и Фруда определяются по формулам

$$\text{Re} = \frac{UH}{v}, \quad \text{Sen} = \frac{\tau_c H}{U_0 \eta}, \quad \text{Fr} = \frac{\rho U_0^2}{\gamma H}, \quad \lambda = \frac{\tau_d}{\tau_c}. \quad (3)$$

Здесь ρ — плотность, η — структурная вязкость, $v = \eta/\rho$ — аналог кинематической вязкости, τ_c и τ_d — статическое и динамическое предельные напряжения сдвига.

Если угол наклона плоскости к горизонту уменьшить до значения α_2 , то процесс восстановления структуры материала не начнётся сразу, ему будет предшествовать переходный этап, в течение которого напряжение на внешней границе зоны течения будет уменьшаться от τ_c до τ_d . Сама граница при этом будет оставаться неизменной. Для нахождения распределения скоростей и времени окончания этого этапа решается краевая задача

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha_2 \quad (0 \leq \bar{y} \leq \bar{h}_0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq T), \quad (4)$$

$$\bar{V}_x(\bar{y}, 0) = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{(2-\bar{y})\bar{y} \sin \alpha_1}{2} - \lambda \bar{y} \text{Sen}, \quad (5)$$

$$\bar{V}_x(0, \bar{t}) = 0, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=\bar{h}_0} = (\bar{\tau}(\bar{t}) - \lambda) \text{Sen}, \quad (7)$$

$$\bar{V}_x(\bar{h}_0, \bar{t}) = \bar{V}_x(\bar{h}_0, 0) + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \bar{t} \sin \alpha_2 - \frac{\text{Sen}}{1-\bar{h}_0} \int_0^{\bar{t}} \bar{\tau}(\xi) d\xi, \quad (8)$$

решение которой легко находится операционным методом.

С момента $\bar{t} = T$ начнётся этап восстановления структуры. Если ввести новый отсчёт времени $\bar{t} = T + \theta$, то для нахождения распределения скоростей и закона изменения границы области течения необходимо решить краевую задачу с “искомой” границей:

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2} + \frac{Re}{Fr} \sin \alpha_2 \quad (0 \leq \bar{y} \leq \bar{h}(\theta), \theta > 0), \quad (9)$$

$$\bar{V}_x(\bar{y}, 0) = \frac{Re}{Fr} \frac{(2-\bar{y})\bar{y}}{2} \left(\sin \alpha_1 - (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \left(1 - e^{\frac{-2T}{(2-\bar{h}_0)\bar{h}_0}} \right) \right) - \lambda \bar{y} Sen, \quad (10)$$

$$\bar{V}_x(0, \theta) = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y} \rightarrow \bar{h}(\theta)-0} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{Re}{Fr} \sin \alpha_2 - \frac{\lambda Sen}{1 - \bar{h}(\theta)}, \text{ где } F(\theta) = \lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{h}(\theta)-0} \bar{V}_x(\bar{y}, \theta). \quad (13)$$

В работе [1] предложено искать решение подобных задач в виде ряда Фурье по мгновенным собственным функциям

$$\bar{V}_x(\bar{y}, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\theta) \sin \frac{(2k-1)\pi \bar{y}}{2\bar{h}_0(\theta)},$$

для коэффициентов которого получается бесконечная связанный система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$B'_k(\theta) + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4\bar{h}^2(\theta)} B_k(\theta) = \frac{4 Re \sin \alpha_2}{\pi(2k-1) Fr \sqrt{\bar{h}(\theta)}} + \frac{\bar{h}'(\theta)}{2\bar{h}(\theta)} \sum_{m \neq k=1}^{\infty} B_m(\theta) \frac{(-1)^{m+k} (2m-1)^2}{(m-k)(m+k-1)}, \quad (14)$$

$$\text{где } B_k(\theta) = \frac{A_k(\theta)}{\sqrt{\bar{h}(\theta)}}.$$

Из граничных условий вытекает ещё два уравнения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} B_k(\theta) = \frac{F(\theta)}{\sqrt{\bar{h}(\theta)}}, \quad (15)$$

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{Re}{Fr} \sin \alpha_2 - \frac{\lambda Sen}{1 - \bar{h}(\theta)}. \quad (16)$$

Решение строится методом последовательных приближений при начальных условиях

$$\bar{h}_n(0) = \bar{h}_0, \quad F_n(0) = \frac{Re \lambda \bar{h}_0^2 \sin \alpha_1}{2Fr}, \quad B_{k,n}(0) = \frac{16 \bar{h}_0^2 \lambda Re \sin \alpha_1}{(2k-1)^3 \pi^3 Fr \sqrt{\bar{h}_0}}. \quad (17)$$

Взяв за нулевое приближение $\bar{h}_0(\theta) = \bar{h}_0$, получим

$$B_{k,0}(\theta) = \frac{16\bar{h}_0^2 \operatorname{Re}}{(2k-1)^3 \pi^3 Fr \sqrt{\bar{h}_0}} \left(\sin \alpha_2 + (\lambda \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) e^{-\frac{-(2k-1)^2 \pi^2 \theta}{4\bar{h}_0^2}} \right), \quad (18)$$

$$F_0(\theta) = \frac{\bar{h}_0^2 \operatorname{Re}}{2Fr} \left(\sin \alpha_2 + (\lambda \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} e^{-\frac{-(2k-1)^2 \pi^2 \theta}{4\bar{h}_0^2}} \right). \quad (19)$$

Удовлетворив условию (18), получим первое приближение для закона изменения границы

$$\bar{h}_1(\theta) = 1 - \frac{\lambda Fr Sen}{\operatorname{Re} \left[\sin \alpha_2 + \frac{4}{\pi} (\lambda \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} e^{-\frac{-(2k-1)^2 \pi^2 \theta}{4\bar{h}_0^2}} \right]}. \quad (20)$$

Следующие приближения находятся по формулам

$$B_{k,n}(\theta) = B_{k,n}(0) e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 \theta}{4} \int_0^\theta \frac{d\xi}{\bar{h}_n^2(\xi)}} + \frac{4 \operatorname{Resin} \alpha_2}{\pi(2k-1) Fr} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\bar{h}_n(\xi)}} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 \theta}{4} \int_\xi^\theta \frac{d\sigma}{\bar{h}_n^2(\sigma)}} d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k} (2m-1)^2}{(m-k)(m+k-1)} \int_0^\theta \frac{\bar{h}'_n(\xi)}{\bar{h}_n(\xi)} B_{m,n-1}(\xi) e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 \theta}{4} \int_\xi^\theta \frac{d\sigma}{\bar{h}_n^2(\sigma)}} d\xi, \quad (21)$$

$$F_n(\theta) = \sqrt{\bar{h}_n(\theta)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} B_{k,n}(\theta), \quad (22)$$

$$\frac{dF_n}{d\theta} = \frac{\operatorname{Resin} \alpha_2}{Fr} - \frac{\lambda Sen}{1 - h_{n+1}}. \quad (23)$$

Расчёты, проведённые для реально встречающихся значений параметров $\operatorname{Re} = 15$, $Fr = 1.5$, $Sen = 1.7$, показывают, что уже первое приближение достаточно удовлетворительно описывает поведение границы зоны течения (разница между первым и вторым приближениями менее 2%).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сафончик М.И. Сведение нестационарной задачи о движении вязкопластичной среды к системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4, С. 216 – 219.

РЕГУЛЯРНОЕ НЕСИММЕТРИЧНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОСЫХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ СКАЧКОВ

Дан метод решения системы условий совместимости потоков при регулярном пересечении косых околозвуковых скачков уплотнения.

Нелинейная система Фальковича-Кармана [1] ($u = M^2 - 1$, M – число Маха) для околозвуковых плоских течений идеального газа

$$uu_x = v_y, \quad v_x = u_y \quad (1)$$

на скачке $x = h(y)$ задаёт два условия и ударную поляру Буземана

$$\begin{aligned} h' &= -\frac{[v]}{[u]}, \quad (h')^2 = < u >, \\ [v]^2 &= < u > [u]^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$[f]$, $< f >$ – разность и полусумма значений f_+ и f_- разрывной на скачке функции f .

Пусть в однородном слабосверхзвуковом потоке ($u = u_\infty = M_\infty^2 - 1 > 0$, $v = v_\infty = 0$), параллельном оси x , в точке $O(0,0)$ пересекаются два косых скачка A_+O ($x = -\gamma_+ \cdot y$; $y \geq 0$) и A_-O ($x = \gamma_- \cdot y$; $y \leq 0$); $\gamma_+, \gamma_- > 0$ – постоянные. Эти скачки регулярно преломляются и превращаются в неизвестные косые скачки OB_+ ($x = \delta_+ \cdot y$; $y \geq 0$) и OB_- ($x = -\delta_- \cdot y$; $y \leq 0$); $\delta_+, \delta_- > 0$ – неизвестные постоянные. Между A_+O и OB_+ имеется наклонный однородный поток ($u = u_{1+} > 0$, $v = v_{1+} < 0$); между A_-O и OB_- – другой однородный поток ($u = u_{1-} > 0$, $v = v_{1-} > 0$). Индекс “+” (“-”) относится к полуплоскости $y \geq 0$ ($y \leq 0$). Эта схема течения есть нулевое приближение схемы, когда OB_+ и OB_- – криволинейные скачки за счёт некоторых возмущений ниже по потоку за скачками. В [2] построено первое приближение в рядах по x , y , зависящее от нулевого приближения. Ниже косых скачков OB_+ и OB_- имеется неизвестный дозвуковой однородный поток ($u = u_0 < 0$, $v = v_0$).

Построив три ежевидные ударные поляры Буземана по значениям однородных потоков: $P(0, u_\infty)$, $P_+(v_{1+}, u_{1+})$, $P_-(v_{1-}, u_{1-})$ (две последние скользят вершинами по P), потребуем, чтобы в точке пересечения (v_0, u_0) на плоскости (v, u) правой стороны P_+ и левой стороны P_- наклоны ‘иголок’ dv/du этих поляр были одинаковы (условие совместимости двух потоков в точке O).

Тогда придём [2] к алгебраической системе, связывающей параметры течения ($u_0 < 0$)

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{u_{1+} + u_0}{2}} \cdot \frac{7u_0 + u_{1+}}{5u_0 + 3u_{1+}} + \sqrt{\frac{u_{1-} + u_0}{2}} \cdot \frac{7u_0 + u_{1-}}{5u_0 + 3u_{1-}} = 0, \\ & (u_\infty - u_{1+})\sqrt{\frac{u_\infty + u_{1+}}{2}} + (u_\infty - u_{1-})\sqrt{\frac{u_\infty + u_{1-}}{2}} = \\ & = (u_{1+} - u_0)\sqrt{\frac{u_{1+} + u_0}{2}} + (u_{1-} - u_0)\sqrt{\frac{u_{1-} + u_0}{2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

После её решения находим другие параметры:

$$\begin{aligned} 2\gamma_\pm^2 &= u_\infty + u_{1\pm}, \quad 2\delta_\pm^2 = u_{1\pm} + u_0, \\ \pm v_0 &= \sqrt{\frac{u_\infty + u_{1\pm}}{2}}(u_\infty - u_{1\pm}) - \sqrt{\frac{u_{1\pm} + u_0}{2}}(u_{1\pm} - u_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Точка (v_0, u_0) вычерчивает внутри поляры P симметричное дозвуковое ежевидное ядро [2]. В симметричном случае ($u_{1+} = u_{1-} = u_1 > 0$, $v_0 = 0$) его верх – точка Крокко Q [3]: $u_0 = -u_1/7 \approx -0,0866u_\infty$; его низ – точка S : $u_0 = -3/5u_1 \approx -0,3693u_\infty$. В случае, когда поляра P_+ (или P_-) вырождается в точку, а другая поляра P_- (или P_+) совпадает с P , ядро оканчивается в звуковых точках поляры P . Проведя через любую точку (v_0, u_0) контура ядра поляры P_+ и P_- , найдём величины (v_{1+}, u_{1+}) и (v_{1-}, u_{1-}) , наклоны γ_\pm , δ_\pm скачков.

Сход точки (v_0, u_0) с контура ядра приводит к фиктивному “жидкому клину”, вызванному встречной фиктивной струйкой газа.

Для решения первого уравнения в (3) сделаем замену

$$\frac{u_{1+}}{|u_0|} = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{w} + \sqrt{z})^2 = \frac{B_+}{2}, \quad \frac{u_{1-}}{|u_0|} = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{w} - \sqrt{z})^2 = \frac{B_-}{2}, \quad (5)$$

где корень понимается в алгебраическом смысле, его знак берётся одинаковым для одной и той же величины (считаем, что $w > z \geq 0$). Тогда w и z связаны параболической зависимостью

$$\begin{aligned} 3(w-z)^2 - 40(w+z) + 64z + 48 &= 0, \\ w = w(z) &= \frac{20}{3} + z \pm \sqrt{16 + 3z}; \quad 0 \leq z \leq \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

При $z=0$: $w=w_Q=12$ (знак “+” в (6)), $w=w_S=4/3$ (знак “-”). Для нашей задачи в (6) выбираем знак “+” и ветвь $w=w(z)$, выходящую из точки $(0, w_Q)$, так как точка S соответствует свободной дозвуковой границе течения (другая задача газодинамики). $z=\infty$ соответствует краям ядра ($u_0=0$). Поделив равенства (5) почлененно, найдём связь между величинами u_{1+} , $u_{1-} > 0$ и параметром z .

Сделав замены

$$L = 2 \frac{u_\infty}{|u_0|}, \quad V_0 = \frac{2v_0}{|u_0|^{3/2}}, \quad (7)$$

получим для L уравнение четвёртой степени $P_4(L) = 0$, возведя второе уравнение (3) дважды в квадрат (степени L^6 и L^5 уничтожаются). Из него найдём связь между L и z , так как зависимость $w = w(z)$ дана в (6). В симметричном случае ($u_{1+} = u_{1-}$; $v_0 = 0$) уравнение имеет вещественный корень $L_0 \approx 23,1$.

Из (4) после замен (5), (7) имеем

$$\pm 4V_0 = (L - B_-)\sqrt{L + B_-} - (B_- + 1)\sqrt{B_- - 1}. \quad (8)$$

Задав $M_\infty > 1$ и параметр $z \geq 0$, из (6) находим w , выбирая знак “+”; параметр L определяем из уравнения $P_4(L) = 0$; тогда из (7) найдём $u_0 < 0$, а из (5) u_{1+} и u_{1-} , из (7) и (8) получим $\pm v_0$; из первых равенств в (4) вычислим наклоны γ_\pm , δ_\pm скачков. Проведя на плоскости (v, u) через точку (v_0, u_0) поляры P_+ и P_- , определим углы однородных потоков v_{1+} и v_{1-} . Связь между v и углом θ наклона скорости к оси x приведена в [1]: $v = (\gamma + 1)M_\infty^2 \theta$, где $\gamma > 1$ – отношение теплоёмкостей (для одноатомного газа $\gamma = \frac{5}{3}$, для двухатомного — $\gamma = \frac{7}{5}$). Изменяя z , можно вычислить дозвуковое ядро.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г.Д. Основы теории околозвуковых течений газа. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. Ч. 1.
2. Севостьянов Г.Д. Регулярное несимметричное взаимодействие околозвуковых скачков // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 219 – 222.
3. Гудерлей К.Г. Теория околозвуковых течений / Пер. с нем. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

УДК 539.3

Н. М. Сироткина

АНАЛИЗ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ ПАНЕЛИ ПРИ НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ВИБРАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

В данной статье рассматриваются вопросы исследования напряжённо-деформированного состояния (НДС) бесконечной консольной панели, колебания которой вызваны приложенным на незакрепленном крае $\beta = \alpha$ вибрационным воздействием $M_\beta(\alpha, t) = M_0 \cos \omega t$. Определены первые три

значения критической частоты внешнего возбуждения. Выявлено влияние изменения стрелы подъёма панели. Проведён сравнительный анализ для случая задания на краю панели распределённого усилия $Q_\beta(\alpha, t) = p_0 \cos \omega t$.

Рассматриваются установившиеся колебания панели под действием равномерно распределенного по незакрепленному краю момента интенсивности

$$M_\beta(\alpha, t) = M_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

ω – частота внешнего возбуждения, $M_0 = \text{const}$.

Полимерный материал панели подчиняется линейному закону вязкоупругости [1], а его свойства не зависят от температуры. При определении характеристик НДС панели используются соотношения строгой теории цилиндрических оболочек и считаются справедливыми гипотезы теории Кирхгофа-Лява. Система дифференциальных уравнений, описывающая НДС панели, приведена в [2].

Границные условия в рассматриваемом случае имеют вид:
на закреплённом крае

$$v = w = \theta = 0, \quad (2)$$

на загруженном крае

$$M_\beta = M_0 \cos \omega t, \quad T_\beta = Q_\beta = 0. \quad (3)$$

Полученную задачу в векторной форме можно записать в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{d\eta} = A\bar{Y}(\eta) + \bar{f}, \quad B_1\bar{Y}(0) = \bar{b}_1, \quad B_2\bar{Y}(1) = \bar{b}_2. \quad (4)$$

Здесь $\bar{Y}(\eta) = \{v_1, v_2, w_1, w_2, \theta_1, \theta_2, T_1, T_2, M_1, M_2, Q_1, Q_2\}$, A – матрица размерности 12×12 с известными компонентами, \bar{f} – вектор правых частей, определяемый видом внешнего загружения, B_1, B_2 – матрицы граничных условий размерности 6×12 , \bar{b}_1, \bar{b}_2 – вектора размерности 6.

Краевая задача (4) решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [3].

При численном расчёте рассматривались панели из полимерного материала ЭД-6 МА [4] со следующими геометрическими характеристиками:

$$a = 1 \text{ м}; h = 0.02 \text{ м}; f_0 = 0.1; 0.25; 0.4,$$

и $M_0 = 1 \text{ Н}$. Здесь a – ширина плана, на которую опирается панель, h – толщина, f_0 – безразмерная стрела подъёма.

В табл. 1 приведены значения трёх первых критических частот $\omega_*^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) для рассмотренных значений f_0 и соответствующие максимальные значения характеристик НДС.

Таблица 1

f_0	$\omega_*^{(k)}, \text{с}^{-1}$	$v \cdot 10^4, \text{м}$	$w \cdot 10^4, \text{м}$	$9 \cdot 10^3$	$T_B, \text{Н/м}$	$M_B, \text{Н}$	$Q, \text{Н/м}$
0.1	31.29	43.50	136.43	19.57	49.49	103.70	136.97
		1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.20
	181.18	3.14	13.91	5.87	155.01	58.86	285.44
		0.75	1.00	1.00	0.40	0.00	0.00
	527.48	-0.47	2.89	2.20	170.72	35.44	282.01
		0.50	1.00	1.00	0.20	0.00	0.00
0.25	25.98	110.26	125.64	22.04	97.35	100.52	121.03
		1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.30
	115.98	7.86	22.24	6.16	196.40	59.94	270.20
		0.75	1.00	1.00	0.40	0.00	0.00
	376.44	1.34	4.54	2.92	248.25	39.78	300.97
		0.45	1.00	1.00	0.20	0.00	0.00
0.4	19.72	181.18	116.70	26.19	109.01	96.00	105.61
		1.00	0.90	1.00	0.00	0.00	0.35
	69.94	13.43	36.07	6.87	158.79	58.63	214.02
		0.70	1.00	1.00	0.40	0.00	0.00
	238.85	2.81	7.84	3.93	231.37	43.72	281.88
		0.45	1.00	1.00	0.15	0.00	0.00

Данные, представленные в табл. 1, показывают, что с ростом номера частоты характеристики НДС убывают. Существенное влияние на их величину оказывает и увеличение стрелы подъёма.

В работе [2] аналогичная задача решалась в случае, когда на незакреплённом крае распределены усилия интенсивности

$$Q_B(\alpha, t) = p_0 \cos \omega t, \quad p_0 = 1 \text{Н/м}. \quad (5)$$

Следует отметить, что значения критических частот, как и следовало ожидать, не изменились. Остались неизменными и точки по ширине панели, в которых достигаются максимальные амплитудные значения всех характеристик НДС.

Однако все амплитудные значения этих характеристик при нагрузке (1) получаются в "k" раз больше, чем при нагрузке (5). Значения коэффициента "k" приведены в табл. 2.

Таблица 2

f_0	$\omega_*^{(1)}$	$\omega_*^{(2)}$	$\omega_*^{(3)}$
0.1	1.8	4.3	8.5
0.25	1.7	4.1	12.8
0.4	1.7	14.6	56.6

Далее, используя найденные значения характеристик НДС, численным методом, изложенным в [5], можно определить температурное поле панели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Недорезов П.Ф., Сироткина Н.М. Численные методы исследования установившихся колебаний вязкоупругих прямоугольных пластинок и круговых цилиндрических оболочек. Саратов, 1997.
2. Сироткина Н.М. Исследование НДС консольной вязкоупругой панели при вибрационном изгибе // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2002. С. 123 – 129.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. 16, вып. 3. С. 171 – 174.
4. Коваленко А.Д., Карнаухов В.Т., Яковлева Г.А. Нагрев вязкоупругого стержня при его поперечных колебаниях // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1972. Вып. 12. С. 96 – 99.
5. Сироткина Н.М., Астафьев А.И. О тепловом поле при вибрационном изгибе вязкоупругой панели // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2001. С. 79 – 86.

УДК 533.6.011:532.529

Г. П. Шиндяпин

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАСЛАВСКОГО-ГРИБА В ТЕОРИИ КОРОТКИХ ВОЛН*

1. При исследовании задач распространения и взаимодействия относительно слабых ударных волн в газах и газожидкостных средах используется асимптотическая система уравнений коротких волн [1] (μ, v – компоненты скорости, δ, Y – независимые полярные координаты)

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_Y + \mu = 0, \quad \mu_Y = v_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)} \quad (1)$$

Среди различных классов точных частных решений [2] этой системы выделяется класс решений Заславского-Гриба [3] (q – параметр)

$$\begin{aligned} \mu &= \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q); \quad \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q); \\ v &= \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q), \end{aligned} \quad (2)$$

позволяющий точно удовлетворить условиям динамической совместности на фронте ударной волны $\delta = \delta^*(Y)$ при $q = q^* = const$ ($\mu_1 = 1; 0; \eta, \alpha^v, \eta$ – параметры подобия задачи)

$$\left(\frac{d\delta^*}{dY} \right)^2 = 2\delta - \mu - \mu_1, \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta^*}{dY} = v - v_1, \quad v_1 = -\mu_1(Y \pm \alpha^v). \quad (3)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (проект 205.01.01.030, грант № 03-01-00524).

2. Подстановка (2) в (1) приводит [3] к системе 9 дифференциальных уравнений относительно $\varphi_2(q) \dots \chi_0(q)$, которая после разрешения её относительно производных принимает вид

$$\begin{aligned}\varphi'_2 &= \frac{4\varphi_2 q - \varphi_2 - 3\psi_3}{2f_0}, \quad \varphi'_1 = \frac{2\chi_1 \varphi_2 + 2\varphi_1 q - \varphi_1 - 2\psi_2}{2f_0}, \quad \varphi'_0 = \frac{\chi_1 \varphi_1 - \varphi_0 - \psi_1}{2f_0}, \\ \chi'_0 &= \frac{-2\chi_0 + \chi_1^2 + 2\varphi_0}{2f_0}, \quad \chi'_1 = \frac{-2\chi_1 q - \chi_1 + \varphi_1}{2f_0}, \quad \psi'_3 = \frac{2\varphi_2^2 - \varphi_2 q + 3\psi_3 q}{f_0}, \quad (4) \\ \psi'_2 &= \frac{-3\chi_1 \varphi_2 + 3\chi_1 \psi_3 + 6\varphi_1 \varphi_2 + 4\psi_2 q}{2f_0}, \quad \psi'_0 = \frac{-2\chi_0 \varphi_1 + \chi_1 \varphi_0 + \chi_1 \psi_1 + 2\varphi_0 \varphi_1}{2f_0}, \\ \psi'_1 &= \frac{-4\chi_0 \varphi_2 - \chi_1 \varphi_1 + 2\chi_1 \psi_2 + 4\varphi_0 \varphi_2 + 2\varphi_0 q + 2\varphi_1^2 + 2\psi_1 q}{2f_0},\end{aligned}$$

где $f_0 = \varphi_2 + 2q^2 - q$.

Исключая $\psi_3(q)$ из 1-го и 6-го уравнений (4), получим уравнение для $\varphi_2(q)$:

$$\varphi''_2 (\varphi_2 + 2q^2 - q) + \varphi'^2_2 = (0,5 + q) \varphi'_2 - \varphi_2$$

с решением

$$\varphi_2 (q) = A \sqrt{|q + B|} - 2Bq - 4B^2 - B; \quad A, B - const. \quad (5)$$

Подставляя (5) в основную систему уравнений (4) и исключая неизвестные, получим выражения для $\psi_3(q)$ и для остальных искомых функций через $\chi_1(q)$, $\chi_0(q)$

$$\begin{aligned}\psi_3 &= -\frac{2}{3} \cdot \left[f_0 \cdot \varphi'_2 + \left(\frac{1}{2} - 2q \right) \varphi_2 \right]; \quad \psi_2 = -f_0 \cdot \varphi'_1 + \chi_1 \cdot \varphi_2 + \left(q - \frac{1}{2} \right) \varphi_1; \\ \psi_1 &= -2f_0 \cdot \varphi'_0 - \varphi_0 + \varphi_1 \cdot \chi_1; \quad \varphi_1 = f_0 \cdot \chi'_1 + \chi_1 - 2q\chi_1; \\ \varphi_0 &= f_0 \cdot \chi'_0 + \chi_0 - \frac{1}{2} \chi_1^2; \quad \psi'_0 = \frac{1}{2f_0} (2\varphi_0 \varphi_1 + \chi_1 \psi_1 + \chi_1 \varphi_0 - 2\chi_0 \varphi_1).\end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя найденные функции (6) и их производные в (4) (уравнения для ψ'_2 , ψ'_0), получим 2 уравнения для функций $\chi_1(q)$, $\chi_0(q)$:

$$\begin{aligned}2f_0^3 \cdot \chi''_1 - f_0^2 (10q - 3 - 2f'_0) \cdot \chi''_1 - f_0 \{ (6q - 1 - 2f_0) f'_0 - 2f'^2_0 + \\ + [10 - 6q(2q - 1)] f_0 - 4\varphi_2 - (2q - 1)^2 \} \cdot \chi'_1 + [3\psi_3 + 3\varphi_2 - 8q\varphi_2 - \\ - 2f_0 \varphi'_2 - 4f_0 f'_0 + 3f_0 (2q - 1) + 2(2q - 1)q - 4(2q - 1)q^2 + 8q f_0] \cdot \chi_1 = 0, \\ 4f_0^3 \cdot \chi''_0 + 2f_0^2 (6f'_0 + 3 - 2q) \chi''_0 + 2f_0 [2f_0 f''_0 + 2f'^2_0 + 3f'_0 + 2\varphi_2 - 2q f'_0 - \\ - 2q + 1] \cdot \chi'_0 - 8f_0^2 \chi_1 \chi''_1 - (6f_0^2 + 8q + 4f_0) \cdot \chi_1^2 - 2f_0 (3f'_0 + 3 - 4q) \cdot \chi_1 \chi'_1 + \\ + (2f_0^2 + 4f_0) \cdot \chi_1^2 = 0.\end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, решая сначала линейное однородное уравнение (7) для χ_1 , затем линейное неоднородное уравнение для χ_0 , находим согласно

(6) выражения для φ_0 , φ_1 , ψ_1 , ψ_2 и ψ_0 , интегрируя последнее уравнение (6).

3. При симметричных взаимодействиях ($\eta = 1$), когда картина течений симметрична ($\chi_1(q) = \varphi_1(q) = \psi_2(q) = \psi_0(q) = 0$), задача сводится к интегрированию одного уравнения для $\chi_0(q)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} f_0^2 \cdot \chi_0''' + f_0^2 (6f_0' + 3 - 2q) \chi_0'' + [2f_0 f_0'' + 2f_0'^2 + \\ & + (3 - 2q)f_0' + 2\varphi_2 - 2q + 1] \cdot \chi_0' = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Переходим к новой переменной $q = -B + S p^2$, $S = \text{sign}(q + B)$, устраняющей особенность решения (8) при $q = -B$, ($f_0 = 0$).

$$f_0(p) = p [2p^3 - S(6B + 1)p - S \cdot A].$$

Запишем (8) в виде

$$\begin{aligned} & [2p^3 - S(6B + 1)p - SA]^2 \cdot \chi_0''' + 16[2p^3 - S \cdot (6B + 1)p - SA] \cdot [p^2 - SB] \cdot \chi_0'' + \\ & + 8[6p^4 - S(16B + 1)p^2 - S 2Ap + 2B^2 - B] \chi_0' = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

4. Построим решение (11) для $\chi_0(p)$, используя метод малого параметра. В задачах симметричного нерегулярного взаимодействия 2-х ударных волн, нерегулярного отражения ударных волн [1] таким параметром в общем случае невырожденных взаимодействий (режим C, $0,5 \leq \alpha^v \leq 2,0$) является величина $\epsilon = -1/A$, ($\epsilon \ll 1$; $\epsilon \rightarrow 0$ при $\alpha^v \rightarrow 2,0$). Коэффициенты A, B решения (5) выражаются через начальные значения параметра $q = q_0$, ($p = p_0$) на фронте волны Maxa:

$$A = -\frac{1}{\epsilon}, \quad B = \frac{-1 - (20p_0^3 + 2p_0)\epsilon}{16p_0\epsilon}. \quad (10)$$

При подстановке (10) в (9) получим базисные уравнения для построения приближений:

$$\begin{aligned} & (a_{30} + a_{31}\epsilon)^2 \cdot \chi_0''' + (4a_{30} + 4a_{31}\epsilon) \cdot (b_{20} + b_{21}\epsilon) \cdot \chi_0'' + (c_{10} + c_{11}\epsilon + c_{12}\epsilon^2) \cdot \chi_0' = 0; \\ & a_{30} = S(4p_0 + 1,5p); \quad a_{31} = Sp_0(30p_0^2 - 1)p + 8p_0p^3; \\ & b_{20} = S; \quad b_{21} = S(20p_0^3 + 2p_0) + 16p_0p^2; \\ & c_{10} = 1; \quad c_{11} = 2(20p_0^3 + 2p_0) + S 256p_0^2p + 8p_0(S 16p^2 + 1); \\ & c_{12} = (20p_0^3 + 2p_0)^2 + (6p^4 - S p^2)128p_0^2 + 16(S 16p_0p^2) \cdot (10p_0^3 + p_0). \end{aligned} \quad (11)$$

Представляя решение (11) в виде

$$\chi_0(p) = \chi_{00}(p) + \chi_{01}(p)\epsilon + \chi_{02}(p)\epsilon^2 + \dots \quad (12)$$

и подставляя (12) в (11), получим, сокращая члены при одинаковых степенях ϵ , систему уравнений для нахождения функций $\chi_{0n}(p)$

$$\begin{aligned}
& 9(p+8p_0/3)^2 \chi''_{0n} + 24(p+8p_0/3) \chi'_{0n} + 4\chi'_{0n} = -4f_n(p), \\
& n=0, \quad f_0(p)=0; \\
& n=1, \quad f_1(p)=2a_{30}a_{31}\chi'''_{00} + (4a_{31}b_{20} + 4a_{30}b_{21})\cdot\chi''_{00} + c_{11}\chi'_{00}; \\
& n \geq 2, \quad f_n(p)=a_{31}^2\chi'''_{0n-2} + 4a_{31}b_{21}\chi''_{0n-2} + c_{12}\chi'_{0n-2} + 2a_{30}a_{31}\chi'''_{0n-1} + \\
& + (4a_{31}b_{20} + 4a_{30}b_{21})\cdot\chi''_{0n-1} + c_{11}\chi'_{0n-1}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Уравнение для первого члена разложения $\chi_{00}(p)$ сводится к уравнению Эйлера

$$9x^2\chi'''_{00} + 24x\chi''_{00} + 4\chi'_{00} = 0, \quad p + \frac{8}{3}p_0 = x, \tag{14}$$

и имеет решение

$$\chi_{00}(p) = sc_{01} \frac{3}{2}|x|^{2/3} + sc_{02} \left(-\frac{1}{3} \right) |x|^{-1/3} + c_{03}, \tag{15}$$

$$s = sign x, \quad c_{01}, c_{02}, c_{03} - const.$$

Общее решение уравнения (11) можно представить в виде суммы решений для однородных уравнений (13) $\chi_{0n}^0(p)$ и частных решений для неоднородных уравнений (13) $\bar{\chi}_{0n}(p)$

$$\begin{aligned}
\chi_0(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{0n}^0(p) \cdot \varepsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\chi}_{0n}(p) \cdot \varepsilon^n, \\
\chi_{0n}^0(p) &= sc_{n1} \frac{3}{2}|x|^{2/3} + sc_{n2} \left(-\frac{1}{3} \right) |x|^{-1/3} + c_{n3}, \\
\bar{\chi}_{0n}(p) &= \frac{a_{1n}}{x^{m/3}} + \frac{a_{2n}}{x^{m/3-1}} + \dots + a_{kn} x^{k-\frac{m}{3}-1}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $\bar{\chi}_{0n}(p)$ – отрезок степенного ряда (k, m – целые положительные числа), коэффициенты которого находятся при подстановке (16) в (13) при сравнении коэффициентов в левой и правой частях при одинаковых степенях x . Коэффициенты c_{n1}, c_{n2}, c_{n3} находятся при удовлетворении начальных условий при $p = p_0$, ($x = 11p_0/3$) для $\chi_0(p_0), \chi'_0(p_0), \chi''_0(p_0)$, получаемых при подстановке (2) в условия на фронте ударной волны (3).

5. В приложениях при использовании решения (16) для анализа задачи нерегулярного симметричного взаимодействия, нерегулярного отражения ударной волны в окрестности фронта Маха ($p = p_0, \mu_1 = 0$) начальные данные $\chi_0(p_0) = \chi_0, \quad \chi'_0(p_0) = \bar{c}_{12} \cdot \varepsilon^2 + \bar{c}_{13} \cdot \varepsilon^3 + \dots, \quad \chi''(p_0) = \bar{c}_{22} \cdot \varepsilon^2 + \bar{c}_{23} \cdot \varepsilon^3 + \dots$ содержат коэффициент \bar{c}_{ij} , явно выражющийся через p_0, χ_0 . Решение для $\chi_0(p)$ (до степеней ε^2) имеет вид ($x = p + \frac{8}{3}p_0, f_1(p) = f_2(p) = 0, \chi_{01}(p) = 0, \chi_{00}(p) = \chi_0(p_0) = \chi_0$)

$$\begin{aligned}\chi_0(p) &= \chi_0(p_0) + \left(\frac{3}{2} c_{21} |x|^{2/3} - \frac{1}{3} c_{22} |x|^{-1/3} + c_{23} \right) \cdot \varepsilon^2 + \dots, \\ c_{21} &= \frac{4}{3} x_0^{1/3} \bar{c}_{12} + x_0^{4/3} \bar{c}_{22}, \\ c_{22} &= -\frac{1}{3} x_0^{4/3} \bar{c}_{12} - x_0^{7/3} \bar{c}_{22}, & \bar{c}_{12} &= 256 p_0^3 \chi_0, \\ c_{23} &= -3 x_0 \bar{c}_{12} - \frac{9}{2} x_0^2 \bar{c}_{22}, & \bar{c}_{22} &= 256 p_0^2 \chi_0.\end{aligned}\quad (17)$$

Остальные функции $\phi_0(q)$, $\phi_1(q)$, $\psi_1(q)$, $\psi_2(q)$ решения (2) вычисляются согласно (5), (6) через $\chi_0(q)$ в явном виде.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндягин Г.П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. Клейнер Б.Г., Шиндягин Г.П. Об одном классе точных частных решений уравнений коротких волн // ПММ. 1970. Т. 34, вып. 6, С. 1150–1158.
3. Заславский Б.И. Некоторые частные решения уравнений коротких волн // ПМТФ. 1962. №1. С. 63–69.

УДК 533.6.011:532.529

Р. М. Шульдяков, Г. П. Шиндягин

АНАЛИЗ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЙ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОМ ОТРАЖЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН

1. Рассматривается задача нерегулярного отражения ударной волны относительно слабой интенсивности ($p_{10} \ll 1$) от жёсткой непроницаемой стенки, наклонённой под углом α к набегающему потоку (рис. 1), которая является одной из актуальных и сложных проблем современной газовой динамики. Используется оригинальная схема течения, допускающая как классическое условие (равенство углов поворота выше и ниже тройных точек), так и неклассическое, когда отбрасывается это условие и в потоке за тройными точками постулируется разрыв в поперечной составляющей скорости.

Анализ общей постановки задачи согласно методу асимптотических разложений [1] основан на выделении области II значительных градиентов

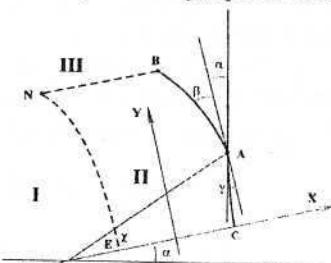


Рис. 1

параметров – области коротких волн в окрестности точки взаимодействия ударных волн, области I – линейного решения, области III – квазиодномерного решения.

Постановка задачи отражения УВ сводится к построению во внутренних переменных $X, Y(\delta, Y)$ области II решения краевой задачи для компонент скорости μ, v системы уравнений коротких волн

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_Y = \mu = 0, \quad \mu_Y = v_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)}, \quad (1)$$

которое удовлетворяет на границах области коротких волн условиям:

- на линии слабого разрыва условиям непрерывности потока;
- на фронтах УВ $\delta = \delta^*(Y)$ условиям динамической совместности

$$\left(\frac{d\delta}{dY}\right)^2 = 2\delta - (\mu + \mu_1), \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta}{dY} + (v - v_1) = 0, \quad \mu = P^{*(1)}; \quad (2)$$

$$\frac{d\delta}{dY} = \frac{dX}{dY} + Y, \quad \Psi^v = \frac{dX}{dY}, \quad \alpha^v = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{R_0^{1/2}(Y)P_{10}^{1/2}}; \quad (3)$$

– асимптотическим условиям сращивания на границе с областью линейного решения и с областью квазиодномерного решения [1], здесь α^v параметр подобия задачи.

Решение задачи осложняется нелинейностью системы уравнений коротких волн, неизвестным положением фронта Маха и фронта отражённой волны.

В общем случае постулируется сохранение продольной и разрыв поперечной составляющей скорости в точке взаимодействия

$$\mu_1^+ = \mu_1^- = \mu, \quad v_1^+ \neq v_1^-.$$

2. Для построения полей давлений и скоростей используется класс точных частных решений системы уравнений коротких волн, предложенный Б. И. Заславским [2].

Эти решения удовлетворяют точно условиям динамической совместности на фронтах УВ при $q = q^* = \text{const}$ ($q^* = q_0$ на фронте Маха, $q^* = q_1$ на фронте отражённой волны) и имеют вид

$$\begin{aligned} \mu &= \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q), \quad \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q), \\ v &= \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q). \end{aligned} \quad (4)$$

Они позволяют учесть влияние потока в целом на образующиеся ударно-волновые структуры. Подставляя это решение в систему уравнений коротких волн, получим систему девяти уравнений для определения параметров представления решения ($f_0(q) = \varphi_2(q) + 2q^2 - q$):

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{4q\varphi_2 - \varphi_2 - 3\psi_3}{2f_0}, & \varphi_1 &= \frac{2\chi_1\varphi_2 + 2q\varphi_1 - \varphi_1 - 2\psi_2}{2f_0}, & \varphi_0 &= \frac{\chi_1\varphi_1 - \varphi_0 - \psi_1}{2f_0}, \\
\chi_1 &= \frac{4q\chi_1 - 2\chi_1 + 2\varphi_1}{2f_0}, & \chi_0 &= \frac{-2\chi_0 + \chi_1^2 + 2\varphi_0}{2f_0}, & \psi_3 &= \frac{4\varphi_2^2 - 2q\varphi_2 + 6q\psi_3}{2f_0}, \\
\psi_2 &= \frac{3\psi_3\chi_1 - 3\chi_1\varphi_2 + 6\varphi_1\varphi_2 + 4q\psi_2}{2f_0}, & \psi_0 &= \frac{-2\chi_0\varphi_1 + \chi_1\varphi_0 + \chi_1\psi_2 + 2\varphi_0\varphi_1}{2f_0}, \\
\psi_1 &= \frac{-4\chi_0\varphi_2 - \chi_1\varphi_1 + 2\chi_1\varphi_2 + 4\varphi_0\varphi_2 + 2q\varphi_0 + 2\varphi_1^2 + 2q\psi_1}{2f_0} \tag{5}
\end{aligned}$$

и систему начальных условий на фронтах ($q_k = 0$ на АС, $q_k = 1$ на АВ):

$$\begin{aligned}
\varphi_2(q^*) &= 2q^*(1 - 2q^*), & \varphi_1(q^*) &= 2(1 - 2q^*)\chi_1(q^*), & \varphi_0(q^*) &= 2\chi_0(q^*) - \chi_1^2(q^*), \\
\psi_3(q^*) &= -4q^*(1 - 2q^*), & \psi_2(q^*) &= -3\varphi_2(q^*)\chi_1(q^*), \\
\psi_1(q^*) &= 2(3q^* - 1)\chi_1^2(q^*) - 4q^*\chi_0(q^*), & \psi_0(q^*) &= \chi_1^3(q^*) - \chi_1(q^*)\chi_0(q^*), \\
\chi_1(q^*) &= -2q^*Y_A - \sqrt{2\delta_A - \mu_A - q_k}, & \chi_0(q^*) &= \delta_A - q^*Y_A^2 - \chi_1(q^*)Y_A.
\end{aligned}$$

Для фронта Маха в силу симметрии течения

$$\varphi_1(q) = \chi_1(q) = \psi_2(q) = \psi_0(q) = 0, \quad \chi_0(q_0) = \delta_A + q_0 Y_A^2 - C Y_A.$$

Значения $q^* = q_0$ на фронте Маха и $q^* = 1/6$ на фронте отражённой волны находятся из анализа постановки краевой задачи [3].

Анализ системы дифференциальных уравнений (5) показывает [3], что при $q = -B$ система имеет особенность $f_0(q) = 0$, которая устраняется введением новой переменной

$$p = -s\sqrt{|q + B|}, \quad q = sp^2 - B, \quad s = \operatorname{sign}(q + B). \tag{7}$$

Последнее замечание касается только фронта Маха. При расчёте полей давлений и скоростей за фронтом отражённой волны используется исходная система (5).

Для построения полей давлений использовалась программа, реализующая метод Рунге-Кутта IV порядка точности.

На рис. 2 приведены полученные поля давлений $P(X, Y) = \mu(X, Y)$ и скоростей $v(X, Y)$.

Сравнение полученных результатов для полей давлений и скоростей с результатами численного решения [3] и экспериментальными данными [2], показывает их достаточно хорошее соответствие как в вырожденном случае (рис 2, а, б), так и в невырожденном (рис 2, в, г).

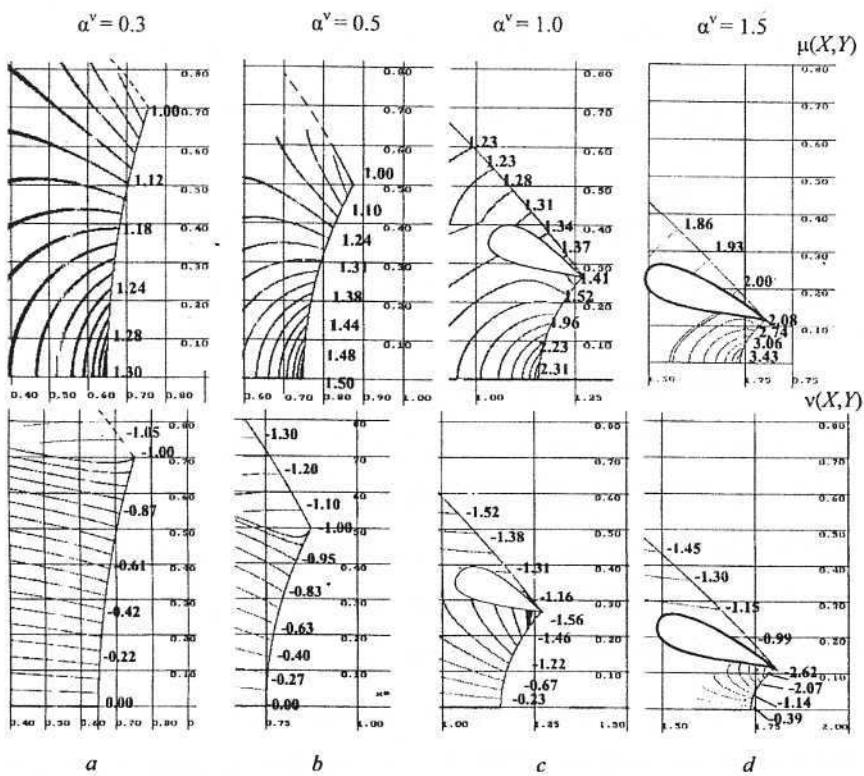


Рис. 2

Области перекрытия (рис. 2, с, д) решений вблизи фронта Маха и фронта отражённой волны требуют дополнительного анализа с помощью локального разложения в окрестности точки взаимодействия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндягин Г.П. Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. Сер. Механика жидкостей и газа. 1996. № 2. С. 183 – 190.
2. Заславский Б.И., Сафаров Р.А. О маховском отражении слабых ударных волн от жёсткой стенки // ПМТФ. 1973. № 5. С. 26 – 33.
3. Шиндягин Г.П. Численное решение задачи нерегулярного отражения слабой ударной волны от жёсткой стенки в идеальном газе // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20, №1. С. 249 – 254.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АКИМОВА С. А. Конкретная характеристика полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств	3
БЕЛГОРОДСКИЙ А. В., ДУДОВ С. И. Об оптимизации гарантированного запаса качества структуры портфеля ценных рисковых бумаг.....	5
БУТЕРИН С. А. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для одномерного возмущения оператора свёртки	8
ВОДОЛАЗОВ А. М., КУЗНЕЦОВ В. Н. Об одном критерии периодичности конечнозначной, вполне мультиплективной функции натурального аргумента	11
ВОЛОСИВЕЦ С. С. Условия интегрируемости преобразования Фурье свёртки функций обобщённой ограниченной вариации	13
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом	15
ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. К геометрии динамики со связями одного класса точек переменной массы.....	18
ГОРБУНОВ О. Б. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для операторов Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала.....	22
ГУСЕВ Г. И., БОБЫЛЕВ А. И. Об одной модификации леммы Гензеля о подъёме решения в локально компактных неархimedовых полях.....	25
ДИВИСЕНКО Е. В., МОЗЖИЛКИН В. В. Математическое моделирование динамических систем методом прямых	27
ДУДОВА А. С. Условия звёздности Лебегова множества дифференцируемой по направлениям функции	30
ЗАХАРОВ А. М., ПРОХОРОВ Д. В. Седловые точки множества коэффициентов односстистных функций	33
ИГНАТЬЕВ М. Ю. О решении одной смешанной задачи для уравнения КдФ на полуоси	37
ИШИНА С. И. Об универсальных P -планарных автоматах	40
КОНОПЛЕВ А. Б. О дифференцируемости по направлениям функции расстояния от точек до образов многозначного отображения	43
КРИВОБОК В. В. К вопросу о разложении L -функции Артина в произведение L -функций Дирихле	46
КУЗНЕЦОВ В. Н., СОРОКИНА Е. В. Продолжимость целым образом на комплексную плоскость скалярного произведения L -рядов Дирихле числовых полей	48
КУЗНЕЦОВА И. А. Параллельная стохастическая оптимизация	50
КУРДЮМОВ В. П. Асимптотика решения задачи Штурма-Лиувилля с суммируемым потенциалом	53

ЛУКАШОВ А. Л. Об информационной энтропии ортогональных многочленов на нескольких отрезках	56
ЛУКОМСКИЙ Д. С. Об аналитических свойствах матрицы Вейля-Юрко для пучков дифференциальных операторов на полуоси.....	59
ЛУКОМСКИЙ С. Ф. Равенство Парсеваля для интеграла Хенстока.....	61
ЛУНЬКОВ А. Д. Многомерные обобщения задачи теплопроводности со случайным тепловыделением	64
МИХАЙЛОВ В. Н., МИХАЙЛОВ В. Ю. О решениях уравнений Колмогорова.....	67
МИХАЙЛОВ В. Н., ТОЧИЛКИНА С. А. Быстрый алгоритм вычисления распределения суммы дискретных случайных величин	70
МОЗЖИЛКИН В. В., РОМАКИНА О. М. Документирование больших баз данных ...	72
МОЛОДЕНКОВА И. Д. Оценки погрешности восстановления производной.....	75
НЕБАЛУЕВ С. И. Толерантное пространство путей и основная теорема о поднятии толерантного отображения	78
НОВИКОВ В. Е. Спектр понятий на n -арных отношениях	81
ПАСЕЧНИК М. В. Характеризация множества индивидуально-рациональных исходов и множества дележей в играх с квазиупорядоченными исходами	84
ПАСЕЧНИК М. В., РОЗЕН В. В. Игры с квазиупорядоченными исходами, имеющими единственный индивидуально рациональный исход	87
РАЗУМОВСКАЯ Е. В. Решение задачи Гронуолла на классе функций Базилевича ..	90
РОДИНА А. В. Ортогональные рациональные функции на нескольких отрезках	93
РОЗЕН В. В. Ситуации К-равновесия в играх с квазиупорядоченными исходами.....	96
РЫХЛОВ В. С. О сильной нерегулярности простейшего дифференциального оператора 5-го порядка с неоднородными нераспадающимися краевыми условиями	99
САХНО Л. В. Теоремы вложения для некоторых классов Гельдера.....	102
СИДОРОВ С. П. Приближение гладких функций линейными конечномерными операторами в пространстве L^p	104
СОРОКИН Г. А. О двухсторонней оценке факториала $n!$	107
ТЕРЕХИН П. А. О коэффициентах Фурье по системе p -адических всплесков.....	110
ТИМОФЕЕВ В. Г. Оценки наилучших констант в неравенствах типа Ландау в пространствах L_p	113
ТОЧИЛКИНА С. А. Закон распределения статистики χ^2 Пирсона	115
ТЫШКЕВИЧ С. В. О квазиполиномах, наименее уклоняющихся от нуля на заданных множествах	118
ФИЛИППОВ В. И. Системы функций, получающиеся возмущением ядра Фейера в $L_1(0, \pi)$	121
ХАЛОВА В. А. Теорема равносходимости для одного класса интегральных операторов	126
ХРОМОВ А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям оператора дифференцирования с интегральным граничным условием.....	129
ХРОМОВ А. П., ШАЛТЫКО Д. Г. Об условиях сходимости спектральных разложений одной краевой задачи	131
ХРОМОВА Г. В. Об интегральных представлениях функций с краевыми условиями	134
ХРОМОВА Г. В., ШИШКОВА Е. В. О скорости сходимости приближений функции вместе с её производной	136
ШАТАЛИНА А. В., СВИСТЕЛЬНИКОВА А. Г. Интерполяционные процессы Эрмита-Фейера в единичном круге.....	139
ЮРКО В. А. Решение краевой задачи для системы Буссинеска на полуоси методом обратной спектральной задачи	141

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АФАНАСЬЕВА Ю. В., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Оптимальное управление орбитальным движением космического аппарата с использованием новых кватернионных оскулирующих переменных.....	144
БАХТИН К. Г., МИХАЙЛОВ В. Н. Интегральные уравнения в задачах расчёта кручения стержней.....	147
БРЕЖНЕВ А. Л., ЧЕРНОВ И. А. Распространение пятна загрязнения по склону с фильтрацией в почву.....	150
ГАМАЮНОВА Е. Н. Ударно-волновые структуры и потоки при нелинейных взаимодействиях ударных волн.....	153
КАРТАШОВ М. М., РИДЕЛЬ В. В. Совместное использование различных вариантов метода взвешенных невязок.....	156
КОССОВИЧ Л. Ю., КУШЕККАЛИЕВ А. Н. Поле Релея в бесконечном упругом слое.....	159
МАТУТИН А. А., ШИНДЯПИН Г. П. Анализ ударно-волновых структур и потоков при нелинейной рефракции ударных волн.....	162
ПАРФЁНОВА Я. А. Решение задачи о распространении изгибных волн в трансверсально-изотропных составных цилиндрических оболочках.....	165
ПИМКИНА Т. В., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Краевая задача оптимального управления орбитальным движением космического аппарата пониженной размерности.....	168
САПУНКОВ Я. Г. Оптимальные траектории и управления в задаче о встрече космических аппаратов.....	171
САПУНКОВ Я. Г., ШИНДЯПИН Г. П., ПОРШНЕВ В. А., ФЕДОРЕЦ Н. В. Зависимость характеристик детонационного двигателя от геометрии камеры и диффузора.....	174
САФРОНЧИК А. И., САФРОНЧИК М. И. Неустановившееся «запаздывающее» течение Куэтта вязкопластичной среды между параллельными стенками.....	177
САФРОНЧИК М. И. Неустановившееся «запаздывающее» течение вязкопластичной среды по наклонной плоскости.....	180
СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Регулярное несимметричное пересечение косых околосзвуковых скачков.....	184
СИРОТКИНА Н. М. Анализ напряжённо-деформированного состояния полимерной панели при некоторых видах вибрационного воздействия.....	186
ШИНДЯПИН Г. П. Построение аналитических решений системы дифференциальных уравнений Заславского-Гриба в теории коротких волн.....	189
ШУЛЬДЯКОВ Р. М., ШИНДЯПИН Г. П. Анализ полей давлений при нерегулярном отражении ударных волн	193

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 5

Ответственный за выпуск С. П. Сидоров
Технический редактор Л. В. Агалыцова
Корректор И. В. Дараева
Оригинал-макет подготовлен О. Л. Багаевой

Подписано в печать 28.11.2003.

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 11,62(12,5). Уч.-изд. л. 9,8. Тираж 200 экз. Заказ 1

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.

Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.