

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

# МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

*Сборник научных трудов*

ВЫПУСК 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
2002

УДК [51+531]

ББК (22.1+22.2)я43

М34

**Математика. Механика:** Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. – Вып. 4. – 232 с. : ил.

Сборник содержит труды специалистов в области математики и механики, работающих в Саратовском государственном университете. Представлены исследования по теории функций, геометрии, алгебре, теории игр, механике деформируемого твёрдого тела, механике жидкости и газа и приложениям.

Для научных работников и специалистов в области математики, механики.

**Редакционная коллегия:**

доктор физ.-мат. наук *Д. В. Прохоров* (отв. редактор), доктор физ.-мат. наук *Л. Ю. Коссович* (зам. отв. редактора), доктор физ.-мат. наук *А. П. Хромов*, доктор физ.-мат. наук *Г. П. Шиндягин*, кандидат физ.-мат. наук *В. В. Мозжилкин*, доктор физ.-мат. наук *В. В. Розен*, кандидат физ.-мат. наук *С. В. Галаев* (отв. секретарь)

УДК [51+531]  
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1609-4751

© Саратовский государственный  
университет, 2002

Научное издание

**МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА**

*Сборник научных трудов*

ВЫПУСК 4

Ответственный за выпуск С. В. Галаев  
Технический редактор Л. В. Агальцова  
Корректор Е. А. Малютина

Подписано в печать 22.11.2002. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,48(14,5). Уч.-изд. л. 13,8. Тираж 200 экз. Заказ 22.

Издательство Саратовского университета.  
410026, Саратов, Астраханская, 83.

Типография Издательства Саратовского университета.  
410026, Саратов, Астраханская, 83.

УДК 518:517.944

Н. Ю. Агафонова

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА  
В СОСТАВНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

В [1] было получено интегральное представление решения уравнения Лапласа в составных трехмерных областях. Найдем аналогичное представление для уравнения Пуассона.

В прямоугольной системе координат  $x, y, z$  рассмотрим в общем случае многосвязную область  $Q$ , которая состоит из  $M$  подобластей  $Q_1, Q_2, \dots, Q_M$ , ограниченных соответственно подобластями  $E_1, E_2, \dots, E_M$ . В каждой из подобластей задано уравнение Пуассона

$$\Delta T_i = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \frac{g_i(x, y, z)}{\lambda_i}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (1)$$

где  $\lambda_i$  – известные постоянные, а  $g_i(x, y, z)$  – известные функции.

Область, внешнюю к  $Q$ , обозначим через  $Q_0$ . Границу между подобластями  $Q_i$  и  $Q_j$  обозначим через  $E_{ij}$ ; индексы  $i, j$  могут принимать значения  $0, 1, 2, \dots, M$ . Под  $M$ , будем подразумевать множество тех значений  $j$ , которые обозначают номера  $Q_j$ , граничащих с  $Q_i$ .

Согласно [2, 3] для решения уравнения (1) в подобласти  $Q_i$  имеет место следующее интегральное представление:

$$p_i(x_0, y_0, z_0)T_i(x_0, y_0, z_0) = \iint_{E_i} \left( \frac{\partial T_i}{\partial n_i} \delta - T_i \frac{\partial \delta}{\partial n_i} \right) dE - \iiint_{Q_i} g_i(x, y, z) \delta dQ, \quad (2)$$

которое справедливо для точек  $(x_0, y_0, z_0)$ , лежащих внутри области  $Q_i$  или на ограничивающей ее поверхности  $E_i$ . Здесь  $(x_0, y_0, z_0)$  – любая фиксированная точка,  $dE$  – элемент поверхности  $E_i$ ,  $\partial/\partial n_i$  – производная по внешней к подобласти  $E_i$  нормали; функция источника  $\delta$  имеет вид

$$\delta = 1/r, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Точка  $(x_0, y_0, z_0)$  может лежать как внутри или вне области  $Q$ , так и на ее границе. Величина  $p(x_0, y_0, z_0)$  равна нулю для точек  $(x_0, y_0, z_0)$ , лежащих вне  $Q$ ; для внутренних точек  $p = 4\pi$ ; на поверхности  $E$  величина  $p(x_0, y_0, z_0)$  равна телесному углу, вырезаемому из сферы с центром в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  поверхностью  $E$  при стремлении радиуса этой сферы к нулю – телесный угол при этом должен измеряться внутри области  $Q$ .

Обозначив  $E_{ij}$  – границу между подобластями  $E_i$  и  $E_j$ ,  $M_i$  – множество номеров подобластей  $E_j$ , граничащих с подобластью  $E_i$ ,  $\partial/\partial n_{ij}$  – производную по нормали к границе  $E_{ij}$ , направленную вовне из подобласти  $E_i$ , представим (2) в виде

$$p_i(x_0, y_0, z_0)T_i(x_0, y_0, z_0) = \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} \left( \delta \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} - T_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) dE - \iiint_{Q_i} g_i(x, y, z) \delta dQ. \quad (3)$$

Умножив  $i$ -е равенство на величину  $\mu_i(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  и просуммировав по  $i$  от 1 до  $M$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M p_i \mu_i T_i(x_0, y_0, z_0) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} \left( \mu_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} \delta - \mu_i T_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right) dE - \\ &\quad - \sum_{i=1}^M \iiint_{Q_i} \mu_i g_i(x, y, z) \delta dQ. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как в этом выражении суммирование по внутренним границам между двумя подобластями  $E_i$  и  $E_j$  производится дважды: по  $E_{ij}$  и  $E_{ji}$  (здесь  $j > 0$ ), а на границе между  $E_i$  и  $E_j$  имеет место соотношение  $\partial/\partial n_{ij} = -\partial/\partial n_{ji}$ , перепишем (4) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M p_i \mu_i T_i(x_0, y_0, z_0) &= \sum_{i=1}^M \iint_{E_{i0}} \left( \mu_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{i0}} \delta - \mu_i T_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}} \right) dE + \\ &\quad + \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} \left[ \left( \mu_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} - \mu_j \frac{\partial T_j}{\partial n_{ij}} \right) \delta - (\mu_i T_i - \mu_j T_j) \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right] dE - \\ &\quad - \sum_{i=1}^M \iiint_{Q_i} \mu_i g_i(x, z) \delta dQ, \quad (i = \overline{1, M}). \end{aligned} \quad (5)$$

Во многих приложениях [3] на внутренних границах  $E_{ij}$  ( $j > 0$ ) должны выполняться условия вида

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} = \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial n_{ij}}, \quad T_i = T_j. \quad (6)$$

Положив в (5)  $\mu_i = \lambda_i$ , получим интегральное представление для решения уравнения Пуассона (1) в составной трехмерной области  $Q$ , удовлетворяющее условиям (6),

$$\begin{aligned} T(x_0, y_0, z_0) \sum_{i=1}^M p_i \lambda_i &= \sum_{i=1}^M \iint_{E_{i0}} \left( \lambda_i \frac{\partial T}{\partial n_{i0}} \delta - \lambda_i T \frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}} \right) dE + \\ &+ \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} \left[ (\lambda_i - \lambda_j) T \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right] dE - \sum_{i=1}^M \iiint_{Q_i} \lambda_i g_i(x, z) \delta dQ, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь принято  $T(x, y, z) = T_i(x, y, z)$ , если точка  $(x, y, z)$  принадлежит подобласти  $Q_i$ ; функция  $T(x, y, z)$  непрерывна во всей составной области  $Q$  благодаря граничному условию (6).

Если точка  $(x_0, y_0, z_0)$  лежит внутри подобласти  $Q_k$ , то из (7) получаем

$$\begin{aligned} 4\pi T(x_0, y_0, z_0) &= \sum_{i=1}^M \iint_{E_{i0}} \left( \lambda_i \frac{\partial T}{\partial n_{i0}} \delta - \lambda_i T \frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}} \right) dE + \\ &+ \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} \left[ (\lambda_i - \lambda_j) T \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}} \right] dE - \sum_{i=1}^M \iiint_{Q_i} \lambda_i g_i(x, z) \delta dQ. \end{aligned}$$

Из формулы (5) можно получить и другое интегральное представление для решения уравнений Пуассона (1) с граничными условиями (6). Положив в (5)  $\mu_i = 1$  для всех значений  $i$ , с учетом граничных условий получаем

$$\begin{aligned} T(x_0, y_0, z_0) \sum_{i=1}^M p_i(x_0, y_0, z_0) &= \sum_{i=1}^M \iint_{E_{i0}} \left( \frac{\partial T}{\partial n_{i0}} \delta - T \frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}} \right) dE + \\ &+ \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} \left( \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} - \frac{\partial T_j}{\partial n_{ij}} \right) \delta dE - \sum_{i=1}^M \iiint_{Q_i} g_i(x, z) \delta dQ. \end{aligned} \quad (8)$$

В этой формуле решение выражено через скачки производных по нормали на внутренних границах. Таким образом, доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА.** Если функции  $T_i(x, y, z)$  удовлетворяют уравнениям Пуассона (1) и условиям (6) на границах между подобластями  $Q_1, Q_2, \dots, Q_M$  составной области  $Q$ , то имеют место интегральные представления (7), (8).

При помощи полученных интегральных представлений, аналогично [4, 5], краевые задачи для составных трехмерных тел могут быть сведены к интегральным уравнениям.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Агафонова Н.Ю., Михайлов В.Н. Интегральные представления уравнения Лапласа в составных трехмерных областях // Математика, механика, математическая кибернетика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 7 – 10.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
3. Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.
4. Бобрик А.И., Михайлов В.Н. Решение некоторых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями IV рода // ЖВММФ. 1974. Т. 14.1. С. 126 – 134.
5. Аккуратов Ю.Н., Михайлов В.Н. Решение нелинейных стационарных задач теплопроводности с граничными условиями I – IV рода // ЖВММФ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1819 – 1826.

УДК 517.977

Н. Л. Андреева

### О ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДВУМЯ ЗАКРЕПЛЁННЫМИ КОНЦАМИ

Рассмотрим задачу оптимального управления, описанную системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

с двумя закреплёнными концами траектории

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad (2)$$

с интегральным критерием качества

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \inf. \quad (3)$$

Здесь заданные матрица  $A$  размерности  $n \times n$ , векторы  $b, x_0, x_1$  и функция  $F(x, u, t)$  таковы, что:

- 1) пара  $(A, b)$  управляемая;
- 2)  $F(x, u, t)$  равномерно выпуклая по  $(x, u)$  функция;
- 3) функция  $F(x, u, t)$  ограничена снизу, например  $F(x, u, t) \geq 0$ ;
- 4) функция  $F(x, u, t)$  имеет производные  $F'_x, F'_u, F''_{uu}, F''_{xt}, F''_{ut}$ ;
- 5) производные  $F'_x, F'_u$  удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных  $(x, u)$ ;
- 6) функция  $F(x, u, t)$  такова, что  $\lim_{\|x\|_{L_2^n} \rightarrow \infty, \|u\|_{L_2} \rightarrow \infty} I(x, u, t) = +\infty$ .

Задача (1) – (3) с двумя закреплёнными концами траектории безусловно является более сложной, чем задача с одним закреплением  $x(t_0) = x_0$ . Тем не менее к исследованию этой задачи оказалась применима схема рассуждений, рассмотренная в [1].

Исходную задачу (1) – (3) рассмотрим как задачу нахождения минимума функционала (3) при ограничениях (1), (2), т. е.

$$\min_{(x(t), u(t)) \in Q} I(x, u), \quad (4)$$

где  $Q = \{(x(t), u(t)): x(t) \in L_2^n[t_0, t_1]; u(t) \in L_2[t_0, t_1]\}$ ,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\xi)}bu(\xi)d\xi,$$

$$x_1 = e^{A(t_1-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\xi)}bu(\xi)d\xi,$$

здесь  $L_2^n[t_0, t_1] = \{x(t): x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)), x^p(t) \in L_2[t_0, t_1], p = \overline{1-n}\}$ ;  $e^{At}$  – матричная экспонента или фундаментальная система решений для  $\frac{dx}{dt} = Ax$ .

Очевидно, что множество  $Q$  выпуклое, при условии 1) управляемости пары  $(A, b)$  оно не пусто. В силу условия 6) вместо множества  $Q$  можно рассмотреть ограниченное множество

$$Q_0 = \{(x, u) \in Q: \|x(t)\|_{L_2^n[t_0, t_1]} \leq \lambda, \|u(t)\|_{L_2[t_0, t_1]} \leq \lambda\},$$

где  $\lambda > 0$  – некоторая константа, возможно достаточно большая.

Равномерная выпуклость подынтегральной функции  $F(x, u, t)$  обеспечивает строгую выпуклость функционала  $I(x, u)$ . Тогда исходная задача (1) – (3) будет иметь единственное решение, как задача (4) минимизации строго выпуклого функционала  $I(x, u)$  на ограниченном выпуклом замкнутом множестве  $Q_0$  гильбертова пространства.

Пользуясь идеей метода штрафных функционалов, исходную задачу (1) – (3) заменим на последовательность задач минимизации функционалов  $I_k(x, u)$  без ограничений

$$\min_{(x, u) \in L_2^{n+1}[t_0, t_1]} I_k(x, u), \quad (5)$$

где

$$I_k(x, u) = I(x, u) + \Phi_k(x, u), \quad (6)$$

$$\Phi_k(x, u) = \frac{1}{\varepsilon_k} \left\| x(t) - e^{A(t-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^t e^{A(t-\xi)}bu(\xi)d\xi \right\|_{L_2^n[t_0, t_1]}^2 +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_k} \left\| x_1 - e^{A(t_1-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\xi)} b u(\xi) d\xi \right\|_{R^n}^2, \quad (7)$$

числовая последовательность  $\varepsilon_k \downarrow 0$ .

Первое слагаемое в формуле (7) есть “штраф” за нарушение дифференциального уравнения (1) и начального условия  $x(t_0) = x_0$ , второе слагаемое соответствует закреплению траектории в правом конце  $x(t_1) = x_1$ , и оно не равно нулю, как только это условие нарушается. Слагаемые выбраны таким образом, чтобы для любого  $k = 1, 2, \dots$  функционал  $\Phi_k(x, u)$  являлся выпуклым. Функционал  $I_k(x, u)$  из (6) являлся строго выпуклым, как сумма строго выпуклого и выпуклого функционалов. Для каждого значения  $k = 1, 2, \dots$  задача (5) – (7) имеет единственное решение, обозначим его  $(x_k(t), u_k(t))$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Функции  $x_k(t), u_k(t)$  являются единственным решением системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\xi)} b u(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \varepsilon_k F'_x(x, u, t), \\ F'_u(x, u, t) + \int_t^{t_1} \left( e^{A(\xi-t)} b, F'_x(x, u, \xi) \right)_{R^n} d\xi = \\ = \frac{2}{\varepsilon_k} (e^{A(t_1-t)} b, x_1 - e^{A(t_1-t_0)} x_0 - \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\xi)} b u(\xi) d\xi)_{R^n}. \end{cases} \quad (8)$$

**Схема доказательства.** При условии существования и единственности решения задачи (5) – (7) необходимым и достаточным условием её решения являются уравнения  $\text{grad} I_k(x, u) = 0$ . Если подсчитать  $\text{grad} I_k(x, u)$  и преобразовать эти уравнения, учитывая асимптотику по малому параметру  $\varepsilon_k$ , то получим (8).

**ТЕОРЕМА 2.** Последовательность  $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^\infty$  вектор-функций, удовлетворяющих системе уравнений (8), сходится к решению  $(x^*(t), u^*(t))$  задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

**Схема доказательства.** Из метода штрафных функционалов, ограниченности множества  $Q_0$  получаем ограниченность последовательностей норм  $\|x_k(t)\|_{L_2^n[t_0, t_1]}, \|u_k(t)\|_{L_2[t_0, t_1]}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) [2]. Это обеспечивает слабую сходимость в  $L_2^{n+1}[t_0, t_1]$  последовательности  $\{x_{k_i}(t), u_{k_i}(t)\}_{i=1}^\infty$ . Используя конкретный вид выпуклых штрафных функционалов  $\Phi_k(x, u)$  из (7), можно доказать сходимость норм  $\|x_k(t)\|_{L_2^n[t_0, t_1]} \rightarrow \|x^*(t)\|_{L_2^n[t_0, t_1]}$ ,

$\|u_k(t)\|_{L_2[t_0, t_1]} \rightarrow \|u^*(t)\|_{L_2[t_0, t_1]}$  при  $k \rightarrow \infty$ , откуда получим сходимость по норме в  $L_2^{n+1}[t_0, t_1]$  сначала на подпоследовательности, а затем и на всей последовательности:  $\|x_k(t) - x^*(t)\|_{L_2^n[t_0, t_1]} \rightarrow 0$ ,  $\|u_k(t) - u^*(t)\|_{L_2[t_0, t_1]} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Исследуя интегральные уравнения (8) для приближённых решений  $x_k(t), u_k(t)$  можно доказать, что вектор-функции  $x_k(t), u_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, откуда и получим сходимость последовательности  $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^\infty$  к решению задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреева Н. Л. Интегральные уравнения с малым параметром для решения линейно-выпуклой задачи оптимального управления // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 6 – 7.
2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

УДК 517.984

Л. П. Белоусова

### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ИХ ТОЧНОЕ ОБРАЩЕНИЕ\*

Впервые интегральные операторы вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A_1(x, t) f(t) dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x, t) f(t) dt + \\ + \alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x, t) f(t) dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x, t) f(t) dt \quad (1)$$

были рассмотрены А.П. Хромовым [1]. В частности, получены формулы точного обращения оператора, показана равносходимость разложений Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора  $A$  и в обычный тригонометрический ряд Фурье, при некоторых ограничениях на  $A_i(x, t)$  и  $\alpha_i$ .

В данной статье рассматривается оператор

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t)f(t)dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t)f(t)dt + \\ + \alpha_3 \int_0^{p(x)} A_3(p(x),t)f(t)dt + \alpha_4 \int_{p(x)}^1 A_4(p(x),t)f(t)dt, \quad (2)$$

действующий из  $L[0,1]$  в  $C[0,1]$ . Предполагается, что  $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \neq 0$ ,  $A_i(x,t)$  непрерывно дифференцируемы по  $x$  и  $A_i(x,x) = 1$ . Функция  $p(x)$  взаимно однозначно отображает отрезок  $[0,1]$  на  $[0,1]$ ,  $p(x) \in C^1[0,1]$ ,  $p^2(x) = p(p(x)) \equiv x$  и  $p(x) \neq x$ . Множество таких функций  $p(x)$  обозначим через  $P$ . Для этого класса функций имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Дробно-линейные функции вида

$$p(x) = \frac{1-x}{\alpha x + 1}, \quad \alpha > -1,$$

и только такого вида, принадлежат классу  $P$ . Точка  $x_0 = \frac{\sqrt{1+\alpha} - 1}{\alpha}$  при  $\alpha \neq 0$ , или  $x_0 = \frac{1}{2}$  при  $\alpha = 0$  является неподвижной точкой  $p(x)$ .

ТЕОРЕМА 2. Если  $q(x)$  непрерывно дифференцируемая, взаимно однозначная функция на  $[0,1]$  и  $q'(x) \neq 0$ , то функция

$$p(x) = q^{-1}(b - q(x)),$$

где  $b = q(0) + q(1)$ , принадлежит классу  $P$ . Точка  $x_0 = q^{-1}\left(\frac{b}{2}\right)$  – неподвижная точка  $p(x)$ .

ТЕОРЕМА 3. Если  $q(x)$  непрерывно дифференцируемая, взаимно однозначная функция на  $[0,1]$ ,  $q'(x) \neq 0$ ,  $p(x)$  – функция класса  $P$ , то и функция

$$p_1(x) = q^{-1}(p(q(x)))$$

также принадлежит классу  $P$ . Если  $x_0$  – неподвижная точка  $p(x)$ , то  $x_0^1 = q^{-1}(x_0)$  – неподвижная точка  $p_1(x)$ .

Отметим, что теоремы 2 и 3 справедливы и когда функция  $p(x)$  непрерывна.

Теперь займемся вопросом точного обращения оператора (2).

ТЕОРЕМА 4. Обозначим  $D = \frac{d}{dx}$ ,  $E$  – единичный оператор,

$$\mathcal{Q}f(x) = (\alpha_1 - \alpha_2)f(x) + (\alpha_3 - \alpha_4)p'(x)f(p(x)),$$

$$S_\beta f(x) = \alpha_1 \int_0^x (D + \beta E) A_1(x, t) f(t) dt + \alpha_2 \int_x^1 (D + \beta E) A_2(x, t) f(t) dt + \\ + \alpha_3 \int_0^{p(x)} (D + \beta E) A_3(p(x), t) f(t) dt + \alpha_4 \int_{p(x)}^1 (D + \beta E) A_4(p(x), t) f(t) dt.$$

Тогда если  $A^{-1}$  существует, то найдется такое число  $\beta$ , что оператор  $(Q + S_\beta)^{-1}$  существует и

$$A^{-1}y(x) = (Q + S_\beta)^{-1}(D + \beta E)y(x),$$

$$y(0) = \int_0^1 (\alpha_2 A_2(0, t) + \alpha_3 A_3(1, t))(Q + S_\beta)^{-1}(D + \beta E)y(t) dt.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, когда существование  $A^{-1}$  можно доказать, а не предполагать это трудно проверяемое условие теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. Пусть  $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$  и  $A_1(x, t) \equiv A_3(x, t)$ , тогда  $A^{-1}$  существует, область определения оператора  $A^{-1}$  состоит из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\alpha_1 y(0) - \alpha_3 y(1) = 0,$$

и справедлива формула

$$A^{-1}y(x) = \frac{1}{\delta} (E + N)^{-1} D(\alpha_1 y(x) - \alpha_3 y(p(x))),$$

$$\text{где } Nf(x) = \int_0^x N(x, t) f(x) dt, \quad N(x, t) = DA_1(x, t).$$

Имеет место аналогичный результат в случае  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$  и  $A_2(x, t) \equiv A_4(x, t)$ .

ТЕОРЕМА 6. Пусть  $A_i(x, t) \equiv 1$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Тогда  $A^{-1}$  существует и

$$A^{-1}y(x) = \frac{1}{\delta} D((\alpha_1 - \alpha_2)y(x) - (\alpha_3 - \alpha_4)y(p(x))),$$

$$(\alpha_1 + \alpha_4)y(0) - (\alpha_2 + \alpha_3)y(1) = 0.$$

Укажем еще один случай точного обращения.

ТЕОРЕМА 7. Оператор

$$Af(x) = \alpha_1 \int_{x_0}^x A_1(x, t) f(t) dt + \alpha_3 \int_{x_0}^{p(x)} A_3(p(x), t) f(t) dt,$$

где  $x_0$  – неподвижная точка  $p(x)$ , является вольтерровым. Если  $\alpha_1^2 - \alpha_3^2 \neq 0$ , то он обратим и

$$A^{-1}y(x) = \frac{1}{\delta} D(\alpha_1 y(x) - \alpha_3 y(p(x))) + \\ + \int_{x_0}^x N_{1,1}(x,t) y'(t) dt + \int_{x_0}^{p(x)} N_{1,2}(x, p(t)) y'(t) dt,$$

где  $N_{i,j}(x,t)$  – компонента ядра оператора

$$N = \left( B(x) + \int_{x_0}^x \tilde{A}'_x(x,t) dt \right)^{-1} - B^{-1}(x)$$

в пространстве  $L_2[0,1] \times L_2[0,1]$  и

$$\tilde{A}(x,t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 A_1(x,t) & \alpha_3 A_3(p(x), p(t)) p'(t) \\ \alpha_3 A_3(x,t) & \alpha_1 A_1(p(x), p(t)) p'(t) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 p'(x) \\ \alpha_3 & \alpha_1 p'(x) \end{pmatrix}.$$

При этом  $y(x)$  удовлетворяет краевому условию  $y(x_0) = 0$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64 (6). С. 932 – 949.

УДК 519.8:69, 519.8:656

**Ю. А. Блинков, В. А. Иванов, А. Д. Ковалев,  
В. В. Мозжилкин, А. А. Орел**

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРУЗОПЕРЕВОЗКАМИ ПО ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГЕ

В данной статье рассматриваются проблемы оперативного управления грузовыми перевозками и построения соответствующей информационной системы сменно-суточного планирования.

Реализация процесса формирования планов эксплуатационной работы дороги на смену, на сутки с необходимым качеством затрудняется рядом причин:

- сложность задачи оптимального планирования железнодорожных перевозок ввиду многопараметричности, многокритериальности и многоэкстремальности задачи, а, следовательно, нахождение оптимального решения в полном объеме за приемлемое время невозможно, кроме того, остается открытым вопрос о формировании критерии оптимальности;
- недостоверность и несвоевременность (большое запаздывание) поступления информации к руководящим работникам службы, принимающим на основе этой информации решения и меры по

формированию планов эксплуатационной работы дороги на смену, на сутки;

- низкая техническая оснащенность мест зарождения информации, что усложняет автоматизацию сбора, обработки и передачи информации, а, следовательно, своевременного ее анализа и использования для принятия решений.

Система прогнозирования сменно-суточного плана дороги предназначена для расчета вариантов прогнозного сменно-суточного плана пропуска для вагонопотока на 12-00; составления откорректированного плана пропуска поездов на период с 6-00 до 18-00 текущих суток; прогнозного сменно-суточного плана пропуска поездов на период с 18-00 до 18-00 планируемых суток; откорректированного прогнозного сменно-суточного плана по результатам работы истекших суток и положению, сложившемуся на начало планируемых суток на период с 18-00 до 6-00 (и первую половину суток) и на сутки в целом (аналогично).

Система рассчитана на две группы пользователей:

- *Служба сменно-суточного планирования*. Задачами этой службы являются:
  - прогнозирование подходов поездов с внешней стороны стыков железной дороги;
  - выдача расписания движения поездов на заданный промежуток времени;
  - коррекция расписания в соответствии с изменившейся ситуацией.
- *Аналитическая служба*. Задачами этой службы являются:
  - анализ и прогноз характеристик грузовых перевозок;
  - сбор статистической информации по параметрам движения, ее учет при сменно-суточном планировании;
  - анализ возможных вариантов сменно-суточного плана на основе компьютерного моделирования возможных ситуаций и воздействия на них различных управленческих решений;
  - формирование и выдача аналитических отчетов по соответствию выполненного и спланированного движения;
  - выдача рекомендаций по модификации системы.

Ядро разрабатываемой системы состоит из:

- электронной карты железной дороги, являющейся основой пользовательских интерфейсов;
- шлюза между обрабатывающими программами и информационной средой железной дороги.

Непосредственно с пользователем взаимодействуют аналитическая подсистема и подсистема сменно-суточного планирования. Для связи с ядром системы используются интерфейсы:

- подготовка аналитической информации;
- подготовка данных сменно-суточного планирования;

- ввиду сложности данной информационной системы (ИС), необходимости разграничения функций различных групп пользователей и необходимости связи по данным с другими ИС следует включить в ее состав подсистему администрирования.

Информационная среда системы имеет несколько слоев баз данных (БД). Нижний слой БД образован информационной средой железной дороги. Из них данные по вагонной и поездной моделям, а также нормативно-справочная информация поступают в промежуточную БД, реализованную средствами MS SQL Server. Задача этой БД – предварительный сбор разнородной и разноформатной информации в гетерогенной информационной среде железной дороги. Структуризация этой информации осуществляется в инфологической БД, где определяются основные функциональные связи данных. Она реализуется средствами MS SQL Server. Эта БД поставляет структурированную информацию в БД сменно-суточного планирования, которая готовит необходимую информацию для генетического алгоритма расчета сменно-суточного планирования. Полученная информация преобразуется в объектную модель, с которой и работает генетический алгоритм.

Наличие нескольких слоев БД обеспечивает независимость ИС сменно-суточного планирования от информационной среды ВЦ и позволяет упростить внедрение системы на других железных дорогах.

Проблема планирования железнодорожных перевозок представляет собой сложную многопараметрическую, многокритериальную и многоэкстремальную задачу. В полном объеме нахождение оптимального решения за приемлемое время невозможно. При нахождении оптимального решения также остается открытым вопрос о формировании критерии оптимальности. Присутствие в системе быстрой смены информации не позволяет провести полную формализацию постановки задачи. Ввиду этого задача оптимального планирования железнодорожных перевозок должна быть переформулирована на нахождение «лучшего» (необязательно оптимального) решения.

В рамках последней формулировки к задаче планирования железнодорожных перевозок могут быть применены нейронные сети или генетические алгоритмы. Это позволяет реализовать решение задачи в рамках имитационного моделирования. К достоинствам такого подхода следует отнести возможности поэтапного уточнения модели и быстрой корректировки в процессе решения и эксплуатации.

Сравнительный анализ предлагаемых алгоритмов показал, что применение нейронных сетей сдерживается практической невозможностью обучению сети субоптимальному функционированию в условиях нештатных и аварийных ситуаций. Однако задача управления грузоперевозками заключается именно в разрешении этих ситуаций, поскольку в штатных ситуациях могут быть использованы типовые решения.

По указанным причинам для решения задач планирования железнодорожных перевозок было решено использовать класс генетических алгоритмов, лишенных вышеуказанных недостатков.

Генетические алгоритмы (ГА) – адаптивные методы поиска, которые в последнее время часто используются для решения задач функциональной оптимизации. Они основаны на генетических процессах биологических организмов: биологические популяции развиваются в течение нескольких поколений, подчиняясь законам естественного отбора – "выживает наиболее приспособленный".

В реализованном алгоритме понятие особи соответствует варианту плана работ. В сменно-суточном планировании особь это сменно-суточный план, популяция – варианты сменно-суточного плана. Отбор заключается в формировании группы вариантов плана. Сменно-суточное планирование проводится на основании нормативов и по критериям оптимальности.

Оценка качества заключается в проверке условий окончания вычислений. Результатом работы алгоритма является набор приемлемых вариантов плана с выдачей показателей качества вариантов по многим критериям.

В настоящее время реализована первая версия информационной системы сменно-суточного планирования, управляющая движением транзитных поездов.

УДК 517.984

С. А. Бутерин

## О ЕДИНСТВЕННОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ\*

Зафиксируем  $n \geq 1$ . Пусть  $\Lambda = \{\lambda_k\}$  – совокупность всех характеристических чисел интегрального оператора  $A = A(M, g, v)$  вида

$$Af = Mf + g(x) \int_0^T f(t)v(t)dt, \quad Mf = \int_0^x M(x-t)f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq T, \quad (1)$$

где  $M(x) \in W_2^{n+1}[0, T]$ ,  $g(x), v(x) \in W_2^1[0, T]$ ,  $M^{(j)}(0) = \delta_{j,n-1}$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,  $g(0)v(T) \neq 0$ . Здесь  $\delta_{j,n-1}$  – символ Кронекера. В статье рассматривается следующая обратная задача.

ЗАДАЧА 1. По заданным функциям  $g(x)$ ,  $v(x)$  и совокупности  $\Lambda$  характеристических чисел оператора  $A$  найти функцию  $M(x)$ .

Заметим, что обратные задачи для интегральных операторов изучались также в [1, 2]. В [1] рассматривается оператор вида (1) в случае, когда

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

$Mf = \int_0^x M(x,t)f(t)dt$  подобен оператору интегрирования, и решаются обратные задачи восстановления функций  $g(x)$ ,  $v(x)$  при известной  $M(x,t)$  по  $\Lambda$  и так называемым коэффициентам Левинсона. В [2] этот результат распространяется на случай, когда оператор  $M$  подобен второй степени оператора интегрирования.

Наряду с оператором  $A = A(M, g, v)$  будем рассматривать оператор  $\tilde{A} = A(\tilde{M}, g, v)$  с теми же функциями  $g(x)$ ,  $v(x)$ . Условимся, что если некоторый символ  $\alpha$  обозначает объект, относящийся к оператору  $A$ , то символ  $\tilde{\alpha}$  обозначает аналогичный объект, относящийся к оператору  $\tilde{A}$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Если  $\Lambda = \tilde{\Lambda}$ , то  $M(x) \equiv \tilde{M}(x)$ . Таким образом, задание множества  $\Lambda$  характеристических чисел оператора  $A = A(M, g, v)$  определяет оператор однозначно в предположении, что функции  $g(x)$ ,  $v(x)$  известны *a priori*.

**Доказательство.** Согласно теореме Л. А. Сахновича об извлечении корня из оператора [3, 4] существует функция  $M_1(x) \in W_2^2[0, T]$  такая, что  $M_1(0) = 1$ ,  $M'_1(0) = 0$ , и  $M_1^n = M$ , где  $M_1 f = \int_0^x M_1(x-t)f(t)dt$ . Можно показать, что оператор  $D = M_1^{-1}$  имеет вид

$$Dy = y'(x) + \int_0^x H(x-t)y(t)dt, \quad y(0) = 0, \quad \text{где } H(x) \in L_2(0, T).$$

Известно, что характеристические числа  $\lambda_k$  оператора  $A$  совпадают с нулями целой функции

$$L(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^T v(x)g(x, \lambda)dx,$$

где  $g(x, \lambda) = (E - \lambda M)^{-1}g$ , а  $E$  – единичный оператор.

Для доказательства теоремы приведём несколько вспомогательных утверждений. Обозначим  $f^{*1}(x) = f(x)$ ,  $f^{*(k+1)}(x) = (f * f^{*k})(x)$ ,  $k \geq 1$ , где  $f_1 * f_2$  обозначает свертку функций  $f_1$  и  $f_2$ .

**ЛЕММА 1.** Функция  $L(\lambda)$  имеет вид

$$L(\lambda) = 1 + a\delta_{1,n} - b\lambda S(T, \lambda) + \lambda \int_0^T w(x)S(x, \lambda)dx,$$

где  $b = g(0)v(T)$ ,

$$w(x) = -\mu''(x), \quad \mu(x) = \mu_0(x) + \int_0^{T-x} P(x+t, t)\mu_0(x+t)dt, \quad \mu_0(x) = \int_x^T v(t)g(t-x)dt,$$

$$P(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t-x)^j}{j!} H^{*j}(t), \quad S(x, \lambda) = \frac{1}{n\rho} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\varepsilon_k} \exp(\varepsilon_k \rho x), \quad \rho^n = \lambda,$$

$a_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , все корни  $n$ -й степени из 1,  $a$  – некоторая константа.

ЛЕММА 2. Справедливо представление

$$L(\lambda) = \exp(-\mu_0(0)\delta_{1,n}\lambda) \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \exp\left(\delta_{1,n} \frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

Заметим, что на соотношение  $w(x) = -\mu''(x)$  можно смотреть как на нелинейное интегральное уравнение относительно функции  $H(x)$ . В самом деле, производя дифференцирование и осуществляя замену  $x \rightarrow T - x$ , приходим к

$$H = \phi + BH, \quad (2)$$

$$\text{где } \phi(x) = \frac{w(T-x) + \mu_0''(T-x)}{bT}, \quad BH = \sum_{j=1}^{\infty} \left( b_j(x) H^{*j}(x) + \int_0^x B_j(x,t) H^{*j}(t) dt \right),$$

$$\begin{aligned} B_j(x,t) &= \frac{1}{bT} \frac{(x-T)^{j-2}}{j!} \left( j(j-1)\mu_0(T-x+t) + 2j(T-x)\mu_0'(T-x+t) + \right. \\ &\quad \left. + (T-x)^2 \mu_0''(T-x+t) \right), \quad j \geq 1, \quad b_1(x) = \frac{x}{T}, \quad b_j(x) = \frac{1}{T} \frac{(x-T)^{j-1}}{j!}, \quad j \geq 2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Функция  $H(x)$  является единственным решением уравнения (2) в пространстве  $L_2(0, T)$ .

Доказательство. Пусть функция  $\tilde{H}(x) \in L_2(0, T)$  также является решением (2), тогда можно показать, что функция  $\tilde{H}(x) = H(x) - \tilde{H}(x)$  удовлетворяет уравнению

$$0 = b(x)\tilde{H}(x) + \int_0^x B(x,t)\tilde{H}(t)dt, \quad (3)$$

где  $b(x) = b_1(x) - 1$ ,

$$B(x,t) = B_1(x,t) + \sum_{j=2}^{\infty} \left( b_j(x) \Psi_j(x-t) + \int_0^{x-t} B_j(x,t+\tau) \Psi_j(\tau) d\tau \right),$$

$\Psi_j = H^{*(j-1)} + H^{*(j-2)} * \tilde{H}^{*1} + \dots + \tilde{H}^{*(j-1)}$ , причем функция  $B(x,t)$  суммируема с квадратом.

Из единственности решения уравнения (3) на каждом интервале  $(0, T_1)$ ,  $T_1 < T$ , следует, что  $H(x) = \tilde{H}(x)$  почти всюду на  $(0, T)$ .  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Согласно лемме 2 в условиях теоремы  $L(\lambda) = \tilde{L}(\lambda)$ , откуда в силу леммы 1

$$(a - \tilde{a})\delta_{1,n} + \lambda \int_0^T (w(x) - \tilde{w}(x)) S(x, \lambda) dx = 0.$$

Таким образом,  $w(x) = \tilde{w}(x)$  почти всюду на  $(0, T)$ , и обе функции  $H(x)$  и  $\tilde{H}(x)$  удовлетворяют (2). Согласно лемме 3  $H(x) = \tilde{H}(x)$  почти всюду на  $(0, T)$ , откуда  $D = \tilde{D}$ ,  $M_1 = \tilde{M}_1$ , а, значит, и  $M = \tilde{M}$ , то есть  $M(x) \equiv \tilde{M}(x)$ .  $\square$

Исследована также глобальная разрешимость уравнения вида (2) и получен алгоритм решения задачи 1 вместе с необходимыми и достаточными условиями ее разрешимости.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Обратная задача для интегральных операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37(5). С. 690 – 701.
2. Бутерин С. А. Обратная задача для одномерного возмущения интегральных вольтерровских операторов // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докладов 11-й Сарат. зимней школы. Саратов: Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2002. С. 36 – 37.
3. Сахнович Л. А. О приведении вольтерровых операторов к простейшему виду // Изв. АН СССР. 1957. Т. 21. С. 235 – 262.
4. Юрко В. А. О порождающих элементах операторов вида  $Kf = \int_0^x f(t)K(x-t)dt$  // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 79 – 102.

УДК 518.6

Л. Ф. Вахлаева, Т. В. Молоденкова, Е. А. Павлова

#### РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОГО МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При решении разностных краевых задач для многомерных уравнений математической физики важным вопросом является выбор порядка аппроксимации по пространственным координатам, а также поиск экономичного алгоритма решения соответствующих систем разностных уравнений. В [1] даны схемы второго и четвертого порядка точности для стационарного и нестационарного линейного уравнения теплопроводности. В [2] приведена схема второго порядка для слабонелинейного стационарного уравнения теплопроводности в прямоугольной области в случае первой краевой задачи. Доказана сходимость к решению дифференциальной задачи. В случае третьей краевой задачи методом аппроксимации квадратично-го функционала в [3] построена разностная схема повышенной точности для стационарного линейного трехмерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами при старших и младших производных, показана сходимость к точному решению и эффективность на модельных за-

дачах. Поэтому в данной работе мы ограничились рассмотрением первой краевой задачи. В [4] построены разностные схемы повышенной точности для многомерных линейных стационарных уравнений теплопроводности со смешанными производными, с переменными коэффициентами при младших и старших производных. В [5, 6] построены разностные схемы повышенной точности для слабонелинейного стационарного многомерного уравнения теплопроводности и найден экономичный алгоритм решения систем нелинейных разностных уравнений.

В данной статье построены неявные схемы с весами и схема повышенной точности для многомерного слабонелинейного уравнения теплопроводности, на модельных задачах выявлен экономичный алгоритм решения соответствующих нелинейных разностных уравнений – это метод переменных направлений для схемы повышенной точности.

В области  $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$  и  $0 \leq t \leq T$  рассмотрим слабонелинейное уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} \partial U / \partial t &= \sum_{\alpha=1}^3 \partial^2 U / \partial x_\alpha^2 - K_0(x, t, U, \partial U / \partial x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in G, \quad t > 0, \\ \partial U / \partial x &= (\partial U / \partial x_1, \partial U / \partial x_2, \partial U / \partial x_3), \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями первого рода  $U(x, t)|_{\Gamma} = \mu(x, t)$ ,  $\Gamma$  – граница области  $G$ , и начальным условием  $U(x, 0) = U_0(x), x \in \bar{G}$ .

Слабонелинейность уравнения (1) означает [2], что функция  $K_0(x, t, p_0, p_1, p_2, p_3)$ , где  $p_0 = U, p_\alpha = \partial U / \partial x_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ , определена при  $x \in \bar{G}, t \in [0, T], |p_0|, |p_1|, |p_2|, |p_3| < \infty$  и непрерывна по  $x, t$  при фиксированных  $p_\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$ , а также существуют производные от функции  $K_0$  по  $p_\alpha$ , которые удовлетворяют условиям

$$M_0 \geq \partial K_0 / \partial p_0 \geq 0, \quad |\partial K_0 / \partial p_\alpha| \leq M, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

**1. Явная разностная схема.** Введем прямоугольную равномерную сетку  $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2, i_3 h_3)\}, \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \quad h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$  и  $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau\}, \quad n = \overline{0, m}, \tau = T/m$  и сеточную функцию  $y = y^n = y(i_1 h_1, i_2 h_2, i_3 h_3, t_n)$ . Перейдем к безиндексным обозначениям, полагая  $\hat{y} = y^{n+1}$ ,  $y_t = (\hat{y} - y)/\tau$ . Нижний индекс будем указывать только в том случае, если он отличен от  $i_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ , например,  $y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y_{i_\alpha-1})/h_\alpha$ . Рассмотрим разностные операторы

$$\Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha} = (y_{i_\alpha-1} - 2y + y_{i_\alpha+1})/h_\alpha^2, \quad \Lambda y = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_\alpha y.$$

Поставим в соответствие задаче (1) разностную схему

$$y_t = \Lambda y - 0.5[K_0(x, t, y, y_{\bar{x}}) + K_0(x, t, y, y_x)], \quad y_x = (y_{x_1}, y_{x_2}, y_{x_3}). \quad (2)$$

Краевые и начальные условия выполняются точно. Непосредственно можно убедиться, что погрешность аппроксимации разностной схемы  $\psi = \Lambda U - K_1(x, t, U, U_x) - U_t = O(|h|^2 + \tau)$ , где

$$K_1(x, t, U, U_x) = 0.5[K_0(x, t, U, U_{\bar{x}}) + K_0(x, t, U, U_x)]. \quad (3)$$

Разностная схема (2) является явной и условно устойчивой ( $\tau \leq h^2/6, h = \min h_\alpha$ ), требует малых шагов  $h$  и  $\tau$ , поэтому применяется редко [1].

**2. Схемы с весами.** Рассмотрим неявную схему с весами для уравнения (1)

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau, \\ \varphi &= -\bar{K}_1 = -K_1(x, \bar{t}, \bar{y}, \bar{y}_x), \quad \bar{t} = t_n + \tau/2, \quad \bar{y} = y(x, \bar{t}). \end{aligned} \quad (4)$$

Для оценки порядка аппроксимации схемы (4) представим

$$\begin{aligned} \sigma \hat{U} + (1 - \sigma)U &= (\hat{U} + U)/2 + (\sigma - 0.5)\tau U_t, \quad U_t = \dot{\bar{U}} + O(\tau^2), \\ \Lambda_\alpha \bar{U} &= L_\alpha \bar{U} + h_\alpha^2 / 12 L_\alpha^2 \bar{U} + O(h_\alpha^4) \end{aligned}$$

и вычислим невязку

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda(\sigma \hat{U} + (1 - \sigma)U) + \varphi - U_t = \Lambda(\hat{U} + U)/2 + (\sigma - 0.5)\tau \Lambda U_t + \varphi - U_t = \\ &= \left( L \bar{U} - \bar{K}_1 - \dot{\bar{U}} \right) + (\sigma - 0.5)\tau L \bar{U} + (\varphi + \bar{K}_1) + O(|h|^2 + \tau^2) = \\ &= (\sigma - 0.5)\tau L \bar{U} + (\varphi + \bar{K}_1) + O(|h|^2 + \tau^2), \quad \text{где } LU = \Delta U. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\psi = O(|h|^2 + \tau^2)$  при  $\sigma = 0.5$ ,  $\varphi = -\bar{K}_1$ ;  $\psi = O(|h|^2 + \tau)$  при  $\sigma \neq 0.5$ ,  $\varphi = -\bar{K}_1$ . Вместо схемы (4) можно рассматривать схемы с различными весами  $\sigma_\alpha$  по направлениям  $x_\alpha$

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_\alpha (\sigma_\alpha \hat{y} + (1 - \sigma_\alpha)y) + \varphi, \quad \varphi = -\bar{K}_1. \quad (5)$$

**3. Схема повышенной точности.** Построим схему повышенной точности для уравнения (1). Покажем, что схема

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_\alpha (\sigma_\alpha \hat{y} + (1 - \sigma_\alpha)y) + \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2 / 12 \sum_{\beta \neq \alpha}^{1+3} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y + \varphi, \quad (6)$$

$$\text{где } \sigma_\alpha = 0.5 - h_\alpha^2 / (12\tau), \quad \varphi = -\left( \bar{K}_1 + \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2 / 12 \Lambda_\alpha \bar{K}_1 \right), \quad (7)$$

имеет погрешность аппроксимации  $\psi = O(|h|^4 + \tau^2)$ .

Запишем невязку

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \Lambda_\alpha (\hat{U} + U)/2 + (\sigma_\alpha - 0.5)\tau \Lambda_\alpha U_t \right) + \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2 / 12 \sum_{\beta \neq \alpha}^{1+3} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta U + \varphi - U_t.$$

Учитывая, что  $(\hat{U} + U)/2 = \bar{U} + O(\tau^2)$ ,  $\Lambda_\alpha U_t = L_\alpha \dot{\bar{U}} + O(\tau^2 + h_\alpha^2)$ ,  
 $L_1^2 \bar{U} = L_1 \dot{\bar{U}} - L_1 L_2 \bar{U} - L_1 L_3 \bar{U} + L_1 \bar{K}_1$ ,  $L_2^2 \bar{U} = L_2 \dot{\bar{U}} - L_2 L_1 \bar{U} - L_2 L_3 \bar{U} + L_2 \bar{K}_1$ ,  
 $L_3^2 \bar{U} = L_3 \dot{\bar{U}} - L_3 L_1 \bar{U} - L_3 L_2 \bar{U} + L_3 \bar{K}_1$ ,  $\dot{\bar{U}} - L \bar{U} + \bar{K}_1 = 0$ , получим  
 $\psi = \sum_{\alpha=1}^3 [h_\alpha^2/12 + (\sigma_\alpha - 0.5)\tau] \dot{\bar{U}} + \left( \varphi + \bar{K}_1 + \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2/(12L_\alpha \bar{K}_1) \right) + O(\tau^2 + |h|^4)$ .

Таким образом,  $\psi = O(\tau^2 + |h|^4)$ , если  $\sigma_\alpha$  и  $\varphi$  взять согласно (7), при этом функция  $K_0$  в уравнении (1) должна иметь непрерывные производные по  $x_\alpha$  до четвертого порядка. Для вычисления  $\Lambda_\alpha \bar{K}_1$  в (7), (3) используем формулы:

$$\Lambda_\alpha \bar{K}_1 = (\bar{K}_1(i_\alpha - 1) - 2\bar{K}_1 + \bar{K}_1(i_\alpha + 1))/h_\alpha^2,$$

где  $\bar{K}_1(i_\alpha - 1) = \bar{K}_1((i_\alpha - 1)h_\alpha, \bar{t}_n, \bar{U}((i_\alpha - 1)h_\alpha), \bar{U}_{\bar{x}}(i_\alpha - 1))$ . Исследования на модельных задачах показали, что такая разностная производная от нелинейной функции имеет второй порядок точности, что и требуется для схемы (6).

**4. Экономичные алгоритмы.** Для решения систем разностных уравнений (5), (6) на каждом временном слое  $t_n$  можно использовать метод матричной прогонки. Однако он требует большого числа действий  $O(n_0^2)$ , где  $n_0$  – число узлов сетки  $\omega_h$  ( $n_0 = N^3$ , где  $N = N_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ). Поэтому непосредственное использование схем нецелесообразно. Каждая из схем (5), (6) может быть заменена схемой того же порядка аппроксимации, но требующей для определения  $\hat{y}$  последовательного применения скалярной прогонки для трёхточечного уравнения и затраты  $O(n_0)$  арифметических действий. Такая схема называется экономичной – это метод переменных направлений. При ее написании используется схема повышенной точности (6). Приведем схему переменных направлений для двумерного уравнения теплопроводности [2]:

$$\frac{\bar{y} - y}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_1 \bar{y} + (1 - \sigma_2)y + \sigma_1 \varphi'', \quad \frac{\hat{y} - \bar{y}}{\tau} = (1 - \sigma_1) \Lambda_1 \bar{y} + \sigma_2 \Lambda_2 \hat{y} + (1 - \sigma_1) \varphi'',$$

где  $y = y(x, t_n)$ ,  $\bar{y} = y(x, t_n + \tau/2)$ ,  $\hat{y} = y(x, t_{n+1})$ ,  $x \in \omega_h$ ,  $t_n \in \omega_\tau$ .

Запишем краевые и начальные условия

$$y(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \bar{y} = \mu(t_{n+1}) \text{ при } i_2 = 0, N_2, \quad y = \bar{\mu} \text{ при } i_1 = 0, N_1,$$

$$\text{где } \bar{\mu} = \sigma_1 \mu^{n+1} + (1 - \sigma_1) \mu'' - \tau \Lambda_2 (\sigma_1 \sigma_2 \mu^{n+1} - (1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \mu''),$$

$$\sigma_\alpha = 0.5 - h_\alpha^2/(12\tau), \quad \varphi'' = -(\bar{K}_1 + h_1^2/12\Lambda_1 \bar{K}_1 + h_2^2/12\Lambda_2 \bar{K}_1).$$

Приведем одну из модельных задач, на которых проводились исследования.

$U(x_1, x_2, t) = t^2[(x_1 + 0.5)^2 + (x_2 + 0.5)^2] + 1$  – точное решение задачи (1) в двумерной области  $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha = 1, 2\}$ ,  $t \in [0, 1]$ ; этому решению

соответствует  $K_0 = 2t[(x_1 + 0.5)^2 + (x_2 + 0.5)^2] - 16(p-1)t^4/(p_1^2 + p_2^2)$ , где  $p = U$ ,  $p_\alpha = \partial U / \partial x_\alpha$ . Для достижения точности  $10^{-4}$  потребовалось для явной схемы в 370 раз больше действий, чем для схемы повышенного порядка точности, а для неявной схемы ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ) в 9 раз больше, чем для схемы повышенного порядка точности.

Вычислительные эксперименты на модельных задачах, для которых известны точные решения, показали, что самым экономичным алгоритмом является метод переменных направлений для схемы повышенной точности, так как позволяет использовать более крупную сетку и сокращает порядок системы на каждом временном слое в десятки раз по сравнению со схемой второго порядка, что очень важно при решении многомерных задач. Разработанные алгоритмы и комплекс программ представляют интерес для практики решения нестационарного слабонелинейного многомерного уравнения теплопроводности в прямоугольной области, так как требуют только задания функции  $K_0$ , границ прямоугольной области и числа разбиений по пространственным и временной координатам.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. Вахлаева Л.Ф., Крысько В.А. Устойчивость гибких пологих оболочек в температурном поле // Прикладная механика. 1983. Т. 19, № 1. С. 16 – 23.
4. Вахлаева Л.Ф. Разностные схемы повышенной точности для эллиптических уравнений // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 74 – 77.
5. Вахлаева Л.Ф., Вахлаева Т.В. Разностные схемы повышенной точности для слабонелинейного эллиптического уравнения и сравнение со схемами второго порядка точности. Саратов, 1996. 9 с. Деп. в ВИНТИ 24.09.96, № 2855 - В96.
6. Вахлаева Л.Ф., Вахлаева Т.В., Павлова Е.А. Экономичные алгоритмы решения разностных краевых задач для эллиптических уравнений // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 21 – 23.

УДК 511.23

**А. М. Водолазов**

#### К ПРОБЛЕМАМ ОБОБЩЁННЫХ ХАРАКТЕРОВ

В 1950 г. Н. Г. Чудаков выдвинул следующую гипотезу [1]: мультиплекативная, конечнозначная числовая функция  $h(n)$  с полной базой и ограниченной сумматорной функцией  $S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = O(1)$  является характером Дирихле.

Функция  $h(n)$ , удовлетворяющая гипотезе Н.Г. Чудакова, называется обобщённым характером, а проблему, заключающуюся в решении гипотезы, называют проблемой обобщённых характеров.

Рассмотрим задачу, непосредственно связанную с проблемой обобщённых характеров, – задачу аналитического продолжения ряда Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}. \quad (1)$$

Как показано в [2] задача аналитического продолжения ряда Дирихле (1) целым образом в комплексную плоскость эквивалентна задаче существования радиальных производных степенного ряда  $q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)z^n$  в точке  $z = 1$ ,

т.е. существованию пределов вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} q^{(m)}(x) = a_m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2)$$

В данной статье обсуждается аппроксимационный подход в задаче существования пределов вида (2), который предполагает исследование скорости приближения функций, определённых на отрезке  $[0, 1]$  степенными рядами с мультипликативными коэффициентами, алгебраическими полиномами.

Действительно, пусть  $E_n(q)$  величина наилучшего приближения такой функции алгебраическими полиномами степени  $\leq n$ , в равномерной норме.

Тогда имеет место

**ТЕОРЕМА 1.** Если  $E_n(q)n^p \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $p > 1$ , то существуют конечные производные вида (2).

Для оценки величин  $E_n(q)$  автор рассмотрел  $E_n^*(q)$  – величину наилучшего приближения функции  $q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  алгебраическим полиномами с мультипликативными коэффициентами и сравнил величины  $E_n(q)$  и  $E_n^*(q)$ .

В этом направлении доказаны следующие результаты.

**ТЕОРЕМА 2.** Имеют место оценки

$$E_n^*(q) \leq C w\left(q, \frac{\ln n}{n}\right),$$

где  $C$  – константа, независящая от  $q$  и  $n$ , а  $w(q, \delta)$  – модуль непрерывности функции  $q(x)$ .

В основе доказательства теоремы 2 лежит сравнение величин  $E_n^*(q)$  и  $\hat{E}_n(\hat{q})$ , где  $\hat{q}$  определяется слагаемыми ряда  $q$  соответствующи-

ми простым степеням  $x$ , а  $\hat{E}_n(\hat{q})$  – величина наилучшего приближения функции  $\hat{q}$  алгебраическими полиномами степени  $\leq n$ , у которых коэффициенты при составных степенях  $x$  равны 0.

Утверждение теоремы 2 получается в результате предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в соотношениях для величин  $E_n^*(q)$  и  $\hat{E}_n(\hat{q})$ , имеющих место на отрезке  $[0, 1 - \varepsilon]$ .

ТЕОРЕМА 3. Имеют место следующие соотношения:

$$E_n(q) \leq \phi(n) E_n^*(q),$$

где  $\phi(n)$  – некоторая функция, удовлетворяющая условию  $\phi(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Утверждение теоремы 3 проводится сначала для случая характера Дирихле, а затем используется результат, доказанный В.В. Глазковым [3], о том, что если  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+s}$  – произвольные корни из единицы, то существует характер Дирихле  $\chi(n)$  такой, что  $\chi(n) = a_n, \dots, \chi(n+s) = a_{n+s}$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Чудаков Н.Г., Родосский К.А. Об обобщённом характере // ДАН СССР. 1950. Т. 73. С. 1137 – 1139.
2. Кузнецов В.Н. К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Тр. 3-й Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 2. С. 113 – 115.
3. Глазков В.В. Характеры мультиплекативной полугруппы натуральных чисел // Исследования по теории чисел. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1968. Вып. 2. С. 3 – 40.

УДК 517.5

С. С. Волосивец

#### СИЛЬНЫЙ $\mathcal{P}$ -ИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ И СИЛЬНАЯ $\mathcal{P}$ -ИЧНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ\*

Пусть  $\mathcal{P} = \{p_j\}_{|j| \in N}$ ,  $p_j \in N$ ,  $2 \leq p_j \leq C$ ,  $p_{-j} = p_j$ . Положим

$m_j = p_1 \dots p_j$  при  $j \in N$ ,  $m_0 = 1$  и  $m_{-l} = \frac{1}{m_l}$  при  $l \in N$ .

Каждому  $x \in [0, +\infty)$  можно сопоставить разложение

---

\* Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

$$x = \sum_{j=1}^{K(x)} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad 0 \leq x_j < p_j, \quad 0 \leq x_{-j} < p_j, \quad j \in N. \quad (1)$$

Оно определяется однозначно, если при  $x = \frac{k}{m_n}$  брать разложения с конечным числом ненулевых  $x_i$ . Коэффициенты разложения можно находить по формулам  $x_j = [x m_j] (\text{mod } p_j)$  и  $x_{-j} = [x / m_{j-1}] (\text{mod } p_j)$ . Число  $K(x)$  в (1) равно нулю при  $x < 1$ , в противном случае наибольшему натуральному  $j$ , такому что  $x_{-j} \neq 0$ . Если

$$y = \sum_{j=1}^{K(y)} y_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{m_j}, \quad 0 \leq y_{-j}, y_j < p_j, \quad (1')$$

то для  $x, y \in [0, +\infty)$ , записанных в виде (1) и (1'), определим  $x \oplus y$  равенством

$$x \oplus y = \sum_{j=1}^{\max(K(x), K(y))} z_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} z_j / m_j,$$

где  $z_j \in \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$  и  $z_j = x_j + y_j (\text{mod } p_j)$  при всех  $j \in \mathbb{Z}$ .

Для  $x \ominus y$  определение аналогично, только  $z_j = x_j - y_j (\text{mod } p_j)$ . Определим также ядро  $\chi(x, y)$  равенством

$$\chi(x, y) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{K(y)} x_j y_{-j} / p_j + \sum_{j=1}^{K(x)} x_{-j} y_j / p_j\right)\right).$$

Для  $f \in L(\mathbf{R}_+)$  мультипликативное преобразование Фурье определим формулой

$$\hat{f}(x) = F[f](x) = \int_{\mathbf{R}_+} f(y) \overline{\chi(x, y)} dy.$$

Для  $f \in L^2(\mathbf{R}_+)$   $F[f]$  определяется как предел последовательности  $\int_0^{m_n} \overline{\chi(x, y)} f(y) dy$  в  $L^2(\mathbf{R}_+)$ . Кроме существования  $F[f]$  имеет место также равенство Планшереля  $\|F[f]\|_{L^2(\mathbf{R}_+)} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}$  [1, с. 131 – 135]. Как и для обычного преобразования Фурье, из сходимости  $f_n$  к  $f$  из  $L(\mathbf{R}_+)$  следует равномерная сходимость  $\hat{f}_n$  к  $\hat{f}$  на  $\mathbf{R}_+$ . Для  $f, g \in L[0, +\infty]$  положим по определению

$$f * g(x) = \int_0^{+\infty} f(t) g(x \ominus t) dt.$$

Далее через  $X_E$  будем обозначать характеристическую функцию множества  $E$ , а через  $I_k^n$  – полуинтервал  $[k/m_n, (k+1)/m_n]$ . Будем называть  $f(x)$   $\mathcal{P}$ -непрерывной в точке  $x \in \mathbf{R}_+$ , если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{0 < h < 1/m_n} |f(x \oplus h) - f(x)| = 0.$$

Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 1 [1, с. 134]. Пусть  $f \in L(\mathbf{R}_+)$  и  $\hat{f} \in L(\mathbf{R}_+)$ . Тогда в каждой точке  $\mathcal{P}$ -непрерывности  $f(x)$  имеет место равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \hat{f}(y) \chi(x, y) dy.$$

Пусть  $S_Y(f)(x) = \int_0^Y \hat{f}(t) \chi(x, t) dt$ . Следующая лемма является аналогом теоремы 10 из [2, с. 429].

ЛЕММА 2. Если  $f \in L(\mathbf{R}_+)$ , то  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{m_n}(f) - f\|_{L(\mathbf{R}_+)} = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{1/m_n}(f)\|_{L(\mathbf{R}_+)} = \hat{f}(0)$ .

ЛЕММА 3. Пусть

$$a_{k,n}(x) = \frac{1}{m_n} \chi(k/m_n, x) X_{[0, m_n]}, \quad (2)$$

где  $k \in N$ ,  $n \in Z_+$ . Тогда  $\hat{a}_{k,n} = X_{[k/m_n, (k+1)/m_n]} = X_{I_k^n}$ .

ЛЕММА 4. Если  $k \in N$ ,  $n \in Z_+$ , то существует единственное  $r \in Z$ , такое что  $I_k^n \subset [m_r, m_{r+1})$ .

Рассмотрим теперь ступенчатую функцию  $W_n$ , равную  $p_1 + \dots + p_k + p_1 + \dots + p_k - (n+k+1)$  на  $[1/m_{k+1}, 1/m_k]$  при  $k > 0$ , а при  $-n \leq k \leq 0$   $W_n = p_{|k|+1} + \dots + p_n - (n-|k|+1)$  на  $[m_{|k|-1}, m_{|k|}]$ . На  $[m_n, +\infty)$  пусть  $W_n = 0$ . При условии  $p_k \leq C$  мы можем гарантировать  $W_n \in L[0, +\infty)$ .

Если для некоторой  $f \in L(\mathbf{R}_+)$  найдется  $g \in L(\mathbf{R}_+)$ , такая что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * W_n - g\|_{L(\mathbf{R}_+)} = 0$ , то  $g = J(f)$  назовем модифицированным сильным мультиплекативным интегралом (МСМИ) для  $f$ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $f, g \in L(\mathbf{R}_+)$ . Тогда  $g = J(f)$  в том и только в том случае, когда  $\hat{g}(0) = 0$  и  $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)h(x)$  при  $x > 0$ , где  $h(x) = 1/m_n$  при  $x \in [m_n, m_{n+1})$ ,  $n \in Z$ .

ТЕОРЕМА 2. Каждая из функций  $a_{k,n}$ , определяемых равенством (2), имеет МСМИ и является собственной функцией оператора  $J$  с собственным значением  $1/m_r$ , где  $r$  по лемме 4 однозначно определяется вложением  $I_k^n \subset [m_r, m_{r+1})$ .

СЛЕДСТВИЕ 1.  $J(a_{1,n}) = m_n a_{1,n}$ .

В самом деле  $[1/m_n, 2/m_n] \subset [1/m_n, 1/m_{n-1})$ , то есть  $r = -n$ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Линейный оператор  $J$  неограничен на своей области определения.

Если для  $f \in L(\mathbf{R}_+)$  существует  $\phi \in L(\mathbf{R}_+)$ , такая что  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \Lambda_n - \phi\|_{L(\mathbf{R}_+)} = 0$ , то  $\phi = D(f)$  назовем модифицированной сильной мультиплекативной производной (МСМП) для  $f$ , где  
 $\Lambda_n = \sum_{k=-n}^n \sum_{j=1}^{p_k-1} \chi\left(\frac{j}{m_k}, x\right) X_{[0, m_k]}(x) m_k^{-2}$  – последовательность ядер.

ТЕОРЕМА 3. Если у  $f \in L(\mathbf{R}_+)$  существует МСМП  $\phi \in L(\mathbf{R}_+)$ , то  $\hat{\phi}(0) = 0$  и  $\hat{\phi}(x) = \hat{f}(x)/h(x)$  при  $x > 0$ , где  $h(x)$  определена в теореме 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если для  $f \in L(\mathbf{R}_+)$  существует МСМП  $D(f)$  и при этом  $\hat{f}(0) = 0$ , то для  $D(f)$  существует МСМИ, причём  $J(D(f)) = f$ .

ТЕОРЕМА 4. Если для  $f \in L(\mathbf{R}_+)$  существует МСМИ  $J(f)$  и при этом  $\hat{f}(0) = 0$ , то для  $J(f)$  существует МСМП, причём  $D(J(f)) = f$ .

СЛЕДСТВИЕ 4. Каждая из функций  $a_{k,n}$ , где  $k \in \mathbf{N}$ ,  $n \in \mathbf{Z}_+$ , является собственной функцией оператора  $D$ , причём  $D(a_{k,n}) = m_r a_{k,n}$ , где  $r$  определяется вложением  $I_k^n \subset [m_r, m_{r+1})$  по лемме 4.

СЛЕДСТВИЕ 5. Оператор  $D$  неограничен на своей области определения.

При  $p_k = 2$  результаты работы получены Б. И. Голубовым [3].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. Schipp F., Wade W.R., Simon P. Walsh series. Budapest.: Akademiai Kiado, 1990.
3. Голубов Б.И. О взаимной обратимости сильного двоичного интеграла и производной // Современные проблемы теории функций и её приложения. Саратов: Гос. УНЦ, «Колледж», 2002. С. 51 – 52.

УДК 517.518.82

**И. Ю. Выгодчикова**

#### ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДИСКРЕТНОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

**1. Постановка задачи.** Пусть  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq 1$ ,  $\Phi(\cdot)$  – дискретное многозначное отображение с образами в виде отрезков  $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$ , причём  $y_{2,k} \geq y_{1,k}$ ,  $k \in [0 : N]$ ;

$p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  – алгебраический полином степени не выше  $n$  с вектором коэффициентов  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ . Рассмотрим задачу

$$\rho(A) \stackrel{df}{=} \max_{k \in [0:N]} f(A, k) \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \quad (1)$$

где  $f(A, k) = \max \{ y_{2,k} - p_n(A, t_k), p_n(A, t_k) - y_{1,k} \}$ . Доказано, что решение задачи (1) существует. Обозначим через  $\rho^* = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$ ,  $\mathfrak{R} = \{ A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^* \}$ . Заметим, что

$$\forall A \in R^{n+1} : \rho(A) \geq \rho^* \geq \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что при  $N \leq n$   $\rho^* = \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}$  и

$$\mathfrak{R} = \left\{ A(\lambda) \in R^{n+1} : \max_{k \in [0:N]} |\lambda_k| \leq 1, \text{ где } \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N); \right. \\ \left. p_n(A(\lambda), t_k) = \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} + \lambda_k \left( \rho^* - \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} \right), \quad k \in [0:N] \right\}.$$

## 2. Вспомогательные факты.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы  $A^* \in R^{n+1}$  являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

(а) существует точка  $t_s, s \in [0:N]$ , в которой имеет место равенство:

$$y_{2,s} - p_n(A^*, t_s) = p_n(A, t_s) - y_{1,s} = \rho(A^*); \quad (3)$$

(б) существуют  $(n+2)$  точки  $0 \leq t_{k_0} < t_{k_1} < \dots < t_{k_{n+1}} \leq 1$ ,  $k_i \in [0:N]$ ,  $i \in [0:n+1]$ , и числа  $\xi_i \in \{0, 1\}$ ,  $i \in [0:n+1]$ , такие, что выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \xi_i (y_{1,k_i} - p_n(A^*, t_{k_i})) + (1 - \xi_i) (y_{2,k_i} - p_n(A^*, t_{k_i})) = \\ = (-1)^{\xi_i} \rho(A^*), \quad i \in [0:n+1]; \quad \xi_{i+1} = 1 - \xi_i, \quad i \in [0:n]. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом  $\rho^* = \rho(A^*)$ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $A^*$  – некоторое решение задачи (1). Для того чтобы оно было единственным, достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:

$$(a) \quad \rho^* > \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}; \quad (5)$$

(6) существуют  $(n+1)$  точки  $0 \leq t_{k_0} < t_{k_1} < \dots < t_{k_n} \leq 1$ ,  $k_i \in [0 : N]$ ,  $i \in [0 : n]$ , в которых выполняется равенство

$$\rho^* = \frac{y_{2,k_i} - y_{1,k_i}}{2}, \quad i \in [0 : n]. \quad (6)$$

Теоремы 1 и 2 приводятся в работе [2]. Докажем следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 3.** Если  $N \geq n$ , то существует  $A^* \in \mathfrak{A}$  и точки  $\{t_{k_i}\} \subset [0 : 1]$ ,  $k_i \in [0 : N]$ ,  $i \in [0 : n]$ , для которых выполняется условие

$$f(A^*, k_i) = \rho^*, \quad i \in [0 : n]. \quad (7)$$

**Доказательство.** Возьмём произвольно  $A_0 \in \mathfrak{A}$ . Обозначим через  $Z(A_0) = \{k \in [0 : N] : f(A_0, k) = \rho^*\}$ . Ясно, что  $f(A_0, k) < \rho^*$ ,  $k \in [0 : N] \setminus Z(A_0)$ .

Пусть  $|Z(A_0)|$  – число элементов множества  $Z(A_0)$ . Если  $|Z(A_0)| \geq n+1$ , то (7) выполняется.

Рассмотрим случай, когда  $|Z(A_0)| < n+1$ . Выберем множество индексов  $\tilde{Z}(A_0) \subset [0 : N]$  так, что  $\tilde{Z}(A_0) \cap Z(A_0) = \emptyset$  и  $|\tilde{Z}(A_0)| + |Z(A_0)| = n+1$ . Рассмотрим систему линейных уравнений относительно  $A(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ :

$$p_n(A(\varepsilon), t_k) = p_n(A_0, t_k), \quad k \in Z(A_0),$$

$$p_n(A(\varepsilon), t_k) = \begin{cases} p_n(A_0, t_k) + \varepsilon, & \text{если } f(A_0, k) = p_n(A_0, t_k) - y_{1,k}, \\ p_n(A_0, t_k) - \varepsilon, & \text{если } f(A_0, k) = y_{2,k} - p_n(A_0, t_k), \end{cases} \quad k \in \tilde{Z}(A_0).$$

Обозначим  $\varepsilon_1 = \min \{ \varepsilon > 0 : \exists k(\varepsilon) \in [0 : N] \setminus Z(A_0), f(A(\varepsilon), k(\varepsilon)) = \rho^*, f(A(\varepsilon), k) \leq \rho^*, k \in [0 : N] \}$ . Положим  $A_1 = A(\varepsilon_1)$ . Тогда по построению  $A_1 \in \mathfrak{A}$  и  $|Z(A_1)| \geq |Z(A_0)| + 1$ . Если  $|Z(A_1)| < n+1$ , то к  $A_1$  применим те же рассуждения, что и к  $A_0$ . Тогда через число шагов не более чем  $n+1 - |Z(A_0)|$  мы получим вектор коэффициентов  $A^* \in \mathfrak{A}$ , для которого выполняется (7). Теорема доказана.

**3. Алгоритм решения для случая  $N = n+1$ .** Пусть функции  $\varphi_0(\cdot)$  и  $\varphi_1(\cdot)$  принимают значения:

$$\varphi_0(t_k) = \begin{cases} y_{2,k}, & k \text{ – чётно,} \\ y_{1,k}, & k \text{ – нечётно,} \end{cases} \quad \varphi_1(t_k) = \begin{cases} y_{2,k}, & k \text{ – нечётно,} \\ y_{1,k}, & k \text{ – чётно.} \end{cases}$$

Тогда (4) эквивалентно условию:

$$\begin{aligned}\varphi_0(t_k) - p_n(A^*, t_k) &= (-1)^k \rho(A^*) \text{ либо} \\ \varphi_1(t_k) - p_n(A^*, t_k) &= (-1)^{k+1} \rho(A^*), \quad k \in [0 : n+1].\end{aligned}$$

Для функций  $\varphi_0(\cdot)$  и  $\varphi_1(\cdot)$ , заданных дискретно, положим

$$\rho_i(A) \stackrel{df}{=} \max_{k \in [0 : n+1]} |\varphi_i(t_k) - p_n(A, t_k)|, \quad i = \overline{0, 1},$$

и рассмотрим соответствующие задачи П.Л. Чебышева [1, гл.1]

$$\rho_i(A) \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \quad i = \overline{0, 1}. \quad (8)$$

Алгоритм решения задачи (1) состоит в последовательности шагов.

**Шаг 1.** Применяем для  $\varphi_0(\cdot)$  чебышевскую интерполяцию [1, гл. 1, §2] в узлах  $t_k$ ,  $k \in [0 : n+1]$ , то есть находим решение  $A_0$  задачи (8) при  $i = 0$ :  $\rho_0(A_0) = \min_{A \in R^{n+1}} \rho_0(A)$ . Если  $\rho_0(A_0) = \max_{k \in [0 : n+1]} f(A_0, k)$ , то, в силу теоремы 1 и теоремы 2.1 из [1, с. 14],  $A_0$  будет искомым, причём единственным, решением задачи (1). Иначе переходим к шагу 2.

**Шаг 2.** Решаем задачу (8) для  $i = 1$ . Пусть  $\rho_1(A_1) = \min_{A \in R^{n+1}} \rho_1(A)$ . Если  $\rho_1(A_1) = \max_{k \in [0 : n+1]} f(A_1, k)$ , то  $A_1$  будет искомым, причём единственным, решением задачи (1). Иначе переходим к шагу 3.

**Шаг 3.** Итак, ни одна из задач П.Л. Чебышева (8) не даёт решения задачи (1). Следовательно, условие (б) теоремы 1 не выполняется, а значит, имеет место (а) и  $\rho^* = \max_{k \in [0 : n+1]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}$ . Обозначим через  $Z = \left\{ k \in [0 : N] : \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = \rho^* \right\}$ . Если  $|Z| \geq n+1$ , то имеет место (6), следовательно, по теореме 2, решение единствено и находится из системы  $(n+1)$  линейных уравнений

$$p_n(A^*, t_k) = \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2}, \quad k \in \hat{Z},$$

где  $\hat{Z} \subseteq Z$ ,  $|\hat{Z}| = n+1$ .

Если  $|Z| < n+1$ , переходим к шагу 4.

**Шаг 4.** Пусть  $k_0 \in [0 : n+1] \setminus Z$ . Возьмём произвольно  $\mu_k \in \{0, 1\}$ ,  $k \in [0 : n+1]$ ,  $k \neq k_0$  и решим относительно  $A$  систему

$$p_n(A, t_k) = \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2}, \quad k \in Z, \quad (9)$$

$$p_n(A, t_k) = \mu_k(y_{2,k} - p^*) + (1 - \mu_k)(y_{1,k} - p^*) \quad k \in [0 : n+1] \setminus Z, k \neq k_0. \quad (10)$$

Нетрудно увидеть, в силу теоремы 3, что найдётся  $k_0 \in [0 : n+1] \setminus Z$  и набор параметров  $\mu_k \in \{0, 1\}$ ,  $k \in [0 : n+1]$ ,  $k \neq k_0$ , при которых решение  $A^*$  системы (9) – (10) будет одновременно решением задачи (1), то есть  $A^* \in \mathbb{R}$ . Критерием распознавания решения служит условие  $f(A^*, k_0) \leq p^*$ . Таким образом, для нахождения  $A^*$  требуется решить не более чем  $(n+2-|Z|) \cdot 2^{n+1-|Z|}$  систем линейных уравнений.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
2. Выгодчикова И.Ю. О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 25 – 27.

УДК 514.764

**С. В. Галаев, А. В. Гохман**

### НЕГОЛОННОМНЫЕ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С ПРИСОЕДИНЕННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

1. Пусть  $(X_n^m, \omega)$  – неголономное почти симплектическое многообразие с интегрируемым оснащением  $X_n^{n-m}$  [1]. Обобщая голономный случай [2], рассмотрим допустимую связность на  $X_n^m$  [1]  $\nabla$  такую, что

$$\nabla \omega = \mu D\omega, \quad (1)$$

где  $\mu \in R$ ,  $D\omega(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = d\omega(H\bar{u}, H\bar{v}, H\bar{w})$ ,  $H: T(X_n) \rightarrow X_n^m$  – проектор вдоль оснащения  $X_n^{n-m}$ . Связность  $\nabla$  назовем присоединенной связностью. Расписывая уравнение (1) в специальных координатах [1] и циклируя его, получаем, что в случае, когда  $D\omega \neq 0$ , присоединенная связность может быть симметричной только при  $\mu = \frac{1}{3}$ . Если при этом  $D\omega = 0$ , то присоединенная симметричная связность оказывается почти симплектической симметричной связностью [1].

В настоящей статье рассматривается  $(X_n^m, \omega)$  с присоединенной связностью  $\nabla$  в случае  $\mu = \frac{1}{3}$ . В специальных координатах, таким образом, мы имеем

$$\nabla_a \omega_{bc} = \frac{1}{3} D\omega_{abc}, \quad (2)$$

где  $a, b, c = 1, \dots, m$ .

Непосредственным вычислением проверяется справедливость следующих утверждений.

*Предложение 1.* Пусть  $\overset{0}{\nabla}\omega = 0$ , тогда связность  $\overset{1}{\nabla}$ , определяемая равенством

$$\overset{1}{\Gamma}_{bc}^a = \overset{0}{\Gamma}_{bc}^a - \frac{1}{6} \omega^{da} D\omega_{bcd}, \quad (3)$$

является присоединенной.

*Предложение 2.* Если  $\overset{1}{\nabla}$  – присоединенная связность, то связность  $\overset{2}{\nabla}$  с коэффициентами  $\overset{2}{\Gamma}_{bc}^a$ , удовлетворяющими равенству

$$\overset{2}{\Gamma}_{bc}^a = \overset{1}{\Gamma}_{bc}^a - \omega^{da} B_{bcd}, \quad (4)$$

является присоединенной тогда и только тогда, когда  $B_{bcf} = B_{bfc}$ .

2. Рассмотрим  $(X_n^{n-1}, \omega)$ ,  $n \geq 5$  с симметричной присоединенной связностью  $\nabla$  нулевой кривизны [3]. При этом мы имеем в виду, что в рассматриваемом случае обращение в ноль тензора кривизны Вагнера [3] эквивалентно равенству  $R = 0$ , где

$$R_{abc}^d = 2\bar{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d\Gamma_{b]e]}^e \quad (5)$$

– тензор кривизны Схоутена [3]. Следуя Лемлейну [4], введем в рассмотрение объект

$$\gamma_{abc} = \bar{e}_c \omega_{ba} - \bar{e}_b \omega_{ac} + 3\omega_{ad} \Gamma_{bc}^d, \quad (6)$$

с помощью которого коэффициенты присоединенной связности записутся в виде

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{3} \omega^{ad} (\bar{e}_c \omega_{db} - \bar{e}_b \omega_{cd} + \gamma_{dbc}). \quad (7)$$

Используя (2) и (7), получаем

$$\gamma_{abc} = -\omega_{d(a} \Gamma_{bc)}^d. \quad (8)$$

В пространстве  $X_n^m$  нулевой кривизны [3] введем специальную систему координат таким образом, чтобы

$$\Gamma_{bc}^a = 0. \quad (9)$$

Из (8) мы получаем, что

$$\gamma_{abc} = 0. \quad (10)$$

Из (7), (9) и (10) получаем

$$\bar{e}_a \omega_{bc} = \bar{e}_b \omega_{ca} = \bar{e}_c \omega_{ab}. \quad (11)$$

Учитывая (2) и (7) и предполагая, что  $\partial_p \omega_{ab} = 0$ , ( $p = 1$ ), получаем

$$0 = \omega_{ab} R^b_{cde} = \frac{1}{3} (\bar{e}_e \bar{e}_c \omega_{da} - \bar{e}_e \bar{e}_d \omega_{ca}) + \frac{1}{3} (\bar{e}_d \gamma_{ace} - \bar{e}_c \gamma_{ade}) + \omega_{fg} (\Gamma^f_{ec} \Gamma^g_{ad} - \Gamma^f_{ed} \Gamma^g_{ac}) - \frac{1}{3} (D\omega_{afg} \Gamma^f_{ce} - D\omega_{afc} \Gamma^f_{de}). \quad (12)$$

Откуда следует

$$\bar{e}_a \bar{e}_b \omega_{cd} = \bar{e}_a \bar{e}_c \omega_{bd}, \quad (13)$$

а из (11) –

$$\bar{e}_a \bar{e}_b \omega_{cd} = -\bar{e}_a \bar{e}_c \omega_{bd} \quad (14)$$

$$\text{Из (13) и (14) следует, что } \bar{e}_a \bar{e}_c \omega_{bd} = \frac{\partial^2 \omega_{bd}}{\partial x^a \partial x^c} = 0.$$

Отсюда мы заключаем, что в случае пространства нулевой кривизны допустимая почти симплектическая структура, удовлетворяющая дополнительному условию

$$\partial_p \omega_{ab} = 0, \quad (15)$$

в специальных координатах представима в виде

$$\omega_{ab} = \omega_{abc} x^c + \omega_{ab}, \quad (16)$$

где  $\omega_{abc}$ ,  $\omega_{ab}$  – постоянные, кососимметричные по любой паре индексов формы.

Если  $D\omega = \nabla\omega = 0$ , то условие (9) влечет равенство  $\bar{e}_a \omega_{bc} = 0$  и, как следствие, равенство

$$M^p_{ab} \partial_p \omega_{cd} = 0, \quad (17)$$

здесь  $M^p_{ab}$  – тензор неголономности [3].

В рассматриваемом нами случае многообразия  $X_n^{n-1}$  коразмерности 1 условия (15) и (17) эквивалентны и влекут замкнутость формы  $\omega$ :  $d\omega = 0$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галаев С.В., Гохман А.В. Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 28 – 31.
2. Левин Ю.И. Об аффинных связностях, присоединенных к кососимметрическому тензору // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 4. С. 668 – 671.
3. Вагнер В.В. Геометрия  $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.:Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1941. Вып. 5. С. 173 – 225.
4. Лемлейн В.Г. Тензор кривизны и некоторые типы пространств симметричной почти симплектической связности // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 4. С. 655 – 658.

## СОГЛАСОВАНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ В РЕШЁТКЕ ОТНОШЕНИЙ

1. Проблема согласования предпочтений состоит в сведении нескольких индивидуальных мнений о порядке предпочтения объектов в единое “коллективное” предпочтение. Существует два основных подхода к этой проблеме: аксиоматический и процедурный. Аксиоматический подход восходит к знаменитой работе Эрроу [1, 2], в которой было установлено, что система естественных аксиом для согласования ранжирований является противоречивой. Из процедур согласования предпочтений наиболее известной и употребительной на практике является правило большинства (а также его различные модификации). Однако это правило обладает существенным недостатком: оно может привести к нетранзитивному итоговому отношению, даже если все исходные отношения транзитивны (парадокс Кондорсе). В начале 70-х гг. Дж. Кемени была предложена процедура согласования отношений предпочтения, основанная на введении метрики в пространстве отношений [3] – построение так называемой медианы. Отправляясь от этой идеи, в работе [2] было дано описание медиан для отношений эквивалентности и квазипорядка. В данной статье рассматривается аналогичный подход для более общих классов отношений: единственное требование, накладываемое на тип отношений, состоит в свойстве замкнутости относительно пересечения. Также изучаются некоторые системы аксиом для правил согласования предпочтений, которые являются менее “жесткими”, чем система аксиом Эрроу.

2. Под отношением предпочтения на множестве  $A$  понимается произвольное рефлексивное бинарное отношение  $\rho \subseteq A^2$  (высказывание  $(a, b) \in \rho$  интерпретируется так, что объект  $a$  является не менее предпочтительным, чем объект  $b$ ).

Пусть  $I$  – произвольное множество (интерпретируется как множество индивидуумов). Под правилом согласования предпочтений индивидуумов  $I$  понимается отображение, которое каждому набору отношений предпочтения  $(\rho_i)_{i \in I}$ , где  $\rho_i \subseteq A^2$ , ставит в соответствие отношение предпочтения  $\rho = F[(\rho_i)_{i \in I}]$  на множестве  $A$ . Далее будем предполагать, что индивидуальные отношения предпочтения  $\rho_i$ , ( $i \in I$ ), а также согласованное отношение предпочтения  $\rho$  принадлежат некоторому семейству  $S$ , которое замкнуто относительно теоретико-множественного пресечения. В этом случае множество  $S$  образует полную решётку относительно операций инфимума  $\inf$  и супремума  $\sup$ .

Рассмотрим следующие две аксиомы для правила согласования предпочтений.

АКСИОМА  $A_1$ : Если  $\rho_i = \rho^*$  для всех  $i \in I$ , то  $F[(\rho_i)_{i \in I}] = \rho^*$ .

АКСИОМА  $B_1$ : Если для каждого  $i \in I$  справедливо  $\rho_i \subseteq \bar{\rho}_i$ , то  $F[(\rho_i)_{i \in I}] \subseteq F[(\bar{\rho}_i)_{i \in I}]$ .

ТЕОРЕМА 1. Если правило согласования предпочтений удовлетворяет аксиомам  $(A_1, A_2)$ , то для любого набора отношения предпочтения  $(\rho_i)_{i \in I}$  выполняется

$$\inf_{i \in I} \rho_i \subseteq F[(\rho_i)_{i \in I}] \subseteq \sup_{i \in I} \rho_i. \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть  $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} \rho_i$ . Тогда при каждом  $i \in I$  выполняется  $\Delta \bigcup \{(a, b)\} \subseteq \rho_i$  (где  $\Delta$  – тождественное отношение на  $A$ ).

По аксиоме  $B_1$  получаем включение  $F[\Delta \bigcup \{(a, b)\}_{i \in I}] \subseteq F[(\rho_i)_{i \in I}]$ . По аксиоме  $A_1$  левая часть этого включения есть  $\Delta \bigcup \{(a, b)\}$ , откуда  $(a, b) \in F[(\rho_i)_{i \in I}]$ . Показано, что  $\bigcap_{i \in I} \rho_i \subseteq F[(\rho_i)_{i \in I}]$ , а так как в решетке  $S$  имеет место  $\rho_i = \bigcap_{j \in I} \rho_j$ , получаем доказательство левой части (1).

Для доказательства правой части (1) рассмотрим включение  $\rho_i \subseteq \sup_{j \in I} \rho_j$ , справедливое при любом  $i \in I$ . Используя последовательно аксиомы  $B_1$  и  $A_1$ , имеем:

$$F[(\rho_i)_{i \in I}] \subseteq F\left[\left(\sup_{j \in I} \rho_j\right)_{i \in I}\right] = \sup_{j \in I} \rho_j.$$

Итак, приняв аксиомы  $A_1$  и  $B_1$  (которые представляют собой очень слабые требования), мы получаем в качестве их следствия следующее.

**Правило 1.** Согласованное отношение предпочтения должно находиться в интервале  $\left[ \inf_{i \in I} \rho_i, \sup_{i \in I} \rho_i \right]$ .

3. Возьмем 2 модифицированные аксиомы Эрроу.

АКСИОМА  $A_2$  (аксиома поточечной изотопности): Пусть  $(\rho_i)_{i \in I}$ ,  $(\bar{\rho}_i)_{i \in I}$  – два набора отношений предпочтения. Если для элементов  $a, b \in A$  при любом  $i \in I$  справедлива импликация

$$(a, b) \in \rho_i \Rightarrow (a, b) \in \bar{\rho}_i,$$

тогда имеет место импликация

$$(a, b) \in F[(\rho_i)_{i \in I}] \Rightarrow (a, b) \in F[(\bar{\rho}_i)_{i \in I}].$$

АКСИОМА  $B_2$  (ненавязанность группового решения): Пусть  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ . Тогда найдутся такие два набора отношений предпочтения на  $A$ :  $(\rho_i^1)_{i \in I}$ ,  $(\rho_i^2)_{i \in I}$ , что

- а)  $(a, b) \in F[(\rho_i^1)_{i \in I}]$ ;
- б)  $(a, b) \notin F[(\rho_i^2)_{i \in I}]$ .

ТЕОРЕМА 2. Из системы аксиом  $(A_2, B_2)$  следуют аксиомы  $A_1$  и  $B_1$ .

Доказательство. Пусть  $(\rho_i)_{i \in I}$  – произвольный набор отношений предпочтения на  $A$ ,  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ . Тогда:

- 1) если для всех  $i \in I$  справедливо  $(a, b) \in \rho_i$ , то  $(a, b) \in F[(\rho_i)_{i \in I}]$ ;
- 2) если для всех  $i \in I$  справедливо  $(a, b) \notin \rho_i$ , то  $(a, b) \notin F[(\rho_i)_{i \in I}]$ .

Действительно, покажем 1). По аксиоме  $B_2$  найдется набор отношений предпочтения  $(\rho_i^1)_{i \in I}$  на  $A$ , для которого  $(a, b) \in F[(\rho_i^1)_{i \in I}]$ . Так как при каждом  $i \in I$  выполняется (в силу истинности следствия) импликация

$$(a, b) \in \rho_i^1 \Rightarrow (a, b) \in \rho_i,$$

то по аксиоме  $A_2$  справедливо условие

$$(a, b) \in F[(\rho_i^1)_{i \in I}] \Rightarrow (a, b) \in F[(\rho_i)_{i \in I}]. \quad (2)$$

Посылка импликации (2) по предположению истинна, поэтому справедливо и следствие, что доказывает 1).

Покажем 2). По аксиоме  $B_2$  найдется набор отношения предпочтения  $(\rho_i^2)_{i \in I}$  на  $A$  для которого  $(a, b) \notin F[(\rho_i^2)_{i \in I}]$ . Тогда при каждом  $i \in I$  выполняется (в силу ложности посылки)

$$(a, b) \in \rho_i^2 \Rightarrow (a, b) \in \rho_i^2,$$

то по аксиоме  $A_2$  справедлива импликация

$$(a, b) \in F[(\rho_i^2)_{i \in I}] \Rightarrow (a, b) \in F[(\rho_i^2)_{i \in I}]. \quad (3)$$

Так как следствие импликации (3) ложно, то ложна и посылка, то есть  $(a, b) \notin F[(\rho_i^2)_{i \in I}]$ .

Из утверждений 1) и 2) следует,

$$\bigcap_{i \in I} \rho_i \subseteq F[(\rho_i)_{i \in I}] \subseteq \bigcup_{i \in I} \rho_i. \quad (4)$$

Полагая в (4)  $\rho_i = \rho^*$  для всех  $i \in I$ , получаем  $F[(\rho_i)_{i \in I}] = \rho^*$ , то есть проверили аксиому  $A_1$ . Ясно, что аксиома  $B_1$  является следствием аксиомы  $B_2$ .

Утверждение 2 доказано.

4. Приняв указанные выше аксиомы  $A_2$  и  $B_2$  (или  $A_1, B_1$ ), мы должны для семейства отношений предпочтения  $(\rho_i)_{i \in I}$  выбирать в качестве согласованного отношения предпочтения отношение  $\rho$ , принадлежащее интервалу  $[\rho^1, \rho^2]$ , где  $\rho^1 = \inf_{i \in I} \rho_i$ ,  $\rho^2 = \sup_{i \in I} \rho_i$ . В соответствии с подходом

Дж. Кемени в качестве итогового отношения предпочтения выступает отношение предпочтения  $\rho \subseteq A^2$ , для которого  $\sum_{i \in I} d(\rho, \rho_i)$  делается минимальной, где  $d$  – метрика Хэминга [2] ( $\rho$  называется медианой элементов  $(\rho_i)_{i \in I}$ ).

Можно показать, что если решетка  $S$  метрическая [4], то медиана элементов  $(\rho_i)_{i \in I}$  всегда попадает в интервал  $\left[ \inf_{i \in I} \rho_i, \sup_{i \in I} \rho_i \right]$ .

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Льюс Р., Райфа Х. Игры и решения. М.: Изд-во иностр. лит. 1961.
2. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
3. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. М.: Советское радио, 1972.
4. Биргкгоф Г. Теория решёток. М.: Наука, 1984.

УДК 517.984

О. Б. Горбунов

### ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА\*

Рассмотрим краевую задачу  $L = L(\alpha, \beta, \gamma, \mu, \eta, Q(x))$ :

$$By' + (Q_{<0>}(x) + Q(x))y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$V_1^T(\alpha)y(0) = V_1^T(\beta)y(\pi) = 0, \quad (2)$$

где

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad Q_{<0>}(x) = \frac{\mu}{x - \gamma} \begin{pmatrix} \sin 2\eta & \cos 2\eta \\ \cos 2\eta & -\sin 2\eta \end{pmatrix}, \quad \gamma \in (0, \pi), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -q_1(x) \end{pmatrix}, \quad V(\alpha) = (V_1(\alpha), V_2(\alpha)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad T - \text{знак}$$

транспонирования.

Здесь  $q_k(x)$  – комплекснозначные функции,  $\mu, \alpha, \beta, \eta$  – комплексные числа. Пусть для определенности  $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re} \eta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\operatorname{Re} \mu > 0$ ,  $\mu + 1/2 \notin \mathbb{N}$ , и пусть  $|x - \gamma|^{-2 \operatorname{Re} \mu} |q_k(x)| \in L(0, \pi)$ ,  $q_k(x) \in W_1^1(0, \pi)$ ,  $k = 1, 2$ .

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

Прямая и обратная задачи для  $L$  без особенности изучены достаточно полно [1]. Некоторые аспекты прямой задачи для  $L$  рассмотрены в [2]. В данной статье изучается обратная задача, а именно приводится основное уравнение обратной задачи.

При работе с  $L$  важную роль играет специальная фундаментальная система решений системы уравнений (1)  $\{S_j(x, \lambda)\}_{j=1,2}$ , изучавшаяся в [3], которая позволяет «склеить» решения в особой точке.

Обозначим  $S(x, \lambda) = (S_1(x, \lambda), S_2(x, \lambda))$  фундаментальную матрицу системы (1). Далее введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, \lambda) &= S(x, \lambda)S^{-1}(0, \lambda)V_2(\alpha), \\ \Delta(\lambda) &= V_1^T(\beta)\Phi_2(\pi, \lambda), \\ \Phi_1(x, \lambda) &= (\Delta(\lambda))^{-1}S(x, \lambda)S^{-1}(\pi, \lambda)V_2(\beta), \\ M(\lambda) &= V_2^T(\alpha)\Phi_1(0, \lambda),\end{aligned}$$

где  $\Delta(\lambda)$  – характеристическая функция,  $M(\lambda)$  – функция Вейля задачи  $L$ .

*Обратная задача.* По функции Вейля  $M(\lambda)$  построить  $L$ .

Условимся, что наряду с задачей  $L$  будем рассматривать задачу  $\tilde{L} = L(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\mu}, \tilde{\eta}, \tilde{Q}(x))$ . Если некоторый символ  $a$  обозначает объект, относящийся к задаче  $L$ , то  $\tilde{a}$  – аналогичный объект задачи  $\tilde{L}$ .

ТЕОРЕМА 1. Если  $M(\lambda) \equiv \tilde{M}(\lambda)$ , то  $\tilde{\alpha} - \alpha = \tilde{\beta} - \beta = \eta - \tilde{\eta}$ ,  $\gamma = \tilde{\gamma}$ ,  $\mu = \tilde{\mu}$  и  $\tilde{Q}(x) = Q(x)V^2(\alpha - \tilde{\alpha})$ .

Таким образом, если  $M(\lambda) \equiv \tilde{M}(\lambda)$ , то  $L$  может быть приведена к  $\tilde{L}$  заменой  $y(x) = V(\alpha - \tilde{\alpha})\tilde{y}(x)$ .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть  $\alpha = \tilde{\alpha} = 0$ . Если  $M(\lambda) \equiv \tilde{M}(\lambda)$ , то  $L = \tilde{L}$ .

Далее для простоты ограничимся случаем простого спектра, то есть случаем простых нулей характеристической функции.

Пусть задачи  $L$  и  $\tilde{L}$  выбраны так, что  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi_k < +\infty$ , где  $\xi_k = |\lambda_k - \tilde{\lambda}_k| + |a_k - \tilde{a}_k|$ ,  $a_k = \text{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda)$ ,  $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$  – собственные значения задачи  $L$ .

ЛЕММА 1. Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\Phi_j(x, \lambda) &= \tilde{\Phi}_j(x, \lambda) + \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\langle \tilde{\Phi}_j(x, \lambda), \tilde{\Phi}_2(x, \lambda_k) \rangle}{\lambda - \lambda_k} a_k \Phi_2(x, \lambda_k) - \frac{\langle \tilde{\Phi}_j(x, \lambda), \tilde{\Phi}_2(x, \tilde{\lambda}_k) \rangle}{\lambda - \tilde{\lambda}_k} \tilde{a}_k \Phi_2(x, \tilde{\lambda}_k) \right),\end{aligned}$$

$j=1,2$ , где  $\langle y, z \rangle = \det(y, z) = y^T B z$ , причем ряды сходятся абсолютно и равномерно при  $x \in (0, \gamma - \varepsilon) \cup (\gamma + \varepsilon, \pi)$  при каждом  $\varepsilon > 0$ .

Рассмотрим банахово пространство  $m$  ограниченных последовательностей  $\psi = (\dots, \psi_{-2,0}, \psi_{-2,1}, \psi_{-1,0}, \psi_{-1,1}, \psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \psi_{1,0}, \psi_{1,1}, \dots)$  с нормой  $\|\psi\| = \max_{k \in Z, j=1,2} |\psi_{kj}|$ .

ТЕОРЕМА 2. При каждом  $x \neq \gamma$  имеют место соотношения:

$$\tilde{\psi}^{<j>} (x) = (E - \tilde{H}(x)) \psi^{<j>} (x), \quad j=1,2, \quad (3)$$

где  $\begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{k0}^{<j>} (x) \\ \tilde{\psi}_{k1}^{<j>} (x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_k (\tilde{\Phi}_{j2}(x, \lambda_k) - \tilde{\Phi}_{j2}(x, \tilde{\lambda}_k)) \\ \tilde{\Phi}_{j2}(x, \tilde{\lambda}_k) \end{bmatrix}$ ,  $\chi_k = \begin{cases} \xi_k^{-1}, \xi_k \neq 0, & k \in Z, \\ 0, \xi_k = 0, & \end{cases}$ ,

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{n0,k0}(x) & \tilde{H}_{n0,k1}(x) \\ \tilde{H}_{n1,k0}(x) & \tilde{H}_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_{n0,k0}(x) & \tilde{P}_{n0,k1}(x) \\ \tilde{P}_{n1,k0}(x) & \tilde{P}_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P}_{ni,kj}(x) = \frac{\langle \tilde{\Phi}_2(x, \lambda_{ni}), \tilde{\Phi}_2(x, \lambda_{kj}) \rangle}{\lambda_{ni} - \lambda_{kj}}, \quad n, k \in Z, \quad i, j = 1, 2, \quad \lambda_{n0} = \lambda_n, \lambda_{n1} = \tilde{\lambda}_n.$$

ТЕОРЕМА 3. При каждом фиксированном  $x \neq \gamma$   $E - \tilde{H}(x)$  – линейный ограниченный оператор, действующий из  $m$  в  $m$ , имеющий ограниченный обратный.

Соотношение (3) называется основным уравнением обратной задачи. Далее, из леммы 1 и теоремы 2 можно получить алгоритм и необходимые и достаточные условия решения обратной задачи.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
2. Горбунов О.Б. Спектральные свойства системы Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 34 – 37.
3. Горбунов О.Б. О системе Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 21 – 24.

## ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ ПИКА\*

Обозначим через  $S(M)$  класс голоморфных однолистных в единичном круге  $D$  функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad z \in D,$$

таких, что  $|f(z)| < M$ . Функция Пика

$$P_M(z) = MK^{-1} \left( \frac{K(z)}{M} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(M) z^n \in S(M), \quad K(z) = \frac{z}{(1-z)^2},$$

является экстремальной во многих задачах на классе  $S(M)$ . Так, в работе [1] рассмотрен линейный функционал

$$L(\alpha, \beta; f) = a_5 + \alpha a_4 + \beta a_3 + 3\alpha a_2$$

и найдено множество  $E \subset \mathbf{R}^2$  такое, что для всякой точки  $(\alpha, \beta) \in E$  существует  $M(\alpha, \beta) > 1$ , обладающее свойством, что функция Пика  $P_M$  доставляет  $\max \operatorname{Re} L(\alpha, \beta; f)$  в классе  $S(M)$  для всех  $M \in (1, M(\alpha, \beta))$ . Таким образом,  $M(\alpha, \beta)$  служит оценкой радиуса окрестности тождественной функции, в которой функции Пика обладают экстремальными свойствами по отношению к функционалу  $L(\alpha, \beta; f)$ .

Доказательство теоремы в работе [1] опиралось на теорему существования обратного отображения, которое выражает зависимость решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений от начальных данных. Принцип сжатых отображений и другие методы функционального анализа предлагают конструктивный вывод о существовании неявного и обратного отображения [2, с. 231], позволяющий оценить радиус окрестности заданной точки, где оно определено. Подобный подход дает возможность найти нижние оценки величин  $M(\alpha, \beta)$ .

Опишем подробнее алгоритм нахождения оценки  $M(\alpha, \beta)$ . С помощью дифференциального уравнения Левнера выводим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = G(t, X, u), \quad X(0) = 0, \quad (1)$$

представляющую систему коэффициентов экстремальной функции по формуле  $X(\log M) = (a_2, a_3, a_4, a_5)^T$ . Система (1) является управляемой, в

\* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00123.

ее правую часть входит неизвестная функция  $u = u(t)$ , называемая управлением.

Функция Гамильтона для системы (1) имеет вид

$$H(t, X, \bar{\Psi}, u) = \operatorname{Re} G\bar{\Psi},$$

где вектор  $\bar{\Psi}$  удовлетворяет сопряженной системе и условиям трансверсальности

$$\frac{d\bar{\Psi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}, \quad \bar{\Psi}(\log M) = (3\alpha, \beta, \alpha, 1)^T. \quad (2)$$

В каждой точке непрерывности управления  $u(t)$  доставляет максимум функции Гамильтона, поэтому оно является корнем уравнения

$$H_u(t, X, \bar{\Psi}, u) = 0. \quad (3)$$

При выполнении условий регулярности

$$H_{uu}(t, X, \bar{\Psi}, u) \neq 0$$

уравнение (3) определяет неявную функцию  $u = u(t, X, \bar{\Psi})$ .

Заменим условие трансверсальности в системе (2) на начальное условие  $\psi(0) = \xi$  и рассмотрим отображение

$$F : \xi \rightarrow \psi(\log M).$$

Обозначим через  $\xi^0 = \psi(0)$  значение решения системы (2) в точке  $t = 0$ , если в ней положено  $u = \pi$ .

1-й шаг. Находим  $M_1$  такое, что для всех  $M \in (1, M_1)$  выполняется неравенство  $\|(F')^{-1}(\xi^0)\| \leq 2$ .

2-й шаг. Для заданного  $l$  находим  $M_2$  такое, что для всех  $M \in (1, M_2)$  и всех  $\xi$ ,  $\|\xi - \xi^0\| \leq l$ , выполняется неравенство

$$\|F'(\xi) - F'(\xi^0)\| \leq \frac{1}{4}.$$

3-й шаг. Находим  $l_1$  такое, что неравенство  $\|\xi - \xi^0\| \leq l_1$  обеспечивает неравенство

$$H_{uu}(0, 0, \xi, u(0, 0, \xi)) \leq \frac{H_{uu}(0, 0, \xi^0, \pi)}{2}.$$

4-й шаг. Находим  $M_3$  такое, что для всех  $M \in (1, M_3)$  выполняется условие

$$\|F'(\xi^0) - \xi^0\| \leq \frac{l_1}{8}.$$

5-й шаг. Находим  $M_4$  такое, что для всех  $M \in (1, M_4)$  выполняется условие  $\operatorname{Re} F(\xi^0) \in E$ .

6-й шаг. Находим  $M_5$  такое, что для всех  $t \in (0, \log M_5)$  и  $\xi$ ,  
 $\|\xi - \xi^0\| \leq l_1$ , выполняется неравенство

$$H_{uu}(t, X, \bar{\psi}, u) \leq \frac{H_{uu}(0, 0, \xi^0, \pi)}{4}.$$

Реализация всех шести шагов приводит к следующей теореме.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $(\alpha, \beta) \in E$ ,  $l = l_1$  и числа  $M_1, \dots, M_5$  определены шагами 1, ..., 6. Тогда  $M(\alpha, \beta) \geq \min_{1 \leq k \leq 5} M_k$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Григорьева Е.В. Оценка линейного функционала для однолистных функций, близких к тождественной // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 25 – 27.

2. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

УДК 511.23

Г. И. Гусев

#### О КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В $p$ -АДИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Пусть  $p$  – нечетное простое,  $Q_p$  – поле  $p$ -адических чисел,  $O_p$  – кольцо целых  $p$ -адических чисел и  $U_p$  – группа единиц поля  $Q_p$ ,  
 $f(x, y) = \sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$  – степенной ряд с целыми  $p$ -адическими коэффициентами, подчиненными условию  $\lim_{\alpha+\beta \rightarrow \infty} a_{\alpha\beta} = 0$ . В этом случае  $f(x, y)$  представляет собой аналитическую функцию на компакте  $O_p \times O_p$  [1].

**ТЕОРЕМА.** Если аналитическая функция  $f(x, y)$  такова, что для каждого решения  $(x_0, y_0)$  системы сравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \pmod{p} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 \pmod{p} \end{cases} \quad (1)$$

выполняется условие

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (2)$$

является  $p$ -адической единицей.

Тогда в компакте  $K_{x_0, y_0} = (x_0 + pO_p) \times (y_0 + pO_p)$ :

1) существует и притом единственное решение  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}; \quad (3)$$

2) для ряда Тейлора функции  $f(x, y)$

$$T_\theta f(x, y) = f(\theta_1, \theta_2) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta_1, \theta_2)(x - \theta_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\theta_1, \theta_2)(x - \theta_1)(y - \theta_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta_1, \theta_2)(y - \theta_2)^2 \right) + \dots$$

на компакте  $K_{x_0, y_0}$  имеет место изометрическая эквивалентность

$$T_\theta f(x, y) \equiv f(\theta_1, \theta_2) + \frac{1}{2!} d_\theta^{(2)} f(x, y), \quad (4)$$

где  $d_\theta^{(2)} f(x, y)$  – второй дифференциал  $f(x, y)$  в точке  $\theta$ .

**Доказательство.** Ввиду условия (2) вектор-функция  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)'$  на компакте  $K_{x_0, y_0}$  изометрически эквивалентна линейной вектор-функции [1]

$$\text{вида } \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{pmatrix}.$$

В силу условия (1) система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \end{cases}$$

имеет и притом единственное решение в компакте  $K_{x_0, y_0}$ .

Для доказательства изометрической эквивалентности (4) отметим, что  $K_{x_0, y_0} = K_{\theta_1, \theta_2}$  и

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\theta) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta) \end{pmatrix} \in U_p. \quad (5)$$

Далее, замена переменных  $x - \theta_1 = pu, y - \theta_2 = pv$ , где  $u, v \in O_p$  приводит ряд Тейлора  $T_\theta f(x, y)$  к виду

$$T_\theta f(\theta_1 + pu, \theta_2 + pv) = f(\theta_1, \theta_2) + \sum_{s=2}^{\infty} p^s \Phi_s(u, v),$$

где  $\Phi_s(u, v)$  –  $s$ -форма с целыми  $p$ -адическими коэффициентами.

Известно, что квадратичная форма  $\Phi_2(u, v)$  с помощью некоторого линейного изометрического преобразования приводится к диагональному виду

$$\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2,$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  –  $p$ -адические единицы.

Ряд  $\sum p^s \Phi_s$  в этом случае сводится к ряду вида

$$F(X, Y) = \varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \sum_{s=3}^{\infty} p^s \Phi_s^*(X, Y),$$

где  $\Phi_s^*(X, Y)$  – формы с целыми  $p$ -адическими коэффициентами.

Эти формы представимы в виде сумм

$$\Phi_s^*(X, Y) = X^2 F_{s-2}(X, Y) + Y^2 G_{s-2}(X, Y),$$

где  $F_{s-2}, G_{s-2}$  – формы порядка  $s-2$ .

$$\text{Обозначим } A(X, Y) = \varepsilon_1^{-1} \sum_{s=3}^{\infty} p^{s-3} F_{s-2}(X, Y), B(X, Y) = \varepsilon_2^{-1} \sum_{s=3}^{\infty} p^{s-3} G_{s-2}(X, Y).$$

$$\text{Тогда } F(X, Y) = \varepsilon_1 p^2 X^2 (1 + pA(X, Y)) + \varepsilon_2 p^2 Y^2 (1 + pB(X, Y)).$$

Далее, по свойству  $p$ -адического аналога ряда Ньютона существуют также степенные ряды  $D(X, Y)$  и  $E(X, Y)$  с целыми  $p$ -адическими коэффициентами, сходящиеся в компакте  $O_p \times O_p$ , такие что

$$1 + pA(X, Y) = (1 + pD(X, Y))^2$$

$$1 + pB(X, Y) = (1 + pE(X, Y))^2.$$

Поэтому изометрическое преобразование

$$\begin{cases} X_* = X(1 + pD(X, Y)) \\ Y_* = Y(1 + pE(X, Y)) \end{cases}$$

приводит ряд  $F(X, Y)$  к квадратичной форме вида

$$\varepsilon_1 p^2 X_*^2 + \varepsilon_2 p^2 Y_*^2.$$

Второе утверждение доказано.

*Следствие.*

$$\sum_{x/p^a} \sum_{y/p^a} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^a} f(x, y)\right) = (-1)^{\left(\frac{p^a - 1}{2}\right)^2} \sum_{s=1}^r \left(\frac{2D_s}{p}\right)^a p^a \exp\left(\frac{2\pi i}{p^a} f(\theta_s)\right),$$

где  $\{\theta_i, i = \overline{1, r}\}$  – множество всех решений системы уравнений (3), принадлежащих  $O_p \times O_p$  и ввиду (5)

$$D_s = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta_s) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\theta_s) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\theta_s) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta_s) \end{pmatrix} \in U_p, \alpha \geq 2.$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964.

УДК 517.984

О. Ю. Дмитриев

#### РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЕСЯТОГО ПОРЯДКА

На отрезке  $[0, 1]$  рассмотрим краевую задачу

$$y^{(10)} - \lambda y = 0, \quad (1)$$

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = \overline{1, 10}, \quad (2)$$

где  $a_i$  – константы и  $\lambda$  – спектральный параметр.

Пусть

$$b_j = \sum_{i=1}^{10} a_i (-\omega_j)^{i-1}, \quad j = \overline{1, 10}. \quad (3)$$

Как известно, краевые условия являются нерегулярными по Биркгофу [1, с. 66 – 67], если некоторые коэффициенты при экспонентах в разложении характеристического определителя  $\Delta(\rho)$  обращаются в ноль. Однако количество нулевых коэффициентов влияет на экспоненциальный рост функции Грина  $G(x, t, \lambda)$  и поэтому представляет интерес для исследования. Случай, когда один коэффициент равен нулю, или около половины коэффициентов равны нулю, рассмотрены в статьях [2, 3]. Там же показана связь между  $b_j$  и определителями в разложении  $\Delta(\rho)$ . Если все  $b_j$ , кроме

одного, равны нулю, то почти все определители равны нулю и задача становится вырожденной. Случай, когда все  $b_j$ , кроме двух, равны нулю, ранее не рассматривался. Чтобы этот случай существенно отличался от случая, когда половина  $b_j$  равна нулю, требуем, по крайней мере, двукратного различия между количеством ненулевых  $b_j$  в первом и втором случаях:  $\left[ \frac{n}{2} \right] > 2 \cdot 2$ , то есть  $n \geq 10$ . Поэтому в данной статье предполагается, что  $n = 10$  и

$$b_1 = b_2 = b \neq 0, \quad b_j = 0, \quad j = \overline{3, 10}. \quad (4)$$

Условие (4) означает, что большая часть определителей в разложении характеристического определителя  $\Delta(\rho)$  обращается в ноль.

Изучим этот случай. Положим  $\lambda = -\rho^{10} \left( \arg \rho \in \left[ -\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10} \right] \right)$ . Тогда  $y_j(x) = y_j(x, \rho) = \exp \rho \omega_j x$ , где  $\omega_j = \exp \left( \frac{2j-1}{10} \pi i \right)$ ,  $j = \overline{1, 10}$  образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Для собственных чисел  $\lambda_k$  справедливы асимптотические формулы:

$$\lambda_k = -\rho_k^{10}, \quad \rho_k = \rho_{k+h}^0 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \rho_k^0 = \frac{(2k+1)\pi \cos \frac{8\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10}} e^{\frac{\pi i}{10}}.$$

$$\text{Обозначим } \varphi_i(x, \rho) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_{10}) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1 & \dots & y_{10} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{10}(y_1) & \dots & U_{10}(y_{10}) \end{vmatrix} - i \text{ строка } \Delta(\rho), \quad i = \overline{1, 10}.$$

Пусть  $\varphi(x, \rho) = \sum_{i=1}^{10} \rho^{i-1} a_i \omega_i^{i-1} \varphi_i(x, \rho)$ . Если  $\rho = \rho_k$ , то  $\varphi(x, \rho_k)$  – собственная функция краевой задачи (1) – (2).

Обозначим через  $T_\alpha$  многоугольник, описываемый системой неравенств

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\varepsilon_1 z - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \alpha) &< 0, \\ \operatorname{Re}(\varepsilon_2 z - \varepsilon_{10} - \varepsilon_3 \alpha) &< 0, \\ \operatorname{Re}(\varepsilon_8 z - \varepsilon_2 - \varepsilon_{10} - \varepsilon_3 \alpha) &< 0, \\ \operatorname{Re}(\varepsilon_9 z - \varepsilon_{10} - \varepsilon_3 \alpha) &< 0, \\ \operatorname{Re}(\varepsilon_{10} z - \varepsilon_{10} - \varepsilon_3 \alpha) &< 0, \\ \operatorname{Re}(\varepsilon_j z - \varepsilon_3 \alpha) &< 0, \quad j = \overline{3, 7}, \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi(x, \rho_k) \quad (5)$$

сходится в точке  $x = \alpha$ , где  $\alpha \in [0, d]$ ,  $d = \frac{\operatorname{Re} \varepsilon_{10}}{\operatorname{Re} \varepsilon_{10} - \operatorname{Re} \varepsilon_3}$ , то он сходится абсолютно и равномерно внутри  $T_\alpha$  к аналитической функции.

Если ряд (5) сходится равномерно на  $[\alpha, \beta]$ , где  $d < \alpha < \beta \leq 1$ , то он сходится абсолютно и равномерно внутри  $T_{\tilde{\alpha}}$ , где  $\tilde{\alpha} = \frac{\operatorname{Re} \varepsilon_1 \alpha - \operatorname{Re} \varepsilon_3}{\operatorname{Re} \varepsilon_3}$ , к аналитической функции.

Сумма ряда (5) удовлетворяет функциональному уравнению

$$b_1 f(\bar{\omega}_{10} x) + b_2 f(\bar{\omega}_1 x) + 10 f(1 - \bar{\omega}_9 x) = 0. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 2. Если ряд (5) сходится равномерно на  $[0, 1]$ ,  $f$  – его сумма и  $\mu$  не является собственным значением задачи (1) – (2), то функция  $g(x) = R_\mu f = \int_0^1 G(x, t, \mu) f(t) dt$  аналитически продолжима в  $T_l$ , ограни-

чена в угле  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{10}$ ,  $|z| \leq z_0$  и удовлетворяет уравнению (6) при

$$x \in (0, l), \quad l = \frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{4\pi}{10}}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть  $f(x) \in L[0, 1]$  и при некотором натуральном  $k$  функция  $g(x) = R_\mu^k f$  удовлетворяет следующим условиям:

а) аналитически продолжима в четырехугольник  $\tilde{T}_1$  с вершинами  $0, l_1 \omega_1, l_1 \omega_{10}, 1$ ;

б) непрерывна на интервалах  $(0, l_1 \omega_1)$ ,  $(0, l_1 \omega_{10})$ ,  $(l_1 \omega_1, l_1 \omega_{10})$ ,  $l_1 = \frac{\sin \frac{3\pi}{10}}{\sin \frac{4\pi}{10}}$ ;

в) ограничена в угле  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{10}$ ,  $|z| \leq z_0$ ;

г) при  $x \in [0, l]$  удовлетворяет уравнению (6).

Тогда  $f(x)$  разлагается в равномерно сходящийся на  $(0, 1)$  ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (1), (2).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

2. Дмитриев О.Ю. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора  $n$ -го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Математика и ее приложения. Саратов, 1991. С. 70 – 72.

3. Дмитриев О.Ю. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора  $n$ -го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Современные проблемы теории функций и их приложения. Саратов, 1996. С. 41 – 42.

УДК 519.853

С. И. Дудов

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НОРМЫ<sup>\*</sup>

1. Пусть  $D$  – выпуклый телесный компакт из конечномерного действительного пространства  $R^P$ , а функция  $n(x)$  удовлетворяет на  $R^P$  аксиомам нормы. Задачу о вложении в данный компакт  $D$  шара нормы  $n(\cdot)$  максимального радиуса можно записать в виде

$$\rho_{\Omega}(x) \stackrel{df}{=} \min_{y \in \Omega} n(x - y) \rightarrow \max_{x \in D}, \quad (1)$$

где  $\Omega = \overline{R^P \setminus D}$ . Эта, так называемая, задача о внутренней оценке компакта  $D$  шаром нормы  $n(\cdot)$  рассматривалась в работе [1]. В ней получено необходимое и достаточное условие решения, доказана единственность решения для случая строго выпуклого компакта  $D$ , предложена схема алгоритма приближенного решения задачи для оценки произвольного выпуклого компакта.

Здесь мы рассмотрим вопрос об устойчивости решения задачи (1) относительно погрешности задания компакта  $D$ .

Приведем используемые далее обозначения, вспомогательные понятия и факты. Под  $K\nu(R^P)$  будем понимать пространство всех выпуклых компактов из  $R^P$  с метрикой  $h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} n(a - b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} n(a - b) \right\}$ ,

$$G(x_0) = \{x \in R^P : \rho_{\Omega}(x) \geq \rho_{\Omega}(x_0)\}, \quad G^c(x_0) = \{x \in R^P : \rho_{\Omega}(x) \leq \rho_{\Omega}(x_0)\},$$

$$o_p = (0, \dots, 0) \in R^P, \quad \|\cdot\| \text{ – евклидова норма в } R^P, \quad \rho(D) = \max_{x \in D} \rho_{\Omega}(x),$$

$$X(D) = \{y \in D : \rho_{\Omega}(y) = \rho(D)\}, \quad A^*B = \{c \in R^P : c + B \subset A\},$$

\* Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

$Bn(x, r) = \{y \in R^P : n(x - y) \leq r\}$ ,  $B(x, r) = \{y \in R^P : \|x - y\| \leq r\}$ ,  $\text{int } D$  – внутренность множества  $D$ .

ЛЕММА 1 [2]. Если  $\rho_\Omega(y) \geq \rho_\Omega(x)$ , то  $\rho_\Omega(y) = \rho_{G^c(x)}(y) + \rho_\Omega(x)$ .

Нетрудно показать, что имеет место

ЛЕММА 2. Если  $\rho_\Omega(x_0) > 0$ , то справедливо представление

$$G(x_0) = D^* Bn(o_p, \rho_\Omega(x_0)).$$

Определение 1 [3]. Множество  $A \subset R^P$  называется  $r$ -сильно выпуклым множеством, если оно может быть представлено как пересечение евклидовых замкнутых шаров радиуса  $r$ .

Определение 2 [3]. Пусть  $A \subset R^P$  – ограниченное множество, а числа  $p > 0$  и  $r > 0$  такие, что  $B(o_p, p)^* A \neq \emptyset$  и  $r \geq p$ . Сильно выпуклой  $r$ -оболочкой множества  $A$  называется пересечение всех замкнутых евклидовых шаров радиуса  $r$ , содержащих данное множество  $A$ . Будем ее обозначать  $\text{str co}_r A$ .

ЛЕММА 3 [3]. Если  $A \subset R^P$  –  $r$ -сильно выпуклое множество, то множество  $A^* B$ , если оно не пусто, также  $r$ -сильно выпукло.

ЛЕММА 4 [3]. Пусть  $r > 0$ , а точки  $a_0$  и  $a_1$  из  $R^P$  таковы, что  $0 < \|a_0 - a_1\| < 2r$ . Тогда справедливо представление

$$\text{str co}_r \{a_0, a_1\} = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} B(a_\alpha, r_\alpha),$$

где  $a_\alpha = (1 - \alpha)a_0 + \alpha a_1$ ,  $r_\alpha = r - \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|a_0 - a_1\|^2}$ .

2. Пусть  $\varepsilon > 0$  – погрешность задания компакта  $D \in Kv(R^P)$  компактом  $D_\varepsilon \in Kv(R^P)$ , то есть

$$h(D, D_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad (2)$$

а  $C_0$  – положительная константа (она существует в силу эквивалентности норм в  $R^P$ ), для которой

$$\|x\| \leq C_0 n(x), \quad \forall x \in R^P. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА. Имеет место неравенство

$$|\rho(D) - \rho(D_\varepsilon)| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Кроме того, если  $D$  –  $r$ -сильно выпуклое множество, а  $\varepsilon \in \left(0, \frac{r}{C_0}\right)$  и достаточно мало, чтобы  $X(D_\varepsilon) \subset \text{int } D$ , то

$$\|x^* - x_\varepsilon\| \leq 4\sqrt{C_0 \varepsilon(r - C_0 \varepsilon)}, \quad \forall x_\varepsilon \in X(D_\varepsilon), \quad (5)$$

где  $x^*$  – единственное решение задачи (1).

**Доказательство.** Легко показать, что из (2) для любого  $x \in R^P$  следует оценка

$$|\rho_\Omega(x) - \rho_{\Omega_\epsilon}(x)| \leq \epsilon, \quad \Omega_\epsilon = \overline{R^P \setminus D_\epsilon}, \quad (6)$$

пользуясь которой уже нетрудно получить (4).

Пусть теперь  $D$  –  $r$ -сильно выпуклое множество. Тогда, как и для любого строго выпуклого компакта [1], задача (1) имеет единственное решение, то есть  $X(D) = \{x^*\}$ . Возьмем произвольный элемент  $x_\epsilon \in X(D_\epsilon)$ . Так как  $\rho_\Omega(x^*) \geq \rho_\Omega(x_\epsilon)$ , то по лемме 1

$$\rho_\Omega(x^*) = \rho_{G^c(x_\epsilon)}(x^*) + \rho_\Omega(x_\epsilon). \quad (7)$$

Отсюда, учитывая что  $x^*$  – решение задачи (1), вытекает

$$\rho_{G^c(x_\epsilon)}(x^*) = \max_{x \in G(x_\epsilon)} \rho_{G^c(x_\epsilon)}(x). \quad (8)$$

Поскольку  $x_\epsilon \in X(D_\epsilon)$  и в соответствии с (6) выполняется  $|\rho_\Omega(x_\epsilon) - \rho_{\Omega_\epsilon}(x_\epsilon)| \leq \epsilon$ , то из (7) следует  $\rho_{G^c(x_\epsilon)}(x^*) \leq 2\epsilon$ . Поэтому, принимая во внимание (3) и (8), можно дать оценку сверху для максимального радиуса евклидова шара вложенного в  $G(x_\epsilon)$ :

$$\max_{x \in G(x_\epsilon)} \min_{y \in G^c(x_\epsilon)} \|x - y\| \leq 2\epsilon C_0. \quad (9)$$

Из условия теоремы  $X(D_\epsilon) \subset \text{int } D$  следует  $\rho_\Omega(x_\epsilon) > 0$ . Тогда, применяя леммы 2 и 3, заключаем, что множество  $G(x_\epsilon)$  является  $r$ -сильно выпуклым. Поскольку  $x^* \in G(x_\epsilon)$  и  $x_\epsilon \in G(x_\epsilon)$ , то [3]

$$\text{str } co_r \{x^*, x_\epsilon\} \subset G(x_\epsilon). \quad (10)$$

Из леммы 4 легко сделать вывод, что максимальный радиус евклидова шара, вложенного в множество  $\text{str } co_r \{x^*, x_\epsilon\}$ , равен  $r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\|x^* - x_\epsilon\|^2}$ . Поэтому, учитывая (9) – (10), получаем неравенство

$$r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\|x^* - x_\epsilon\|^2} \leq 2C_0\epsilon,$$

очевидное преобразование которого и дает (5). Теорема доказана.

**Замечание.** Один из способов получения приближенного решения задачи (1) может заключаться в следующем. Можно задать сетку векторов на единичной евклидовой сфере пространства  $R^P$  с центром в  $o_p$  и построить опорные гиперплоскости к компакту  $D$ , для которых эти вектора являются нормалями. Результаты работы [3] позволяют в зависимости от «мелкости» этой сетки дать оценку погрешности аппроксимации компакта  $D$  многогранником, который образуют построенные гиперплоскости. Далее, решив соответствующую задачу о внутренней оценке построенного

многогранника, которая сводится к задаче линейного программирования [1], мы, используя оценку погрешности аппроксимации выпуклого компакта  $D$  многогранником и теорему 1, имеем возможность оценить погрешность полученного приближенного решения задачи (1).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дудов С.И. Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 5. С. 153 – 159.
2. Дудов С.И. Об обобщенном градиенте функции расстояния // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры. 1999. Т. 61(2). Негладкий анализ и оптимизация. С. 5 – 14.
3. Половинкин Е.С. Сильно выпуклый анализ // Мат. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 102 – 130.

УДК 519.853.3

И. В. Златорунская

#### ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ\*

1. Пусть  $D$  заданный выпуклый компакт из  $R^P$ , функция  $n(x)$  удовлетворяет аксиомам нормы на  $R^P$ ,  $\rho(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} n(x - y)$  – уклонение множества  $A$  от множества  $B$ ,  $h(A, B) = \max \{ \rho(A, B), \rho(B, A) \}$  – расстояние Хаусдорфа между множествами  $A$  и  $B$  в норме  $n(x)$ ,  $Bn(x, r) = \{ y \in R^P : n(x - y) \leq r \}$  – шар в норме  $n(x)$  с центром в точке  $x$  и радиусом  $r$ . Тогда задачу о наилучшем приближении выпуклого компакта  $D$  шаром нормы  $n(x)$  в метрике Хаусдорфа, порожденной этой нормой, можно записать в виде

$$h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in R^P, r \geq 0}. \quad (1)$$

Свойства решения этой задачи изучались в [1] для случая евклидовой нормы и в [2] для произвольной нормы  $n(x)$ .

В данной статье мы рассмотрим вопрос о погрешности решения задачи (1) при аппроксимации компакта  $D$  многогранником, а именно оценим разность  $|h_0(D) - h_0(D_c)|$ , где  $h_0(D) = \min_{x \in R^P, r > 0} h(D, Bn(x, r))$ ,  $D_c$  – многогранник, аппроксимирующий компакт  $D$ .

\* Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

2. Пусть оцениваемый компакт  $D$  задан своей опорной функцией  $W(D, x) = \max_{y \in D} \langle x, y \rangle$ . Для построения многогранника, аппроксимирующего компакт  $D$ , можно воспользоваться результатами работы [3], которые, в частности, позволяют строить внешние (по включению) аппроксимации выпуклых множеств многогранниками и оценивать погрешность этой аппроксимации. Приведем два определения.

Определение 1 [3]. Сеткой  $C$  мелкости  $\Delta \in (0, 1)$  называется конечный набор точек  $x_i \in R^P$ ,  $i \in \overline{1, I}$ , из единичной сферы  $S(0_p, 1) = \{x \in R^P : \|x\| = 1\}$  такой, что для любого  $x \neq 0_p$  существует подмножество индексов  $I_x \subset \overline{1, I}$  и числа  $\alpha_i > 0$ , где  $i \in I_x$ , такие, что

$$\begin{aligned} \|x_i - x_j\| &< \Delta, \quad \forall i, j \in I_x, \quad x_i, x_j \in C, \\ x &= \sum_{i \in I_x} \alpha_i x_i, \quad x \in C. \end{aligned}$$

Определение 2 [3]. Пусть задана сетка  $C$  мелкости  $\Delta \in (0, 1)$ . На множестве положительно однородных функций  $f : R^P \rightarrow R$  зададим сеточный оператор  $\aleph$  по формуле

$$\aleph f(x) = \begin{cases} f(x), & x/\|x\| \in C, \\ +\infty, & x/\|x\| \notin C. \end{cases}$$

Как показано в работе [3] оператор  $\aleph$  задает внешнюю многогранную аппроксимацию выпуклого компакта по сетке  $C$ . При этом

$$co \aleph W(D, x) = W(D_c, x),$$

где многогранник  $D_c$ , содержащий компакт  $D$ , образован опорными к  $D$  гиперплоскостями с нормалями  $x_i \in C$ ,  $i = \overline{1, I}$  и имеет вид

$$D_c = \{y \in R^P : \langle -x_i, y \rangle + W(D, x_i) \geq 0, x_i \in C, i = \overline{1, I}\}.$$

Используя результаты работы [3] и свойства опорных функций, несложно показать, что имеет место

ЛЕММА 1. Пусть  $D$  выпуклый компакт, тогда

$$|W(D, x) - W(D_c, x)| \leq 4(\operatorname{diam} D)^2 \Delta \|x\| / \rho,$$

где  $\operatorname{diam} D = \max_{x_1, x_2 \in D} n(x_1 - x_2)$  — диаметр множества  $D$ ,

$\rho = \max_{x \in D} \min_{y \in R^P \setminus D} \|x - y\|$  — радиус наибольшего евклидова шара, содержащегося в  $D$ .

3. Лемма 1 дает возможность получить оценку погрешности приближенного решения задачи (1).

ТЕОРЕМА 1. Справедлива оценка

$$|h_0(D) - h_0(D_c)| \leq 4(\operatorname{diam} D)^2 \Delta K / \rho,$$

где константы  $diam D$ ,  $\rho$  определены в лемме 1, а константа  $K$  определяется для полярной нормы  $n^*(x) = \max_{n(v) \leq 1} \langle v, x \rangle$  соотношением  $\|x\| \leq K n^*(x)$ ,  
 $\forall x \in R^P$ .

**Доказательство.** Уклонение компакта  $D$  от многогранника  $D_c$  в произвольной норме  $n(\cdot)$  можно выразить следующим образом [4]

$$\rho(D, D_c) = \max_{n^*(x)=1} \{W(D, x) - W(D_c, x)\}.$$

Тогда расстояние Хаусдорфа между множествами  $D$  и  $D_c$  выражается формулой

$$h(D, D_c) = \max_{n^*(x)=1} |W(D, x) - W(D_c, x)|. \quad (2)$$

Используя липшицевость функции  $h_0(D)$ , доказанную в статье [2], лемму 1 и соотношение (2), получаем

$$|h_0(D) - h_0(D_c)| \leq h(D, D_c) \leq \max_{n^*(x)=1} (4(diam D)^2 \Delta \|x\| / \rho).$$

Поскольку по условию выполняется неравенство  $\|x\| \leq K n^*(x)$ , то, следовательно,

$$|h_0(D) - h_0(D_c)| \leq 4(diam D)^2 \Delta K / \rho.$$

Таким образом, погрешность приближенного решения задачи (1) при аппроксимации компакта  $D$  многогранником пропорциональна мелкости сетки  $C$ , по которой строится внешняя многогранная оценка множества  $D$  и обратно пропорциональна радиусу наибольшего шара, вложенного в  $D$ .

Если компакт  $D$  является сильно выпуклым множеством [3], то можно получить более точную (по порядку мелкости сетки  $C$ ) оценку погрешности, а именно имеет место

**ТЕОРЕМА 2.** Если компакт  $D$  является сильно выпуклым множеством с радиусом  $R_0$ , то справедлива следующая оценка

$$|h_0(D) - h_0(D_c)| \leq 2R_0 \Delta^2 / \rho.$$

**Замечание.** Если шар используемой нормы  $n(\cdot)$  является многогранником, то задача (1) для многогранника  $D_c$  сводится к задаче линейного программирования [5]. Решив задачу линейного программирования и воспользовавшись теоремой 1 или 2, можно оценить погрешность полученного приближенного решения задачи (1).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никольский М.С., Силин Д.Б. О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддита // Тр. МИ РАН. 1995. Т. 211. С. 338 – 354.
2. Дудов С.И., Златорунская И.В. Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13 – 38.
3. Половинкин Е.С. Сильно выпуклый анализ // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 2. С. 102 – 130.

4. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.  
5. Дудов С.И., Златорунская И.В. Алгоритм наилучшего приближения выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 43 – 46.

УДК 681.3.068

В. А. Иванов, С. П. Шевырёв

## ГЕНЕРАТОР ТЕСТОВ

В статье рассматривается задача построения универсального генератора тестов. Работа развивает идеи, изложенные в [1 – 5].

Математически тест, созданный таким генератором, представляет собой нагруженный ориентированный граф, вершинами которого являются вопросы одного из трёх видов:

1. Выбрать один вариант из нескольких.
2. Отметить несколько пунктов в списке ответов.
3. Ввести строку с последующим сравнением с ответом в списке ответов.

Дугами ориентированного графа являются пути перехода от одного вопроса теста к другому.

Второй, глубинный уровень модели генератора тестов предоставляет совокупность трёх модулей: тестируемого, преподавателя и администратора. Модуль администратора обеспечивает учет пользователей системы. Модуль тестируемого предоставляет собой интерфейс пользователя для прохождения тестирования, заносит результаты тестирования в базу данных. Модуль преподавателя, в свою очередь, представляет собой инструмент для создания вопросов, тестов, а также просмотра результатов тестирования.

Между модулями существуют связи, определяющие потоки информации в системе. Так, например, через модуль администратора в систему попадает информация о том, какие пользователи относятся к преподавателям, а какие – к тестируемым. Между модулем тестируемого и модулем преподавателя существует двунаправленная связь – результат работы модуля преподавателя есть входная информация для модуля тестирования. Модуль преподавателя предоставляет сформированные тесты тестирующему модулю и обрабатывает результаты, поступающие в систему после окончания тестирования. В свою очередь, модуль тестирования формирует данные (результаты прохождения тестов), необходимые модулю преподавателя. Далее перечислим все основные процессы, протекающие в системе тестирования при её работе.

Модуль администратора. Процесс I. Управляет базой данных пользователей системы, включает в себя операции добавления, удаления

пользователей, назначения ролей, имен и паролей доступа. Процесс 2. Управляет базой данных вопросов и тестов, включает в себя операции добавления и удаления вопросов и ответов на каждый вопрос, объединения вопросов в темы, а также создания сценариев тестирования (тестов). Процесс 3. Позволяет просмотреть результаты тестирования и сбора статистической информации.

Модуль тестируемого. Процесс 4. Предоставляет тестируемому удобный интерфейс, а также отображает содержательную часть теста (вопросы и варианты ответов). Этот процесс также заносит результаты тестирования в базу данных.

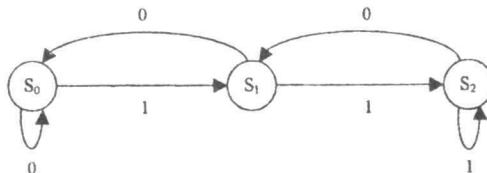
Первые три процесса интуитивно понятны и в подробном описании не нуждаются. Интерес представляет процесс 4. Самым важным здесь является формирование последовательности вопросов, на которые тестируемый будет отвечать. Предложено несколько путей решения этого вопроса. Ручное формирование пакета вопросов трудоёмко. Указав же при составлении теста лишь тему вопросов, по которой необходимо провести тестирование, количество вопросов, которые необходимо задать, и позволив системе самой случайно производить выборку необходимого числа вопросов, можно решить проблему индивидуального тестирования. Однако просто провести проверку знаний, выбрав одинаковое количество вопросов из всех подтем, входящих в тему, по которой построен тест, представляется недостаточным. Необходимо также акцентировать внимание на вопросах тех тем, которые тестируемый знает плохо. Видя, что тестируемый ответил на какой-либо вопрос неточно, преподаватель может задать еще вопрос по данной теме, для более точного определения уровня знаний. Причем сделать он это может не сразу после неверного ответа, а после того, как задаст несколько вопросов по другим темам. Описанный выше процесс представляет собой функционирование конечного автомата [6], который в нашем случае можно смоделировать простой таблицей решений, или табличным распознавателем [7]. Назовем её основной таблицей решений процесса 4, которая очевидно, в свою очередь, представляет собой совокупность трёх других таблиц решений. Назовем их «Модуль 1», «Модуль 2» и «Модуль 3». В частности, «Модуль 2» представляет собой механизм, обеспечивающий хранение информации о процессе тестирования в следующей вспомогательной таблице:

Номера тем	Тема	Количество вопросов в теме	Количество заданных вопросов	Количество правильных ответов
1	Алгебра	12	3	1
2	Геометрия	5	1	0

Данная таблица содержит информацию о том, какие темы входят в тест, общее количество вопросов в каждой теме, сколько вопросов было задано из каждой темы, а также количество правильных ответов на вопросы.

сы каждой темы. На основе информации, хранимой в таблице, производится выбор очередного вопроса. Опишем теперь входные и выходные сигналы таблицы решений «Модуль 2» и их значения. M2вх\_1 – этот сигнал представляет собой номер темы, из которой необходимо выбрать следующий вопрос. При поступлении этого сигнала таблица решений производит случайную выборку вопроса из указанной темы, увеличивает на единицу значение в столбце «количество заданных вопросов» таблицы тестирования и устанавливает выходной сигнал M2вых\_1 равным номеру выбранного вопроса. M2вх\_2 – сигнал, указывающий на необходимость изменения значения в столбце «количество правильных ответов» темы, из которой производился выбор последнего вопроса. Если тестируемый ответил на вопрос правильно, то таблица решений «Модуль 2» увеличивает соответствующее значения на 1, в противном случае уменьшает на 1; если значение в столбце «количество правильных ответов» равно 0, то оставляет его без изменения. После внесения информации в таблицу тестирования таблица решений «Модуль 2» устанавливает выходной сигнал M2вых\_2, указывающий на возможность продолжения процесса тестирования. В случае если системой было выбрано необходимое для теста количество вопросов либо по всем темам, входящих в тест, были заданы все вопросы, то таблица решений выдает выходной сигнал M1вых\_3, сигнализирующий об остановке тестирования. Таблица решений «Модуль 1» обеспечивает выборку очередной темы, из которой производится выбор вопроса, и обрабатывает ответы, получаемые в процессе тестирования. В качестве входных сигналов таблица решений принимает сигналы: M1вх\_1 – «выбрать следующий вопрос» и M1вх\_2 – «обработать ответ». При поступлении сигнала M1вх\_1 на основе таблицы тестирования, описанной выше, производится выбор темы очередного вопроса по следующему правилу: тема  $T_I$  является возможной темой очередного вопроса, если в таблице нет тем, значение столбца «количество правильных ответов» которой меньше, чем номер  $I$  данной темы. «Возможной» в том смысле, что если таких тем несколько, то выбор очередной темы производится случайным образом. Выходной сигнал M1вых\_1 несет в себе тему, из которой затем таблица решений «Модуль 2» производит выбор очередного вопроса. Входной сигнал M1вх\_2 заставляет «Модуль 1» анализировать ответ на текущий вопрос. В случае если ответ на 100% правильный либо неправильный, таблица решений передает своим выходным сигналом информацию о необходимости внесения изменений в таблицу тестирования (см. выше сигнал M2вх\_2). Последняя таблица решений – «Модуль 3» обеспечивает интерфейс пользователя – тестируемого. Входные сигналы M3вх\_2 («продолжить тестирование») и M3вх\_3 («начать тестирование») переводят таблицу решений в состояние ожидания следующего вопроса (перед этим таблица решений выдает выходной сигнал M3вых\_1, поступающий в качестве входного сигнала M1вх\_1 в «Модуль 1»). Сигнал M3вх\_4, являющийся выходным сиг-

налом M1ых\_3 таблицы решений «Модуль 1», указывает на остановку процесса тестирования и подведение его итогов. Входной сигнал M3вх\_1, указывающий на то, что необходимо вывести следующий выбранный вопрос, заставляет «Модуль 3» вывести содержание вопроса и переводит его и всю систему в целом в режим ожидания ответа тестируемого. Правильность ответа определяется в «Модуле 1». Несмотря на простоту функционирования данного ансамбля таблиц решений, изобразить граф перехода всего механизма не представляется возможным. Для упрощения рассмотрим пример – граф перехода таблицы решений «Модуль 1» в случае, когда таблица тестирования содержит только одну тему. Граф перехода будет иметь три состояния:  $S_0$ ,  $S_1$  и  $S_2$ . Состояние  $S_0$  означает, что системе необходимо «спросить» минимум два вопроса из этой темы,  $S_1$  – на один вопрос был получен правильный ответ и  $S_2$  – последовательно было получено два или более ответов. Символом «0» пометим переход в случае неправильного ответа, «1» – правильного. В данных обозначениях граф перехода будет иметь вид (рисунок):



Система создана на базе SQL-ориентированной системы MySQL [8] и способна функционировать в локальных и глобальных сетях.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иванов В.А., Иванов С.В., Шевырёв С.П. О методах разработки электронных обучающих систем. Саратов, 1999. 49 с. Деп. в ВИНИТИ 10.08.99, № 2608 - В99.
2. Иванов В.А., Науменко Г.Ю., Рыхлов В.С., Шевырёв С.П. Некоторые аспекты создания тестирующих систем // Развитие системы тестирования в России. Тр. I Всерос. науч.-практ. конф. М.: Прометей, 1999.
3. Иванов В.А., Комков П.П., Шевырёв С.П. Применение технологии экспертных систем в тестировании // Развитие системы тестирования в России: Тр. II Всерос. науч.-практ. конф. М.: Прометей, 2000.
4. Иванов В.А., Иванов С.В., Шевырёв С.П. Технология создания электронных учебников по программированию // Теоретические проблемы информатики и её приложений: Сб. науч. тр. Саратов, 2001.
5. Иванов В.А., Комков П.П., Науменко Г.Ю., Шевырёв С.П. Создание оболочек для компьютерного тестирования // Развитие системы тестирования в России: Тр. III Всерос. науч.-метод. конф. М.: Прометей, 2001.
6. Ахо А.В., Ульман Д.Д. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции: В 2 т. М.: Мир, 1978.
7. Гурова Л.И., Сахаров С.С. Прикладные программы. М.: Статистика, 1980.
8. Рэнди Дж.Я., Риз Дж., Кинг Т. MySQL и mSQL. СПб.: Симбо, 2000.

## О ЛОКАЛЬНОМ ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ВЛОЖЕНИИ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ДРУГ В ДРУГА

В статье получены некоторые необходимые условия для существования локальных изометрических вложений одного риманова пространства в другое.

Пусть  $N - (n + p)$ -мерное риманово многообразие с тензором римановой кривизны  $R'$ , а  $M - n$ -мерное многообразие локально изометрически вложенное в  $N$ . Отображение вложения индуцирует риманову связность в  $M$  и вторую основную форму  $\alpha : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)^\perp$  [1]. Форма  $\alpha$  симметрична и билинейна и в каждой точке  $x \in M$  индуцирует симметричное билинейное отображение  $\alpha_x : T(M) \times T(M) \rightarrow T(M)^\perp$ . Связь между тензорами кривизны на  $N$  и  $M$  задается так:

$$R'(W, Z, X, Y) = R(W, Z, X, Y) + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle - \langle \alpha(Y, Z), \alpha(X, W) \rangle,$$

где  $X, Y, Z, W$  – произвольные касательные к  $M$  векторы, а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение, определяемое римановой метрикой на  $N$ . В частности, в двумерном направлении, определяемом векторами  $X, Y$ , касательными к  $M$ ,

$$R(X, Y, X, Y) - R'(X, Y, X, Y) = \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle. \quad (1)$$

Это уравнение будем называть уравнением Гаусса для подмногообразия. Для дальнейших рассуждений применим алгебраический результат Оцуки.

**ТЕОРЕМА** (Оцуки) [2]. Пусть  $\alpha : L \times L \rightarrow E$  – билинейная симметричная форма на  $n$ -мерном линейном пространстве,  $E - (n + p)$ -мерное евклидового линейное пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Тогда, если  $p < n$  и для любых  $X, Y \in L$  выполняется условие

$$\langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle \leq 0, \quad (2)$$

то существует такой ненулевой вектор  $Z \in L$ , что  $\alpha(Z, Z) = 0$ .

Из уравнения Гаусса (1) и теоремы Оцуки вытекает следующее утверждение, которое является нашей основной теоремой.

**ТЕОРЕМА 1.** Если в каждой точке  $n$ -мерного риманова пространства  $M$  значения кривизны в каждом двумерном направлении ограничены сверху постоянной  $C$  и в окрестности некоторой точки  $(n + p)$ -мерного риманова пространства  $N$  значения кривизны в каждом двумерном направлении больше  $C$ , то локальное изометрическое вложение  $M$  в  $N$  невозможно при условии  $p < n - 1$ .

**Доказательство.** Условие теоремы означает, что левые части уравнений Гаусса (2) принимают отрицательные значения для любой пары линейно независимых векторов  $X, Y$  касательных к  $M$ . Тогда для билинейной симметричной формы  $\alpha$  выполняется условие теоремы Оцуки, и существует ненулевой касательный к  $M$  вектор  $Z$  такой, что  $\alpha(Z, Z) = 0$ . Допустим, что вложение  $M$  в  $N$  существует. Так как коразмерность равна  $p$ , мы можем локально выбрать  $p$  полей единичных нормальных векторов  $\xi_1, \dots, \xi_p$ , которые ортогональны в каждой точке. Тогда можем выразить  $\alpha$

так:  $\alpha(X, Y) = \sum_{i=1}^p B^i(X, Y) \xi_i$ , и существует ненулевой вектор  $Z$  такой, что

для любого  $i = 1, \dots, p$   $B^i(Z, Z) = 0$ .

Рассмотрим систему уравнений  $B^i(Z, W) = 0$ . У этой системы в силу того, что  $p < n - 1$ , существует хотя бы одно ненулевое решение  $W$  такое, что векторы  $Z$  и  $W$  линейно не зависимы. Но тогда на паре этих векторов  $Z, W$  правая часть уравнения (1) обратится в ноль. Это означает, что в двумерном направлении, задаваемом векторами  $Z, W$  условие Гаусса не выполняется. Следовательно, локального изометрического вложения  $M$  в  $N$  не существует.

Если в теореме 1 предположить, что пространства  $M$  и  $N$  являются римановыми пространствами постоянной кривизны  $k_1$  и  $k_2$  соответственно, то легко получим известную теорему Картана [3] о невозможности изометрического вложения  $M$  в  $N$  при  $k_1 < k_2$  и  $p < n - 1$ .

Теперь предположим, что  $N$  есть  $(n + p)$ -мерное пространство постоянной кривизны  $k$ . Тензор римановой кривизны этого пространства удовлетворяет условию

$$R(X, Y, X, Y) = k(\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2), \quad (3)$$

где  $X, Y$  – произвольные касательные векторы к  $N$ . Если же рассматривать только те касательные векторы, которые являются единичными и попарно ортогональными, то значение тензора кривизны на таких векторах в каждой точке есть постоянная  $k$ . И пусть пространство  $M$  является кэлеровым пространством размерности  $n = 2m$  постоянной секционной голоморфной кривизны  $c$ . Напомним, что на  $M$  задано почти комплексная структура  $J$  и эрмитова метрика этого пространства удовлетворяет условию  $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$  для любых  $X, Y$  из касательного пространства к  $M$ . Тензор римановой кривизны этого многообразия принимает постоянные значения  $c$  на двумерных направлениях, инвариантных относительно комплексной структуры:  $R(X, JX, X, JX) = c$  для любых единичных векторов в касательном пространстве к  $M$ . Если же  $\pi$  – произвольная плоскость

в касательном пространстве к  $M$ , причем угол между  $\pi$  и  $J(\pi)$  равен  $\phi(\pi)$ , тензор римановой кривизны принимает на единичных взаимно ортогональных векторах  $X, Y \in \pi$  значения

$$R(X, Y, X, Y) = \frac{c}{4}(1 + 3\cos^2 \phi(\pi)). \quad (4)$$

Далее будем рассматривать кэлерово пространство  $M$  как риманово пространство, и под изометрическим вложением понимать вложение  $M$  в  $N$  как римановых многообразий.

**ТЕОРЕМА 2.** В  $(2m + p)$ -мерное пространство постоянной кривизны  $k$  нельзя локально изометрически вложить  $2m$ -мерное пространство постоянной нулевой или положительной голоморфной секционной кривизны  $c$  при  $c < k$  и  $p < 2m - 1$ .

**Доказательство.** В этом случае уравнения Гаусса примут вид

$$\frac{c}{4}(1 + 3\cos^2 \alpha(p)) - k = \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle, \quad (5)$$

где  $X, Y$  – попарно ортогональные единичные векторы.

При  $c \geq 0$  из этого равенства следует, что

$$\langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle \leq c - k,$$

а значит, если  $c < k$ , выполняется условие теоремы Оцуки. Откуда следует справедливость нашего утверждения.

Доказательства следующих теорем аналогичны и вытекают из уравнений Гаусса в каждом из этих частных случаев.

**ТЕОРЕМА 3.** В  $(2m + p)$ -мерное пространство постоянной кривизны нельзя локально изометрически вложить  $2m$ -мерное пространство постоянной отрицательной голоморфной секционной кривизны  $c$  при  $c < 4k$ ,  $p < 2m - 1$ .

**ТЕОРЕМА 4.** В  $2m$ -мерное риманово пространство постоянной нулевой или положительной голоморфной секционной кривизны  $c$  нельзя вложить  $n$ -мерное риманово пространство постоянной кривизны  $k$ , если  $k \leq c$  и  $n > m$ .

**ТЕОРЕМА 5.** В  $2m$ -мерное риманово пространство постоянной отрицательной голоморфной секционной кривизны  $c$  нельзя вложить  $n$ -мерное риманово пространство постоянной кривизны  $k$ , если  $k \leq \frac{c}{4}$  и  $n > m$ .

**ТЕОРЕМА 6.** Пусть  $M$  – риманово пространство постоянной голоморфной секционной кривизны  $c_2$  размерности  $2n$ ,  $N$  – риманово пространство постоянной голоморфной секционной кривизны  $c_1$  размерности

$2m$ , причем  $m \leq 2n-1$ . Тогда вложение  $M$  в  $N$  невозможно при:

- 1)  $c_1 \geq 0, c_2 \leq 0$ ; 2)  $c_1 < 0, c_2 < 0$  и  $c_2 \leq 4c$ ; 3)  $c_1 > 0, c_2 > 0$  и  $c_2 \leq \frac{c}{4}$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: В 2 т. М.: Наука, 1981. Т.2.

2. Otsuki T. On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical applications // Proc. of Japan Acad. 1953. Vol. 29. P. 99 – 100.

3. Cartan E. Sur les varietes de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien // Bull. Soc. Math. France 1919. Vol. 47. P. 125 – 160, 1920. Vol. 48. P. 132 – 208.

УДК 519.4

С. И. Ишина

### ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПРОЕКТИВНО-ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ ПОЛУГРУППАМИ ИХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ\*

В настоящей статье рассматривается задача об определяемости универсальных проективно-планарных автоматов (сокращенно  $P$ -планарных автоматов) полугруппами их входных сигналов.

Под  $P$ -планарным автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов  $A=(X, \Gamma, \delta)$  с множеством состояний  $X$ , наделенным структурой проективной плоскости, полугруппой входных сигналов  $\Gamma$  и функцией переходов  $\delta$ . Важным примером  $P$ -планарных автоматов является так называемый универсальный [1]  $P$ -планарный автомат, обозначаемый  $\text{Atm}\Pi=(\Pi, \text{End}\Pi, \delta)$ , где  $\delta(x, \varphi)=\varphi(x)$  для  $x \in X, \varphi \in \text{End}\Pi$ . Таким автоматам в статье уделяется главное внимание, так как для всякого  $P$ -планарного автомата  $A=(\Pi, \Gamma, \delta)$  существует, и притом, единственный гомоморфизм по входным сигналам этого автомата в автомат  $\text{Atm}\Pi$ .

Для описания на языке узкого исчисления предикатов (УИП) свойств  $P$ -планарного автомата будем рассматривать такой автомат в виде трехsortной алгебраической системы  $A=((X, L, \epsilon), \Gamma, \delta)$  с тремя основными множествами  $X, L, \Gamma$  и сигнатурой  $\Omega=\{\epsilon, \delta, \times\}$ , где  $X$  и  $L$  – множества точек и прямых проективной плоскости,  $\Gamma$  – множество входных сигналов автомата  $A$ ,  $\epsilon$  – символ бинарного отношения принадлежности точек проективной плоскости её прямым,  $\delta$  – символ бинарной операции функции переходов автомата и  $\times$  – символ бинарной операции умножения полугруппы  $\Gamma$ .

\* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

Элементарная теория  $P$ -планарных автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка  $L_A$  УИП с трехсортными переменными. Алфавит такого языка состоит:

- 1) из счетного множества индивидуальных переменных 1-го сорта для обозначения точек проективной плоскости;
- 2) из счетного множества индивидуальных переменных 2-го сорта для обозначения прямых проективной плоскости;
- 3) из счетного множества индивидуальных переменных 3-го сорта для обозначения входных сигналов автомата;
- 4) из двухместного предикатного символа  $\in$  для обозначения отношения принадлежности точек проективной плоскости её прямым;
- 5) из двухместного функционального символа  $\delta$  для обозначения функции переходов автомата;
- 6) из двухместного функционального символа  $\times$  для обозначения операции умножения входных сигналов автомата;
- 7) из конечного множества логических и технических символов, таких как  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, =, (,$ .

Обычным образом [2] с помощью функциональных символов  $\delta$  и  $\times$  определяются термы трех сортов, и с помощью символа  $=$  и предикатного символа  $\in$  определяются атомарные формулы языка  $L_A$ . Затем с помощью атомарных формул по индукции [2] определяются формулы языка  $L_A$ .

Интерпретируется язык  $L_A$  в  $P$ -планарном автомате  $A=(\Pi, \Gamma, \delta)$ , рассматриваемом как трехсортная алгебраическая система  $A=((X, L, \in), \Gamma, \delta)$ , с помощью тройки отображений  $(f_1, f_2, f_3)$ , которые отображают множества индивидуальных переменных 1, 2 и 3-го сортов в множества  $X, L$  и  $\Gamma$  соответственно. Предикатный символ  $\in$  интерпретируется как отношение принадлежности точек проективной плоскости её прямым. Функциональный символ  $\delta$  интерпретируется как функция переходов автомата. Функциональный символ  $\times$  интерпретируется как умножение элементов полугруппы  $\Gamma$ . Остальным (техническим и логическим) символам языка  $L_A$  придается их обычное значение. Также обычным образом (по индукции) определяется истинностное значение формул этого языка. В результате каждая формула языка  $L_A$  образует утверждение (истинное или ложное) о  $P$ -планарном автомате  $A=(\Pi, \Gamma, \delta)$ .

Формула  $\Phi$  языка  $L_A$  истинна на  $P$ -планарном автомате  $A$ , если при любой интерпретации этого языка в автомате  $A$  она образует истинное утверждение об этом автомате.

Основной результат статьи показывает, что класс всех универсальных  $P$ -планарных автоматов относительно элементарно определим [2] в классе всех полугрупп  $\Gamma$ .

ТЕОРЕМА 1. Существуют такие формулы

$$C(x), L(\bar{x}), Eqv(\bar{x}, \bar{y}), Ins(x, \bar{y})$$

языка  $L_S$  элементарной теории полугрупп (где  $\bar{x}=(x_1, x_2)$ ,  $\bar{y}=(y_1, y_2)$ ), что для любого универсального  $P$ -планарного автомата с множеством состояний  $\Pi=(X, L)$  полугруппа входных сигналов  $\Gamma=\text{End}\Pi$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1) множества  $\bar{X}=\{x\in\Gamma: C(x)\}$  и  $\bar{L}=\{\bar{x}\in\Gamma^2: L(\bar{x})\}$  не пусты;
- 2) формула  $Eqv(\bar{x}, \bar{y})$  задает отношение эквивалентности  $\epsilon$  на множестве  $\bar{L}$ ;
- 3) формула  $Ins(x, \bar{y})$  задает бинарное отношение  $\rho$  между элементами множеств  $\bar{X}$  и  $\bar{L}$ , которое согласовано с эквивалентностью  $\epsilon$  по следующей формуле:

$$(x, \bar{x})\in\rho \wedge \bar{x}\equiv\bar{y} (\epsilon) \Rightarrow (x, \bar{y})\in\rho;$$

- 4) проективная плоскость  $\Pi=(X, L, \epsilon)$  изоморфна трехсортной алгебраической системе  $\bar{\Pi}=(\bar{X}, \bar{L}/\epsilon, \mu)$  с бинарным отношением  $\mu\subset\bar{X}\times\bar{L}/\epsilon$ , которое для элементов  $x\in\bar{X}$ ,  $Y\in\bar{L}/\epsilon$  определяется по формуле

$$(x, Y)\in\mu \Leftrightarrow (x, \bar{x})\in\rho \text{ при любых } \bar{x}\in Y;$$

- 5) для любой формулы  $\Psi$  языка  $L_A$  эффективно строится такая формула  $\Phi$  языка  $L_S$ , что  $\Psi$  в том и только в том случае истинна на универсальном  $P$ -планарном автомата  $A$ , если формула  $\Phi$  истинна на его полугруппе входных сигналов, т. е. выполняется условие

$$A\models\Psi \Leftrightarrow \Gamma\models\Phi.$$

Данная теорема позволяет решить следующие задачи:

ТЕОРЕМА 2. Универсальные  $P$ -планарные автоматы  $A_1=(\Pi_1, \text{End}\Pi_1, \delta_1)$  и  $A_2=(\Pi_2, \text{End}\Pi_2, \delta_2)$  совпадают тогда и только тогда, когда совпадают полугруппы их входных сигналов.

ТЕОРЕМА 3. Универсальные  $P$ -планарные автоматы  $A_1=(\Pi_1, \text{End}\Pi_1, \delta_1)$  и  $A_2=(\Pi_2, \text{End}\Pi_2, \delta_2)$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны полугруппы их входных сигналов.

ТЕОРЕМА 4. Если для универсальных  $P$ -планарных автоматов  $A_1=(\Pi_1, \text{End}\Pi_1, \delta_1)$  и  $A_2=(\Pi_2, \text{End}\Pi_2, \delta_2)$  полугруппы их входных сигналов элементарно эквивалентны, то сами автоматы  $A_1$  и  $A_2$  также элементарно эквивалентны.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б.И., Гринглас Л.Я., Гвардамия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б.И., Гринглас Л.Я., Гвардия А.А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.
2. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

УДК 519.21

**С. И. Козлова, В. Н. Михайлов**

### АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

1. Рассмотрим однородную цепь Маркова с конечным числом состояний  $n$  и матрицей перехода вероятностей  $P = \{p_{ij}\}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , где  $p_{ij} \geq 0$  – вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$ , и

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Пусть  $x_i(k)$  – вероятность перехода за  $k$  шагов из начального состояния в состояние  $i$ ,  $\bar{x}(k)$  – вектор-столбец с компонентами  $x_i(k) \geq 0$ . Для известного начального распределения вероятностей  $\bar{x}(0)$  вектор  $\bar{x}(k)$  при любом  $k$  можно вычислить с помощью рекуррентного соотношения [1]

$$\bar{x}(k+1) = P^T \bar{x}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$P^T$  – матрица, транспонированная к  $P$ . Пусть  $\bar{e}$  – некоторый  $n$ -мерный вектор-столбец, а  $e$  –  $n$ -мерный вектор, компоненты которого равны 1. Запишем (1) в эквивалентной форме

$$\bar{x}(k+1) = (P^T - \bar{a}e^T) \bar{x}(k) + \bar{a}e^T \bar{x}(k)$$

Так как  $e^T \bar{x}(k) = x_1(k) + x_2(k) + \dots + x_n(k) = 1$ , то

$$\bar{x}(k+1) = B \bar{x}(k) + \bar{a}, \quad B = P^T - \bar{a}e^T. \quad (2)$$

Применяя (2) при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , получаем

$$\bar{x}(k+1) = B^{k+1} \bar{x}(0) + (B^k + B^{k-1} + \dots + E) \bar{a}, \quad (3)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Цепь Маркова называется эргодической, если  $\bar{x}(k) \rightarrow \bar{x}$  при  $k \rightarrow \infty$  для любого начального распределения вероятностей состояний  $\bar{x}(0)$ ; век-

тор  $\bar{x}$  предельного распределения вероятностей удовлетворяет однородной системе уравнений  $P^T \bar{x} = \bar{x}$  [2].

ТЕОРЕМА 1. Для эргодичности цепи Маркова необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор  $\bar{a}$  такой, что  $B^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Пусть цепь Маркова обладает свойством эргодичности, тогда существуют предельные вероятности  $\bar{x}$ ; положим  $\bar{a} = \bar{x}$ .

Имеем  $B\bar{x} = P^T \bar{x} - \bar{x}\bar{e}^T \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$ , поэтому согласно (3)  $\bar{x}(k+1) = B^{k+1}\bar{x}(0) + \bar{x}$ . Так как  $\bar{x}(k+1) \rightarrow \bar{x}$  для любого начального распределения  $\bar{x}(0)$ , то  $B^{k+1} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Если  $B^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для данного вектора  $\bar{a}$ , то согласно теореме линейной алгебры [2] имеем при  $k \rightarrow \infty$

$$E + B + B^2 + \cdots + B^k \rightarrow (E - B)^{-1},$$

и из (3) следует  $\bar{x}(k+1) \rightarrow (E - B)^{-1}\bar{a}$  для любого начального распределения вероятностей  $\bar{x}(0)$ , т.е.  $\bar{x} = (E - B)^{-1}\bar{a}$  есть предельное распределение вероятностей. Определенный таким образом вектор  $\bar{x}$  удовлетворяет уравнению  $(E - B)\bar{x} = \bar{a}$ , или  $\bar{x} - (P^T - \bar{a}\bar{e}^T)\bar{x} = \bar{a}$ . Так как  $\bar{e}^T \bar{x} = 1$ , то  $P^T \bar{x} = \bar{x}$ , следовательно,  $\bar{x}$  – вектор стационарного распределения вероятностей.

Следствие. Если существует такой вектор  $\bar{a}$ , что хотя бы одна из норм  $\|B\|$  матрицы  $B$  удовлетворяет условию  $\|B\| < 1$ , то рассматриваемая цепь Маркова является эргодической и предельные вероятности  $\bar{x}$  удовлетворяют уравнению  $(E - B)\bar{x} = \bar{a}$ .

Это утверждение следует из того, что условие  $\|B\| < 1$  является достаточным для сходимости при  $k \rightarrow \infty$ . Заметим, что стационарное распределение  $\bar{x}$  (собственный вектор матрицы  $P^T$ ) находится из системы уравнений  $(E - B)\bar{x} = \bar{a}$  с невырожденной матрицей коэффициентов. С помощью условия  $\|B\| < 1$  можно получить достаточные условия эргодичности цепи Маркова [3].

ТЕОРЕМА 2. Для эргодической цепи Маркова имеет место соотношение

$$(P^T)^k = B^k + S, \quad S = \bar{x}\bar{e}^T, \quad B = P^T - S. \quad (4)$$

Доказательство. Так как  $\bar{e}^T \bar{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ , то

$$S^2 = (\bar{x}\bar{e}^T)(\bar{x}\bar{e}^T) = S,$$

т.е.  $S$  – идемпотентная матрица. Для стохастической матрицы  $P$  имеем  $P\bar{e} = \bar{e}$ , поэтому  $SP^T = \bar{x}\bar{e}^T P^T = \bar{x}\bar{e}^T = S$ . Вследствие этого

$$SB = S(P^T - S) = SP^T - S^2 = S - S = 0 \text{ и } BS = (P^T - S)S = (P^T - S)\bar{x}^T = S = 0.$$

Далее,  $(P^T)^2 = (B + S)(B + S) = B^2 + SB + BS + S^2 = B^2 + S$ . Утверждение теоремы верно для  $k = 1$ . Пусть верно (4), тогда

$$(P^T)^{k+1} = (B^k + S)(B^k + S) = B^{k+1} + SB + B^{k-1}(BS) + S^2 = B^{k+1} + S,$$

что и доказывает теорему.

Так как  $B\bar{x} = P^T\bar{x} - \bar{x}\bar{e}^T\bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$  для вектора  $\bar{x}$  предельного распределения вероятностей, то при  $\bar{a} = \bar{x}$  из (3) получаем

$$\bar{x}(k+1) = B^{k+1}\bar{x}(0) + \bar{x},$$

откуда следует

$$\|\bar{x}(k) - \bar{x}\| \leq \|B^k\| \cdot \|\bar{x}(0)\| \leq \alpha^k \|\bar{x}(0)\|, \quad \alpha = \|B\|,$$

оценка скорости сходимости вероятностей состояний эргодической цепи Маркова к предельным вероятностям.

2. Поставим в соответствие переходу системы из состояния  $i$  в состояние  $j$  за один шаг некоторый "доход"  $r_{ij}$ , который при фиксированном  $j$  не зависит от того, каким образом система пришла в состояние  $i$ , а зависит только от этого состояния  $i$  [4, 5]. Цепь Маркова порождает теперь последовательность доходов, соответствующих переходам из одного состояния в другое. Обозначим через  $v_i(k)$  математическое ожидание суммарного дохода за  $k$  последующих шагов, если процесс начинается из состояния  $i$ . Обозначим

$$q_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} r_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \bar{q}^T = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \bar{V}(k) = (v_1(k), v_2(k), \dots, v_n(k)),$$

тогда для вектора полных доходов  $\bar{V}(k)$  имеет место следующее выражение [5]:

$$\bar{V}(k) = (E + P + P^2 + \dots + P^{k-1})\bar{q} + P^k\bar{V}(0), \quad (5)$$

Из (4) следует  $P^k = (B^T)^k + S^T$ ,  $S^T = \bar{x}\bar{e}^T$ ,  $B^T = P - S^T$ , поэтому соотношение (5) преобразуется к следующему виду:

$$\bar{V}(k) = \left[ E + B^T + (B^T)^2 + \dots + (B^T)^{k-1} + (k-1)S^T \right] \bar{q} + (B^T)^k \bar{V}(0) + S^T \bar{V}(0).$$

Для эргодической цепи Маркова  $\|B^T\| < 1$  и тогда [2]

$$E + B^T + (B^T)^2 + \dots = (E - B^T)^{-1}.$$

С учетом этого получаем

$$\bar{V}(k) = \left[ (E - B^T)^{-1} - (B^T)^k (E - B^T)^{-1} + (k-1)S^T \right] \bar{q} + (B^T)^k \bar{V}(0) + S^T \bar{V}(0),$$

откуда следует асимптотическая формула для  $\bar{V}(k)$  при больших  $k$ :

$$\bar{V}(k) = kS^T \bar{q} + \left( (E - B^T)^{-1} - S^T \right) \bar{q} + S^T \bar{V}(0).$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
2. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960.
3. Мухайлов В.Н. Об эргодичности однородных цепей Маркова. Саратов, 1997. 6с. Деп. в ВИНТИ, № 1425 – В97.
4. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Советское радио, 1964.
5. Козлова С.И., Мастяева И.Н. Динамическое программирование. М., 1984.

УДК 515.126.83

**А. Б. Коноплев**

## КРИТЕРИЙ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧЕК ДО ОБРАЗОВ МУЛЬТИОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть  $X = R^n$ ,  $Y = R^m$ ,  $Z = X \times Y$ . Рассмотрим замкнутоизначное мультиотображение  $F: X \rightarrow 2^Y$ , действующее из  $X$  в  $Y$ . Обозначим через

$$\text{dom } F = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}, \quad \text{gr } F = \{(x, y) \in Z \mid y \in F(x)\}$$

соответственно эффективную область и график мультиотображения  $F$ .

Определение. Мультиотображение называется выпуклым, если его график есть выпуклое множество в  $Z$ .

Положим  $z = (x, y) \in \text{dom } F \times Y$ . Рассмотрим функцию расстояния (ФР) от точек  $y \in Y$  до образов точек  $x \in \text{dom } F$  мультиотображения  $F$  в произвольной норме  $\|\cdot\|$

$$d_F(z) = \inf_{v \in F(x)} \|y - v\|. \quad (1)$$

Эта функция используется в негладком анализе как инструмент для исследования мультиотображений и маргинальных функций [1].

Введем обозначения

$$Q(z) = \{v \in F(x) \mid \|y - v\| = d_F(z)\}, \quad W(z) = \{v \in Y \mid \|y - v\| \leq d_F(z)\},$$

$$S_M(y) = \sup_{v \in M} \langle v, y \rangle - \text{опорная функция множества } M, \quad (2)$$

$$S_F(z) = S_{F(x)}(y) - \text{опорная функция мультиотображения } F, \quad (3)$$

$B = \{v \in Y \mid \|v\| \leq 1\}$ ,  $0_X, 0_Y$  – нулевые элементы пространств  $X, Y$ ,  $K(\Omega)$  – коническая оболочка множества  $\Omega$ ,  $K(u, \Omega)$  – конус возможных направлений множества  $\Omega$  в точке  $u \in \Omega$ ,  $K^+$  – положительно сопряженный конус к конусу  $K$ ,  $\partial\|y\|$  – субдифференциал нормы  $\|\cdot\|$  в точке  $y$  [3]. Известно [2], что

$$\partial\|0_Y\| = \{v \in Y \mid \|v\|^* \leq 1\}; \quad \partial\|y\| = \{v \in Y \mid \|v\|^* = 1, \|v\| = \langle v, y \rangle\}, \quad y \neq 0_Y, \quad (4)$$

где

$$\|v\|^* = \max_{\|w\| \leq 1} \langle v, w \rangle. \quad (5)$$

Докажем, что справедлива следующая

**ТЕОРЕМА.** Для того чтобы ФР была выпуклой на  $\text{dom}F \times Y$ , необходимо и достаточно, чтобы мультиотображение  $F$  было выпуклым. При этом условный субдифференциал ФР в точках  $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{dom}F \times Y$  на множестве  $\text{dom}F \times Y$  выражается формулой

$$\partial d_F(z_0) = \{X \times \partial\|y_0 - v\| \cap -K^+((x_0, v), \text{gr}F)\}, \quad \forall v \in Q(z_0). \quad (6)$$

**Доказательство.** 1. Необходимость. В соответствии с определением ФР и замкнутостью образов мультиотображения

$$d_F(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \text{gr}F. \quad (7)$$

Возьмем произвольно  $z_1, z_2 \in \text{gr}F$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Используя соотношение (7) и выпукłość ФР, получаем  $d_F(\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2) \leq \alpha d_F(z_1) + (1 - \alpha)d_F(z_2) = 0$ . С другой стороны, всегда имеет место неравенство  $d_F(z) \geq 0$ . Следовательно,  $d_F(\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2) = 0$ . Откуда, с учетом (7), имеем  $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 \in \text{gr}F$ .

2. Достаточность. Известно [1, с. 35], что для выпуклого мультиотображения выполняется включение

$$F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \supseteq \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \text{dom}F, \alpha \in [0, 1]. \quad (8)$$

Возьмем произвольно  $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \text{dom}F \times Y$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Используя соотношения (1), (8) и неравенство треугольника для нормы  $\|\cdot\|$ , получаем

$$\begin{aligned} d_F(\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2) &= \inf_{v \in F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)} \|\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 - v\| \leq \\ &\leq \inf_{v \in \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2)} \|\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 - v\| = \inf_{\substack{v_1 \in F(x_1), \\ v_2 \in F(x_2)}} \|\alpha(y_1 - v_1) + (1 - \alpha)(y_2 - v_2)\| \leq \\ &\leq \alpha \inf_{v_1 \in F(x_1)} \|y_1 - v_1\| + (1 - \alpha) \inf_{v_2 \in F(x_2)} \|y_2 - v_2\| = \alpha d_F(z_1) + (1 - \alpha)d_F(z_2). \end{aligned}$$

3. Развивая результаты Б. Н. Пшеничного [3] и С. И. Дудова [4], полученные для обычной функции расстояния, вычислим формулу субдифференциала ФР. В соответствии с определением условного субдифференциала принадлежность  $\bar{z} \in \partial d_F(z_0)$  означает выполнение неравенства

$$d_F(z) - d_F(z_0) \geq \langle z - z_0, \bar{z} \rangle, \quad \forall z = (x, y) \in \text{dom}F \times Y. \quad (9)$$

Любая точка  $y$  представима в виде  $y = v + \rho w$ , при некоторых  $v \in F(x)$ ,  $w \in B$ ,  $\rho \geq 0$ , причем  $d_F(z)$  есть нижняя грань таких  $\rho$ . Поэтому неравенство (9) эквивалентно неравенству  $\rho - d_F(z_0) \geq \langle x - x_0, \bar{x} \rangle + \langle v + \rho w - y_0, \bar{y} \rangle$ ,  $\forall x \in \text{dom}F$ ,  $v \in F(x)$ ,  $w \in B$ ,  $\rho \geq 0$ , или с учетом (2), (3), (5),

$$\rho - d_F(z_0) \geq \langle x - x_0, \bar{x} \rangle + S_F(x, \bar{y}) + \rho \|\bar{y}\|^* - \langle y_0, \bar{y} \rangle, \quad \forall x \in \text{dom}F, \rho \geq 0. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что неравенство (10) справедливо для любых  $\rho \geq 0$  только в том случае, если

$$\|\bar{y}\|^* \leq 1. \quad (11)$$

Тогда (10) можно записать в виде

$$-d_F(z_0) \geq \langle x - x_0, \bar{x} \rangle + S_F(x, \bar{y}) - \langle y_0, \bar{y} \rangle, \quad \forall x \in \text{dom}F. \quad (12)$$

Легко видеть, что из соотношений (11) и (12) следует (10).

Если  $d_F(z_0) = 0$ , то  $z_0 \in \text{gr}F$ , а неравенство (12) можно записать в виде  $0 \geq \langle u - z_0, \bar{z} \rangle$ ,  $\forall u = (x, v) \in \text{gr}F$ , то есть

$$\bar{z} \in -K^+(z_0, \text{gr}F). \quad (13)$$

Совмешая (13) с неравенством (11) и соотношениями (4), получаем

$$\partial d_F(z_0) = \{X \times \partial\|0_Y\|\} \cap -K^+(z_0, \text{gr}F).$$

Тем самым, принимая во внимание, что  $Q(z_0) = \{y_0\}$ , убедились в справедливости формулы (6) в данном случае.

Пусть теперь  $d_F(z_0) > 0$ . Тогда  $y_0 \in F(x_0) + d_F(z_0)B$  и, следовательно,  $\langle y_0, \bar{y} \rangle \leq S_{F(x_0) + d_F(z_0)B}(\bar{y})$ . Используя свойства опорных функций [1, с. 15] и соотношения (2), (3), (5), это неравенство можно переписать в виде

$$-d_F(z_0) \|\bar{y}\|^* \leq S_F(x_0, \bar{y}) - \langle y_0, \bar{y} \rangle. \quad (14)$$

Вычитая из неравенства (12) неравенство (14), при  $x = x_0$  получим  $d_F(z_0) \cdot (\|\bar{y}\|^* - 1) \geq 0$ . С учетом (11) это дает

$$\|\bar{y}\|^* = 1. \quad (15)$$

Теперь, используя (15), неравенство (12) можно переписать в виде

$$0 \geq S_F(x, \bar{y}) + d_F(z_0) \|\bar{y}\|^* + \langle x - x_0, \bar{x} \rangle - \langle y_0, \bar{y} \rangle, \quad \forall x \in \text{dom}F,$$

откуда, с учетом (2), (3), (5) имеем

$0 \geq \langle u - z_0, \bar{z} \rangle + d_F(z_0) \langle w, \bar{y} \rangle, \quad \forall u = (x, v) \in \text{gr}F, w \in B,$   
или

$0 \geq \langle u - z_0, \bar{z} \rangle, \quad \forall u \in \text{gr}F + d_F(z_0) \cdot (\{0_X\} \times B).$   
Таким образом, получаем

$$\bar{z} \in -K^+(z_0, \text{gr}F + d_F(z_0) \cdot (\{0_X\} \times B)). \quad (16)$$

Из результатов [5, с. 222] следует, что

$$K(v, W(z_0)) = [K(\partial \|y_0 - v\|)]^+, \quad \forall v \in Q(z_0). \quad (17)$$

Преобразуем конус из соотношения (16), используя лемму 1 из [4] и соотношение (17). При любом  $v \in Q(z_0)$  получаем

$$\begin{aligned} -K^+(z_0, \text{gr}F + d_F(z_0) \cdot (\{0_X\} \times B)) &= -[K(\text{gr}F - \{x_0\} \times W(z_0))]^+ = \\ &= -[K((x_0, v), \text{gr}F) - K((x_0, v), \{x_0\} \times W(z_0))]^+ = \\ &= -K^+((x_0, v), \text{gr}F) \cap \{X \times K(\partial \|y_0 - v\|)\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя в соотношение (16) выражение (18), учитывая условие (15) и соотношения (4), имеем

$$\bar{z} \in \{X \times \partial \|y_0 - v\|\} \cap -K^+((x_0, v), \text{gr}F), \quad \forall v \in Q(z_0).$$

Откуда и следует справедливость формулы (6) в данном случае.  
Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Минченко Л.И., Борисенко О.Ф., Грицай С.П. Многозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. Минск: Навука і тэхніка, 1993.
2. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
4. Дудов С.И. Субдифференцируемость и супердифференцируемость функций расстояния // Мат. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530 – 542.
5. Дем'яннов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.

УДК 511.23

О. А. Королева

#### ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ $L$ -ФУНКЦИЙ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Пусть  $K$  – конечное, нормальное расширение поля  $k$ ,  $G$  – группа Галуа этого расширения. Пусть  $\{M(\mu)\}$ ,  $\mu \in G$  – представление группы  $G$  матрицами над полем комплексных чисел. Характер  $\chi(\mu)$ , связанный с данным представлением, определяется на элементах  $\mu$  как след матрицы  $M(\mu)$ .

$L$ -функция Артина определяется следующим образом [1]:

$$L(s, \chi, K/k) = \prod_{\wp} \left| E - M\left(\left[\frac{K/k}{\wp}\right]\right) N(\wp)^{-s} \right|^{-1}, \quad (1)$$

где произведение берется по всем простым, неразветвленным над  $K$ , идеалам поля  $k$  и где  $\left[\frac{K/k}{\wp}\right]$  – автоморфизм Фробениуса простого идеала расширения  $K/k$ .

В случае абелевого расширения и простого характера  $\chi$   $L$ -функция Артина, за вычетом множителей, относящихся к простым разветвленным идеалам, совпадает с  $L$ -функцией Дирихле.

Известная гипотеза Артина [2] предполагает, что в случае неглавного характера  $L$ -функция (1) определяет целую функцию.

Брауэр [3] доказал, что  $L$ -функция (1) представима в следующем виде:

$$L(s, \chi, K/k) = \frac{\prod_i L(s, \chi_i, K/L_i)^{n_i}}{\prod_j L(s, \chi_j, K/\Omega_j)^{r_j}},$$

где  $K/L_i$ ,  $K/\Omega_j$  – циклические расширения, а  $\chi_i, \chi_j$  – простые характеристики этих циклических расширений.

В связи с решением (в отдельных случаях) гипотезы Артина представляется интерес задача разложения  $L$ -функции циклического расширения  $k \subset K$  в произведение  $L$ -функций абелевого расширения поля рациональных чисел  $Q$ .

В этом направлении доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $k \subset K$  – циклическое расширение, где  $K$  – абелево расширение поля  $Q$ . Тогда имеет место разложение

$$L(s, \chi, K/k) = \prod_i L(s, \chi_i, K/Q),$$

где произведение берется по всем характерам  $\chi_i$ , полученным в результате продолжения характера  $\chi$  с подгруппы  $Gal(K/k)$  на группу  $Gal(K/Q)$ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $k$  абелово над  $Q$ ,  $k \subset K$  – циклическое расширение и  $K \subset L$ , где  $L$  – круговое расширение поля  $k$ . Тогда существует такое абелево расширение  $L_1$  поля  $Q$ , что имеет место разложение

$$L(s, \chi, K/k) = \prod_i L(s, \chi_i, L_1/Q),$$

где произведение берётся по  $[k : Q]$  характерам поля  $L_1$ .

Основным моментом доказательства является доказательство того факта, что в рассматриваемом случае для каждого характера Дирихле  $\chi$  расширения  $k \subset K$  существует такой характер  $\hat{\chi}$  поля  $Q$ , для которого

$$\chi(\wp) = \hat{\chi}(N(\wp)).$$

Отметим, что утверждения теорем 1 и 2 позволяют уточнить в отдельных случаях, например в случае бесквадратного расширения, известный результат Брауэра о мероморфности  $L$ -функции Артина. Брауэр показал, что  $L$ -функцию Артина можно представить в виде

$$L(s, \chi) = \frac{\prod_{i=1}^n L_i(s, \chi_i)}{\prod_{j=1}^m L_j(s, \chi_j)}, \quad (2)$$

где  $L_i$ ,  $L_j$  –  $L$ -функции Дирихле, отвечающие характерам Дирихле циклических подгрупп. Результаты теорем 1 и 2 позволяют производить сокращения в представлении (2).

Заметим также, что задача разложения  $L$ -функции поля  $k$  в произведение  $L$ -функций поля рациональных чисел  $Q$  представляет самостоятельный интерес в связи с решением других задач теории  $L$ -функций.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса, А. Фрёлиха. М.: Мир, 1969.
2. Brauer R. On Artin's  $L$ -series with general group characters // Ann. Math. 1947. Vol. 48. P. 502 – 504.
3. Artin E. Über eine neue Art von  $L$ -Reihen // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1923. Vol. 3. P. 89 – 108.

УДК 511.13

М. В. Кудрявцев

#### ОЦЕНКА РАЦИОНАЛЬНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ СО ЗНАМЕНАТЕЛЕМ $p^n$

Пусть  $n \geq 2$  – целое число,  $p$  – нечетное простое число,  $O_p$  – кольцо целых  $p$ -адических чисел,  $\chi(x)$  – характер Дирихле по модулю  $p$ ,  $f(x) = P(x)/Q(x)$ , где  $P(x), Q(x)$  – многочлены с целыми рациональными

коэффициентами такие, что  $(P(x), Q(x)) = 1$ ,  $(P, C(PQ)) = 1$ , где  $C(Q)$  – содержание многочлена  $Q(x)$ ,  $e(t) = \exp(2\pi i t)$ , где  $t$  – вещественное число.

Положим  $U_p(f) = O_p \setminus \{z \mid z \in O_p, Q(z) \equiv 0 \pmod{p}\}$  и, обозначив

$$U_{p^n}(f) = \{x \mid x \pmod{p^n}, x \in U_p(f)\}$$

– проекцию  $U_p(f)$ , рассмотрим сумму

$$S = S(f; p^n) = \sum_{x \in U_{p^n}(f)} \chi(x) e(f(x)p^{-n}).$$

Пусть  $K$  – поле разложения многочлена  $Q^2(x)f'(x)$ ,  $k$  – подполе поля  $K$  такое, что все корни  $f'(x)$  за исключением корней многочлена  $Q(x)$  в поле  $k$  содержатся и пусть  $V$  – кольцо нормирования поля  $k$ :  $V = \{x \in k \mid \text{ord}_\pi x \geq 0\}$ , где  $\text{ord}_\pi(\dots)$  –  $\pi$ -адический показатель в поле  $k$ , являющийся продолжением  $p$ -адического показателя  $\text{ord}_p(\dots)$  в поле  $p$ -адических чисел, и где  $\pi$  – простой элемент поля  $k$ . Если

$$f'(x) = A \prod_{1 \leq i \leq r} (x - \xi_i)^{e_i} / \prod_{r+1 \leq i \leq s} (x - \xi_i)^{e_i}$$

разложение  $f'(x)$  над полем  $K$ , где  $e_i \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq s$ , то пусть

$$F(x) = C(f') \prod_{\xi \in V, f'(\xi) = 0} (x - \xi)^{e_\xi}.$$

Тогда утверждаем, что  $F(x) \in O_p[x]$ ,  $F(x)/C(f')$  – примитивный многочлен в  $O_p$ . Доказательство проводится аналогично тому, как в [3].

Обозначим через  $e_V = \max_{1 \leq i \leq r, \xi_i \in V} e_i$ ,  $m_V = \sum_{1 \leq i \leq r, \xi_i \in V} 1$  соответственно

наивысшую кратность и количество различных локально целых корней уравнения  $f'(x) = 0$  без учета кратностей,

$$\delta_i = \text{ord}_p \left( \frac{F^{(e_i)}(x)}{e_i!} \Big|_{x=\xi_i} \right), \quad \delta_V = \max_{1 \leq i \leq r, \xi_i \in V} \delta_i.$$

Для оценки сверху  $|S|$  воспользуемся леммой Хуа о разбиении в модификации Смита.

Обозначим  $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ,  $l = n - m$  и положим  $x = y + p^m z$ . Тогда

$$S = \sum_{1 \leq y \leq p^m, y \in U_{p^n}(f)} \chi(y) e(f(y)p^{-n}) \sum_{z \pmod{p^l}} e((f'(y)p^m z + \frac{f''(y)}{2} p^{2m} z^2)p^{-n}).$$

Отсюда в случае  $n$  чётном следует оценка

$$|S| \leq p^m \sum_{\substack{1 \leq y \leq p^m, y \in U_p(f), \\ f'(y) \equiv 0 \pmod{p^m}}} 1 = p^m N_{U_p(f)}(f'; p^m),$$

где  $N_{U_p(f)}(f'; p^m)$  – число решений сравнения

$$f'(x) \equiv 0 \pmod{p^m}, x \pmod{p^m}, x \in U_p(f). \quad (1)$$

Заметим, что сравнение (1) равносильно сравнению

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p^m}, x \pmod{p^m}, x \in U_p(f),$$

и воспользуемся оценкой числа решений полиномиального сравнения [3], что приведет к оценке

$$|S| \leq m_V p^{n(1-1/(2e_V)) + \delta_V/e_V}. \quad (2)$$

В случае  $n$  нечётном выводится эта же оценка.

**ТЕОРЕМА.** При введенных обозначениях и сделанных выше допущениях, если сравнение (1) не имеет решения, то  $S = 0$ , а если сравнение (1) имеет решение, то справедлива оценка (2).

Есть возможность эффективизации параметров  $\delta_V, e_V, m_V$  [4]. В частности, справедлива следующая оценка:

**СЛЕДСТВИЕ.** Если все локально целые корни многочлена  $F(x)$  простые, то имеет место оценка

$$|S| \leq m_V p^{n/2} \text{НОД}(p^n, D(F))^{\frac{1}{2}},$$

где  $D(F)$  – дискриминант многочлена  $F(x)$ .

Полученная оценка суммы дополняет оценку рациональной тригонометрической суммы из работы [2].

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Van der Waerden B.L. Алгебра. М.: Наука, 1976.
2. Гусев Г.И. Оценки тригонометрических сумм изометрическим методом // Мат. и её прил.: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 41 – 43.
3. Кудрявцев М.В. Оценки полных рациональных тригонометрических сумм. I // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 1. С. 59 – 67.
4. Кудрявцев М.В. Эффективизация параметров в задаче оценки полной рациональной тригонометрической суммы // Математика, механика и их приложения. Материалы науч. Pract. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998. С. 40 – 41.

## К ЗАДАЧЕ О ЦЕЛОСТНОСТИ $L$ -ФУНКЦИЙ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

В данной статье рассматриваются некоторые аналитические вопросы, в основном связанные с граничным поведением степенных рядов, вставшие в связи решением задач теории  $L$ -функций.

Этот ряд вопросов возник в результате развития метода редукции к степенным рядам в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле, суть которого частично отражается в следующей теореме, доказанной автором [1]:

**ТЕОРЕМА.** Ряд Дирихле  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n / n^s$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  тогда и только тогда продолжим целым образом в комплексную плоскость с условием роста в критической полосе  $0 \leq \sigma \leq 1$

$$|f(s)| < c \cdot e^{\frac{\pi}{2}|s|} (s = \sigma + it),$$

когда соответствующий степенной ряд

$$q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

имеет в точке  $z=1$  конечные радиальные производные любого порядка, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} q^{(m)}(x) = \alpha_m, m = \overline{0, \infty}$$

1. Метод редукции к степенным рядам позволил автору [2] определить классические  $L$ -функции для неглавного характера в классе рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами как продолженные целым образом, в комплексную плоскость с условием роста вдоль отрицательной вещественной полусоси

$$|f(s)| < c \cdot e^{\ln|s| \cdot |s| + \alpha|s|}, \quad (1)$$

где  $\alpha > 0$ .

Вопрос: можно ли в классе рядов Дирихле с произвольными коэффициентами определить класс  $L$ -функций, продолжимых целым образом на комплексную плоскость с условием роста (1) вдоль действительной оси и с дополнительным условием вдоль мнимой оси (почти периодичности, определённой плотности нулей в критической полосе и т.д.)?

2. Существенной частью известной гипотезы Н.Г. Чудакова об обобщённых характеристах [3] является доказательство целостности функций вида

$$L(s, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad (2)$$

где  $h(n)$  – конечнозначная, мультиплекативная, числовая функция с полной базой и ограниченной сумматорной функцией

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = O(1).$$

Метод редукции к степенным рядам сводит эту задачу к существованию односторонних производных любого порядка в точке  $z=1$  функции  $q(z) = \sum_1^{\infty} h(n)z^n$ , где  $h(n)$  – обобщённый характер. Для решения последней задачи наиболее перспективным является аппроксимационный подход: исследование вопросов приближения функций, определённых на отрезке  $[0,1]$  степенными рядами с мультиплекативными коэффициентами, алгебраическими полиномами. Пусть  $E_n(q)$  – величина наилучшего приближения такой функции алгебраическими полиномами степени  $\leq n$  в равномерной норме.

Если  $E_n(q)n^p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , (для любого  $p > 0$ ), то положительно решается вопрос о целостности функции (2). Если же  $E_n(q)p^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , где  $p > 1$ , то проблема обобщённых характеров решается полностью.

Представляет интерес дать оценку величин  $E_n(q)$ .

3. С исследованием вопросов приближения по собственным векторам с “заданной системой образующих” связана задача о граничном поведении в точке  $z=1$  степенного ряда

$$q(z) = \sum_1^{\infty} \chi(n)z^n, \quad (3)$$

где  $\chi(n)$  – характер Гекке. Данная задача встает в связи с двумя проблемами в теории  $L$ -функций.

Во-первых, представляет интерес получить теорему об аналитическом продолжении  $L$ -функции числового поля с характером Гекке без использования функционального уравнения. Во-вторых, в связи с известной гипотезой Ю.В. Линника [4] о целостности  $L$ -функций вида

$$L(s, \chi_1, \chi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{N_{K_1}(\varphi_1)=n \\ N_{K_2}(\varphi_2)=n}} \chi_1(\varphi_1) \chi_2(\varphi_2) \right) \frac{1}{n^s},$$

где  $\chi_1, \chi_2$  – характеры Гекке числовых полей  $k_1, k_2$ .

Для решения этой задачи достаточно показать, что степенные ряды вида (3) определяют функции, которые при  $|z| < 1$  можно представить в виде

$$q(z) = R(z) + \hat{q}(z),$$

где  $R(z)$  – рациональная функция с полюсами, расположенными на единичной окружности, а  $\hat{q}(z)$  – ограниченная в единичном круге, у которой в любой точке  $z = e^{i\varphi}$  существуют конечные радиальные производные любого порядка, т.е.

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \hat{q}^{(m)}(re^{i\varphi}) = \alpha_m, m = \overline{0, \infty}.$$

Отметим, что в случае характеров Дирихле соответствующий результат доказан автором [5].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов В.Н. К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Тр. 3-й Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 2. С. 113 – 115.
2. Кузнецов В.Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36. № 6. С. 805 – 813.
3. Чудаков Н.Г., Родосский К.А. Об обобщённом характере // ДАН СССР. 1950. Т. 73. С. 1137 – 1139.
4. Фоменко О.М. Продолжимость на всю плоскость и функциональное уравнение скалярного произведения  $L$ -рядов Гекке двух квадратичных полей // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 128. С. 131 – 137.
5. Кузнецов В.Н. Метод редукции к степенным рядам в задаче о целостности композита рядов Дирихле // Тр. 4-й Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Ч. 2. С. 139 – 141.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

#### МИНИМАЛЬНЫЕ МЕТРИКИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Данная статья относится к теории вероятностных метрик, развитой в работах В. М. Золотарёва и его школы [1]. Одним из основных понятий этой теории является понятие минимальной метрики. В настоящей статье рассмотрено его обобщение, введены  $\varepsilon$ -минимальные метрики и исследуются их свойства.

Пусть  $(U, d)$  – полное сепарабельное метрическое пространство,  $(\Omega, \Sigma, P)$  – вероятностное пространство,  $X$  – класс случайных величин, определённых на  $\Omega$  и принимающих значения в  $U$ ,  $P^1$  – класс одномерных распределений случайных величин из  $X$ ,  $P^2$  – класс двумерных распределений случайных векторов из  $X \times X$ .

Определение 1. Вероятностной метрикой называется отображение  $\mu: P^2 \rightarrow R$ , удовлетворяющее условиям:

1)  $\mu(P_0) = 0$ , где  $P_0$  – двумерное распределение случайного вектора  $(X, Y)$ , обладающего свойством  $P\{X = Y\} = 1$ ;

2)  $\mu(P_{12}) = \mu(P_{21})$ , где двумерные распределения  $P_{12}$  и  $P_{21}$  связаны соотношением  $P_{12}(A \times B) = P_{21}(B \times A)$ ,  $A, B \in \mathcal{B}(U)$  ( $\mathcal{B}(U)$  – класс борелевских подмножеств  $U$ );

3)  $\mu(P_{12}) \leq \mu(P_{13}) + \mu(P_{32})$  для любых согласованных распределений  $P_{12}, P_{13}, P_{32}$ .

(Набор двумерных распределений называется согласованным, если существует распределение большей размерности, соответствующие двумерные распределения которого совпадают с данными).

Определение 2. Пусть  $\mu$  – вероятностная метрика,  $\varepsilon \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  – отношение эквивалентности на  $\mathbb{P}^1$ .  $\varepsilon$ -минимальной метрикой, соответствующей данной метрике  $\mu$ , называется функционал  $\mu_\varepsilon$ , определённый соотношением

$$\mu_\varepsilon(P_{12}) = \inf\{\mu(P'_1)\}_{(P_1, P'_1) \in \varepsilon}, \quad (1)$$

где  $P_1 = P_{r_1} P_{12}$ ,  $P_2 = P_{r_2} P_{12}$ , то есть при всех  $A \in \mathcal{B}(U)$   
 $P_1(A) = P_{12}(A \times U)$ ,  $P_2(A) = P_{12}(U \times A)$ .

Замечание 1. Если  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , где

$$\varepsilon_0 = \{(P_1, P_2) : P_1 = P_2\}, \quad (2)$$

то функционал  $\mu_\varepsilon$  превращается в обычную минимальную метрику  $\hat{\mu}$ .

Замечание 2. Если в результате введения минимальной метрики получается функционал, зависящий не от двумерного распределения, а от пары одномерных распределений, то замена отношения равенства распределений другим отношением эквивалентности позволяет в некоторых случаях получить расстояние между классами эквивалентности распределений случайных величин в терминах характеристик данных классов. Например, если  $\varepsilon_1 = \{(P_X, P_Y) : EX = EY\}$ , то  $\mu_{\varepsilon_1}$  будет зависеть только от  $EX$  и  $EY$ .

Замечание 3. Выполнение условий 1) и 2) определения 1 для  $\mu_\varepsilon$  очевидно. В общем случае неясно, будет ли выполняться для данного функционала неравенство треугольника. Однако для некоторых  $\mu$  и  $\varepsilon$   $\mu_\varepsilon$  обладает свойством 3) и, следовательно, является вероятностной метрикой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $f$  – неубывающая функция,  $g$  – непрерывная справа неубывающая функция,  $\varepsilon$  – отношение эквивалентности на  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mu, \nu$  – вероятностные метрики. Тогда из выполнения условия

$$\forall P_{12} \in \mathbb{P}^2 \quad f(\mu(P_{12})) \leq g(\nu(P_{12})) \quad (3)$$

вытекает справедливость соотношения

$$\forall P_{12} \in \mathbb{P}^2 \quad f(\mu_\varepsilon(P_{12})) \leq g(\nu_\varepsilon(P_{12})). \quad (4)$$

**Доказательство.** Пусть  $P_{12} \in \mathbb{P}^2$ ,  $P_1 = P_{r_1} P_{12}$ ,  $P_2 = P_{r_2} P_{12}$ . При всех натуральных  $n$  существует распределение  $P_{12}^n$ , удовлетворяющее условиям  $(P_1^n, P_1) \in \varepsilon$ ,  $(P_2^n, P_2) \in \varepsilon$ ,  $v(P_{12}^n) \leq v_\varepsilon(P_{12}) + \frac{1}{n}$ . Поскольку верны соотношения  $(P_1^n, P_1) \in \varepsilon$ ,  $(P_2^n, P_2) \in \varepsilon$ , то справедливо неравенство  $\mu_\varepsilon(P_{12}) \leq \mu(P_{12}^n)$ . Используя полученные соотношения, условие (3) и монотонность функций  $f$  и  $g$ , получаем цепочку неравенств

$$f(\mu_\varepsilon(P_{12})) \leq f(\mu(P_{12}^n)) \leq g(v(P_{12}^n)) \leq g\left(v_\varepsilon(P_{12}) + \frac{1}{n}\right).$$

Устремляя  $n$  к  $\infty$ , с учётом непрерывности справа функции  $g$  получаем требуемое неравенство  $f(\mu_\varepsilon(P_{12})) \leq g(v_\varepsilon(P_{12}))$ . Доказательство теоремы завершено.

**Замечание 4.** Теорема 1 позволяет, имея некоторые неравенства для вероятностных метрик, получить соответствующие неравенства для  $\varepsilon$ -минимальных метрик.

**ТЕОРЕМА 2.** Для любой метрики  $\mu$  и отношения эквивалентности  $\varepsilon$  справедливо равенство

$$\mu_\varepsilon = \hat{\mu}_\varepsilon. \quad (5)$$

**Доказательство.** Для любого отношения эквивалентности  $\varepsilon$  на  $\mathbb{P}^1$  вследствие его рефлексивности справедливо включение  $\varepsilon_0 \subset \varepsilon$ . Следовательно, для любой метрики  $\mu$  и произвольного  $P_{12} \in \mathbb{P}^2$  выполняется неравенство  $\mu_{\varepsilon_0}(P_{12}) \geq \mu_\varepsilon(P_{12})$ , то есть  $\hat{\mu}(P_{12}) \geq \mu_\varepsilon(P_{12})$ , откуда имеем  $\hat{\mu}_\varepsilon(P_{12}) \geq (\mu_\varepsilon)_\varepsilon(P_{12})$  и

$$\hat{\mu}_\varepsilon(P_{12}) \geq \mu_\varepsilon(P_{12}). \quad (6)$$

С другой стороны, для этих же  $\mu$  и  $P_{12}$  справедливо соотношение  $\hat{\mu}(P_{12}) \leq \mu(P_{12})$ , из которого вытекает неравенство

$$\hat{\mu}_\varepsilon(P_{12}) \leq \mu_\varepsilon(P_{12}). \quad (7)$$

(6) и (7) дают нам требуемое равенство (5). Доказательство теоремы завершено.

Следующая теорема даёт выражения  $\varepsilon$ -минимальных метрик для конкретных метрик и отношений эквивалентности.

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $U = R$ . Справедливы равенства

$$\tau_{\varepsilon_1}(P_{XY}) = |EX - EY|, \quad (8)$$

$$\alpha_{\varepsilon_1}(P_{XY}) = |EX - EY|, \quad (9)$$

$$\iota_{\varepsilon_1}(P_{XY}) = 0, \quad (10)$$

$$\sigma_{\varepsilon_1}(P_{XY}) = 0, \quad (11)$$

где  $\tau(P_{XY}) = E|X - Y|$ ,  $\alpha(P_{XY}) = \int_{-\infty}^{\infty} |F_X(x) - F_Y(x)| dx$ ,  $i(P_{XY}) = P\{X \neq Y\}$ ,

$$\sigma(P_{XY}) = \sup_{A \in \mathcal{B}(R)} |P_X(A) - P_Y(A)|, \quad \varepsilon_1 = \{(P_X, P_Y) : EX = EY\}.$$

Доказательство. Верны соотношения

$$\tau_{\varepsilon_1}(P_{XY}) = \inf \left\{ E|X' - Y'| : EX' = EX, EY' = EY \right\} \geq |EX - EY|.$$

Нижняя оценка достигается на распределении пары случайных величин  $(X^*, Y^*)$ , определяемых условием  $P\{X^* = EX, Y^* = EY\} = 1$ . Таким образом, равенство (8) доказано. (9) получается из (8) применением теоремы 2 с использованием известного соотношения  $\alpha = \hat{\tau}$  [1].

Для доказательства равенства (10) возьмём произвольное распределение  $P_{XY}$  и обозначим  $EX = \alpha$ ,  $EY = \beta$ . Верно равенство  $i_{\varepsilon_1}(P_{XY}) = \inf \{P\{X' \neq Y'\} : EX' = \alpha, EY' = \beta\}$ . При  $\alpha = \beta$  соотношение (10) очевидно. Предположим, что  $\alpha \neq \beta$ . Для любого  $p \in (0, 1)$  зададим двумерное распределение случайного вектора  $(X_p, Y_p)$  равенствами

$$P\{X_p = 0, Y_p = 0\} = p, \quad P\{X_p = \alpha/1-p, Y_p = \beta/1-p\} = 1-p,$$

$$P\{X_p = 0, Y_p = \beta/1-p\} = P\{X_p = \alpha/1-p, Y_p = 0\} = 0.$$

Нетрудно видеть, что  $EX_p = \alpha$ ,  $EY_p = \beta$  и  $P\{X_p \neq Y_p\} = 1-p$ . Таким образом,  $\inf \{P\{X' \neq Y'\} : EX' = \alpha, EY' = \beta\} = 0$  и равенство (10) доказано. (11) получается из (10) применением теоремы 2 с использованием соотношения  $\hat{i} = \sigma$  [1].

В дальнейшем интересно рассмотреть  $\varepsilon$ -минимальные метрики для отношений эквивалентности  $\varepsilon_k = \{(P_X, P_X) : EX^l = EY^l, l = 1, \dots, k\}$  и с их помощью, используя теорему 1, имея неравенства вида (3), получить неравенства вида (4), которые будут выражены в терминах  $EX^l$  и  $EY^l$ ,  $l = 1, \dots, k$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Золотарёв В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.

С. Ф. Лукомский

## АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА, БЛИЗКИХ К $L^\infty$

Пусть  $(G, \sum, \mu)$  пространство с конечной мерой  $\mu$  и пусть для определенности  $\mu G = 1$ . Для функции  $f \in L(G)$  положим

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in G : |f(x)| > y\} \quad (y > 0). \quad (1)$$

и

$$f^*(t) = \inf\{y > 0 : \lambda_f(y) \leq t\} \quad (0 < t \leq 1). \quad (2)$$

Функция  $f^*(t)$  является равноизмеримой перестановкой для  $|f(x)|$ .

Пусть  $\psi(t) \geq 0$  возрастающая, непрерывная на  $[0, 1]$ , функция. Рассмотрим пространства Лоренца

$$\Lambda_{\psi, p}(G) = \left\{ f \in L(G) : \|f\|_{\psi, p} = \left\{ \int_0^1 (\psi(t)f^*(t))^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p} \|f\|_{\psi, p} < +\infty \right\} \quad (p \geq 1)$$

для случая, когда  $\psi(t) = \psi_\alpha(t) = (1 + \log t^{-1})^\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ). Эти пространства Лоренца расположены между  $L^p$  и  $L^\infty$ , и для них мы хотим предложить две новые характеристики.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $p > 1, \alpha \geq 1, \psi(t) = (1 + \log_2 t^{-1})^\alpha$ . Тогда

$$1) f \in \Lambda_{\psi, p}(G) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p < \infty;$$

$$2) f \in \Lambda_{\psi, p}(G) \Leftrightarrow f \in \bigcup_{\varphi \in \Phi} \bigcap_{\gamma \geq 1} L(\gamma^{\Phi(f)})$$

где  $\Phi$  – это семейство непрерывных, положительных, строго возрастающих на  $(0, \infty)$  функций  $\varphi$  таких, что

$$\int_1^{+\infty} \left( \frac{\varphi^{-1}(t)}{t^\alpha} \right)^p dt < +\infty \quad (\varphi^{-1} – \text{обратная к } \varphi)$$

и  $L(\gamma^{\Phi(f)})$  – классы Орлича, т. е.

$$L(\gamma^{\Phi(f)}) = \left\{ f \in L(G) : \int_G \gamma^{\Phi(f)} d\mu < +\infty \right\}.$$

**Доказательство.** 1. Так как  $f$  и  $f^*$  равноизмеримы, то  $\|f\|_n = \|f^*\|_n$ , поэтому, учитывая монотонность  $f^*$ , получаем

$$\|f^*\|_n^n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f^*(t) dt \geq \sum_{k=0}^{\infty} f^*(2^{-k})^n \geq f^*(2^{-n})^n \cdot 2^{-n-1}.$$

Отсюда  $\|f^*\|_n \geq f^*(2^{-n})^{1/p}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \|f\|_{\psi,p}^p &= \int_0^1 (\psi_\alpha \cdot f^*(t))^p \frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} (\psi_\alpha \cdot f^*(t))^p \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=0}^{\infty} f^* \left( \frac{1}{2^{k+1}} \right)^p \times \\ &\times \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} (\psi_\alpha \cdot f^*(t))^p \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=0}^{\infty} f^* \left( \frac{1}{2^{k+1}} \right)^p \frac{1}{2^{k+1}} 2^{k+1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha p}} \leq \\ &\leq 4^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f^*\|_{k+1}^p}{(1+k)^{\alpha p}} = 4^p \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, если  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p < \infty$ , то  $f \in \Lambda_{\psi,p}$  и  $\psi = (1 + \log t^{-1})^{-\alpha}$ .

Покажем обратное неравенство. Будем считать, что  $\|f\|_{\psi,p} > 0$ , так как в противном случае включение очевидно. Обозначим

$$x(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } |f(t)| \geq 1/2 \|f\|_{\psi,p}; \\ 1/2 \|f\|_{\psi,p}, & \text{если } |f(t)| < 1/2 \|f\|_{\psi,p}. \end{cases} \quad (4)$$

Учитывая, что  $\|f\|_{\psi,p}$  — норма, нетрудно проверить неравенства

$$\|f\|_p \leq \|x\|_p, \quad 1/2 \|f\|_{\psi,p} \leq \|x\|_{\psi,p} \leq \lambda \|f\|_{\psi,p}, \quad (\lambda = 1 + (\alpha p - 1)^{-1/p} / 2) \quad (5)$$

Очевидно, что  $|x| \geq \frac{1}{2} \|f\|_{\psi,p}$  всюду в  $G$ . Для нормы  $\|x\|_{\psi,p}$  имеем

$$\begin{aligned} \|x\|_{\psi,p}^p &= \int_0^1 (\psi_\alpha(t) x^*(t))^p \frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} (\psi_\alpha(t) x^*(t))^p \frac{dt}{t} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x^*(2^{-k})}{(k+2)^\alpha} \right)^p \frac{2^k}{2^{k+1}} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{x^*(2^{-k})}{k^\alpha} \right)^p \left( \frac{k}{k+2} \right)^{\alpha p} \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^{\alpha p} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{x^*(2^{-k})}{k^\alpha} \right)^p. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая (5) и неравенство  $|x(t)| \geq 1/2 \|f\|_{\psi,p}$ , получаем

$$\begin{aligned} \|x\|_n^n &= \int_0^1 x^*(t)^n dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} x^*(t)^n dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^*(2^{-k})^n}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{x^*(2^{-k})}{k^\alpha} \right)^p \frac{x^*(2^{-k})^n}{2^k} \times \\ &\times k^{\alpha p} \frac{1}{x^*(2^{-k})^p} \leq \frac{2^p}{\|f\|_{\psi,p}^p} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{x^*(2^{-k})}{k^\alpha} \right)^p \sup_k \frac{x^*(2^{-k})^n}{2^k} \cdot k^{\alpha p} \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2^{p+1} 3^{\alpha p} \frac{\|x\|_{\psi,p}^p}{\|f\|_{\psi,p}^p} \cdot \sup_k \frac{x^*(2^{-k})^n}{2^k} \cdot k^{\alpha p} \leq 8^p 3^{\alpha p} \cdot 2 \sup_k \frac{x^*(2^{-k})^n}{2^k} \cdot k^{\alpha p}. \quad (7)$$

Обозначим через  $k_n$  то значение  $k$ , при котором достигается sup в правой части неравенства (7). Тогда

$$\|x\|_n \leq 2(8 \cdot 3^\alpha)^n x^*(2^{-k_n}) \cdot k_n^n \cdot 2^{-\frac{k_n}{n}} \leq 2(8 \cdot 3^\alpha)^p x^*(2^{-k_n}) \cdot k_n^n \cdot 2^{-\frac{k_n}{n}}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\|x\|_n}{n^\alpha} \right)^p \leq 2^p (8 \cdot 3^\alpha)^{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^*(2^{-k_n})^p}{n^{\alpha p}} \cdot k_n^{\frac{\alpha p}{n}} \cdot 2^{-\frac{k_n}{n}}.$$

Обозначим  $K(s) = \left\{ n : s \leq \frac{k_n}{n} < s+1 \right\}$ . Учитывая (6), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\|x\|_n}{n^\alpha} \right)^p &\leq c(\alpha, p) \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n \in K(s)} \frac{x^*(2^{-k_n})^p}{n^{\alpha p}} \frac{k_n^n}{\frac{k_n}{n}^p} \leq c(\alpha, p) \times \\ &\times \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n \in K(s)} \frac{x^*(2^{-ns})^p}{n^{\alpha p}} \frac{(n(s+1))^{\frac{\alpha p}{n}}}{2^{sp}} = c(\alpha, p) \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^{\alpha p}}{2^{sp}} \sum_{n \in K(s)} \frac{x^*(2^{-ns})^p}{(sn)^{\alpha p}} \times \\ &\times (s+1)^{\frac{\alpha p}{n}} n^{\frac{\alpha p}{n}} \leq c_1(\alpha, p) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s+1)^{\alpha p(1+p)}}{2^{sp}} \sum_{n \in K(s)} \frac{x^*(2^{-ns})^p}{(sn)^{\alpha p}} \leq \\ &\leq c_2(\alpha, p) \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s+1)^{\alpha p(1+p)}}{2^{sp}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^*(2^{-n})}{(n)^\alpha} \right)^p \leq c_3(\alpha, p) \|x\|_{\psi,p}^p, \end{aligned}$$

что и доказывает с учетом (5) неравенство, обратное к (3), а значит и утверждение 1) теоремы.

2. Ранее в работе автора [1] было доказано, что условие  $f \in \bigcup_{\varphi \in \Phi} \bigcap_{\gamma > 1} L(\gamma^{\Phi(f)})$  равносильно условию  $\sum \left( \frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p < \infty$ , т.е. условие 2) теоремы тоже верно.

Отметим, что условие 2) доказанной теоремы дает новые необходимые и достаточные условия, при которых коэффициенты суммы ряда Радемахера

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k(t)$$

принадлежат пространству  $l^p$  ( $1 < p < 2$ ) [2].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лукомский С.Ф. О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к  $L^\infty$  // Мат. заметки. 2001. Т. 10, № 6. С. 861 – 868.
2. Rodin V.A., Semenov E.M. Rademacher series in symmetric spaces // Analysis Mathematica. 1975. Vol. 1. P. 207 – 222.

УДК 518.517.944

А. Д. Луньков

## ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Рассмотрим задачу расчета нестационарных температурных полей в двумерных составных областях, возникающую в случае, когда тепловой поток проходит через однородное тело (то есть коэффициент теплопроводности не зависит от координат).

Стандартная детерминированная задача такого вида выглядит следующим образом: в многосвязной области  $D$  в прямоугольной системе координат  $(x, y)$  задано нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + q(x, y, t), \quad \Delta - \text{двумерный оператор Лапласа}. \quad (1)$$

Даны начальные условия  $\theta(x, y, 0) = h_0(x, y)$  и граничные условия (предполагаем, что они 3-го рода)  $\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} + \alpha \theta = \alpha \theta_{\infty}$ .

Внесем некоторые изменения в уравнения и, следовательно, в постановку задачи. Предположим, что функция  $q$ , называемая функцией тепловыделения, зависит от геометрических и временных координат, а также и от случайных факторов, а именно: пусть  $q$  – случайный процесс вида

$$q = q_0 + q_1 f(t). \quad (2)$$

Здесь  $f$  и  $q_0$  – детерминированные (неслучайные) функции времени,  $q_1$  – случайная величина. Тогда и температура  $\theta$  – случайный процесс. В общем случае даже при нулевом значении математического ожидания  $q_1$  процесс  $q_1 f$  не будет стационарным в широком смысле.

Рассмотрим метод сведения стохастической задачи к детерминированной. Будем искать решение в виде

$$\theta(x, y, t) = \theta_0(x, y, t) + q_1 \theta_1(x, y, t). \quad (3)$$

Тогда уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} + q_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \Delta \theta_0 + q_0 + q_1 \Delta \theta_1 + q_1 f(t). \quad (4)$$

Границные условия 3-го рода принимают вид

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial n} + q_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} + \alpha \theta_0 + \alpha q_1 \theta_1 = \alpha \theta_{\infty}.$$

Приравняв случайные, а затем и неслучайные составляющие левой и правой частей уравнения (4) (то есть слагаемые, содержащие и не содержащие  $q_1$ ), получаем уравнения

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \Delta \theta_1 + f(t); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} = q_0 + \Delta \theta_0. \quad (6)$$

Приравняв подобным образом случайные и неслучайные составляющие граничных и начальных условий, получим новый набор условий:

$$\lambda \frac{\partial \theta_1}{\partial n} + \alpha \theta_1 = 0, \quad (5a)$$

$$\theta_1(x, y, 0) = 0, \quad (5b)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta_0}{\partial n} + \alpha \theta_0 = \alpha \theta_{\infty}, \quad (6a)$$

$$\theta_0(x, y, 0) = h_0(x, y). \quad (6b)$$

Таким образом, имеем уравнения теплопроводности (5) и (6) с граничными условиями (5а, 5б) и (6а, 6б) соответственно. Эти две краевые задачи дают решения, комбинация которых, полученная согласно (3), удовлетворяет исходной задаче теплопроводности для уравнения (1). Каждое из уравнений (5) и (6) можно решить численно способом, описанным в [1]. Результатом такого процесса решения для некоторой точки  $(x, y)$  в некоторый момент времени  $t$  будут значения  $\theta_0$  и  $\theta_1$ . Общее решение, определяемое в соответствии с (3) – случайный процесс для каждого фиксированного  $(x, y)$ .

Основные характеристики этого процесса можно получить с помощью следующих элементарных вычислений:

$$M\theta = M(\theta_0 + q_1 \theta_1) = \theta_0 + \theta_1 M q_1,$$

$$\begin{aligned} K_\theta(t_1, t_2) &= M((\theta(x, y, t_1) - M\theta(x, y, t_1))(\theta(x, y, t_2) - M\theta(x, y, t_2))) = \\ &= M((q_1 \theta_1(x, y, t_1) + \theta_0 - Mq_1 \theta_1(x, y, t_1) - M\theta_0) \times \\ &\quad \times (q_1 \theta_1(x, y, t_2) + \theta_0 - Mq_1 \theta_1(x, y, t_2) - M\theta_0)) = \end{aligned}$$

$$= \theta_1(x, y, t_1) \theta_1(x, y, t_2) M (q_1 - M q_1)^2 = \theta_1(x, y, t_1) \theta_1(x, y, t_2) D q_1$$

$$D\theta(x, y, t) = [\theta_1(x, y, t)]^2 D q_1.$$

В стационарном случае можно приближенно подсчитать и спектральную плотность случайного процесса по формуле

$$S_\theta(\omega) = \frac{1}{\pi} \theta_1(x, y, 0) D q_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_1(x, y, \tau) \cos(\omega \tau) d\tau.$$

В общем случае температура не является стационарным в широком смысле процессом, даже если тепловыделение стационарно (корреляционная функция не будет функцией разности аргументов).

В качестве примера рассмотрим задачу, заданную в области, граница которой – эллипс с центром в начале координат, с полуосями 0,5 и 0,25. Параметры уравнения и функции, от которых зависят начальные и граничные условия, определим так:

$$\alpha = 1; \lambda = 1; h_0 = 1; q_0 = t; \theta_* = 1; f = 1000 * \sin(t).$$

Случайная величина  $q_1$  подчиняется распределению Гаусса с математическим ожиданием, равным 1 и дисперсией, равной 1.

Приведем значения математического ожидания и дисперсии температуры для некоторых характерных точек границы области.

При $t=0,00025$				
$(x, y)$	(0.5, 0)	(0.353, 0.176)	(0, 0.25)	(-0.5, 0)
$M\theta$	1,038	1,03722	1,03723	1,038
$D\theta$	0,0000001017	0,0000001009	0,0000001006	0,0000001017
При $t=0,005$				
$(x, y)$	(0.5, 0)	(0.353, 0.176)	(0, 0.25)	(-0.5, 0)
$M\theta$	1,227	1,193	1,185	1,227
$D\theta$	0,0002334	0,0002187	0,0002146	0,0002334

Подсчитаны также характеристики и внутри области. Там среднее и дисперсия, как правило, меньше, чем на границе.

Метод обобщается на тот случай, когда область состоит из нескольких частей, различающихся по коэффициентам теплопроводности. Этот случай рассмотрен в [1]. Если же тепловыделение будет случайным процессом более общего вида, то задача может быть решена с помощью статистического моделирования такого процесса и решение для каждой реализации процесса детерминированного уравнения теплопроводности может быть найдено способом, описанным в [2].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Луньков А.Д. Плоские нестационарные задачи теплопроводности в составных областях // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 163 – 166.
2. Федик И.И., Колесов В.С., Михайлова В.Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.

УДК 519.6

М. А. Ляшко

### ОПТИМАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматривается система  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  переменными

$$x = Ax + b, \quad A \in R^{n \times n}, \quad x, b \in R^n, \quad (1)$$

про которую известно, что её коэффициенты могут независимо изменяться в некоторых заданных промежутках:  $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}; \bar{a}_{ij}]$ ,  $\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} \in R$ ,  $\underline{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$ ,  $b_i \in [\underline{b}_i; \bar{b}_i]$ ,  $\underline{b}_i, \bar{b}_i \in R$ ,  $\underline{b}_i \leq \bar{b}_i$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Согласно принятой терминологии [1], замкнутые промежутки действительной оси называются интервалами и обозначаются  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}, \dots$ . Арифметические операции над интервалами  $\mathbf{a} = [\underline{a}; \bar{a}]$  и  $\mathbf{b} = [\underline{b}; \bar{b}]$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \{a * b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\}, \quad \text{где } * \in \{+, -, \times, \div\}. \quad (2)$$

Достаточно очевидно, что в результате любой операции получается интервал (деление возможно, если делитель не содержит нуля), причем

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = [\min\{\underline{a} * \underline{b}, \bar{a} * \bar{b}, \underline{a} * \bar{b}, \bar{a} * \underline{b}\}; \max\{\underline{a} * \bar{b}, \bar{a} * \bar{b}, \bar{a} * \underline{b}, \underline{a} * \underline{b}\}]. \quad (3)$$

Такое определение арифметических операций над величинами, которые могут принимать значения из некоторого промежутка, имеет преимущества перед определением результата операций над приближенными числами в классической теории погрешностей. Например, если интерпретировать интервал  $\mathbf{a} = [1; 3]$  как приближенное число  $a = 2 \pm 1$ , а интервал  $\mathbf{b} = [2; 4]$  как  $b = 3 \pm 1$ , то в результате их перемножения получим число  $a \cdot b = 6 \pm 5$ , которое можно интерпретировать как интервал  $[1; 11]$ , в то время как формула (2) или (3), учитывая все значения сомножителей и не приобретающая лишних даёт интервал  $[2; 12]$ .

Обозначим множество действительных интервалов  $IR$ , множество  $n$ -мерных векторов с интервальными компонентами –  $IR^n$ , множество квадратных матриц  $n \times n$  с интервальными коэффициентами –  $IR^{n \times n}$ . Меняя значения коэффициентов системы (1) в указанных числовых проме-

жутках, получаем множество систем, которые можно объединить одной формальной записью

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Система (4) называется интервальной системой линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ). Интервальный вектор  $\mathbf{x}^*$  называется решением системы (4), если подстановка этого вектора в данную систему и выполнение всех операций по правилам интервальной арифметики приводят к верному равенству. Таким образом,  $\mathbf{x}^*$  является неподвижной точкой отображения  $\mathbf{Ax} + \mathbf{b}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Одной из самых важных задач в теории решения таких систем является нахождение объединенного множества решений (OMP)

$$\Sigma = \{x \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(x = Ax + b)\}, \quad (5)$$

т.е. множества, состоящего из решений всех точечных систем (1), входящих в интервальную (4). Множество (5) является объединением выпуклых в каждом гипероктанте множеств, имеющих совпадающие грани на координатных плоскостях, и в общем случае невыпукло, а при условии невырожденности всех точечных матриц  $I-A$ , где  $A \in \mathbf{A}$ , множество (5) является ограниченным, и актуальной становится задача отыскания или ограничения минимального по ширине интервального вектора, содержащего ОМР (5), так называемой интервальной оболочки

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^H &= \left( \mathbf{x}_1^H, \dots, \mathbf{x}_n^H \right)^T, \quad \mathbf{x}_i^H = \begin{bmatrix} x_i^H & \bar{x}_i^H \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \underline{x}_i^H &= \min \{x_i \mid x \in \Sigma\}, \quad \bar{x}_i^H = \max \{x_i \mid x \in \Sigma\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эта задача намного легче, чем задача отыскания ОМР. Например, при условии, что матрица  $|A|$ , составленная из модулей наиболее удаленных от нуля концов  $\mathbf{A}$ , имеет спектральный радиус меньше 1, решение системы (4)  $\mathbf{x}^*$  содержит  $\mathbf{X}^H$ , а в некоторых случаях и совпадает с ней:  $\mathbf{X}^H \subseteq \mathbf{x}^*$ . Ниже на рис. 1 и рис. 2 приведены две системы, для каждой из которых указано ОМР  $\Sigma$ , интервальная оболочка  $\mathbf{X}^H$  и решение  $\mathbf{x}^*$ .

В случае совпадения  $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$  интервальная оболочка  $\mathbf{X}^H$  может быть найдена с любой степенью точности итерационными методами, которые просты в реализации. Таким образом, необходимо выделить класс систем (4), на которых такое совпадение достигается, и решение, полученное итерационным методом, дает оптимальную (неулучшаемую) оценку разброса значений каждой переменной. Имеется доказательство [1] совпадения  $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$  для случая неотрицательных коэффициентов матрицы  $\mathbf{A}$ :  $0 \leq \underline{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$  (рис. 1). Автором [2] были получены достаточные условия совпадения  $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$  для систем (4) с матрицами, состоящими

из коэффициентов, не содержащих нуля внутри (знакопостоянных) или чисто нулевых:  $0 \leq \underline{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$  или  $\underline{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij} \leq 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Для того чтобы выполнялось равенство  $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$ , достаточно, а при условии, что ни один внедиагональный коэффициент  $A$  не вырождается в 0 и ни одна интервальная компонента  $\mathbf{X}^H$  не вырождается в точку, то и необходимо, чтобы главная диагональ  $A$  состояла из неотрицательных интервалов, а знаки коэффициентов  $a_{ij}$  при  $i \neq j$  совпадали с произведением знаков  $\mathbf{a}_{1i}$  и  $\mathbf{a}_{1j}$ .

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.6; 0.8] & [0; 0.2] \\ [0; 0.1] & [0.6; 0.8] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [-0.2; 0.2] \\ [-0.2; 0.2] \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.6; 0.8] & [-0.1; 0.2] \\ [-0.12; 0.1] & [0.6; 0.8] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [-0.2; 0.2] \\ [-0.2; 0.2] \end{pmatrix}$$

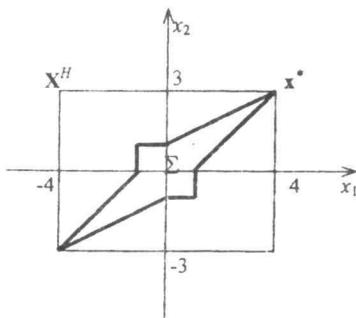


Рис. 1

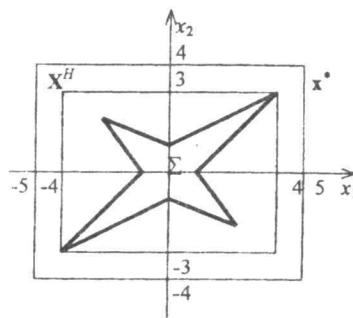


Рис. 2

При проверке достаточных условий нулевому коэффициенту можно присвоить любой знак. Система на рис.1 удовлетворяет достаточному условию совпадения  $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$ . Матрица системы на рис.2 содержит коэффициенты с 0 внутри.

Полученный результат удалось распространить и на системы с матрицами, коэффициенты которых содержат 0 внутри. Рамки этой статьи не позволяют в полной мере изложить теорию, лежащую в основе доказательства. Она опирается на одно интересное свойство интервального умножения. Например,  $[-1; 3]x[-1; 1] = [-3; 3]$ , и в то же время  $[-3; 3] = [0; 3]x[-1; 1] = [3; 3]x[-1; 1]$  и т.д., то есть коэффициент  $[-1; 3]$  при умножении на  $[-1; 1]$  может быть заменен на неотрицательный (знакопостоянный) интервал  $[0; 3]$  и даже на число  $[3; 3]$  без изменения результата. Возможность такой замены в общем случае легко алгоритмизируется.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть в системе (4) матрица  $A$  и решение  $\mathbf{x}^*$  таковы, что все коэффициенты  $a_{ij}$ , где  $\underline{a}_{ij} < 0 < \bar{a}_{ij}$  и  $\underline{x}_j^* \neq \bar{x}_j^*$ , могут быть заменены на  $\tilde{a}_{ij}$ , так что  $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}; 0]$  или  $\tilde{a}_{ij} = [0; \bar{a}_{ij}]$  и  $\underline{a}_{ij} \times \mathbf{x}_j^* = \tilde{a}_{ij} \times \mathbf{x}_j^*$ . Для того чтобы выполнялось равенство  $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$ , достаточно, а если ни один внедиагональный коэффициент  $\tilde{A}$  не вырождается в 0 и ни одна интерваль-

компонента  $X^H$  не вырождается в точку, то и необходимо, чтобы главная диагональ  $\tilde{A}$  состояла из неотрицательных интервалов, а знаки коэффициентов  $\tilde{a}_{ij}$  при  $i \neq j$  совпадали с произведением знаков  $\tilde{a}_{li}$  и  $\tilde{a}_{lj}$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
2. Ляшко М.А. О совпадении интервальной оболочки объединенного множества решений ИСЛАУ с итерационным решением. Балашов, 1996. 16 с. Деп. В ВИНИТИ 08.02.96, № 429 – В96.

УДК 519.21

А. Ю. Митрофанов

## КОЭФФИЦИЕНТ ЭРГОДИЧНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Применению коэффициентов эргодичности для оценивания устойчивости стационарных распределений конечных однородных цепей Маркова посвящены работы [1, 2] (см. также [3] и обзор [4]). В работе [1] получена оценка устойчивости стационарного распределения цепи Маркова, выраженная через коэффициент эргодичности  $\tau_1(P)$  матрицы вероятностей переходов  $P$ . При этом предполагается, что  $\tau_1(P) < 1$ . В настоящей статье для апериодических цепей Маркова, у которых существует единственное стационарное распределение, получено обобщение этой оценки.

Пусть  $X = \{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  и  $\tilde{X} = \{\tilde{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$  – цепи Маркова с пространством состояний  $S = \{1, \dots, N\}$ , матрицами вероятностей переходов соответственно  $P$  и  $\tilde{P}$  и единственными стационарными распределениями  $\pi = (\pi_i)$  и  $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_i)$ . Определим коэффициент эргодичности  $\tau_1(B)$  вещественной  $m \times n$ -матрицы  $B = (b_{ij})$ :

$$\tau_1(B) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{k=1}^n |b_{ik} - b_{jk}|. \quad (1)$$

Знаком  $\|\cdot\|$  обозначим  $\ell_1$ -норму (сумму модулей компонент) для векторов и  $\infty$ -норму (максимальную строчную сумму модулей элементов) для матриц. Величина  $\|\tilde{\pi} - \pi\|$  равна расстоянию по вариации между распределениями  $\tilde{\pi}$ ,  $\pi$ :  $\|\tilde{\pi} - \pi\| = 2 \sup_{A \subseteq S} |\tilde{\pi}(A) - \pi(A)|$ , где  $\pi(A) = \sum_{k \in A} \pi_k$ ,  $\tilde{\pi}(A) = \sum_{k \in A} \tilde{\pi}_k$ . Векторы будем считать вектор-строками.

В работе [1] показано, что если  $\tau_1(P) < 1$ , то справедливо неравенство

$$\|\tilde{\pi} - \pi\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \tau_1(P)}, \quad (2)$$

где  $E = \tilde{P} - P$ . Для многих цепей Маркова, встречающихся в приложениях, условие  $\tau_1(P) < 1$  не выполняется. Это справедливо, например, для процесса рождения и гибели с дискретным временем и конечным числом состояний, который является апериодической цепью Маркова с единственным стационарным распределением.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** Если  $X$  – процесс рождения и гибели и  $N \geq 4$ , то  $\tau_1(P) = 1$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $p_{ij}$  элементы матрицы  $P$ . Если  $X$  – процесс рождения и гибели, то  $p_{ij} = 0$  при  $|i - j| > 1$ . Выберем такие  $i$  и  $j$ , что  $|i - j| > 2$ . Тогда для любого  $k \in S$  либо  $p_{ik} > 0$ , либо  $p_{jk} > 0$ . Следовательно,  $\sum_{k \in S} |p_{ik} - p_{jk}| = 2$ . Из этого равенства, выражения (1) для коэффициента эргодичности и того факта, что для любой стохастической матрицы  $\Pi$   $\tau_1(\Pi) \leq 1$ , следует доказываемое утверждение.

Положим  $P(k) = P^k$ ,  $\tilde{P}(k) = \tilde{P}^k$ . Следующая теорема обобщает оценку (2) в случае апериодических цепей Маркова.

**ТЕОРЕМА.** Если цепи  $X$  и  $\tilde{X}$  аperiодические, то существует такое целое число  $k \geq 1$ , что  $\tau_1(P(k)) < 1$  и выполняется неравенство

$$\|\tilde{\pi} - \pi\| \leq \frac{k\|E\|}{1 - \tau_1(P(k))}.$$

**Доказательство.** Поскольку стационарное распределение цепи  $X$  единственно, у нее существует единственный замкнутый класс состояний. Следовательно, для любого начального распределения  $p(0)$  существует такая константа  $C$ , что выполняется неравенство

$$\|p(n) - \pi\| \leq Cn^{J-1}\lambda^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $p(n)$  – распределение вероятностей случайной величины  $X_n$ ,  $J$  – порядок наибольшего из жордановых блоков матрицы  $P$ ,  $\lambda < 1$  – наибольший из модулей отличных от 1 собственных значений матрицы  $P$  [5]. Пусть  $C_i$  – константа в неравенстве (3) для начального распределения  $p(0) = e_i$ , где  $e_i$  – вектор,  $i$ -я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Для любых  $i, j \in S$

$$\|e_i P(n) - e_j P(n)\| = \| (e_i P(n) - \pi) + (\pi - e_j P(n)) \| \leq$$

$$\leq \|e_i P(n) - \pi\| + \|e_j P(n) - \pi\| \leq 2 \max_{j \in S} \|e_i P(n) - \pi\|.$$

Отсюда с учетом (1) получим

$$\tau_1(P(n)) \leq \max_{j \in S} \|e_j P(n) - \pi\| \leq \max_{j \in S} C_j n^{J-1} \lambda^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что  $\tau_1(P(n)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, существует такое целое  $k \geq 1$ , что  $\tau_1(P(k)) < 1$ .

Справедливы выражения  $\pi P(k) = \pi$ ,  $\tilde{\pi} \tilde{P}(k) = \tilde{\pi}$ . Кроме того, не существует таких вероятностных векторов  $p$ ,  $\tilde{p}$ , что  $p P(k) = p$ ,  $p \neq \pi$ , и  $\tilde{p} \tilde{P}(k) = \tilde{p}$ ,  $\tilde{p} \neq \tilde{\pi}$ . Докажем это для  $P(k)$ . Предположим, что такой вектор  $p$  существует. В этом случае для всех  $l = 1, 2, \dots$   $p P(lk) = p$ . Однако вследствие аperiодичности при любом  $p(0)$   $p(0)P(k) \rightarrow \pi$  при  $k \rightarrow \infty$ . Мы пришли к противоречию. Таким образом, распределения  $\pi$  и  $\tilde{\pi}$  являются единственными стационарными распределениями цепей Маркова с переходными матрицами соответственно  $P(k)$  и  $\tilde{P}(k)$ . Следовательно, с учетом (2) получим

$$\|\tilde{\pi} - \pi\| \leq \frac{\|\tilde{P}(k) - P(k)\|}{1 - \tau_1(P(k))}. \quad (4)$$

Справедливо неравенство

$$\|\tilde{P}(n) - P(n)\| \leq n \|E\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

В самом деле, для  $n = 1$  это неравенство очевидно. Пусть оно справедливо для некоторого  $n \geq 1$ . Докажем, что оно выполняется для  $n+1$ . Имеем

$$\tilde{P}(n+1) - P(n+1) = \tilde{P}\tilde{P}(n) - PP(n) = \tilde{P}(\tilde{P}(n) - P(n)) + (\tilde{P} - P)P(n),$$

откуда следует

$$\|\tilde{P}(n+1) - P(n+1)\| \leq \|\tilde{P}(n) - P(n)\| + \|E\|,$$

что доказывает (5). Из (4) и (5) следует утверждение теоремы.

Известно, что для любых двух стохастических матриц  $P_1$  и  $P_2$   $\tau_1(P_1 P_2) \leq \tau_1(P_1) \tau_1(P_2)$ , следовательно,  $\tau_1(P(r+s)) \leq \tau_1(P(r)) \tau_1(P(s))$ , где  $r$  и  $s$  – положительные целые числа. Таким образом, если для некоторого целого  $k \geq 1$   $\tau_1(P(k)) < 1$ , то для всех целых  $l > k$   $\tau_1(P(l)) < 1$ .

Следует отметить, что существование такого целого  $k \geq 1$ , что  $\tau_1(P(k)) < 1$ , является достаточным условием единственности стационарного распределения и аperiодичности цепи  $X$  [6].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Seneta E. Perturbation of the stationary distribution measured by ergodicity coefficients // Adv. Appl. Probab. 1988. Vol. 20. P. 228–230.
2. Seneta E. Sensitivity analysis, ergodicity coefficients, and rank-one updates for finite Markov chains // Numerical solution of Markov chains. N. Y.: Marcel Dekker, 1991. P. 121–129.
3. Seneta E. Sensitivity of finite Markov chains under perturbation // Stat. Probab. Lett. 1993. Vol. 17. P. 163–168.
4. Cho G.E., Meyer C.D. Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain // Linear Algebra Appl. 2001. Vol. 335. P. 137–150.
5. Rosenthal J.S. Convergence rates of Markov chains // SIAM Rev. 1995. Vol. 37. P. 387–405.
6. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

УДК 519.212

В. Н. Михайлов, С. А. Точилкина

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ ОТ НЕЗАВИСИМЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе [1] был предложен алгоритм расчета распределения функции от независимых дискретных случайных величин. Покажем, что этот алгоритм может быть обобщен на вычисление совместного закона распределения нескольких функций от случайных величин.

Пусть в вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  определены независимые дискретные случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Введем обозначения:  $X_j = \{x_1^j, x_2^j, \dots, x_{m_j}^j\}$  – множество всех возможных значений случайной величины  $\xi_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  – декартово произведение этих множеств;  $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$  – мощность множества  $X$ ;  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  – точка в  $X$ . Будем считать, что известны законы распределения случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , т.е. известны вероятности  $P\{\xi_j = x\} \forall x \in X_j, j = \overline{1, n}$ .

Рассмотрим в этом же вероятностном пространстве случайный вектор  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r)$ , компоненты которого являются измеримыми функциями от независимых дискретных случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ :  $\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $\eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , ...,  $\eta_r = f_r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

Обозначим через  $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  векторную функцию как упорядоченную совокупность соответствующих функций  $f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , ...,  $f_r(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Тогда случайный вектор  $\eta = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

Необходимо по распределениям  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  найти совместный закон распределения случайных величин  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ , или, что одно и то же, закон распределения случайного вектора  $\eta = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

Если  $x=(x^1, x^2, \dots, x^n)$  – фиксированная точка в  $X$ , то вследствие независимости случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  будем иметь [2]

$$P\{\eta_1 = f_1(x), \eta_2 = f_2(x), \dots, \eta_r = f_r(x)\} = P\left\{\xi_1 = x^1, \xi_2 = x^2, \dots, \xi_n = x^n\right\} = P\{\xi_1 = x^1\} \cdot P\{\xi_2 = x^2\} \cdots P\{\xi_n = x^n\}. \quad (1)$$

Таким образом, в каждой точке  $x \in X$  можно вычислить значения случайных величин  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  и по формуле (1) определить их совместную вероятность.

Обозначим через:  $Y_j = \{y_1^j, y_2^j, \dots, y_{s_j}^j\}$  – множество всех возможных значений случайной величины  $\eta_j$ ,  $j=1, r$ ;  $Y=Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_r$  и  $y=(y^1, y^2, \dots, y^r)$ ,  $y \in Y$ ,  $s=s_1 s_2 \cdots s_r$  – мощность множества  $Y$ .

Введем операцию упорядочивания точек пространства  $Y$ . Рассмотрим две точки  $a=(a^1, a^2, \dots, a^r)$ ,  $b=(b^1, b^2, \dots, b^r)$  пространства  $Y$ . Будем считать, что

$$\begin{aligned} a &= b, \text{ если } a^1 = b^1, a^2 = b^2, \dots, a^r = b^r; \\ a &< b, \text{ если } \exists i: 1 \leq i \leq r \quad a^1 = b^1, a^2 = b^2, \dots, a^{i-1} = b^{i-1}, a^i < b^i. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим через  $Y'=\{y'_1, y'_2, \dots, y'_l\}$  – множество всех различных значений случайного вектора  $\eta$  ( $y'_j \leq y'_{j+1}$ ). Тогда  $Y' \subseteq Y$ , причем выполняются неравенства  $l \leq s$  и  $l \leq m$ . Заметим, что в множестве  $Y'$  нет одинаковых точек, все они строго упорядочены в указанном выше смысле.

Для построения закона распределения случайного вектора  $\eta$  необходимо найти вероятности  $P\{\eta_1 = y_j^1, \eta_2 = y_j^2, \dots, \eta_r = y_j^n\}$  или  $P\{\eta = y'_j\}$  для всех точек  $y'_j = (y'_j^1, y'_j^2, \dots, y'_j^n) \in Y'$ . Пусть

$$\begin{aligned} i &= (i_1, i_2, \dots, i_n), \quad i_k \in \{1, 2, \dots, m_k\}, \quad k=1, n, \\ M(y'_j) &= \left\{ i : f(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, \dots, x_{i_n}^n) = y'_j \right\} = \left\{ i : f_1(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, \dots, x_{i_n}^n) = y_j^1, \right. \\ &\quad \left. f_2(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, \dots, x_{i_n}^n) = y_j^2, \dots, f_r(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, \dots, x_{i_n}^n) = y_j^n \right\} - \end{aligned}$$

множество индексов  $i_1, i_2, \dots, i_n$  таких точек  $x = (x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, \dots, x_{i_n}^n)$  из  $X$ , в которых векторная функция  $f$  принимает одинаковые значения в смысле определения (2). Используя свойство (1), получаем

$$P\{\eta = y'_j\} = \sum_{i \in M(y'_j)} \left\{ P\{\xi_1 = x_{i_1}^1\} \cdot P\{\xi_2 = x_{i_2}^2\} \cdots P\{\xi_n = x_{i_n}^n\} \right\}, \quad j=1, l. \quad (3)$$

Таким образом, принципиально задача о нахождении распределения случайного вектора решена: необходимо вычислить в каждой точке  $x$  из  $m$  точек пространства  $X$  значения векторной функции  $f(x)$ , найти по формуле (1) вероятности этих значений, затем найти точки, в которых эта функция принимает одинаковые значения, и по формуле (3) вычислить необходимые вероятности. Если проводить вычисления непосредственно по этой схеме, то потребуется  $(r+1) \cdot m$  ячеек памяти для хранения значений

векторной функции и соответствующих вероятностей, для определения одинаковых значений  $f$  придется сортировать массив из  $m$  записей длины  $n$ . Приведем более эффективный алгоритм вычисления закона распределения векторной функции от независимых дискретных случайных величин.

#### Алгоритм.

Элементы массива  $M1$  предназначены для хранения векторов – вычисленных значений векторной функции  $f$ , в массиве  $P1$  формируются соответствующие значения вероятностей. Все шаги алгоритма повторяются в цикле  $m$  раз. Рассмотрим ситуацию после  $k$  циклов. В массиве  $M1$  находятся в возрастающем порядке все различные значения функции  $f$  в точках, вычисленных на первых  $k$  циклах. В массиве  $P1$  находятся соответствующие вероятности этих значений.

Шаг 1. Формируется очередная точка  $x$  пространства  $X$ . Вычисляется значение  $y'=f(x)$ . По формуле (1) вычисляется вероятность  $p=P\{\eta=y'\}$ .

Шаг 2. Методом бинарного поиска [2, с. 484] в массиве  $M1$  ищется элемент  $M1(j)$ , равный  $y'$ . Если такой элемент существует, то в массиве  $P1$  к вероятности, хранящейся в  $P1(j)$ , прибавляется вероятность  $p$ , переход к шагу 1. Если элемента, равного  $y'$ , не существует, то находят два таких элемента, что  $M1(j) < y' < M1(j+1)$ , тогда все элементы массива  $M1$  и массива  $P1$ , начиная с  $j+1$  элемента, смещаются на один вниз. На место элемента  $M1(j+1)$  помещается значение  $y'$ , а на место элемента  $P1(j+1)$  – вероятность  $p$  этого значения. Переход к шагу 1.

После выполнения  $m$  циклов в массиве  $M1$  в возрастающем порядке будут сформированы все различные значения случайного вектора  $\eta$ , а в массиве  $P1$  соответствующие вероятности.

Для оценки вычислительной сложности рассмотрим частный случай: все независимые случайные величины имеют одинаковое распределение, и число различных возможных значений каждой из них равно  $k$ . Тогда  $m=k^n$  – число точек, в которых необходимо вычислить функцию  $f(x)$ . Отсюда следует, что алгоритм вычисления распределения функций от дискретных случайных величин является экспоненциальным [4] и, следовательно, может быть применен для небольшого числа случайных величин.

По предлагаемому алгоритму составлена стандартная программа на языке ФОРТРАН, которая вычисляет распределение для заданной системы функций и известных законов распределения независимых дискретных случайных величин. Приведем тестовый пример. Векторная функция от случайных величин и распределения  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  имеют следующий вид:

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \quad \eta_2 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \quad \eta_3 = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3.$$

$\xi_1$	0	1
$P$	0.3	0.7

$\xi_2$	0	1
$P$	0.4	0.6

$\xi_3$	-1	0	1
$P$	0.2	0.5	0.3

Получено следующее распределение случайного вектора:

$\eta$			$P$
$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	
-2	2	0	0.02400
-1	1	0	0.09600
-1	3	1	0.05600
0	0	0	0.12600
0	2	1	0.22400
1	-1	0	0.05400
1	1	1	0.29400
2	0	1	0.12600

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Михайлов В.Н., Точилкина С.А. Метод расчета закона распределения функции от дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып.3. С. 86 – 89.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961.
3. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. М.: Мир, 1978. Т 3: Сортировка и поиск.
4. Гудман С., Хидетниеми С. Введение в разработку и анализ алгоритмов. М.: Мир, 1981.

УДК 681.306, 658.512.22

В. В. Можилкин

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА НАМОТКИ ЛЕНТЫ\*

Процесс намотки ленты применяется для упрочнения деталей. При намотке лента обертыивается вокруг оправки в виде прилегающих друг к другу полос или по какому-то повторяющемуся рисунку до полного покрытия поверхности оправки. Последовательные слои наносятся под одним и тем же или под разными углами намотки, пока не будет набрана нужная толщина. Угол намотки может изменяться от очень малого – прямого до большого – окружного, т. е. около  $90^\circ$  относительно оси оправки, включая любые углы спирали в этом интервале.

Рассмотрим задачу намотки ленты, где рисунок намотки удовлетворяет следующим условиям:

1) минимальное расстояние между соседними витками спирали без их наложения друг на друга;

\* Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка региональной научно-технической политики высшей школы и развитие её научного потенциала».

2) из конструктивных соображений задан диапазон допустимых углов осевой линии ленты

$$\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max};$$

3) из конструктивных соображений задан диапазон допустимых углов пересечений осевой линии различных слоев ленты

$$\varphi_{\min}^a \leq \varphi^a \leq \varphi_{\max}^a;$$

4) минимальная длина наматываемой ленты.

Предположим, что компьютерная модель процесса намотки позволяет представить осевую линию намотанной ленты в виде совокупности точек

$$\{x_i, y_i, z_i \mid i = 0, 1, \dots, Q\}. \quad (1)$$

Построение этого множества, а также формализация условий на углы намотки и углы пересечений осевых линий соседних слоев ленты, а следовательно, постановка и решение оптимизационной задачи существенным образом зависит от способа приближенного построения спирали наматываемой ленты. Построение геометрии наматывания ленты будем осуществлять для параметрической поверхности

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v), \quad (2)$$

причем координаты базовых точек (1) поверхности заданы как дискретное множество

$$\{\bar{r}_{ij} \mid i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M\}.$$

Такой подход позволяет включить модуль построения и визуализации процесса намотки в любую систему САПР.

Рассмотрим несколько подходов к решению задачи построения рисунка намотки.

Треугольные линейные конечные элементы широко используются для визуализации поверхностей в машинной графике, выполнения сложных расчетных работ. Алгоритм построения геометрии намотки здесь достаточно прост. Он сводится к элементарным вычислениям пересечений сторон ленты со сторонами элементов. Здесь триангуляция не применяется для конечно-элементной интерполяции, поэтому требование, чтобы треугольники не имели тупых углов необязательно. Тогда триангуляцию легко осуществить на четырехугольнике  $\{(u_{i+k}, v_{j+l}) \mid k = 0, 1; l = 0, 1\}$ , используя любую его диагональ. Условия непрелегания ленты и максимально возможные деформации определяются элементарно по длине ломаных линий, перпендикулярных осям ленты.

Этот алгоритм легко обобщается на случай аппроксимации поверхности лоскутами Кунса [1].

Рассмотрим подход, основанный на отображении прямоугольника с длинами сторон  $s \ll 1, d \ll 1$  на поверхность детали. Предположим, что сторона  $s$  соответствует боковой стороне ленты, а левый верхний угол эле-

мента касается поверхности в точке  $O$ :  $\bar{r}_0 = (X_0, Y_0, Z_0) = \bar{r}(u_0, v_0)$ . Без потери общности можно положить  $u_0 = 0, v_0 = 0$ . Тогда фрагмент поверхности (2) в окрестности данной точки можно представить в виде

$$\bar{r} = \sum_{i+j \leq 2} a_{ij} u^i v^j. \quad (3)$$

Пусть  $\tau$  – касательный вектор к поверхности детали в точке  $O$ , ориентированный по боковой стороне ленты,  $v$  – ортогональный  $\tau$  вектор в касательной плоскости.

Из уравнения плоскости, проходящей через точку  $O$  и вектор, ортогональный вектору  $v$ , и уравнения (3) получаем связь параметров  $u$  и  $v$  вдоль отображения стороны  $s$  на поверхность детали

$$\sum_{i+j \leq 2} \bar{v} a_{i,j} u^i v^j = \bar{v} \bar{r}_0. \quad (4)$$

Отсюда легко найти связь параметров в виде отрезка ряда

$$v = v_0 + v_1 u + v_2 u^2.$$

Уравнение стороны легко представить в виде

$$\bar{r} = b_0 + b_1 u + b_2 u^2. \quad (5)$$

Тогда для определения  $u$  – координаты отображения стороны длины  $s$  имеем соотношение

$$s \approx (b_1^2 + 2b_1 b_2 u) u. \quad (6)$$

Представляя решение этого уравнения в виде отрезка ряда  $u = c_0 + c_1 s + c_2 s^2$ , получим из (6) следующие соотношения

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1/b_1^2, \quad c_2 = -b_1 b_2 c_1 / b_1^2.$$

Аналогично можно построить кривую, идущую в направлении  $v$ . Однако целесообразно провести геодезическую из точки  $O$  в данном направлении. Сформулируем начальные условия для уравнения геодезической. Очевидно  $v(0)=0$ . Кроме того, геодезическая в точке  $O$  должна быть ортогональна направлению  $\tau$ :

$$\frac{d\bar{r}}{du} \bar{\tau} = 0.$$

Отсюда получаем начальные условия для уравнения геодезической

$$v(0) = 0, \quad \left( \frac{dv}{du} \right)_{u=0} = - \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \bar{\tau}}{\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \bar{\tau}} = g_1. \quad (7)$$

Решение задачи Коши строим в виде отрезка ряда

$$v = g_1 u + g_2 u^2. \quad (8)$$

Выбираем дугу геодезической длиной  $d$ . Расчетные формулы для определения  $u$  – координаты левого конца геодезической строятся аналогично (6).

С помощью переразложения соотношений (3) – (8) легко построить образы на поверхности детали остальных сторон элементарного прямоугольника и найти точку их пересечения. Тогда по оценке деформации сторон можно построить условия неприменения ленты и максимума деформации. Учет толщины ленты элементарен.

С помощью предельного перехода  $s, d \rightarrow 0$  можно получить дифференциальные соотношения, описывающие локальное отображение ленты на поверхность детали. Но для расчета процесса тогда придется строить дискретную модель, основанную на полиномиальных интерполяционных зависимостях. Предложенный подход, основанный на локальных разложениях, фактически представляет собой аналогичную расчетную схему.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1982.

УДК 519.4

В. А. Молчанов

#### НЕСТАНДАРТНАЯ КОНСТРУКЦИЯ ЯДРА СВОБОДНОЙ ПРОКОНЕЧНОЙ ПОЛУГРУППЫ\*

В основе исследования комбинаторных аспектов теории формальных языков логико-алгебраическими методами лежит известное соответствие Эйленберга [1] между потоками распознаваемых языков и псевдомногообразиями (то есть  $SHP_{fin}$ -замкнутыми классами) конечных полугрупп. В работе [2] с помощью методов нестандартного анализа [3] автором получен аналог известной теоремы Биркгофа о структурной характеристики многообразий, который показывает, что псевдомногообразия являются классами конечных полугрупп, аксиоматизируемыми нестандартными тождествами. На основе нестандартной конструкции пополнений равномерных алгебраических систем [4] над каждым псевдомногообразием полугрупп  $V$  для произвольного множества  $A$  естественно определяется свободный объект  $F_V(A)$ , который является проконечной (то есть компактной и вполне несвязной) полугруппой и который полностью характеризует  $A$ -порожденные полугруппы псевдомногообразия  $V$ . Исследования Дж. Альмейды, М. Волкова, Н. Релли и других показывают, что ядра (то есть наименьшие замкнутые идеалы) таких полугрупп играют важную роль в изучении проблемы аксиоматизации псевдомногообразий. В на-

---

\* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

стоящей статье приводится нестандартная конструкция ядра свободной проконечной полугруппы над псевдомногообразием всех конечных полугрупп.

В статье используются основные понятия теории полугрупп [1] и универсальной алгебры [5], а также методы нестандартного анализа из [3].

Напомним, что любая компактная полугруппа  $S$  имеет наименьший замкнутый идеал, который называется ее ядром и обозначается  $K_S$ .

**ЛЕММА 1.** Если  $f$  – непрерывный гомоморфизм компактной полугруппы  $S$  на конечную полугруппу  $T$ , то  $f(K_S) = K_T$ .

**Доказательство.** Так как  $f(K_S)$  и  $f^{-1}(K_T)$  – замкнутые идеалы полугрупп  $T$  и  $S$  соответственно, то

$$K_T \subset f(K_S), \quad K_S \subset f^{-1}(K_T), \quad f(K_S) \subset K_T, \quad f(K_S) = K_T.$$

Пусть  $A$  – конечное множество,  $W = W(A)$  – полугруппа слов над  $A$  и  $W_n$  – множество слов, длина которых не превосходит числа  $n$ . Если для слов  $u, v, w \in W$  выполняется равенство  $w = uv$ , то слово  $u$  (соответственно  $v$ ) называется префиксом (соответственно суффиксом) слова  $w$ . Подмножество  $L$  полугруппы  $W$  называется распознаваемым, если найдется такой гомоморфизм  $f$  полугруппы  $W$  в конечную полугруппу  $S$ , что  $L = f^{-1}(P)$  для некоторого  $P \subset S$ .

Как известно [2], любое отображение  $f$  множества  $A$  в конечную полугруппу  $S$  естественно продолжается до гомоморфизма  $f: W \rightarrow S$  и нестандартно расширяется до гомоморфизма  $\dot{f}: \dot{W} \rightarrow S$ . Ядра  $\ker f$  таких гомоморфизмов  $f: W \rightarrow S$  образуют направленное вниз по включению семейство конгруэнций конечного индекса на полугруппе  $W$ , которое полностью характеризуется своей монадой [3]

$$\varepsilon = \cap \{ \ker \dot{f} : f \text{ – гомоморфизм } W \text{ в конечную полугруппу } S \}.$$

Из результатов [2, 4] следует, что топологическая факторполугруппа  $\dot{W}/\varepsilon$  нестандартного расширения  $\dot{W}$  по конгруэнции  $\varepsilon$  является свободной проконечной полугруппой  $F(A)$  над псевдомногообразием всех конечных полугрупп. Компактная полугруппа  $F(A)$  имеет ядро  $K_{F(A)}$ .

Рассмотрим слово  $w \in W$  длины  $n$  и главный идеал  $I = (w)$  полугруппы  $W$ , порожденный этим словом  $w$ . Обозначим символом  $P$  (соответственно  $S$ ) множество всех префиксов (соответственно суффиксов) слова  $w$ . Для слова  $u \in W$  символом  $b_S(u)$  (соответственно  $e_P(u)$ ) обозначим максимальный по длине префикс (соответственно суффикс) слова  $u$ , принадлежащий множеству  $S$  (соответственно  $P$ ). Каждая пара слов  $(p, s) \in P \times S$  определяет множество слов

$$X_{p,s} = \{ u \in W \setminus (W_n \cup I) : e_P(u) = p \wedge b_S(u) = s \}.$$

**ЛЕММА 2.** Одноэлементные множества  $\{u\}$  (где  $u \in W_n \setminus \{w\}$ ), идеал  $I$  и семейство множеств  $X_{p,s}$  (где  $(p, s) \in P \times S$ ) образуют конечное

разбиение множества  $W$ , которое определяет на полугруппе  $W$  конгруэнцию конечного индекса  $\theta_w$ .

**Доказательство.** Легко видеть, что перечисленные в формулировке леммы множества определяют на множестве  $W$  отношение эквивалентности конечного индекса  $\theta_w$ . Убедимся, что из  $u \equiv v (\theta_w)$ ,  $u_1 \equiv v_1 (\theta_w)$  следует  $uu_1 \equiv vv_1 (\theta_w)$ . Остановимся на нетривиальном случае, когда  $u, u_1 \notin W_n \cup I$ . Тогда слова  $u, u_1$  не делятся на  $w$  и выполняются равенства

$$b_S(u) = b_S(v), \quad e_P(u) = e_P(v), \quad b_S(u_1) = b_S(v_1), \quad e_P(u_1) = e_P(v_1).$$

Следовательно,  $e_P(u)b_S(u_1) = e_P(v)b_S(v_1)$  и условие  $uu_1 \in I$  равносильно тому, что  $vv_1 \in I$ . Кроме того,  $b_S(uu_1) = b_S(u) = b_S(v) = b_S(vv_1)$  и аналогично  $e_P(uu_1) = e_P(vv_1)$ , так как длины слов  $u, u_1$  больше, чем число  $n$ . Значит, в любом случае  $uu_1 \equiv vv_1 (\theta_w)$ , то есть  $\theta_w$  – конгруэнция на полугруппе  $W$ .

**Следствие 1.** Главные идеалы полугруппы слов  $W$  являются распознаваемыми подмножествами.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $M = \cap \{ {}^*(w) : w \in W \}$  – монада семейства главных идеалов полугруппы слов  $W$ . Тогда  $M$  – не пустой идеал полугруппы  ${}^*W$ , для которого  $\varepsilon(M) \subset M$  и фактор-полугруппа  $M/\varepsilon = K_{F(A)}$ .

**Доказательство.** По следствию 1 для любого слова  $w \in W$  главный идеал  $(w)$  насыщен относительно конгруэнции  $\theta_w$ . Отсюда по принципу переноса [3] получаем, что нестандартное расширение  $(w)$  является идеалом полугруппы  ${}^*W$ , насыщенным относительно конгруэнции  $\theta_w$ . Так как  $\varepsilon \subset \theta_w$ , то  $\varepsilon({}^*(w)) \subset {}^*(w)$ . Следовательно, множество  $M$  является идеалом полугруппы  ${}^*W$  и  $\varepsilon(M) \subset M$ . Кроме того, семейство главных идеалов полугруппы слов  $W$  направлено вниз по включению и, следовательно, его монада  $M \neq \emptyset$ . Поскольку все множества  $(w)$  насыщены относительно  $\varepsilon$ , то

$$M/\varepsilon = (\cap \{ {}^*(w) : w \in W \})/\varepsilon = \cap \{ {}^*(w)/\varepsilon : w \in W \}. \quad (1)$$

Так как открыто-замкнутые подмножества образуют базу вполне несвязного топологического пространства, то ядро  $K_{F(A)}$  проконечной полугруппы  $F(A)$  представляется в следующем виде:

$$K_{F(A)} = \cap \{ X : K_{F(A)} \subset X – открыто-замкнутое подмножество F(A) \}.$$

По построению нестандартного пополнения равномерной алгебраической системы в [4] открыто-замкнутое подмножество  $X$  полугруппы  $F(A)$  представляется в виде  $X = {}^*L/\varepsilon$ , где  $L$  – некоторое распознаваемое подмножество полугруппы  $W$ . Известно [1], что каждое такое подмножество  $L$  определяет на полугруппе  $W$  синтаксическую конгруэнцию конечного индекса  $\sigma_L$ . При этом канонический гомоморфизм  $\lambda$  полугруппы  $W$  на конечную фактор-полугруппу  $S = W/\sigma_L$  и подмножество  $P = L/\sigma_L$  полугруппы  $S$  удовлетворяют условию  $L = \lambda^{-1}(P)$ . Тогда по принципу переноса [3] нестандартное расширение  ${}^*\lambda : {}^*W \rightarrow S$  является гомоморфизмом,

для которого  ${}^*L = {}^*\lambda^{-1}(P)$ . Так как  $\varepsilon \subset {}^*\sigma_L$ , то по третьей теореме об изоморфизмах [5] для канонического гомоморфизма  $\underline{\varepsilon} : {}^*W \rightarrow F(A)$  существует такой гомоморфизм  $f : F(A) \rightarrow S$ , что  ${}^*\lambda = f \circ \underline{\varepsilon}$ . Отсюда следует, что  ${}^*L = {}^*\lambda^{-1}(P) = \underline{\varepsilon}^{-1}(f^{-1}(P))$ ,  $\underline{\varepsilon}({}^*L) = f^{-1}(P)$ ,  ${}^*L/\varepsilon = f^{-1}(P)$ .

Очевидно также, что  $L$  – идеал полугруппы  $W$  в том и только том случае, если  $P$  – идеал полугруппы  $S$ . Следовательно, ядро  $K_{F(A)}$  можно представить в виде

$$K_{F(A)} = \cap \{ f^{-1}(P) : f : F(A) \rightarrow S \text{ – конечная полугруппа, } P \subset S \text{ и } K_{F(A)} \subset f^{-1}(P) \}.$$

Поскольку для таких подмножеств  $P$  по лемме 1  $K_S = f(K_{F(A)}) \subset P$ , то в силу следствия 1 и формулы (1) выполняются равенства

$$\begin{aligned} K_{F(A)} &= \cap \{ f^{-1}(P) : f : F(A) \rightarrow S \text{ – конечная полугруппа и } P \text{ – идеал } S \} = \\ &= \cap \{ {}^*L/\varepsilon : L \text{ – распознаваемый идеал полугруппы } W \} = \\ &= \cap \{ {}^*(w)/\varepsilon : w \in W \} = M/\varepsilon. \end{aligned}$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
2. Molchanov V.A. Nonstandard characterization of pseudo varieties // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33. P. 533 – 547.
3. Альбеверио С., Фенстад Й., Хээг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.
4. Молчанов В.А. Нестандартные расширения равномерных алгебраических систем // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 5. С. 1094 – 1105.
5. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

УДК 513.88

Е. В. Назарова

#### О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, РАЗРЫВНЫМИ НА ДИАГОНАЛЯХ\*

В пространстве  $L_2[0,1]$  рассматривается интегральный оператор

$$\begin{aligned} Af(x) &= \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t)f(t)dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t)f(t)dt + \\ &+ \alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t)f(t)dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t)f(t)dt. \end{aligned} \tag{1}$$

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

Предположим, что  $A_i(x, t)$  для  $i = 1$  и  $i = 3$  непрерывно дифференцируемы по  $x$  при  $t \leq x$ , а  $A_i(x, t)$  для  $i = 2$  и  $i = 4$  непрерывно дифференцируемы по  $x$  при  $t \geq x$  и выполняются соотношения  $\frac{\partial^j}{\partial x^j} A_i(x, t)|_{t=x} = \sigma_{j,0}$  ( $j = 0, 1$ ), где  $\sigma$  – символ Кронекера.

Оператор (1) рассматривался ранее А.П. Хромовым. В работе [1] им были получены формулы обращения оператора (1), а в работе [2] для частного случая оператора (1) установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье.

В настоящей статье получается интегральное уравнение для резольвенты Фредгольма оператора  $A$ , приводятся оценки резольвент для вспомогательных операторов и устанавливается равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям оператора  $A$  и дифференциального оператора  $L_0$ .

Введем в рассмотрение следующие дифференциальные операторы с краевыми условиями:

$$L_0 y = P^{-1} y', \quad U(y) = 0;$$

$$L_1 y = P^{-1} y', \quad V(y) = 0;$$

$$Ly = (E + S)^{-1} P^{-1} y', \quad V(y) = 0,$$

где  $P^{-1} f(x) = \beta_1 f(x) + \beta_2 f(1-x)$ ;  $S = P^{-1}(DA + \alpha A)$ ,  $D$  – оператор дифференцирования,  $E$  – единичный оператор;  $U(y) = \gamma_1 y(0) + \gamma_2 y(1)$ ;

$$V(y) = U(y) - (y, \varphi); \quad \gamma_1 = 1 + \frac{1}{\delta} [(\alpha_1 - \alpha_2) \tilde{A}(0) + (\alpha_3 - \alpha_4) \tilde{A}(1)];$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\delta} [(\alpha_1 - \alpha_2) \tilde{A}(1) + (\alpha_3 - \alpha_4) \tilde{A}(0)]; \quad \tilde{A}(t) = A(0, t) + \int_0^1 A(0, \tau) N(\tau, t) d\tau;$$

$$N = (E + S)^{-1} - E; \quad \delta = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_3 - \alpha_4)^2};$$

$$(y, \varphi) = \frac{1}{\delta} [(\alpha_2 - \alpha_1) \int_0^1 \tilde{A}_t'(t) y(t) dt + (\alpha_3 - \alpha_4) \int_0^1 \tilde{A}_t'(1-t) y(t) dt].$$

Обозначим  $R_{0,\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$  резольвенту оператора  $L_0$ , а  $R_{1,\lambda}$  и  $R_\lambda$  – соответственно резольвенты операторов  $L_1$  и  $L$ . Легко заметить, что  $R_\lambda$  является также резольвентой Фредгольма оператора  $A$ .

Справедливы следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. Если  $\lambda$  таково, что  $R_{0,\lambda}$  существует, то

$$Z(x) = \{z_1(x), z_2(x)\}^T, \text{ где } z_1(x) = R_{0,\lambda} f(x); \quad z_2(x) = z_1(1-x),$$

удовлетворяет системе

$$Z'(x) + \lambda BZ(x) = BF(x),$$

$$PZ(0) + QZ(1) = 0,$$

$$\text{где } B = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_4 - \alpha_3 \\ \alpha_3 - \alpha_4 & \alpha_2 - \alpha_1 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix};$$

$$F(x) = \{f(x); f(1-x)\}^T.$$

ТЕОРЕМА 2. Если  $\Delta^{-1}(\lambda)$  существует, то

$$R_{1,\lambda}f = R_{0,\lambda}f + (G_{11} + G_{12})(R_{0,\lambda}f, \varphi),$$

где  $G_{11}$  и  $G_{12}$  – компоненты матрицы  $G = -W(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$ ;

$$W(x, \lambda) = \begin{pmatrix} (\alpha_3 - \alpha_4)e^{\lambda\sqrt{\delta}x} & (\alpha_3 - \alpha_4)e^{-\lambda\sqrt{\delta}x} \\ (\alpha_1 - \alpha_2 - \sqrt{\delta})e^{\lambda\sqrt{\delta}x} & (\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{\delta})e^{-\lambda\sqrt{\delta}x} \end{pmatrix};$$

$$\Delta(\lambda) = PW(0, \lambda) + QW(1, \lambda) - T(\lambda);$$

$$T(\lambda) = (\alpha_3 - \alpha_4) \begin{pmatrix} (e^{\lambda\sqrt{\delta}x}, \varphi) & (e^{-\lambda\sqrt{\delta}x}, \varphi) \\ (e^{\lambda\sqrt{\delta}x}, \varphi) & (e^{-\lambda\sqrt{\delta}x}, \varphi) \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 3. Для  $y(x) = R_\lambda f(x)$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} y(x) &= R_{1,\lambda}f(x) + y(0)R_{1,\lambda}[\beta_1 N(x, 0) + \beta_2 N(x, 1)] + \\ &+ y(1)R_{1,\lambda}[-\beta_1 N(x, 1) - \beta_2 N(x, 0)] + \\ &+ R_{1,\lambda} \int_0^1 [\beta_1 N_t'(x, t) - \beta_2 N_t'(x, 1-t)] y(t) dt, \end{aligned}$$

где  $N(x, t)$  – ядро интегрального оператора  $N$  такого, что

$$(E + S)^{-1} = E + N.$$

Обозначим:

$$a_{11} = \gamma_1(\alpha_3 - \alpha_4) + \gamma_2(\alpha_1 - \alpha_2 - \sqrt{\delta}); a_{12} = \gamma_1(\alpha_3 - \alpha_4) + \gamma_2(\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{\delta});$$

$$a_{21} = \gamma_2(\alpha_3 - \alpha_4) + \gamma_1(\alpha_1 - \alpha_2 - \sqrt{\delta}); a_{22} = \gamma_2(\alpha_3 - \alpha_4) + \gamma_1(\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{\delta});$$

$$b = \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}}; \mu = 2\lambda\sqrt{\delta}; \xi = \mu - \ln b.$$

Удалим из комплексной плоскости переменного  $\xi$  нули функции  $1 - e^{-\xi}$  вместе с окрестностями одного радиуса  $\delta_0 > 0$  и обозначим оставшуюся часть плоскости  $S_{\delta_0}$ .

ТЕОРЕМА 4. В области  $S_{\delta_0}$  при  $\operatorname{Re} \lambda \sqrt{\delta} > 0$  и при больших значениях  $|\lambda|$  верны оценки:

$$\begin{aligned} \|R_{i,\lambda}f\|_\infty &= O(1)\|f\|_1; \\ \|R_{i,\lambda}f\|_1 &= O(\operatorname{æ}(\operatorname{Re} \lambda \sqrt{\delta}))\|f\|_1; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\|R_{i,\lambda}f\|_\infty = O(\alpha(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\delta}))\|f\|_\infty; \quad (3)$$

$$\|R_{i,\lambda}\chi\|_\infty = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где  $i = 0, 1$ ;  $\alpha(y) = \frac{1 - e^{-y}}{y}$  при  $y > 0$ ;  $\chi(x)$  – характеристическая функция отрезка  $[\eta_0; \eta] \subset (0; 1)$ .

Для  $\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\delta} < 0$  утверждения теоремы сохраняются, лишь в (2) и (3)  $\lambda\sqrt{\delta}$  заменяется на  $-\lambda\sqrt{\delta}$ .

Из теорем 3 и 4 получается

ТЕОРЕМА 5. В области  $S_{\delta_0}$  при  $x \in [\delta_1, 1 - \delta_1]$ , где  $0 < \delta_1 < \frac{1}{2}$ , имеет

место оценка:

$$\|R_\lambda f - R_{0,\lambda}f\|_{C[\delta_1, 1 - \delta_1]} = \left[ O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(\alpha^2(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\delta})) + O(\alpha(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\delta}) \cdot e^{-\lambda\sqrt{\delta}\delta_1}) \right] \cdot \|f\|_1.$$

Теоремы 3, 4 и 5 приводят к следующему основному результату (теорема равносходимости).

ТЕОРЕМА 6. Для любой функции  $f(x) \in L_1[0; 1]$  и  $x \in [\delta_1, 1 - \delta_1]$  имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda - R_{0,\lambda}) f d\lambda \right\|_{C[\delta_1, 1 - \delta_1]} = 0.$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корнев В.В., Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып. 6. С. 932 – 942.
2. Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 1981. Т. 114 (156). № 3. С. 378 – 405.

УДК 519.4

С. И. Небалуев

#### ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим множество  $\Lambda^q = \{0, 1, \dots, q\}$ , где  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  как толерантные пространства, в которых все элементы попарно толерантны. Другими словами, толерантные пространства  $(\Lambda^q, \tau_q)$  состоят из одного класса толе-

рантности. Отсюда, в частности, следует, что все пространства  $(\Lambda^q, \tau_q)$  толерантно стягиваемые. Рассмотрим отображения вложения  $e_q^i : \Lambda^{q-1} \rightarrow \Lambda^q$

$$e_j^i(j) = \begin{cases} j, & j < i; \\ j+1, & j \geq i. \end{cases}$$

Пусть  $(X, \tau)$  – произвольное толерантное пространство. Пусть  $q \geq 0$ , тогда  $q$ -мерным сингулярным симплексом пространства  $(X, \tau)$  назовем толерантное отображение (в слабом смысле)

$$\sigma : (\Lambda^q, \tau_q) \rightarrow (X, \tau).$$

Если  $q > 0$  и  $i \in \{0, \dots, q\}$ , то  $i$ -й гранью симплекса  $\sigma$  назовем  $(q-1)$ -мерный толерантный сингулярный симплекс

$$\sigma^i = \sigma \circ e_q^i : \Lambda^{q-1} \rightarrow \Lambda^q \rightarrow X.$$

Обозначим через  $\Lambda_q(X)$  группу свободно порожденную над  $Z$  (или над полем  $k$ ) всеми  $q$ -мерными толерантными сингулярными симплексами пространства  $(X, \tau)$ , при  $q \geq 0$  (при  $q < 0$ , полагаем  $\Lambda_q(X) = 0$ ).

Для  $q \geq 1$  определим граничный изоморфизм  $\partial_q : \Lambda_q(X) \rightarrow \Lambda_{q-1}(X)$ , задав его на образующих стандартным образом:

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^i.$$

В результате получаем свободный неотрицательный цепной комплекс  $\Lambda(X) = \{\Lambda_q(X), \partial_q\}_{q \geq 0}$ , который назовем сингулярным цепным комплексом толерантного пространства  $(X, \tau)$ .

Толерантное отображение  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \vartheta)$  определяет цепное отображение  $\Lambda(f) : \Lambda(X) \rightarrow \Lambda(Y)$ , задаваемое формулой

$$\Lambda(f)(\sigma) = f \circ \sigma.$$

Тем самым получим ковариантный функтор  $\Lambda$  из категории толерантных пространств в категорию цепных комплексов. Взяв композицию этого функтора  $\Lambda$  с гомологическим функтором, получим гомологический функтор  $H^\Lambda = \{H_q^\Lambda\}_{q \geq 0} = \bigoplus_{q \geq 0} H_q^\Lambda$  сингулярных гомологий толерантного

пространства. В работе [1] описан другой функтор толерантных гомологий  $H = \bigoplus_{q \geq 0} H_q$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Для любого толерантного пространства  $(X, \tau)$  имеется естественный по  $(X, \tau)$  изоморфизм

$$(\forall q \geq 0) \quad H_q^{\Lambda}(X) \cong H_q(X).$$

В дальнейшем эти изоморфные группы будем обозначать одним символом  $H_q(X)$  ( $q \geq 0$ ).

Сингулярные цепные комплексы  $\Lambda(X)$  толерантного пространства  $(X, \tau)$  замечательны тем, что с их помощью удается доказать толерантный аналог теоремы Эйленберга-Зильбера [2, теорема 5.3.6].

**ТЕОРЕМА 2.** На категории упорядоченных пар толерантных пространств имеет место естественная цепная гомотопическая эквивалентность

$$\Lambda(X \times Y) \cong \Lambda(X) \otimes \Lambda(Y).$$

Доказательство проводится с применением метода ациклических моделей [2, теорема 4.2.8] на категории пар толерантных пространств с моделями  $M = \{(\Lambda^p, \Lambda^q) | p, q \geq 0\}$ .

Из теоремы 2 получаем теорему о гомологиях прямого произведения толерантных пространств.

**ТЕОРЕМА 3.** Для произведения толерантных пространств  $(X, \tau)$  и  $(Y, \vartheta)$  имеет место следующая формула:

$$(\forall q \geq 0) \quad H_q(X \times Y) \cong \bigoplus_{i+j=q} (H_i(X) \otimes_j (Y)) \oplus \bigoplus_{i+j=q-1} (H_i(X) * H_j(Y)),$$

которую можно назвать формулой Кюннета для гомологий толерантного пространства. В формуле Кюннета знак  $*$  означает периодическое произведение.

Формула Кюннета приобретает особенно простой вид для гомологий с коэффициентами в поле  $k$ :

$$(\forall q \geq 0) \quad H_q(X \times Y; k) \cong \bigoplus_{i+j=q} (H_i(X; k) \otimes H_j(Y; k)).$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Небалуев С.И. Алгебро-топологические характеристики толерантных пространств // Математика и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. С. 105 – 107.

2. Спенъер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.

**КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ  
ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА ЛАГРАНЖА  
С УЗЛАМИ В НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА 2 РОДА\***

Пусть  $C[-1,1]$  – множество действительных, непрерывных на  $[-1,1]$  функций  $f$ , снабженное равномерной нормой  $\|f\| = \sup\{|f(t)|: t \in [-1,1]\}$ . Обозначим через  $L_n(U, f, x)$  многочлен Лагранжа, интерполирующий  $f$  в узлах  $U = \{t_{k,n} = \cos(\pi k/(n+2)), k = 1, \dots, n+1, n=1,2,\dots\}$ , служащих нулями многочленов Чебышева 2 рода  $U_{n+1}(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \sin(n+2)\arccos x$ . Для произвольных  $f \in C[-1,1], n \geq 3$  и  $0 < \varepsilon < 1$  положим

$$F(x) = f(x)(1-x^2)^{1/2}, \quad t_{j,n} = \cos(\pi j/(n+2)), j = -n-1, \dots, n+1,$$

$$R_{n,\varepsilon}(F) = \max \left| \sum_{k=-[n/2]+1}^{[n/2]-1} \frac{F(t_{2k+1,n}) - 2F(t_{2k,n}) + F(t_{2k-1,n})}{\varphi(2k,n,p)} \right|,$$

где

$$\varphi(m,n,p) = \begin{cases} p-m, & \text{если } |p-m| \leq 3([n/2] + 1), \\ 2n-(p-m), & \text{если } p-n > 3([n/2] + 1). \end{cases}$$

и максимум берется по всем  $p$  таким, что  $t_{p,n} \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ ; штрих у знака суммы указывает на отсутствие слагаемых (не более одного) с индексами  $k$ , являющимися решением уравнения  $\varphi(2k,n,p)=0$ . Справедлива следующая

**Теорема.** Если  $f \in C[-1,1], 0 < \varepsilon < 1$ , то условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,\varepsilon}(F) = 0 \quad (1)$$

необходимо и достаточно для равномерной сходимости к  $f$  на  $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$  интерполяционного процесса  $\{L_n(U, f, x)\}$ .

Нам потребуются следующие леммы.

**Лемма 1.** Справедливо равенство

$$\max_{-1+\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon} \sum_{k=1}^{n+1} |l_{k,n}(U, x)| = C_1(\varepsilon) \ln n + O(1),$$

где  $l_{k,n}(U, x) = \frac{(-1)^{k+1} \sin(n+2)\theta \sin^2 \theta_{k,n}}{(n+2)(\cos \theta - \cos \theta_{k,n}) \sin \theta} \equiv G_{k,n}(\theta)$ , – фундаментальные

многочлены Лагранжа, соответствующие матрице узлов  $U$ . Здесь и далее  $C_i(\varepsilon)$  и  $C_i$ ,  $i=1,2,\dots$  соответственно – абсолютные и зависящие только от  $\varepsilon$  постоянные;  $x = \cos \theta$ ,  $\theta_{k,n} = \arccos t_{k,n}$ .

---

\* Работа выполнена при поддержке Министерства образования России, проект E00-1.0 – 152 – № 13.

ЛЕММА 2. Имеют место неравенства

$$0 < 1/\sin x - 1/x < (\pi/12)x \text{ при } 0 < x < \pi/2, \quad (2)$$

$$C_1 \leq \sqrt{1 - (t_{k,n})^2} : \sqrt{1 - (t_{k+1,n})^2} \leq C_2, \quad k = 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (3)$$

ЛЕММА 3. Каковы бы ни были  $n=1, 2, \dots$ , и  $k = -n - 1, -n, \dots, n + 1$ , справедливы неравенства

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} |B_{k,n}(\theta)| := \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \left| \frac{\sin \theta}{\sin \theta_{k,n}} G_{k,n}(\theta) \right| \leq C_3 \quad (4)$$

$$\max_{\delta \leq \theta \leq \pi - \delta} |G_{k,n}(\theta)| \leq C_2(\varepsilon),$$

$$\max_{\delta \leq \theta \leq \pi - \delta} \sum_{k=1}^n |G_{k,n}(\theta) + G_{k-1,n}(\theta)| \leq C_2(\varepsilon),$$

где  $\delta = \arccos(1 - \varepsilon)$ .

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2 из работы [1], если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} B_{k,n}(\theta) &= \frac{\sin(2n+3)(\theta - \theta_{k,n})/2}{2(n+2)\sin((\theta - \theta_{k,n})/2)} - \frac{\sin(2n+3)(\theta + \theta_{k,n})/2}{2(n+2)\sin((\theta + \theta_{k,n})/2)} \\ &\equiv D_{n+1}(\theta - \theta_{k,n}) - D_{n+1}(\theta + \theta_{k,n}). \end{aligned} \quad (5)$$

Лемма 1 доказывается с помощью несложной модификации известного метода оценки функции Лебега для интерполяции в узлах Чебышева 1 рода; неравенства (2) известны; наконец, оценки (3) получаются непосредственным подсчетом.

ЛЕММА 4 [3]. Если  $f \in C[-1,1]$ , то для любого натурального  $m$  существует алгебраический многочлен  $P_m$  степени не выше  $m$  такой, что справедливы неравенства

$$\|f - P_m\| \leq C \omega(f, 1/n), \quad |P'_m(x)| \leq \frac{C \omega(f, 1/n)}{(1 - x^2)^{1/2}}, \quad -1 < x < 1,$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $n$ .

ЛЕММА 5. Для любой функции  $f \in C[-1,1]$  равномерно по  $x \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$

$$f(x) - L_n(U, f, x) = 2^{-1} \sum_{k=1}^n (f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n})) l_{k,n}(U, x) + O\{\omega(f, \ln n/n)\}. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть  $m = [n/\ln n] + 1$  и  $P_m$  – многочлен из леммы 4. Запишем

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(U, f, x) &= 2^{-1} \sum_{k=1}^n (f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n})) l_{k,n}(U, x) - \\ &- 2^{-1} \sum_{k=1}^n (P_m(t_{k+1,n}) - P_m(t_{k,n})) l_{k,n}(U, x) + \\ &+ 2^{-1} \sum_{k=1}^n (P_m(t_{k+1,n}) - P_m(t_{k,n})) (l_{k,n}(U, x) + l_{k+1,n}(U, x)) + \end{aligned}$$

$$+\left(P_m(t_{n+1,n})-f(t_{n+1,n})\right)\psi_{n+1,n}(x)+\left(P_m(t_{1,n})-f(t_{1,n})\right)\psi_{1,n}(x)+(f(x)-P_m(x))\equiv \\ \equiv 2^{-1}\sum_{k=1}^n\left(f(t_{k+1,n})-f(t_{k,n})\right)l_{k,n}(U,x)+A_1+\dots+A_5.$$

Используя для оценки величины  $A_1$  леммы 1, 2 и 3, для оценки  $A_2, A_3, A_4$  – леммы 3 и 4, и для  $A_5$  – лемму 4, найдем, что  $A_1+\dots+A_5=O\{\omega(f, \ln n/n)\}$ .

**Доказательство теоремы.** Используя представления (5), (6), неравенство (4) и обозначив  $\Phi(\theta):=|f(\cos\theta)| \sin\theta|$ , найдем, что равномерно по  $\theta \in [\delta, \pi - \delta]$  верно равенство

$$\begin{aligned} & f(\cos\theta) - L_n(U, f, \cos\theta) = \\ & = (2\sin\theta)^{-1} \sum_{k=1}^n (F(\cos\theta_{k+1,n}) - F(\cos\theta_{k,n})) B_{k,n}(\theta) + O(\ln n/n) + \\ & + O\{\omega(f, \ln n/n)\} = (2\sin\theta)^{-1} \sum_{k=-n}^n (\Phi(\theta_{k+1,n}) - \Phi(\theta_{k,n})) D_{n+1}(\theta - \theta_{k,n}) + \\ & + O\{\omega(f, \ln n/n)\}. \end{aligned}$$

Применив, с надлежащими изменениями, к последней сумме рассуждения из работы [2, с. 56 – 58], получим соотношение

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(U, f, x) = & \frac{(-1)^p U_{n+1}(x)}{2\pi} \sum_{k=-[n/2]+1}^{[n/2]-1} \frac{F(t_{2k+1,n}) - 2F(t_{2k,n}) + F(t_{2k+1,n})}{\varphi(2k, n, p)} + \\ & + O\{\omega(f, \ln n/n)\}, \end{aligned} \quad (7)$$

из которого следует достаточность. Для доказательства необходимости условия (1) предположим, что оно не выполняется. Тогда существуют последовательности номеров  $\{n_i\}, \{p_i\}$  и  $q > 0$  такие, что

$$\left| \sum_{k=-[n_i/2]+1}^{[n_i/2]-1} \frac{F(t_{2k+1,n_i}) - 2F(t_{2k,n_i}) + F(t_{2k+1,n_i})}{\varphi(2k, n_i, p_i)} \right| \geq q, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Положим  $x_i = \cos \frac{2p_i + 1}{2n_i + 4} \pi$ . Тогда в силу (7), (8) и того что  $|U_{n_i+1}(x_i)| > 1$

имеем  $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} |f(x_i) - L_{n_i}(U, f, x_i)| \geq \frac{q}{2\pi} > 0$ . Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Привалов А.А. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228 – 243.
2. Привалов А.А. Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Изв. вузов. Сер. Математика. 1986. № 5. С. 49 – 59.
3. Стечкин С.Б. Обобщение некоторых неравенств С.Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 5. С. 1511 – 1514.

РЕШЁТКИ ПОНЯТИЙ  $n$ -АРНЫХ ОТНОШЕНИЙ\*

В настоящей статье развивается аппарат алгебры отношений В.В. Вагнера [1] с целью применения алгебраической теории  $n$ -арных отношений к формальному концептуальному анализу, начало которому положено в работах Р. Вилле, Б. Гантера, П. Бурмейстера и др. [2]. Разработанные методы позволяют обобщить понятие формального контекста с одноместного на многоместное множество объектов, ввести многомерное понятие с многомерным множеством атрибутов. Основные результаты работы посвящены определению условий, при которых понятия  $n$ -арного отношения образуют систему замыканий по включению [3]. В статье приведён пример, раскрывающий нетривиальность поставленной задачи.

Пусть  $\rho \subset M_1 \times \dots \times M_n$  – некоторое  $n$ -арное отношение и элементы  $x_{i_1} \in M_{i_1}, x_{i_2} \in M_{i_2}, \dots, x_{i_k} \in M_{i_k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ . Будем говорить, что  $k$ -система  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$  *входит* в  $\rho$ , если существует  $n$ -система,  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \rho$ , в которой элементы  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  присутствуют в качестве соответствующих компонент. Если  $k=1$ , то просто говорим: элемент  $x_i \in M_i, 1 \leq i \leq n$ , *входит* в  $\rho$ . Введём индексные векторы: вместо  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , будем писать  $\bar{i}_k, 1 \leq k \leq n$ , полагая  $\bar{i}_1 = i_1$ , и соответственно вместо  $M_{i_1} \times \dots \times M_{i_k}$  писать  $M_{\bar{i}_k}$ , а вместо  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$  писать  $x_{\bar{i}_k}$ . Пусть  $\rho \subset M_1 \times \dots \times M_n, 1 \leq k \leq n$  и  $a_{i_k} \in M_{i_k}$ . Тогда формула

$$\pi_{\bar{i}_k}(\rho) = \{x_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k} \mid x_{\bar{i}_k} \text{ входит в } \rho\}$$

будет определять *оператор проекции*  $n$ -арного отношения  $\rho$  на базисные множества  $M_{i_1}, \dots, M_{i_k}$ , а формула

$$\sigma_{\{a_{i_k}\}}(\rho) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \rho \mid a_{i_k} \text{ входит в } (x_1, \dots, x_n)\}$$

– *оператор выбора*  $n$ -арного отношения  $\rho$  по  $k$ -системе  $a_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k}$ . Если  $1 \leq k, s \leq n$  и  $X \subset M_{i_s}$ , то множество  $\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{i_s} \rangle := \pi_{\bar{j}_k}(\sigma_{\{x_{i_s}\}}(\rho))$  будем называть *элементарным*  $\bar{j}_k$ -срезом  $\rho$  через  $x_{i_s}$ , а множество

$$\hat{\rho}_{\bar{j}_k}(X) := \bigcap_{x_{i_s} \in X} \rho_{\bar{j}_k} \langle x_{i_s} \rangle$$

---

\* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

– дуальным  $\bar{j}_k$ -срезом  $\rho$  через подмножество  $X$ . Последовательный результат дуальных срезов  $\bar{\rho}_{\bar{i}_s}(\bar{\rho}_{j_k}(X))$  обозначим через  $\bar{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X)$ .

Подмножество  $X \subset M_{i_s}$ ,  $1 \leq s \leq n$  назовём  $\bar{i}_s$ -понятием  $n$ -арного отношения  $\rho$ , если существует  $\bar{j}_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , такой, что

$$X = \bar{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X).$$

Причем  $\bar{j}_k$  назовём определяющей системой атрибутов  $\bar{i}_s$ -понятия  $X$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пересечение двух  $\bar{i}_s$ -понятий  $n$ -арного отношения  $\rho \subset M_1 \times \dots \times M_n$ ,  $1 \leq s \leq n$ , с одной и той же определяющей системой атрибутов опять является  $\bar{i}_s$ -понятием этого отношения.

Следующий пример показывает, что пересечение  $\bar{i}_s$ -понятий с различными определяющими системами атрибутов не всегда будет  $\bar{i}_s$ -понятием этого отношения. Пусть  $X = \{a_1; a_2; a_3\}$ ,  $Y = \{a_2; a_3; a_4\}$ ,  $X, Y \subset M_1$ , из отношения на  $M_1, M_2, M_3$  (рис. 1). Покажем, что они являются 1-понятиями:  $\bar{\rho}_2(X) = \{b_1\} \cap \{b_1; b_2\} \cap \{b_1; b_3\} = \{b_1\}$ ,  $\bar{\rho}_{12}(X) = \bar{\rho}_1(\{b_1\}) = X$ ,  $\bar{\rho}_3(Y) = \{c_2; c_4\} \cap \{c_3; c_4\} \cap \{c_4\} = \{c_4\}$ ,  $\bar{\rho}_{13}(Y) = \bar{\rho}_1(\{c_4\}) = Y$ . Рассмотрим их пересечение  $X \cap Y = \{a_2; a_3\}$ . Найдём  $\bar{\rho}_2(X \cap Y) = \{b_1\}$ ,  $\bar{\rho}_3(X \cap Y) = \{c_4\}$ ,  $\bar{\rho}_{(2;3)}(X \cap Y) = \emptyset$ . Откуда  $\bar{\rho}_{12}(X \cap Y) = X$ ,  $\bar{\rho}_{13}(X \cap Y) = Y$ ,  $\bar{\rho}_{1(2;3)}(X \cap Y) = M_1$ . Следовательно, пересечение  $X \cap Y$  не является 1-понятием. На рис. 2, 3, 4 изображены всевозможные решётки 1-понятий этого отношения соответственно с системами атрибутов (2), (3) и (2,3).

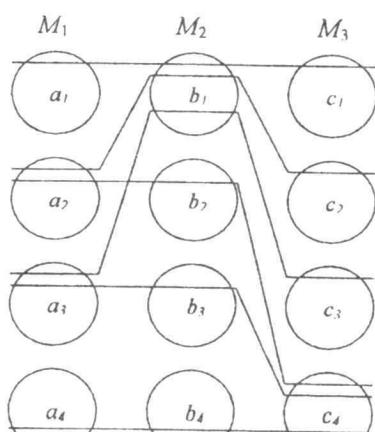


Рис. 1

На рис. 5 видно, что всё множество 1-понятий образует упорядоченное множество, не являющееся решёткой. В случае произвольного  $n$ -арного отношения ясно, что пересечение двух  $\bar{i}_s$ -понятий, подобных понятиям примера, не будет являться  $\bar{i}_s$ -понятием. Есть гипотеза обратной связи: если пересечение двух  $\bar{i}_s$ -понятий не является  $\bar{i}_s$ -понятием, то они подобны 1-понятиям данного примера.

Отношение  $\rho \subset M_1 \times \dots \times M_n$  назовём частично однозначным относительно  $M_{i_s}$ ,  $1 \leq s \leq n$ , если каждый элемент  $x_{i_s} \in M_{i_s}$  входит в  $\rho$  не более одного раза.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если  $n$ -арное отношение  $\rho \subset M_1 \times \dots \times M_n$  является частично однозначным относительно  $M_{i_s}$ ,  $1 \leq s \leq n$ , то пересечение любых двух его  $\bar{i}_s$ -понятий опять является  $\bar{i}_s$ -понятием этого отношения.

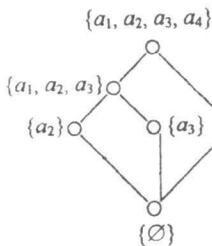


Рис. 2

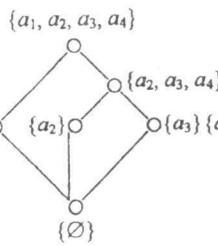


Рис. 3

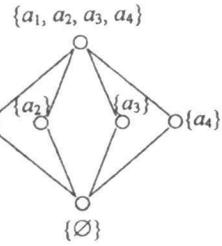


Рис. 4

Пусть  $\rho \subset M_1 \times \dots \times M_n$  частично однозначно относительно  $M_{i_s}$ ,  $1 \leq s \leq n$ , и  $T$  – множество всех  $\bar{i}_s$ -понятий  $n$ -арного отношения  $\rho$ . Если  $X \subset M_{i_s}$ , то

$$J_{i_s}(X) := \bigcap_{\tau \in T \wedge X \subset \tau} \text{будем называть замыка-} \\ \text{нием множества } X.$$

ТЕОРЕМА. Оператор  $J_{i_s}$  является оператором замыкания [3] на подмножествах из  $M_{i_s}$  относительно упорядоченности по включению.

Предложение 2 и следующая за ним теорема в частности указывают, что множество всевозможных понятий по любому ключу реляционной базы данных [4] образует полную решётку.

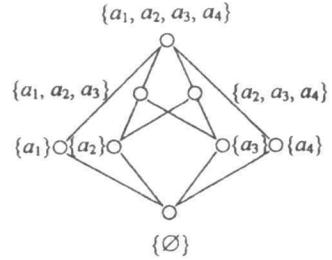


Рис. 5

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1.
2. Wille R. Introduction to Formal Concept Analysis. Darmstadt: Technische Hochschule Darmstadt, 1996. Oktober.
3. Биркгоф Г. Теория решёток. М.: Наука, 1984.
4. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.

## ДЕЛЕЖИ В БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ С КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Основной задачей теории игр является выявление содержания понятия оптимальности и нахождение условий существования оптимальных решений. В теории игр сложилось два подхода к введению понятия оптимальности: некооперативный и кооперативный. Некооперативный подход базируется на предположении информационной разобщенности игроков; формально это проявляется в запрете образования коалиций. Кооперативный подход, напротив, основан на возможности образования коалиций игроков, имеющих коалиционные интересы и возможности коалиционных действий. Формально коалиция – это произвольное непустое подмножество множества игроков. Для каждой коалиции должно быть указано множество ее стратегий и отношение предпочтения, выражющее ее интересы.

Основным объектом изучения в статье является игра  $n$  лиц с квазиупорядоченными исходами, которая задается в виде

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F \rangle, \quad (1)$$

где  $N = \{1, \dots, n\}$  – множество игроков,  $X_i$  – множество стратегий игрока  $i$ ,  $A$  – множество исходов,  $\omega_i$  – отношение квазипорядка на  $A$ , выражающее предпочтения игрока  $i$ ,  $F: X_N \rightarrow A$  – функция реализации, где  $X_N = \prod_{i \in N} X_i$  – множество ситуаций игры. При изучении кооперативного аспекта игры (1) для каждой коалиции  $S \subseteq N$  должно быть определено множество ее стратегий  $X_S$  и отношение предпочтения  $\omega_S$ . Далее будем полагать, что множество стратегий коалиции  $S$  есть  $X_S = \prod_{i \in S} X_i$ , а отношение предпочтения определяется в виде  $\omega_S = \bigcap_{i \in S} \omega_i$ , которое также является отношением квазипорядка.

В кооперативной теории игр одним из важнейших понятий является понятие дележа. Дележ – это оптимальный по Парето индивидуально-рациональный исход. В данной статье мы обобщаем эти понятия на игры с квазиупорядоченными исходами. Наша задача установить достаточные условия для существования индивидуально-рациональных исходов и для существования дележей в играх с квазиупорядоченными исходами. Отметим, что для игр с квазиупорядоченными исходами аналогом индивидуальной рациональности исхода является его допустимость. Исход  $a$  допустим для игрока  $i$ , если у него не существует такой стратегии  $x_i$ , что при любой стратегии  $y_{N \setminus i}$  дополнительной коалиции  $X_{N \setminus i}$  выполняется

$F(x_i, y_{N \setminus i}) > a$ . Введем на множестве стратегий  $X_i$  игрока  $i$  отношение квазипорядка  $\beta_i$ .

Определение 1. Пусть  $x_i^1, x_i^2 \in X_i$ . Будем говорить, что стратегия  $x_i^1$  доминирует стратегию  $x_i^2$  по отношению  $\beta_i$  – доминирования (обозначать  $x_i^1 \geq_{\beta_i} x_i^2$ ), если выполняется включение

$$\{F(x_i^1, y) : y \in X_{N \setminus i}\}^\uparrow \subseteq \{F(x_i^2, y) : y \in X_{N \setminus i}\}^\uparrow,$$

где знаком  $\uparrow$  обозначается множество мажорант [1] соответствующего подмножества относительно квазипорядка  $\omega_i$ .

Определение 2. Стратегия игрока  $i$  называется  $\beta_i$ -максимальной, если она является максимальным элементом множества стратегий  $X_i$  относительно квазипорядка  $\beta_i$ .

ТЕОРЕМА 1 (достаточное условие существования индивидуально-рационального исхода). Если в игре  $G$  вида (1) для каждого игрока  $i \in N$  отношение  $\beta_i$ -доминирования удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (ОВЦ [1]), то множество индивидуально-рациональных исходов в игре  $G$  не пусто.

При доказательстве этой теоремы используется следующая лемма.

ЛЕММА 1. В любой ситуации, в которой игрок  $i$  использует  $\beta_i$ -максимальную стратегию, исход игры допустим для игрока  $i$ .

Из леммы 1 следует, что в ситуации  $(x_i^*)_{i \in N}$ , где каждая стратегия  $x_i^*$  является  $\beta_i$ -максимальной, исход будет допустим для всех игроков сразу, т.е. индивидуально-рациональным. Существование такой ситуации обеспечивается условием ОВЦ в каждом квазиупорядоченном множестве  $\langle X_i, \beta_i \rangle$  ( $i \in N$ ).

Простые примеры показывают, что исход в ситуации, состоящей из  $\beta_i$ -максимальных стратегий игроков может быть неоптимален по Парето, т.е. не быть дележом. Поэтому возникает дополнительная задача нахождения достаточных условий существования дележа. Одно из решений этой задачи дано в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие непустоты множества дележей в играх с квазиупорядоченными исходами). В игре  $G$  вида (1), в которой каждое квазиупорядоченное множество  $\langle A, \omega_i \rangle_{i \in N}$  удовлетворяет условию ОВЦ, множество дележей не пусто.

Приведем примеры, показывающие что из условия ОВЦ в квазиупорядоченных множествах  $\langle X_i, \beta_i \rangle$  не следует условие ОВЦ в квазиупорядоченных множествах  $\langle A, \omega_i \rangle$  и наоборот.

Пример 1. Рассмотрим игру  $G = \langle X, Y, A, \omega_1, \omega_2, F \rangle$  с упорядоченными исходами, в которой функция реализации задана с помощью табл. 1, а диаграммы упорядоченных множеств  $\langle A, \omega_i \rangle_{i=1,2}$  приведены на рис. 1 и 2.

Таблица 1

$F$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$\dots$
$x_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\dots$
$x_2$	$a_2$	$a_1$	$a_4$	$a_5$	$\dots$
$x_3$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_6$	$\dots$
$x_4$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_1$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

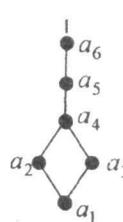


Рис. 1

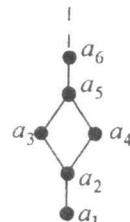


Рис. 2

В данном примере  $\{F(x_1, Y)\}^\uparrow = \{F(x_2, Y)\}^\uparrow = \dots = A$ , откуда  $x_1 \sim x_2 \sim \dots$ ;  $\{F(X, y_1)\}^\uparrow = \{F(X, y_2)\}^\uparrow = \dots = A$ , откуда  $y_1 \sim y_2 \sim \dots$ . Следовательно, для упорядоченных множеств  $\langle X, \beta_1 \rangle$  и  $\langle Y, \beta_2 \rangle$  выполняется условие ОВЦ. Но для упорядоченных множеств  $\langle A, \omega_i \rangle_{i=1,2}$  условие ОВЦ не выполняется.

Пример 2. Рассмотрим игру  $G = \langle X, Y, A, \omega_1, \omega_2, F \rangle$  с упорядоченными исходами, в которой функция реализации задана с помощью табл. 2, а диаграммы упорядоченных множеств  $\langle A, \omega_i \rangle_{i=1,2}$  приведены на рис. 3 и 4.

Таблица 2

$F$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$\dots$
$x_1$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$
$x_2$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$a_9$	$\dots$
$x_3$	$a_5$	$a_7$	$a_9$	$a_{11}$	$\dots$
$x_4$	$a_7$	$a_9$	$a_{11}$	$a_{13}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

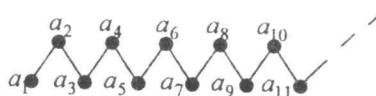


Рис. 3

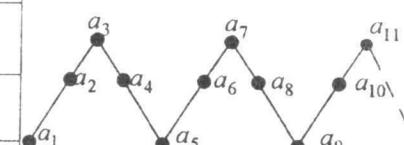


Рис. 4

Здесь упорядоченные множества  $\langle A, \omega_i \rangle_{i=1,2}$  удовлетворяют условию ОВЦ, но в квазиупорядоченных множествах  $\langle X, \beta_1 \rangle$  и  $\langle Y, \beta_2 \rangle$  условие ОВЦ не выполняется. Действительно, так как  $\{F(x_1, Y)\}^\uparrow \supset \{F(x_2, Y)\}^\uparrow \supset \dots$ , то  $x_1 \prec^{\beta_1} x_2 \prec^{\beta_1} x_3 \prec \dots$ .

В квазиупорядоченном множестве  $\langle Y, \beta_2 \rangle$  имеется бесконечно возрастающая цепь  $y_1 \prec y_2 \prec y_4 \prec y_6 \prec \dots$

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Биркгоф Г. Теория решёток. М.: Наука, 1984.

УДК 517.54

Е. В. Разумовская

### ЗАДАЧА ГРОНУОЛЛА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА БАЗИЛЕВИЧА

И.Е. Базилевич [1], проинтегрировав частный вид уравнения Левнера-Куфарева, получил интегральное представление широкого класса односстных функций, называемого классом функций Базилевича ( $B_\alpha$ ). Из [1] следует, что если  $f \in B_\alpha$ , то  $f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t w(z, t)$ , где  $w(z, t)$  является решением дифференциального уравнения Левнера-Куфарева

$$\frac{dw(z, t)}{dt} = -\frac{w(z, t)}{e^{-\alpha t} p_1(w) + (1 - e^{-\alpha t}) p_0(w)}, \quad (1)$$

$$w(z, 0) = z,$$

где  $p_0(w)$ ,  $p_1(w)$  – функции класса Каратеодори (C) с разложением в единичном круге  $p_0(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k w^k$ ,  $p_1(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\beta_k w^k$ , удовлетворяющие в нем условию  $\operatorname{Re} p_0(w) > 0$ ,  $\operatorname{Re} p_1(w) > 0$ .

Гронуолл [2] поставил задачу об оценке  $|f(z)|$  при фиксированном значении  $a_2 = f''(0)/2$  в классе односстных функций. Мы дадим решение задачи Гронуолла в классе функций  $B_\alpha$  с дополнительными требованиями вещественности коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta_1$  и  $\gamma_1$ . Для получения оценки используется метод, предложенный в работах [3, 4].

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in B_\alpha$ ,  $\alpha \in R$ . Тогда для вещественных  $\beta_1, \gamma_1$  справедливо неравенство

$$J_1^* \leq |f(z)| \leq J_2^*, \quad (2)$$

$$J_1^* = \left[ \alpha \int_0^{|z|} \frac{(1-s^2)s^{\alpha-1}}{(1+s^2+s|a_2|)^{\alpha+1}} ds \right]^{1/\alpha},$$

$$J_2^* = \left[ \alpha \int_0^{|z|} \frac{2s^\alpha \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^{\frac{1+s^2+s|a_2|(\alpha+1)}{2s}}}{e(1-s^2)^{\alpha+1} \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right|} ds \right]^{1/\alpha}.$$

Доказательство. Из [1] легко выводится связь между  $\alpha, \beta_1, \gamma_1$  и  $a_2$ :

$$a_2 = 2 \frac{\beta_1 + \gamma_1 \alpha}{\alpha + 1}.$$

Зафиксируем  $a_2 = c$  и без ограничения общности будем считать  $a_2 \geq 0$ . Пусть  $\gamma_1 = x$ ,  $\beta_1 = \frac{c(\alpha+1)}{2} - \alpha x$ . Оценим  $|f(z)|$  в зависимости от параметра  $x$ .

Оператор

$$P_{d_1}[q](w) = \frac{(1+d_1)(1+w)q(w) + (1-d_1)(1-w)}{(1+d_1)(1-w)q(w) + (1-d_1)(1+w)},$$

где  $q(w) \in C$  однозначно отображает класс  $C$  на класс  $C(d_1)$  функций  $f \in C$  с фиксированным коэффициентом  $d_1$  [5].

Представив  $P_{d_1}$  в виде

$$P_{d_1}[q](w) = \frac{\frac{(1+d_1)q + (1-d_1)}{(1+d_1)q - (1-d_1)} + w}{\frac{(1+d_1)q + (1-d_1)}{(1+d_1)q - (1-d_1)} - w} = \frac{k + w}{k - w},$$

отметим, что функция  $\xi = \frac{k+w}{k-w}$  отображает круг  $E_r = \{w : |w| \leq r\}$  на круг

$$\left| \xi - \frac{|k|^2 + r^2}{|k|^2 - r^2} \right| \leq \frac{2|k|r}{|k|^2 - r^2}, \text{ который расширяется с уменьшением } |k|.$$

Применим оператор  $P_d$  к функциям  $p_0(w), p_1(w)$ . Функция

$$g(w) = e^{-\alpha t} P_{\frac{c(\alpha+1)}{2} - \alpha x}[p](w) + (1 - e^{-\alpha t}) P_x[p](w)$$

отображает круг  $E_r$  на круг

$$\begin{aligned} & \left| g - \left( e^{-\alpha t} \frac{|k_1|^2 + r^2}{|k_1|^2 - r^2} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{|k_2|^2 + r^2}{|k_2|^2 - r^2} \right) \right| \leq \\ & \leq \left( e^{-\alpha t} \frac{2|k_1|r}{|k_1|^2 - r^2} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{2|k_2|r}{|k_2|^2 - r^2} \right), \end{aligned}$$

и значит,

$$T_1 \leq \operatorname{Re} g(w) \leq T_2, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= e^{-\alpha t} \frac{|k_1| - r}{|k_1| + r} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{|k_2| - r}{|k_2| + r}, \\ T_2 &= e^{-\alpha t} \frac{|k_1| + r}{|k_1| - r} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{|k_2| + r}{|k_2| - r}. \end{aligned}$$

Так как область значений функционала  $I(p) = p(z_0)$ ,  $p \in C$ ,  $z_0 \neq 0$  – фиксированная точка единичного круга, представляет собой круг [6]

$$D(z_0) = \left\{ I : \left| I - \frac{1 + |z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right| \leq \frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2} \right\},$$

то

$$\begin{aligned} T_1^* &= \min_{p \in C} T_1 = e^{-\alpha t} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 + 2r \left( \frac{c(\alpha+1)}{2} - x\alpha \right)} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 + 2rx}, \\ T_2^* &= \max_{p \in C} T_2 = e^{-\alpha t} \frac{1 + r^2 + 2r \left( \frac{c(\alpha+1)}{2} - x\alpha \right)}{1 - r^2} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{1 + r^2 + 2rx}{1 - r^2}. \end{aligned}$$

Из (1) и (3) получаем неравенство

$$-\frac{1}{T_1^*} \leq \frac{d \log |w|}{dt} \leq -\frac{1}{T_2^*},$$

интегрирование которого приводит к неравенству

$$J_1(x) \leq f(z) \leq J_2(x), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \left[ \alpha \int_0^{|z|} \frac{(1-s^2)s^{\alpha-1}ds}{1+s^2+2s\left(\frac{c(\alpha+1)}{2}-x\alpha\right)(s^2+2sx+1)^{\alpha}} \right]^{1/\alpha}, \\ J_2(x) &= \left[ \alpha \int_0^{|z|} \frac{\left(1+s^2+2s\left(\frac{c(\alpha+1)}{2}-x\alpha\right)\right)s^{\alpha-1}ds}{(1-s^2)^{\alpha+1}} \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\alpha x} ds \right]^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Найдя максимум и минимум по  $x$ , получим основное неравенство (2).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Базилевич И.Е. Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций // Мат. сб. 1964. № 100. С. 628 – 630.
2. Gronwall T.H. Sur la deformation dans la representations conforme sous des conditions restrictives // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris., 1916. Vol.162. P. 316 – 318.
3. Szynal A., Szynal J., Wajler S. On the problem of Grownwall for convex and quasi starlike functions // Conf. Anal. Functions. Abstracts. Kozubnik, 1979. Р. 56.
4. Прохоров Д.В., Шиналь Я. Оценка модуля функции Мокану с фиксированными начальными коэффициентами // Теория функций и приближений. Тр. Сарат. зимней школы. Саратов, 1982. Ч. 1. С. 156.
5. Pfaltzgraff J.A., Pinchuk B.A. Variational method for classes of meromorphic functions // J. Anal. Math. 1971. Vol. 24. P. 101 – 150.
6. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

УДК 519.83

В. В. Розен

### РЕШЁТКА ПОДКЛАССОВ КЛАССА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР\*

Исследованы соотношения между подклассами класса антагонистических игр. Антагонистическая игра с упорядоченными исходами задается в виде системы

$$G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle,$$

где  $X$  – множество стратегий игрока 1,  $Y$  – множество стратегий игрока 2,  $A$  – множество исходов,  $\omega \subseteq A^2$  – отношение порядка на  $A$ , выражающее предпочтения игрока 1,  $F : X \times Y \rightarrow A$  – функция реализации. Игра, двойственная к  $G$ , получается из нее переменой мест игроков 1 и 2 и заменой порядка  $\omega$  на обратный порядок  $\omega^{-1}$ . Пусть  $K$  – класс всех антагонистических игр с упорядоченными исходами.

Определение 1. Игра  $G$  называется 1-альтернативной, если для любого исхода  $a \in A$  выполняется альтернатива: исход  $a$  либо гарантируется игроком 1, либо запрещается игроком 2, т.е.

либо  $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)F(x, y) \geq^\omega a$ , либо  $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)\neg(F(x, y) \geq^\omega a)$ .

Класс 1-альтернативных игр обозначается через  $K_{al}^1$ . Двойственно определяется класс 2-альтернативных игр  $K_{al}^2$ . Классы  $K_{bal}$  биальтернативных игр и  $K_{al}$  альтернативных игр определяются равенствами

$$K_{bal} = K_{al}^1 \cap K_{al}^2, K_{al} = K_{al}^1 \cup K_{al}^2.$$

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00053.

Определение 2. Игра  $G$  называется глобально альтернативной, если для любого мажорантно стабильного относительно порядка  $\omega$  подмножества  $B \subseteq A$  выполнена альтернатива

либо  $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)F(x, y) \in B$ , либо  $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)F(x, y) \notin B$ .

Класс глобально альтернативных игр с упорядоченными исходами обозначается через  $K_{gal}$ .

Определение 3. В игре  $G$  стратегия  $x_0 \in X$  называется дискриминирующей стратегией игрока 1, если  $F(x_0, Y) \subseteq U(2)$ , где

$$U(2) = \{a \in A : (\exists y \in Y)(\forall x \in X) F(x, y) \leq^\omega a\} -$$

множество гарантированных исходов игрока 2.

Стратегия  $x_0 \in X$  называется критической стратегией игрока 1, если  $F(x_0, Y) \subseteq U^*(2)$ , где  $U^*(2) = \{a \in A : (\exists y \in Y)(\forall x \in X) F(x, y) <^\omega a\}$  – множество строго гарантированных исходов игрока 2.

Через  $K_d^1$  обозначается подкласс класса  $K$ , состоящий из игр, в которых игрок 1 имеет дискриминирующую стратегию; через  $K_{cr}^1$  – в которых игрок 1 имеет критическую стратегию. Двойственно определяются классы  $K_d^2$  и  $K_{cr}^2$ . Полагаем

$$K_d = K_d^1 \cup K_d^2, \quad K_{cr} = K_{cr}^1 \cup K_{cr}^2.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Выполняются следующие включения:

$$K_{cr}^1 \subset K_d^1, \quad K_{cr}^2 \subset K_d^2, \quad K_d \subset K_{gal} \subset K_{bal}.$$

Положим  $K_{sp}$  – класс антагонистических игр, имеющих седловую точку. Мы исследуем соотношения включения между следующими подклассами класса  $K$ :

$$\{K_{al}^1, K_{al}^2, K_{al}, K_{bal}, K_{gal}, K_d^1, K_d^2, K_d, K_{cr}^1, K_{cr}^2, K_{cr}, K_{sp}, \emptyset\}. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. А. Имеет место следующая диаграмма (рис. 1), указывающая соотношения включения между классами (1).

Б. Классы (1) относительно включения образуют решётку  $L$ , которая является линейно упорядоченной суммой трёх булевых алгебр, изоморфных соответственно  $2^3, 2^0, 2^2$ .

С. Решётка  $L$  является  $\cap$ -подрешёткой булевой алгебры  $2^K$  всех подклассов класса  $K$ . В частности,

$$K_d^1 \cap K_d^2 = K_{sp}, \quad K_d^1 \cap K_{cr}^2 = K_d^2 \cap K_{cr}^1 = \emptyset, \quad K_d^1 \cap K_{cr} = K_{cr}^1, \quad K_d^2 \cap K_{cr} = K_{cr}^2.$$

Замечание 1. Решётка  $L$  не является  $\cup$ -подрешёткой булевой алгебры  $2^K$ . В частности,  $K_{cr}^1 \cup K_{sp} \neq K_d^1$ ,  $K_{cr}^2 \cup K_{sp} \neq K_d^2$ .

Замечание 2. Для игр с конечным множеством исходов выполнено  $K_{cr}^1 = K_{cr}^2 = K_{cr} = \emptyset$ .

Пусть  $K^c$  – подкласс класса  $K$ , состоящий из игр, в которых упорядоченное множество исходов является полной цепью.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** В классе  $K^c$  подклассы  $K_{bal}$ ,  $K_{gal}$  и  $K_d$  совпадают.

Таким образом, диаграмма подклассов (1) в этом случае принимает вид, представленный на рис. 2.

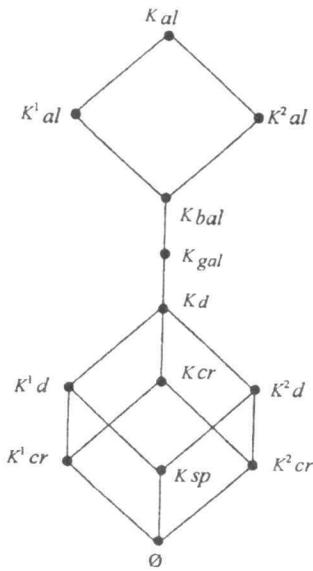


Рис. 1

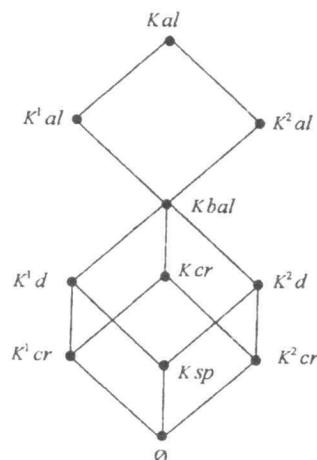


Рис. 2

**ТЕОРЕМА 2.** Набор подклассов

$$\{K_{al}^1, K_{al}^2, K_{al}, K_{bal}, K_{gal}, K_d^1, K_d^2, K_{cr}^1, K_{cr}^2, K_{cr}, K_{sp}, \emptyset\}$$

класса  $K^c$  относительно теоретико-множественного включения образует решетку  $L^c$ , являющуюся подрешеткой (как по  $\cap$ , так и по  $\cup$ ) булевой алгебры всех подклассов класса  $K^c$ . В частности (ср. с замечанием 1), выполняются равенства

$$K_{cr}^1 \cup K_{sp} = K_d^1, \quad K_{cr}^2 \cup K_{sp} = K_d^2, \quad K_d^1 \cup K_{cr}^2 = K_d^2 \cup K_{cr}^1 = K_{bal}.$$

**Замечание 3.** Для антагонистических игр, в которых множество исходов является конечной цепью (в частности, для матричных игр), справедливо  $K_{al} = K_{sp}$ , следовательно,

$$K_{al} = K_{al}^1 = K_{al}^2 = K_{bal} = K_d^1 = K_d^2 = K_{sp};$$

кроме того, по замечанию 2  $K_{cr}^1 = K_{cr}^2 = K_{cr} = \emptyset$ . Таким образом, в этом случае диаграмма подклассов (1) принимает вид 2-элементной цепи с наибольшим элементом  $K_{sp}$  и наименьшим элементом  $\emptyset$ .

УДК 517.54

С. В. Романова

## ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ, НЕ ПРИНИМАЮЩИХ НУЛЕВОГО ЗНАЧЕНИЯ\*

Пусть  $B$  – класс всех функций  $f$ ,  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ , аналитических в единичном круге  $D = \{z : |z| < 1\}$  и удовлетворяющих в  $D$  условию  $0 < |f(z)| \leq 1$ .

Кжиж [1] высказал гипотезу, что  $\sup_{f \in B} |a_n| = 2/e$ ,  $n \geq 1$ , с равенством

для функций  $\lambda F(kz^n)$ ,  $|\lambda| = |k| = 1$ , где  $F(z) = \exp((z-1)/(z+1))$ . Гипотеза была доказана для  $n = 1, 2, 3, 4$  [2]. Поскольку класс  $B$  инвариантен относительно вращения, достаточно рассматривать функции  $f \in B$ , нормированные условием  $a_0 > 0$ . Ввиду неравенства  $0 < a_0 \leq 1$ , можно положить  $a_0 = e^{-t}$ ,  $0 \leq t < \infty$ .

Обозначим через  $B(t)$  класс функций  $f \in B$ , для которых  $a_0 = e^{-t}$ ,

$$F_t(z) = \exp(-t(1-z)/(1+z)) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) z^k.$$

Будем рассматривать линейные непрерывные функционалы вида  $L(f) = \operatorname{Re}(a_n + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \dots + \alpha_1 a_1)$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in C$ .

В [3] были приведены результаты об асимптотических оценках функционалов вида  $L(f)$  при  $t$ , близких к 0 и  $t$ , близких к  $\infty$ . Эти оценки имеют различную природу. При  $t > 0$ , близких к 0, только функционал  $L(f) = \operatorname{Re} a_n$  имеет экстремальную функцию  $F_t(z^n)$ . При достаточно больших  $t$  любой функционал вида  $L(f)$  имеет экстремальную функцию  $F_t(z)$ . Справедливы следующие теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.** Для всякого  $n \geq 1$  найдется  $t_0 > 0$  такое, что для всех  $t \in [0, t_0]$   $\max_{f \in B(t)} |a_n| = A_1(t)$ .

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-01-00123.

ТЕОРЕМА 2. А. Для всякого  $n \geq 1$  найдется  $t_0 > 0$  такое, что для всех  $t \in [0, t_0]$  экстремальная функция для функционала  $L(f)$  будет отличной от функции  $F_t(z^n)$ .

В. Для всякого  $n \geq 1$  найдется  $t_1 > 0$  такое, что для всех  $t \geq t_1$  экстремальными функциями для функционала  $L(f)$  будут вращения функции  $F_t(z)$ .

Доказательство теоремы 2. В. Любую функцию класса  $B(t_0)$ ,  $t_0 > 0$ , можно представить в виде  $f(z) = f(z, t_0)$ , где  $f(z, t)$  является интегралом обобщенного дифференциального уравнения типа Левнера

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{1 + e^{-iu_k(t)}z}{1 - e^{-iu_k(t)}z}, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad z \in D, \quad f(z, 0) = 1, \quad (1)$$

$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ ,  $u_k(t)$  – непрерывные действительнозначные управлени.

Для нахождения области значений функционала  $L(f)$  в классе  $B(t)$  используем принцип максимума Понтрягина. В экстремальной задаче о максимуме функционала  $L(f)$  в классе  $B(t)$  достаточно рассматривать функции, представимые интегралами уравнения (1) с постоянными управлениями.

Обозначим  $f(z, t) = a_0(t) + a_1(t)z + \dots$ . Интегрируя систему дифференциальных уравнений для  $a_1(t), \dots, a_n(t)$ , приходим к формуле

$$a_n(t) = \left( (-1)^n t^n C_1^n / n! + \dots - 2t C_n \right) e^{-t}, \quad \text{где } C_p = \sum_{k=1}^m \lambda_k e^{-ipu_k}.$$

Траектория  $a_n(t)$  может быть оптимальной при достаточно больших  $t$ , только если  $m=1$ . Это означает, что экстремальной функцией будет  $F_t(kz)$ .

Доказательство утверждения А и теоремы 1 проводится аналогично. Пусть функции  $f_0(z)$  соответствуют следующие управлению и параметры  $\lambda_k : u_1 = u_1^0, \dots, u_m = u_m^0, \lambda_1 = \lambda_1^0, \dots, \lambda_m = \lambda_m^0$ . Обозначим  $(u^0, \lambda^0) = (u_1^0, \dots, u_m^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ .

Назовем функцию  $f_0$  критической точкой функционала  $L(f)$ , если

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}(u^0, \lambda^0) = \dots = \frac{\partial L}{\partial u_m}(u^0, \lambda^0) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(u^0, \lambda^0) = \dots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_{m-1}}(u^0, \lambda^0) = 0.$$

Пусть  $M_k(t)$  – множество таких векторов  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in C^{n-1}$ , что функция  $F_t(z^k)$  будет критической точкой для функционала  $L(f)$  при фиксированном  $t > 0$ .

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Множество  $M_k(t)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , является гладким действительным многообразием размерности  $2n-2k-1$ . Множество  $M_n(t)$  совпадает со множеством  $(0, \dots, 0)$ .

**Доказательство.** Интегрируя систему дифференциальных уравнений для  $a_1(t), \dots, a_n(t)$ , получаем формулу для  $a_n(t)$ ,  $n \geq 1$ , позволяющую выписывать систему линейных уравнений для коэффициентов  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$  из  $M_k(t)$ . Функции  $F_t(z^k)$  соответствует точка

$$(u^0, \lambda^0) = (\pi/k, \dots, \pi/(2k-1)/k, 1/k, \dots, 1/k).$$

Используя формулу для  $a_n$ , получаем систему относительно

$$\operatorname{Re} \alpha_{n-1}, \operatorname{Im} \alpha_{n-1}, \dots, \operatorname{Re} \alpha_1, \operatorname{Im} \alpha_1.$$

Ранг этой системы равен  $2n-2-2k$ . Так как переменная  $\operatorname{Re} \alpha_k$  не входит в систему уравнений, то размерность многообразия  $M_k(t)$  будет равна  $2n-2k-1$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Krzyz J. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Ann. Polon. Math. 1968, Vol. 20. P. 314.
2. Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. 1994. Vol. 48. P. 169 – 192.
3. Романова С.В. Асимптотические оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 11-й Сарат. зимней шк. Саратов, 2002. С. 172 – 173.

УДК 517.927.25

**В. С. Рыхлов**

#### УСЛОВИЯ СИЛЬНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТЕЙШЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА<sup>\*</sup>

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор  $L$ , порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{(n)}(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

и граничными условиями

$$U_v(y) = \alpha_v y^{(v-1)}(0) + y^{(v-1)}(1) = 0, \quad v = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где  $\alpha_v \in \mathbb{C}$ .

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

При изучении спектральных свойств оператора  $L$  возникает вопрос о классификации таких операторов по степени роста функции Грина оператора  $(L - \lambda E)^{-1}$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  в зависимости от значений параметров  $\alpha_v$ . Для решения этого вопроса необходимо предварительно провести классификацию краевых условий (2) по степени вырожденности характеристического определителя оператора  $L$ . Некоторым результатам в этом направлении и посвящена данная статья.

Далее рассмотрим только нечетное  $n = 2m + 1$ ,  $m \geq 2$ . Обозначим через  $\omega_j$  различные корни  $n$ -й степени из  $-1$ . Пусть  $\lambda \in \mathbb{C}$  есть спектральный параметр,  $\lambda = -\rho^n$ . Очевидно, уравнение  $l(y) = \lambda y$  имеет фундаментальную систему решений  $y_j(x, \rho) = \exp(\rho \omega_j x)$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Положим

$$U_v(y_j) = u_{vj}(\rho) = \rho^{v-1}(v_{vj} + e^{\rho \omega_j} w_{vj}),$$

где  $v_{vj} = \alpha_v \omega_j^{v-1}$ ,  $w_{vj} = \omega_j^{n-1}$ ,  $V_j = (v_{1j} v_{2j} \dots v_{nj})^T$ ,  $W_j = (w_{1j} w_{2j} \dots w_{nj})^T$ .

Отметим на плоскости точки  $0$ ,  $\omega_j$ ,  $\omega_j + \omega_k$  ( $j \neq k$ ),  $\omega_j + \omega_k + \omega_l$  ( $k \neq j \neq l$ ), ...,  $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$  ( $= 0$ ). Пусть  $M$  есть выпуклая оболочка этих точек. Очевидно,  $M$  является правильным  $2n$ -угольником с вершинами в точках  $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m$ ,  $\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_{m+1}$ , ...,  $\omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m-1}$  («четные» вершины) и  $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m+1}$ ,  $\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_{m+2}$ , ...,  $\omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_m$  («нечетные» вершины). Если удалить эти точки и обозначить через  $M_1$  выпуклую оболочку оставшихся точек, то  $M_1$  будет также правильным  $2n$ -угольником, лежащим строго внутри  $M$ , причем вершинами  $M_1$  будут точки  $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m-1}$ ,  $\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_m$ , ...,  $\omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m-2}$  («четные» вершины) и  $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{m+2}$ ,  $\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_{m+3}$ , ...,  $\omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m+1}$  («нечетные» вершины).

Характеристический определитель оператора  $L$  имеет вид

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} = \rho^{1+2+\dots+n-1} |V_1 + e^{\rho \omega_1} W_1; V_2 + e^{\rho \omega_2} W_2; \dots; V_n + e^{\rho \omega_n} W_n|.$$

Если разложить определитель справа на сумму определителей, то получим сумму  $2^n$  слагаемых вида  $\Delta_{jk..l} \exp(\rho(\omega_j + \omega_k + \dots + \omega_l))$ , где используются обозначения

$$\Delta_0 = |V_1 V_2 \dots V_n|, \Delta_1 = |W_1 V_2 \dots V_n|, \dots, \Delta_{12} = |W_1 W_2 V_3 \dots V_n|, \dots$$

Используя свойство симметрии, для  $\Delta(\rho)$  можно получить следующее представление, в котором слагаемые расположены по росту в порядке его не возрастания при  $|\rho| \rightarrow \infty$ ,

$$\Delta(\rho) = \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} \left\{ \Delta_{12\dots m} \left[ e^{\rho(\omega_1 + \dots + \omega_m)} + \dots + e^{\rho(\omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m-1})} \right] + \right.$$

$$+ \Delta_{12\dots m+1} \left[ e^{\rho(\omega_1 + \dots + \omega_{m+1})} + \dots + e^{\rho(\omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_m)} \right] +$$

$$+ \Delta_{12\dots m-1} \left[ e^{\rho(\omega_1 + \dots + \omega_{m-1})} + \dots + e^{\rho(\omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m-2})} \right] +$$

$$+ \Delta_{12\dots m+2} \left[ e^{\rho(\omega_1 + \dots + \omega_{m+2})} + \dots + e^{\rho(\omega_n + \omega_1 + \dots + \omega_{m+1})} \right] +$$

$$\left. + \dots + \Delta_0 + \Delta_{12\dots n} \right\} . \quad (3)$$

Некоторые коэффициенты в (3) могут равняться нулю. Отметим на плоскости те точки  $\omega_j$ ,  $\omega_j + \omega_k$ ,  $\omega_j + \omega_k + \omega_l$ , ..., которые соответствуют ненулевым коэффициентам. Пусть  $M_\Delta$  есть выпуклая оболочка отмеченных точек. Очевидно,  $M_\Delta$  является многоугольником, вид которого характеризует степень вырожденности характеристического определителя. Выделим первые три случая в порядке усиления вырожденности.

- (I)  $\Delta_{12\dots m} \neq 0 \wedge \Delta_{12\dots m+1} \neq 0$ . Здесь  $M_\Delta = M$  и в этом случае оператор  $L$  регулярен по Биркгофу [1, с. 66-67].
- (II)  $(\Delta_{12\dots m} \neq 0 \wedge \Delta_{12\dots m+1} = 0) \vee (\Delta_{12\dots m} = 0 \wedge \Delta_{12\dots m+1} \neq 0)$ . Здесь  $M_1 \subset M_\Delta \subset M$  и  $M_\Delta$  касается границы  $M$  либо в «четных», либо в «нечетных» вершинах, но не касается границы  $M_1$ . В этом случае оператор  $L$  является нормальным по терминологии [2]. Для  $n=3$  оператор из этого класса изучен в [3].
- (III)  $\Delta_{12\dots m} = \Delta_{12\dots m+1} = 0$ ,  $\Delta_{12\dots m-1} \neq 0$ ,  $\Delta_{12\dots m+2} \neq 0$ . Здесь  $M_\Delta = M_1$ . Множество операторов, обладающих этим свойством, обозначим  $NR(1)$ .

Имеют место следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Delta_{12\dots m} &= \theta \hat{\Delta}_{12\dots m}, & \Delta_{12\dots m+1} &= \theta \hat{\Delta}_{12\dots m+1}, \\ \Delta_{12\dots m-1} &= \theta \hat{\Delta}_{12\dots m-1}, & \Delta_{12\dots m+2} &= \theta \hat{\Delta}_{12\dots m+2}, \end{aligned}$$

где  $\theta = \det \Omega$ ,  $\Omega = (\omega_j^{v-1})_{v,j=1}^n$ ,

$$\hat{\Delta}_{12\dots k} = \begin{vmatrix} a_1 & a_n & \dots & a_{k+3} & a_{k+2} \\ a_2 & a_1 & \dots & a_{k+4} & a_{k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-k-1} & a_{n-k-2} & \dots & a_1 & a_n \\ a_{n-k} & a_{n-k-1} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

$a_v = \hat{\alpha}_v \omega_1^{v-1}$ ,  $v = \overline{1, n}$ ,  $\hat{\alpha}_v$  есть компоненты вектора  $\hat{\alpha} = (\Omega^T)^{-1} \alpha$ ,  $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)^T$ .

ТЕОРЕМА 2.  $L \in NR(1)$  тогда и только тогда, когда  $\hat{\Delta}_{12\dots m+2} \neq 0$  и выполняется какое-либо одно из следующих условий:

- (1)  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{m+1} = 0$ ,  $\theta_{m+2} \neq 0$ ,  $\theta_n \neq 0$ ;
- (2)  $\theta_n = \theta_1 = \dots = \theta_m = 0$ ,  $\theta_{m+1} \neq 0$ ,  $\theta_{n-1} \neq 0$ ,

где

$$\theta_1 = a_1 - s_1 a_n - s_2 a_{n-1} - \dots - s_{m-1} a_{m+3}, \quad \theta_2 = a_2 - s_1 a_1 - s_2 a_n - \dots - s_{m-1} a_{m+4}, \dots, \\ \theta_n = a_n - s_1 a_{n-1} - s_2 a_{n-2} - \dots - s_{m-1} a_{m+2}, \quad s_j \in \mathbb{C}, \quad s_{m-1} \neq 0.$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. Т. 9. С. 190 – 229.
3. Хромов А.П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182 – 193.

УДК 517.51

С. П. Сидоров

#### ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МОДИФИКАЦИЯМИ ОПЕРАТОРОВ БАСКАКОВА\*

Обозначим  $X = [0,1]$ ,  $\|\cdot\|$  будет означать равномерную норму в  $C(X)$ ,  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

Пусть  $\{L_n\}_{n \geq 1}$  – последовательность линейных положительных операторов В.А. Баскакова [1]:

$$L_n f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} \varphi_n^{(r)}(x) \cdot x^r \cdot \psi\left(\frac{r}{n}\right), \quad x \in X, \quad f \in C^j(X),$$

где  $\psi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ e^{-(x-1)^{j+1}} \sum_{i=0}^j \frac{1}{i!} (x-1)^i f^{(i)}(1), & x > 1, \end{cases}$  и

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (1+px)^{-\frac{n}{p}}, & p \neq 0, \quad p \geq -1, \\ e^{-nx}, & p = 0. \end{cases}$$

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120, и частичной поддержке программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

Известно [1], что порядок приближения дифференцируемых функций такими операторами не может быть выше, чем  $n^{-1}$ . Вместе с тем, как впервые заметил С.Н. Бернштейн [2], конечные линейные комбинации линейных положительных операторов могут иметь более высокий порядок приближения на классе дифференцируемых функций.

В настоящей статье исследуется асимптотический вид приближения дифференцируемых функций некоторыми линейными операторами, представляющими собой линейные комбинации операторов В.А. Баскакова, с использованием идей С.Н. Бернштейна [2], П. Бутцера [3], В.В. Тихомирова [4].

Фиксируем  $k, p \in \mathbb{N}$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ . Обозначим  $\alpha = \alpha(n) = 1/(cn + d)$ .

Рассмотрим последовательность линейных операторов  $\{S_{n,k,p}\}_{n \geq k}$ , определенных в  $C(X)$ , задаваемых следующим образом:

$$S_{n,k,p}f(x) = \sum_{i=0}^p b_i^{[p]}(n, k) L_{k+(i+1)n} f(x), \quad f \in C(X),$$

где

$$\begin{aligned} b_0^{[1]}(n, k) &= -\left(\frac{k+n}{n} + \alpha\right), \quad b_1^{[1]}(n, k) = \frac{k+n}{n} + 1 + \alpha, \\ b_0^{[p]}(n, k) &= -\frac{k+n}{pn} b_0^{[p-1]}(n, k), \quad p \geq 2, \\ b_j^{[p]}(n, k) &= \left(\frac{k+n}{pn} + 1\right) b_{j-1}^{[p-1]}(n, k+n) - \frac{k+n}{pn} b_j^{[p-1]}(n, k), \quad j = 1, \dots, p-1, \\ b_p^{[p]}(n, k) &= \frac{k+n(p+1)}{pn} b_{p-1}^{[p-1]}(n, k+n), \quad p \geq 2. \end{aligned}$$

В работе [5] показано, что для всякой  $f \in C(X)$  равномерно по  $x \in X$  будет  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,k,p}f(x) = f(x)$ .

Покажем, что операторы  $S_{n,k,p}$  на классе  $2p$ -раз непрерывно дифференцируемых функций имеют порядок приближения  $n^{-p}$ .

Следующее утверждение проверяется с использованием метода математической индукции.

**ЛЕММА.** Для операторов  $S_{n,k,p}$  справедливо следующее реккурентное представление по  $p$ :

$$S_{n,k,1}f(x) = \left(\frac{k+n}{n} + 1 + \alpha\right) L_{k+2n} f(x) - \left(\frac{k+n}{n} + \alpha\right) L_{k+n} f(x), \quad (1)$$

$$S_{n,k,p}f(x) = \left(\frac{k+n}{n} + 1\right) S_{n,k+n, p-1}f(x) - \frac{k+n}{pn} S_{n,k, p-1}f(x), \quad p \geq 2. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА. Пусть  $s \in \mathbb{N}$  фиксировано. Если  $f \in C^{2p+2s}(X)$ , то

$$S_{n,k,p}f(x) = f(x) + \sum_{r=p+1}^{p+s} \sum_{j=r}^{\infty} K_{k,r,j,p} \cdot R_r(x) \cdot n^{-j} + n^{-p-s} \cdot \rho_{n,k,p}(x),$$

где  $K_{k,r,j,p}$  – некоторые действительные числа, не зависящие от  $n$ ;

$R_r(x)$  – некоторые непрерывные на  $X$  функции, не зависящие от  $n$ ;

$\rho_{n,k,p}(x) \rightarrow 0$  равномерно относительно  $x$  на  $X$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} A_{n,k,1} &= \left( \frac{k+n}{n} + 1 + \alpha \right) (k+2n)^{-r-1} - \left( \frac{k+n}{n} + \alpha \right) (k+n)^{-r-1}, \\ A_{n,k,p} &= \left( \frac{k+n}{pn} + 1 \right) A_{n,k+n,p-1} - \frac{k+n}{pn} A_{n,k,p-1}. \end{aligned}$$

Следующие равенства устанавливаются в [6] индукцией с использованием формулы бинома Ньютона:

$$1) \quad A_{n,k,p} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, p-2;$$

$$2) \quad A_{n,k,p} = \sum_{i=p+1}^{p-1} K_{k,p-1,i,p} \cdot n^{-i};$$

$$3) \quad A_{n,k,p} = \sum_{i=r+1}^{\infty} K_{k,r,i,p} \cdot n^{-i}, \quad r = p, p+1, \dots,$$

где  $K_{k,r,i,p}$  есть некоторые действительные числа, не зависящие от  $n$ .

Так как  $f \in C^{2p+2s}(X)$ , то согласно [1]

$$L_n f(x) = f(x) + \sum_{r=1}^{p+s} R_r(x) \cdot n^{-r} + n^{-p-s} \cdot \rho_n(x), \quad (3)$$

где  $R_r(x)$  – некоторые непрерывные на  $X$  функции, не зависящие от  $n$ ;

$\rho_n(x) \rightarrow 0$  равномерно относительно  $x$  на  $X$  при  $n \rightarrow \infty$ .

После подстановки (3) в (1) и (2), с учетом равенств 1) – 3), мы получаем утверждение теоремы.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баскаков В.А. Пример последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113, № 2. С. 249 – 251.

2. Бернштейн С.Н. Добавление к статье Е.В. Вороновской “Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С.Н.Бернштейна” // Докл. АН СССР. 1932. Т. 4. С. 86 – 92.

3. Butzer P.L. Linear combinations of Bernstein polynomials // Canad J. Math. 1953. Vol. 5, № 4. P. 559-567.

4. Тихомиров В.В. Об аппроксимации функций с заданной скоростью сходимости // Изв. вузов. Сер. Математика. 1976. № 10. С. 113 – 115.

5. Сидоров С.П. Приближение непрерывных функций модификациями операторов Баскакова // Информационные технологии в естественных науках, экономике и образовании: Тр. междунар. науч. конф. Саратов-Энгельс, 2002. С. 280 – 281.

6. Сидоров С.П. Конструкции операторов класса  $S_m$  и их аппроксимативные свойства. Саратов, 1992. 29 с. Деп. в ВИНИТИ 14.12.92, № 3530 - В92.

УДК 517.52

Г. А. Сорокин

## О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ОДНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЯДОВ

В данной статье излагается метод суммирования расходящихся рядов и формула, устраниющая явление Гиббса. При этом применяется

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  – произвольные последовательности действительных или комплексных чисел, удовлетворяющие условиям:

$a_n - b_n \neq 0$  при  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n - b_n} = 0$ . Тогда если ряд в левой части равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1^2}{a_1 - b_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_{n+1}^2}{a_{n+1} - b_{n+1}} - \frac{a_n b_n}{a_n - b_n} \right) \quad (1)$$

сходится, то это равенство справедливо.

Действительно, правая часть (1) равна

$$\frac{a_1^2}{a_1 - b_1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n^2}{a_n - b_n} - \frac{a_{n+1}^2}{a_{n+1} - b_{n+1}} - a_n \right) = \frac{a_1^2}{a_1 - b_1} - \frac{a_1^2}{a_1 - b_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Полагая в (1)  $b_n = \lambda a_n$ , где  $\lambda \neq 1$  и не зависит от  $n$ , получим формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - \lambda a_n), \quad (2)$$

опубликованную в [1, с.35].

Эту формулу мы применим при исследовании явления Гиббса. Ограничимся случаем, когда

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \pi. \end{cases}$$

Как известно [2, с. 596], исследование явления Гиббса для произвольной функции ограниченной вариации сводится к рассматриваемому случаю.

Пользуясь формулой Эйлера, получим

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(2n-1)xi} - e^{-(2n-1)xi}}{2i(2n-1)} = -i \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(2n-1)xi}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)xi}}{2n-1} \right). \quad (3)$$

Улучшим сходимость первого ряда по формуле (2), полагая в ней  $\lambda = e^{2xi}$ ,  $x \neq 0, \pi$ . Имеем  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(2n-1)xi}}{2n-1} = \frac{e^{xi}}{1-e^{2xi}} \left( 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nxi}}{(2n-1)(2n+1)} \right)$ . Упростим первый множитель. Применяя формулу Эйлера, получим

$$\frac{e^{xi}}{1-e^{2xi}} = -\frac{1}{e^{xi}-e^{-xi}} = -\frac{1}{2i \sin x} = \frac{i}{2 \sin x} \text{ и, следовательно,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(2n-1)xi}}{2n-1} = \frac{i}{2 \sin x} \left( 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nxi}}{(2n-1)(2n+1)} \right). \quad (4)$$

Заменяя в (4)  $x$  на  $(-x)$ , будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)xi}}{2n-1} = -\frac{i}{2 \sin x} \left( 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2nxi}}{(2n-1)(2n+1)} \right). \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (3), получим исходную формулу

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} &= \frac{1}{\sin x} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nxi} - e^{-2nxi}}{(2n-1)(2n+1)} \right) = \frac{1}{\sin x} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)} \right) = \\ &= \frac{2}{\sin x} \left( \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)} \right) = \frac{4}{\sin x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{(2n-1)(2n+1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда видно, что частичная сумма  $s_n$  полученного ряда монотонно возрастает с возрастанием  $n$  и полностью устраняет явление Гиббса.

Далее определим метод суммирования расходящихся рядов, основанный на преобразовании (2). Применяя его  $p$  раз, получим формулу [1, с. 36]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\lambda} + \sum_{k=1}^{p-1} \Delta_{\lambda}^k a_1 \frac{1}{(1-\lambda)^{k-1}} + \frac{1}{(1-\lambda)^p} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{\lambda}^p a_n, \quad (7)$$

где по определению  $\Delta_{\lambda} a_n = a_{n+1} - \lambda a_n$ ,  $\Delta_{\lambda}^p a_n = \Delta_{\lambda} (\Delta_{\lambda}^{p-1} a_n)$ .

Если ряд в левой части формулы (7) расходится, а ряд в правой части (7) при некотором  $p$  сходится, то будем говорить, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  суммируем методом  $(\Delta_{\lambda}^p)$  и его обобщенная сумма равна правой части (7).

Регулярность этого метода суммирования очевидна.

Пример. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$  суммируется методом  $(\Delta_\lambda)$  при любом  $|z| > 1$ .

Действительно, полагая в (2)  $\lambda = z$ , получим  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ . К этому ряду методы Чезаро, Ламберта и Пуассона-Абеля не применимы. Метод Бореля суммирует этот ряд в полуплоскости  $\operatorname{Re} z < 1$  к сумме  $\frac{z}{1-z}$ . Таким образом, метод  $(\Delta_\lambda)$  сильнее всех перечисленных методов.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  суммируем методом Пуассона-Абеля к сумме  $s$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - \lambda a_n)$  при некотором  $\lambda \neq 1$  сходится, то данный ряд суммируется методом  $(\Delta_\lambda)$  к той же сумме  $s$ .

В самом деле, по методу Пуассона обобщенная сумма  $s = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ ,

где  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ . Применяя к этому сходящемуся ряду формулу (2) при  $\lambda = \lambda x$ , получим  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_1 x}{1 - \lambda x} + \frac{x}{1 - \lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - \lambda a_n) x^n$ . Отсюда находим  $\phi(x) = \left( f(x) - \frac{a_1 x}{1 - \lambda x} \right) \frac{1 - \lambda x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - \lambda a_n) x^n$ ,  $x \neq 0$ . По методу Пуассона ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - \lambda a_n)$  суммируется, и его сумма равна

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \phi(x) = \left( s - \frac{a_1}{1 - \lambda} \right) (1 - \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - \lambda a_n).$$

Отсюда находим  $s = \frac{a_1}{1 - \lambda} + \frac{1}{1 - \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - \lambda a_n)$ .

Следовательно, данный ряд суммируется методом  $(\Delta_\lambda)$  и его обобщенная сумма равна  $s$ .

В заключение заметим, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ , то из (1) при

$b_n = a_n \frac{n+1}{n}$  вытекает формула  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ . Полагая в ней

$a_n = \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ , получим для постоянной Эйлера равенство

$$c = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+2} - n \ln \left( 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right) \right).$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сорокин Г.А. О некоторых преобразованиях рядов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1984. № 11. С. 35 – 41.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.; Л., 1949. Т. III.
3. Ланчош К. Практические методы прикладного анализа. М., 1961.

УДК 517.51

**В. Г. Тимофеев**

### НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОНЕЧНОСТИ КОНСТАНТЫ В ОДНОМ МНОГОМЕРНОМ НЕРАВЕНСТВЕ КОЛМОГОРОВА

Пусть  $U_2 = \{u : u \in L_2(R^m), \Delta^n u \in L_2(R^m)\}$ ,  $m \geq 1$ ,  $L_2 = L_2(R^m)$  – пространство измеримых на  $R^m$  функций с нормой  $\|u\|_2 = \|u\|_{L_2} = \sqrt{\int_{R^m} |u(x)|^2 dx}$ ;  $C = C(R^m)$  – пространство непрерывных ограниченных на  $R^m$  функций с нормой  $\|u\|_C = \sup \{|u(x)| : x \in R^m\}$ ;  $S = S(R^m)$  – пространство бесконечно дифференцируемых функций, убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  вместе со всеми производными быстрее любой степени  $|x|^{-1}$ . Оператор Лапласа  $\Delta^n u$ ,  $n \geq 1$ , понимается в обобщенном смысле, а именно: относительно пары функций  $u \in L_2$ ,  $v \in L_2$  считаем, что  $u \in U_2$  и  $v = \Delta^n u$ , если для любой функции  $\varphi \in S$  выполняется равенство

$$\int_{R^m} v \varphi dx = \int_{R^m} u \Delta^n \varphi dx.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор следующего вида:

$$\Phi_k u = \sum_{|\alpha|=|\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m|=k} C_\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad (1)$$

где  $C_\alpha$  – постоянные коэффициенты.

Этот оператор порождается однородным полиномом

$$p_k(t) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m}. \quad (2)$$

Считаем при  $k=0$   $\Phi_0 u = u$ .

Выпишем условия на  $n$  и  $m$  и оператор (1), при выполнении которых для любой функции  $u \in U_2$  функция  $\Phi_k u$  принадлежит  $C(R^m)$  и при любых  $A, B$  конечна величина [1]

$$\omega(A, B) = \sup \left\{ \|\Phi_k u\|_C : u \in U_2, \|u\|_2 \leq A, \|\Delta^n u\|_2 \leq B \right\}. \quad (3)$$

Без труда проверяется, что [2]

$$\omega(A, B) = KA^\alpha B^\beta, \quad (4)$$

где  $\alpha$  выражается через  $n, k$ , а  $\beta = 1 - \alpha$ .

Следовательно, величина (3) конечна в том и только том случае, если функции класса  $U_2$  удовлетворяют неравенству [3]

$$\|\Phi_k u\|_C \leq K \|u\|_2^\alpha \|\Delta^n u\|_2^\beta \quad (5)$$

с конечной константой  $K$ .

ТЕОРЕМА. Для того чтобы имело место вложение  $\Phi_k U_2 \subset C$  и была конечна константа  $K$  в (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$k < 2n - \frac{m}{2}. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть  $u \in L_2$  и  $\hat{u}$  – преобразование Фурье функции  $u$  в смысле  $L_2$  или, то же самое, в смысле теории обобщенных функций. По теореме Планшереля  $\hat{u} \in L_2$  и  $\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$ . Если  $u \in U_2$ , то  $\hat{\Delta}^n u = (-1)^n |t|^{2n} \hat{u}$  и  $\||t|^{2n} \hat{u}\|_2 = \|\Delta^n u\|_2$ . Для  $u \in U_2$  имеем по (2)

$$p_k(t) \hat{u}(t) = \frac{p_k(t)}{(1+|t|^{4n})^{1/2}} (1+|t|^{4n})^{1/2} \hat{u}(t). \quad (7)$$

Если функция

$$\varphi(t) = \frac{p_k(t)}{(1+|t|^{4n})^{1/2}} \quad (8)$$

принадлежит  $L_2$ , то из (7) и (8) следует  $p_k \hat{u} \in L_1$  и имеет место неравенство

$$\|p_k \hat{u}\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \left( \|\hat{u}\|_2^2 + \||t|^{2n} \hat{u}\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что  $\Phi_k u \in C$ ; конечна величина (4) и константа  $K$  в (5).

Покажем, что если функция  $\varphi$  не принадлежит  $L_2$ , то константа  $K$  в (5) не будет конечной.

Обозначим через  $u_\rho$  функцию, у которой

$$\hat{u}_\rho(t) = \begin{cases} C_\rho \frac{\overline{p_k(t)}}{1+|t|^{4n}}, & |t| \leq \rho, \\ 0, & |t| > \rho \end{cases}$$

и константа  $C_\rho$  выбирается из условия, что норма функции

$$\hat{u}_\rho(t)(1+|t|^{4n})^{1/2} \text{ в } L_2 \text{ равна 1, т.е. } C_\rho^2 = \left( \int_{\mathbb{W}_\rho} \frac{|p_k(t)|^2}{1+|t|^{4n}} dt \right)^{-1}, \text{ где } \mathbb{W}_\rho - \text{шар}$$

радиуса  $\rho > 0$  с центром в точке 0. При таком выборе  $C_\rho$  имеем  $\|u_\rho\|_2 \leq 1$ ,  $\|\Delta^n u_\rho\|_2 < \infty$ . Однако

$$(\Phi_k u_\rho)(0) = C_\rho \int_{\mathbb{W}_\rho} \frac{|p_k(t)|^2}{1+|t|^{4n}} dt = \left( \int_{\mathbb{W}_\rho} \frac{|p_k(t)|^2}{1+|t|^{4n}} dt \right)^{1/2}.$$

По предположению  $\varphi \notin L_2$ , тогда при  $\rho \rightarrow \infty$  последняя величина стремится к  $\infty$ . Следовательно, константа  $K$  в (5) не может быть конечной.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что принадлежность функции  $\varphi$  пространству  $L_2$  равносильна выполнению условия (6).

Действительно, поскольку  $p_k(t) = |t|^k p_k\left(\frac{t}{|t|}\right)$ , то

$$\int_{R^m} \frac{|p_k(t)|^2}{1+|t|^{4n}} dt = \int_{S^{m-1}} |p_k(s)|^2 ds \int_0^\infty \frac{\rho^{2k+m-1}}{1+\rho^{4n}} d\rho, \quad (9)$$

где  $S^{m-1}$  – единичная сфера в  $R^m$ . Последний интеграл в (9) конечен в том и только том случае, если  $4n > 2k + m$ . Теорема доказана.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимофеев В.Г. Неравенства типа Колмогорова с итерированным оператором Лапласа // Теория функций и приближений. Интерполирование по Лагранжу: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1984. С. 73 – 78.
2. Тимофеев В.Г. Наилучшее приближение в равномерной и  $L_2$  метриках оператора дифференцирования на некоторых классах функций многих переменных. Саратов, 1985. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 11.04.1985, № 2451-85.
3. Тимофеев В.Г. Об одном экстремальном неравенстве типа Ландау с итерированными операторами Лапласа в  $L_2(R^m)$  // Теория функций и приближений: Тр. 2-й Сарат. зимней школы: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. Ч.3. С. 114 – 117.

Н. Ю. Трошина

**ПРИНЦИП МАКСИМУМА  
ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ  
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
СО СВЯЗАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Воспользуемся теорией Дубовицкого-Милютина [1] для вывода принципа максимума следующей задачи:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (1)$$

$$Px(0) + Qx(T) = a, \quad (2)$$

$$I(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} [ \langle Mx(t), x(t) \rangle + \langle Du(t), u(t) \rangle ] \rightarrow \min. \quad (3)$$

Здесь  $A, M$  – матрицы размерности  $n \times n$ ,  $B, D$  – матрицы размерности  $n \times m, m \times m$  соответственно,  $P, Q$  –  $r \times n$  матрицы,  $a$  –  $r$ -вектор,  $x = \{x(0), \dots, x(T)\}$  – дискретная траектория,  $u = \{u(0), \dots, u(T-1)\}$  – дискретное управление,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение векторов.

Пусть  $M, D$  – симметричные матрицы, причем  $D$  – неособенная, и пусть решение задачи (1) – (3) (оптимальная пара  $(x^*, u^*)$ ) существует. Будем предполагать, что  $\text{ранг}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$ ,  $\text{ранг}[P, Q] = r$ ,  $n \leq Tm$ ,  $r \leq 2n$ . В этом случае система (1) управляема и краевая задача (1) – (2) разрешима при любом  $a$ .

Обозначим:  $K_0$  – конус запрещенных вариаций функционала (3),  $K_0^*$  – сопряженный конус к  $K_0$ ,  $K_1$  – конус касательных направлений для ограничений (1), (2),  $K_1^*$  – сопряженный для  $K_1$ .

Нетрудно проверить, что выполняются все условия теоремы Дубовицкого-Милютина о пересечении выпуклых конусов. Следовательно, существуют не равные одновременно нулю линейные функционалы  $f_0, f_1$ , заданные на множестве пар  $(x, u)$  и принадлежащие конусам  $K_0^*, K_1^*$  соответственно, для которых имеет место уравнение Эйлера

$$f_0 + f_1 = 0. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. Функционал  $f_0$ , принадлежащий конусу  $K_0^*$ , имеет вид

$$f_0(x, u) = -\lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} [\langle Mx^*(t), x(t) \rangle + \langle Du^*(t), u(t) \rangle], \quad \text{где } \lambda_0 \geq 0.$$

Лемма является следствием теоремы 4.1 в [2].

ЛЕММА 2. Пусть  $f_1 \in K_1^*$ . Если пара  $(x, u)$  удовлетворяет дискретной системе (1), то существует вектор  $\lambda \in E^r$  такой, что имеет место равенство

$$f_1(x, u) = \langle \lambda, Px(0) + Qx(T) \rangle.$$

**Доказательство.** Рассмотрим семейство краевых задач

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad t=0, 1, \dots, T-1, \quad (5)$$

$$Px(0) + Qx(T) = a_i, \quad i=1, \dots, r, \quad (6)$$

где  $a_i$  –  $r$ -вектор, у которого  $i$ -я координата равна единице, а остальные равны нулю. Пусть  $(x_i, u_i)$  – решение задачи (5) – (6), и пусть пара  $(x, u)$

удовлетворяет системе (1). Рассмотрим пару  $(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (x_i, u_i) - (x, u)$ ,

где  $\alpha_i = [Px(0) + Qx(T)]_i$  –  $i$ -я координата вектора  $Px(0) + Qx(T)$ . Покажем, что  $(\bar{x}, \bar{u})$  принадлежит конусу  $K_1$ , который состоит из пар, удовлетворяющих системе (1) и условию

$$Px(0) + Qx(T) = 0, \quad (7)$$

что следует из определения конуса касательных направлений и линейности ограничений (1) – (2). Очевидно,

$$P\bar{x}(0) + Q\bar{x}(T) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (Px_i(0) + Qx_i(T)) - (Px(0) + Qx(T)) = 0.$$

Это равенство означает, что  $(\bar{x}, \bar{u})$  удовлетворяет условию (7). Легко также проверить, что  $(\bar{x}, \bar{u})$  удовлетворяет системе (1). Таким образом,  $(\bar{x}, \bar{u}) \in K_1$  и, следовательно,  $f_1(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ , то есть

$$f_1(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_1(x_i, u_i) - f_1(x, u) = 0. \quad (8)$$

Обозначим:  $\lambda = (f_1(x_1, u_1), \dots, f_1(x_r, u_r))^T$ . Тогда из (8) для пары  $(x, u)$ , удовлетворяющей (1), получим

$$f_1(x, u) = \langle \lambda, Px(0) + Qx(T) \rangle.$$

Лемма доказана.

**ТЕОРЕМА** (принцип максимума). Если  $(x^*, u^*)$  – решение задачи (1) – (3), то существуют векторы  $\lambda \in E^r$ ,  $\psi(t) \in E^n$  ( $t = 0, \dots, T-1$ ) такие, что:

1) выполняется сопряженное уравнение

$$\psi(t) = A^T \psi(t+1) - Mx(t), \quad t=0, \dots, T-1; \quad (9)$$

2) выполняются условия трансверсальности

$$\psi(0) = -P^T \lambda, \quad (10)$$

$$\psi(T) = Q^T \lambda; \quad (11)$$

3) оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = D^{-1} B^T \psi(t+1), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

**Доказательство.** Возьмем пару  $(x, u)$ , удовлетворяющую системе (1). Используя леммы 1,2, запишем уравнение Эйлера

$$-\lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} [ \langle Mx^*(t), x(t) \rangle + \langle Du^*(t), u(t) \rangle ] + \langle \lambda, Px(0) + Qx(T) \rangle = 0. \quad (12)$$

Здесь  $\lambda_0 \neq 0$ , так как в противном случае  $f_0 = 0, f_1 = 0$ , что противоречит теореме Дубовицкого-Милютина, то есть можно считать, что  $\lambda_0 = 1$ .

Возьмем последовательность  $n$ -векторов  $\psi = \{\psi(0), \dots, \psi(T-1)\}$ . Умножим (1) скалярно на  $\psi(t+1)$ , просуммируем по  $t$  от 0 до  $T-1$  и сложим с (12). Получим

$$\begin{aligned} & - \sum_{t=0}^{T-1} [ \langle Mx^*(t), x(t) \rangle + \langle Du^*(t), u(t) \rangle ] + \langle \lambda, Px(0) + Qx(T) \rangle + \\ & + \sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t+1), -x(t+1) + Ax(t) + Bu(t) \rangle = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & - \sum_{t=0}^{T-1} [ \langle Mx^*(t), x(t) \rangle + \langle Du^*(t), u(t) \rangle ] + \langle \lambda, Px(0) + Qx(T) \rangle - \\ & - \sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t), x(t) \rangle + \langle \psi(0), x(0) \rangle - \langle \psi(T), x(T) \rangle + \\ & + \sum_{t=0}^{T-1} \langle A^T \psi(t+1), x(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} \langle B^T \psi(t+1), u(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Выберем  $\psi(t)$  как решение задачи Коши:

$$\psi(t) = A^T \psi(t+1) - Mx^*(t), \quad t = 0, \dots, T-1$$

$$\psi(T) = Q^T \lambda,$$

Это будет означать, что выполняются условия (9), (11). При этом вместо (13) будем иметь

$$\begin{aligned} & - \sum_{t=0}^{T-1} [ \langle Du^*(t), u(t) \rangle ] + \langle P^T \lambda, x(0) \rangle + \langle \psi(0), x(0) \rangle + \\ & + \sum_{t=0}^{T-1} \langle B^T \psi(t+1), u(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На управление не наложено никаких ограничений, поэтому можно взять  $u(t) \equiv 0$ . Тогда  $\langle P^T \lambda, x(0) \rangle + \langle \psi(0), x(0) \rangle = 0$ , и из-за произвольности  $x(0)$  отсюда будет следовать условие (10). Кроме того, получим

$$- \sum_{t=0}^{T-1} [ \langle Du^*(t), u(t) \rangle ] + \sum_{t=0}^{T-1} \langle B^T \psi(t+1), u(t) \rangle = 0. \quad (15)$$

Так как в (15) управление  $u=\{u(0), \dots, u(T-1)\}$  можно выбирать произвольно, то будем иметь

$$\langle B^T \psi(t+1) - Du^*(t), u(t) \rangle = 0, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

откуда  $B^T \psi(t+1) - Du^*(t) = 0$  ( $t = 0, \dots, T-1$ ), то есть выполняется условие 3). Теорема доказана.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395 – 453.

2. Трошина Н.Ю. Принцип максимума и задача синтеза для линейных дискретных систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1997. 144 с.

УДК 517.977/977.58

Е. А. Трушкова

## ФУНКЦИИ, СИНТЕЗИРУЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad (1)$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in W_2^1[0;1]$ ,  $u(t) \in L_2[0;1]$ ,  $b = (0, 0, \dots, 1)^T \in R^n$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -g_n & -g_{n-1} & \dots & -g_2 & -g_1 \end{pmatrix} \text{ – матрица } n \times n, \text{ где } g_i \in R, i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим также функционалы качества следующего вида:

$$J = \int_0^1 ((x, Mx) + u^2) dt, \quad J_0 = \int_0^\alpha ((x, Mx) + u^2) dt, \quad J_1 = \int_\alpha^1 ((x, Mx) + u^2) dt,$$

где  $M$  – неотрицательно определенная матрица  $n \times n$ ,  $\alpha \in (0; 1)$ .

Пусть  $Z$  – множество задач оптимального управления (1),  $t \in [0; 1]$ ,  $J \rightarrow \min$ , с различными условиями, связывающими  $x(0)$ ,  $x(\alpha)$  и  $x(1)$ ;  $Z_0$  – множество задач оптимального управления (1),  $t \in [0; \alpha]$ ,  $J_0 \rightarrow \min$ , с различными условиями, связывающими  $x(0)$  и  $x(\alpha)$ ;  $Z_1$  – множество задач оптимального управления (1),  $t \in [\alpha; 1]$ ,  $J_1 \rightarrow \min$ , с различными условиями, связывающими  $x(\alpha)$  и  $x(1)$ .

ТЕОРЕМА 1. Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ ,  $t \in [0;1]$  – решение задачи  $z \in Z$  с условиями  $\gamma_i(x(0), x(\alpha), x(1)) = 0$ ,  $1 \leq i \leq l$ ,  $l$  – целое. Тогда  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ ,  $t \in [0; \alpha]$  – решение задачи  $z_0 \in Z_0$  с условиями  $x(0) = \tilde{x}(0)$ ,  $x(\alpha) = \tilde{x}(\alpha)$ , а  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ ,  $t \in [\alpha; 1]$  – решение задачи  $z_1 \in Z_1$  с условиями  $x(\alpha) = \tilde{x}(\alpha)$ ,  $x(1) = \tilde{x}(1)$ ;

2. Пусть  $(\tilde{x}_0(t), \tilde{u}_0(t))$ ,  $t \in [0; \alpha]$  – решение задачи  $z_0 \in Z_0$  с условиями  $\gamma_{0i}(x(0), x(\alpha)) = 0$ ,  $1 \leq i \leq l_0$ ,  $l_0$  – целое, а  $(\tilde{x}_1(t), \tilde{u}_1(t))$ ,  $t \in [\alpha; 1]$  – решение задачи  $z_1 \in Z_1$  с условиями  $\gamma_{1i}(x(\alpha), x(1)) = 0$ ,  $1 \leq i \leq l_1$ ,  $l_1$  – целое, и, кроме того,  $\tilde{x}_0(\alpha) = \tilde{x}_1(\alpha)$ . Тогда  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ ,  $t \in [0; 1]$ , где  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0(t)$ ,  $t \in [0; \alpha]$ ,  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_1(t)$ ,  $t \in (\alpha; 1]$ ,  $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0(t)$ ,  $t \in [0; \alpha]$ ,  $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_1(t)$ ,  $t \in (\alpha; 1]$ , – решение задачи  $z \in Z$  с условиями  $x(0) = \tilde{x}_0(0)$ ,  $x(\alpha) = \tilde{x}_0(\alpha)$ ,  $x(1) = \tilde{x}_1(1)$ .

Согласно теореме 1 получаем, что решения задач  $Z$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям принципа максимума Л.С. Понtryгина с условием непрерывности  $x(t)$  в точке  $t = \alpha$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \frac{1}{2}bb^T\psi, & \psi = -A^T\psi + 2Mx, \quad t \in [0; \alpha] \cup (\alpha; 1], \\ x(\alpha_-) = x(\alpha_+). \end{cases} \quad (2)$$

Компонента  $x(t)$  решения системы (2) является оптимальной траекторией одной из рассматриваемых нами задач  $Z$ . Пусть  $\Phi(t)$  – первые  $n$  строк фундаментальной матрицы решений системы (2). Обозначим через  $\Phi_{11}(t)$  ( $\Phi_{12}(t)$ ) первые (последние)  $n$  столбцов матрицы  $\Phi(t)$ .

Тогда множество оптимальных траекторий задач  $Z$  запишется в виде

$$\{x(t) \in W_2^1[0;1] \mid \exists C \in R^{3n} : x(t) = \Phi_0(t)C, t \in [0; \alpha], x(t) = \Phi_1(t)C, t \in (\alpha; 1]\},$$

где  $\Phi_0(t) = (\Phi_{11}(t) \ \Phi_{12}(t) \ 0)$ ,  $\Phi_1(t) = (\Phi_{12}(t)B \ \Phi_{12}(t) \ \Phi_{11}(t) - \Phi_{12}(t)B)$  – матрицы  $n \times 3n$ ,  $B = \Phi_{12}^{-1}(\alpha)\Phi_{11}(\alpha)$ .

Условие  $C = Dp + d$ , где  $D$  – постоянная матрица  $3n \times k$ ,  $rank\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = k$ ,  $rank\begin{pmatrix} D_3 \\ BD_1 + D_2 - BD_3 \end{pmatrix} = k$ ,  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – матрицы  $n \times k$ ,

состоящие из первых, вторых и третьих  $n$  строк матрицы  $D$  соответственно,  $d$  – постоянный  $3n$ -вектор,  $p$  есть вектор-параметр размерности  $k$ ,  $k = n + 1, n + 2, \dots, 2n$ , выделяет некоторое подмножество оптимальных траекторий, которое обозначим через  $M_{k, D, d}^\alpha$ .

В настоящей статье с использованием результатов работ [1, 2] построены функции  $u(t, y, x_1^{(k)})$ , где  $y = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^{(n)}, x_1^{(n+1)}, \dots, x_1^{(k-1)})^T$ , синтезирующие семейства  $M_{k,D,d}^\alpha$ .

Семейство  $M_{k,D,d}^\alpha$  при  $t \in [0; \alpha]$  совпадает с семейством  $M_{k, \tilde{D}_0, \tilde{d}_0}$ , где  $\tilde{D}_0 = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{d}_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ , а при  $t \in [\alpha; 1]$  совпадает с семейством  $M_{k, \tilde{D}_1, \tilde{d}_1}$ , где  $\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} D_3 \\ BD_1 + D_2 - BD_3 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{d}_1 = \begin{pmatrix} d_3 \\ Bd_1 + d_2 - Bd_3 \end{pmatrix}$ ,  $d_1, d_2, d_3$  – первые, вторые и трети  $n$  компонент вектора  $d$  соответственно. Известны функции  $u(t, y, x_1^{(k)})$ , синтезирующие семейства  $M_{k, \tilde{D}_0, \tilde{d}_0}$ ,  $M_{k, \tilde{D}_1, \tilde{d}_1}$  [1].

Обозначим через  $N_k(D_i)$  множество нулей функции  $\det \left( \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ Q^{k-n} \Phi_1^{(n)}(t) \end{pmatrix} D_i \right)$ , где  $i = 0, 1$ ,  $Q^{k-n}$  – матрица размера  $(k-n) \times n$ , первые  $(k-n)$  столбцов которой – единичная матрица, а остальные столбцы нулевые. При каждом  $n < k < 2n$  множества  $N_k(D_i)$ ,  $i = 0, 1$ , на отрезке  $[0; 1]$  конечны, а при  $k = 2n$  пусты [1].

Справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 2.** Если  $x(t)$  – решение системы

$$\dot{x} = Ax + bu(t, y, x_1^{(k)}), \quad (3)$$

где  $y = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^{(n)}, \dots, x_1^{(k-1)})^T$ ,  $u(t, y, x_1^{(k)})$  определена по формуле

$$u(t, y, x_1^{(k)}) = \begin{cases} g(x_1, \dots, x_n, x_1^{(n)})^T + x_1^{(k)} - r\Phi^{(k)}(t)G(t, y, \tilde{D}_0, \tilde{d}_0) & t \in [0; \alpha], \\ g(x_1, \dots, x_n, x_1^{(n)})^T + x_1^{(k)} - r\Phi^{(k)}(t)G(t, y, \tilde{D}_1, \tilde{d}_1) & t \in (\alpha; 1], \end{cases} \quad (4)$$

$$g = (g_n, g_{n-1}, \dots, g_1, 1) \in R^{n+1}, \quad r = (1, 0, \dots, 0) \in R^n,$$

$$G(t, y, \tilde{D}_i, \tilde{d}_i) = \tilde{D}_i \left( \begin{pmatrix} \Phi(t) \\ Q^{k-n} \Phi^{(n)}(t) \end{pmatrix} \tilde{D}_i \right)^{-1} \left( y - \begin{pmatrix} \Phi(t) \\ Q^{k-n} \Phi^{(n)}(t) \end{pmatrix} \tilde{d}_i \right) + \tilde{d}_i, \quad i = 0, 1,$$

$x^{(n)}(t)$  непрерывна в точках множеств  $N_k(\tilde{D}_0) \cap [0; \alpha]$ ,  $N_k(\tilde{D}_1) \cap [\alpha; 1]$ , то  $x(t) \in M_{k,D,d}^\alpha$ . Обратно, если  $x(t) \in M_{k,D,d}^\alpha$ , то  $x(t)$  – решение системы (3), где  $u(t, y, x_1^{(k)})$  определена по формуле (4), и  $x^{(n)}(t)$  непрерывна в точках множеств  $N_k(\tilde{D}_0) \cap [0; \alpha]$ ,  $N_k(\tilde{D}_1) \cap [\alpha; 1]$ .

**Доказательство.** Рассмотрим систему (3) на отрезке  $t \in [0; \alpha]$ . На этом отрезке  $x(t)$  удовлетворяет системе, где

$u(t, y, x_1^{(k)}) = g(x_1, \dots, x_n, x_1^{(n)})^T + x_1^{(k)} - r\Phi^{(k)}(t)G(t, y, \tilde{D}_0, \tilde{d}_0)$ ,  
и  $x^{(n)}(t)$  непрерывна на множестве  $N_k(\tilde{D}_0) \cap [0; \alpha]$ . Следовательно,  
 $x(t) \in M_{k, \tilde{D}_0, \tilde{d}_0}$  [1].

Рассмотрим систему (3) на отрезке  $t \in [\alpha; 1]$ . На этом отрезке  $x(t)$  удовлетворяет системе, где  $u(t, y, x_1^{(k)}) = g(x_1, \dots, x_n, x_1^{(n)})^T + x_1^{(k)} - r\Phi^{(k)}(t)G(t, y, \tilde{D}_1, \tilde{d}_1)$ , и  $x^{(n)}(t)$  непрерывна на множестве  $N_k(\tilde{D}_1) \cap [\alpha; 1]$ . Следовательно,  $x(t) \in M_{k, \tilde{D}_1, \tilde{d}_1}$  [1].

В силу изложенного выше, получаем, что  $x(t) \in M_{k, D, d}^\alpha$ ,  $t \in [0; 1]$ .

Обратное утверждение теоремы очевидно.

Функцию  $u(t, y, x_1^{(k)})$ , определенную равенством (4), назовем функцией, синтезирующей семейство  $M_{k, D, d}^\alpha$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Огнева Е.А. Один класс синтезирующих функций линейных систем с квадратичным критерием качества // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 89 – 92.

2. Хромов А.П. О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества // Теория функций и приближений: Тр. 4-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1990. Ч. 1. С. 106 – 112.

УДК 517.51

В. И. Филиппов

#### СИСТЕМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, В ПРОСТРАНСТВАХ $E_\varphi$

В 1972 году П.Л. Ульянов [1] рассмотрел систему Фабера-Шаудера в классах  $\varphi(L)$  и сформулировал задачу о возможности представления элементов классов  $\varphi(L)$  по произвольным функциональным системам. В данной статье рассматривается эта задача П.Л. Ульянова [1, 2] для пространств  $E_\varphi$ , при этом исследуются функциональные системы более обширные, чем системы вида

$$\{\psi_{n,k}(t)\} = \left\{ \psi(2^n t - k) \right\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad (1)$$

где  $\psi \in L^\infty(0, 1)$ .

Системы (1) были исследованы в пространствах  $E_\varphi$  в работе [3]. Заметим, что система Фабера-Шаудера, без первых двух элементов, является частным случаем системы (1).

В работах [4, 5] представлены результаты для функциональных систем в пространствах  $L^p$ ,  $0 < p < \infty$ , но методы исследований не переносятся на пространства  $E_\varphi$ .

Приведём понятия и утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Для обозначения меры Лебега множества  $E$  будем применять обозначения  $|E|$  и  $\text{mes}(E)$ . А  $\chi_E(t)$  – характеристическая функция множества  $E$ .

Так же как у А.А. Талаляяна [6] дадим

Определение 1. Система элементов  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$   $F$ -пространства  $E(E, \|\cdot\|)$  (определение  $F$ -пространства [7, с. 81]) называется системой представления (с. п.) в пространстве  $E$ , если для произвольного элемента  $f \in E$  существует ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$  такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| = 0,$$

где  $\{c_k\}$  – последовательность действительных или комплексных чисел.

Пусть  $\Phi$  – совокупность чётных, конечных, неубывающих на полу-прямой  $[0, \infty]$  функций  $\varphi$  таких, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ . Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для функций  $\varphi$  выполнены условия

$$\varphi(x) \in \Phi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) > 0 \quad (x > 0), \quad \varphi(x) \in C[0, \infty). \quad (2)$$

Через  $\varphi(L)$  будем обозначать множество всех тех измеримых функций  $f(t)$  на  $T$ , где (см. [1]; [8, с. 1 – 5])

$$T = (a, b)^n = \underbrace{(a, b) \times (a, b) \times \dots \times (a, b)}_{n \text{ раз}}, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty, \quad n \in N,$$

для которых

$$\int_T \varphi(f(t)) dt < \infty, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Если  $f$  и  $g$  принадлежат классу  $\varphi(L)$ , то величину  $\rho_\varphi(f, g) = \int_T \varphi(f - g) dt$  условно назовём  $\varphi$  – расстоянием.

Класс  $\varphi(L)$  в общем случае не является линейным. Если класс  $\varphi(L)$  пополнить по линейности, то получим множество  $\varphi^*(L)$ , в котором можно ввести квазинорму ( $\varphi$  – норму) элементов с помощью функционала

$$\|f\|_{\phi} = \inf\{u > 0 : \int_T \phi\left(\frac{f(t)}{u}\right) dt < u\}, \quad f \in \phi^*(L), \quad (3)$$

так что  $\phi^*(L)$  станет  $F$ -пространством. В этом случае из сходимости по  $\phi$ -норме следует сходимость по  $\phi$ -расстоянию для элементов из класса  $\phi(L)$  [8, с. 1–5].

Через  $E_\phi$  обозначим замыкание в  $\phi^*(L)$  множества ограниченных ступенчатых функций. Пространство  $E_\phi$  является сепарабельным  $F$ -пространством [8, с. 36].

Будем говорить, что функция  $\phi$  удовлетворяет  $\Delta_2$  – условию, если  $\phi(2t) = O\{\phi(t)\}$ ,  $t \rightarrow \infty$ . В этом случае, если выполнено  $\Delta_2$  – условие, то  $\phi(L) = \phi^*(L) = E_\phi$  и сходимость по  $\phi$ -норме эквивалентна сходимости по  $\phi$ -расстоянию, в противном случае, если  $\Delta_2$  – условие не выполнено, то  $E_\phi \subset \phi(L) \subset \phi^*(L)$  [8, с. 53] и из сходимости по  $\phi$ -норме следует сходимость по  $\phi$ -расстоянию.

Рассмотрим функциональные системы  $\{f_k(t)\}_{k=1}^\infty \subset L^\infty(T)$ , удовлетворяющие условиям:

$$f_k(t) > 0, \quad t \in T, \quad M_k = \text{vrai sup } f_k(t) > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Пусть  $(\text{supp } f_k)_i$  – это проекция носителя  $\text{supp } f_k$  на ось  $OX_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть

$$\begin{aligned} B_k^i &= \text{vrai sup}(\text{supp } f_k)_i < \infty, \quad A_k^i = \text{vrai inf}(\text{supp } f_k)_i > -\infty, \quad k \in N, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \alpha_k^i &= B_k^i - A_k^i, \quad \beta_k^i = A_k^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha_k = (\alpha_k^1, \dots, \alpha_k^n), \quad \beta_k = (\beta_k^1, \dots, \beta_k^n), \\ P_k &= (A_k^1, B_k^1) \times \dots \times (A_k^n, B_k^n), \quad \text{diam}(P_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\text{diam}(P_k)$  это диаметр множества [9, с. 30]  $P_k$ . Обозначим

$$W_k(\lambda, \tau) = \text{mes}\{t \in T : \lambda - \tau \leq \frac{\lambda f_k(\alpha_k t + \beta_k)}{M_k} \leq \lambda\}, \quad (6)$$

где  $\lambda \geq \tau > 0$ ,  $k \in N$ ,  $(\alpha_k t + \beta_k) = (\alpha_k^1 t_1 + \beta_k^1, \dots, \alpha_k^n t_n + \beta_k^n)$ .

Пусть

$$W(\lambda, \tau) = \inf_{k \in N} W_k(\lambda, \tau) \quad \lambda \geq \tau > 0. \quad (7)$$

Очевидно, что  $W(\lambda_1, \tau) \geq W(\lambda_2, \tau)$  при  $0 < \tau \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть система  $\{f_k(t)\}_{k=1}^\infty \subset L^\infty(T)$  удовлетворяет условиям (4), (5) и функция  $W(\lambda, \tau) > 0$  при всех  $\lambda \geq \tau > 0$ . Тогда для того чтобы система  $\{f_k\}$  была системой представления в  $E_\phi$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $N \in N$  выполнялось условие

$$mes\{t : T \setminus \bigcup_{k=N}^{\infty} P_k\} = 0. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть система  $\{f_k\} \subset L^p(0, 1)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , удовлетворяет условиям:

$$|P_n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad |P_n| \neq 0;$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad mes\{(0, 1) \setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} P_n\} = 0;$$

$$f_n(t) \geq 0, \quad \text{vrai sup } f_n = M_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, если

$$W(\lambda, \tau) > 0 \quad \forall \lambda \geq \tau > 0,$$

то

$$\sup_n \sigma_n = \sigma < 1, \quad \sigma_n = \inf\left\{\frac{1}{|P_n|^{1/p}} \left\|\chi_{P_n} - \lambda f_n\right\|_p : \lambda \in R\right\}.$$

Теорема 2 устанавливает связь между теоремой 2 в работе [4] и теоремой 1 данной статьи.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ульянов П. Л. Представление функций рядами и классы  $\Phi(L)$  // Успехи математических наук. 1972. Т. 27, № 27. С. 3 – 52.
2. Ульянов П. Л. Замечания о сходимости в среднем // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 6. С. 806 – 816.
3. Филиппов В. И. Системы функций, получающиеся сжатиями и сдвигами одной функции, в пространствах  $E_\phi$  с  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t} = 0$  // Изв. РАН. Сер. Математика. 2001. Т. 65, № 2. С. 187 – 200.
4. Filippov V. I. On the completeness and other properties of some function systems in  $L_p$ ,  $0 < p < \infty$  // J. of appr. theory. 1998. № 94. P. 42 – 53.
5. Filippov V. I., Oswald P. Representation in  $L^p$  by series of translates and dilates of one function // J. of appr. theory. 1995. Vol. 82, № 1. P. 15 – 29.
6. Тагалян А. А. Об аппроксимационных свойствах некоторых неполных систем // Мат. сборник. 1981. Т. 115 (157), № 4. С. 499 – 541.
7. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
8. Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces // Lecture Notes in Math. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1983. № 1034.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА МНОЖЕСТВЕ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Под магической матрицей в общем случае понимается произвольная числовая квадратная матрица, у которой сумма элементов каждой строки, каждого столбца и по каждой диагонали одна и та же. Эта сумма называется магической суммой данной магической матрицы.

В статье рассматриваются магические матрицы, элементами которых являются целые числа. Показано, что на множестве таких магических матриц определяется структура кольца и конечномерного векторного пространства. Эти результаты могут способствовать построению общей алгебраической теории магических матриц, которая до настоящего времени отсутствует [1].

**1.** Пусть  $M(n;Z)$  – множество всевозможных целочисленных магических  $(n \times n)$ -матриц с магическими суммами  $S \in Z$ . Множество  $M(n;Z)$ , очевидно, образует аддитивную абелеву группу.

На множестве  $M(n;Z)$  определяется умножение по правилу

$$\forall (A_1, A_2 \in M(n;Z)) (A_1 A_2 = S_2 A_1 \in M(n;Z)), \quad (1)$$

где  $S_2 \in Z$  – магическая сумма матрицы  $A_2$ . Умножение (1) ассоциативно:  $A_1(A_2A_3) = A_1(S_3A_2) = S_3S_2A_1$ ,  $(A_1A_2)A_3 = S_3(A_1A_2) = S_3S_2A_1 \Rightarrow A_1(A_2A_3) = (A_1A_2)A_3$ . Следовательно,  $M(n;Z)$  с умножением (1) образует полугруппу, которая, очевидно, не является коммутативной и не допускает сокращений.

Сложение и умножение (1) на  $M(n;Z)$  связаны левой и правой дистрибутивностями:

$$A_1(A_2 + A_3) = (S_2 + S_3)A_1 = S_2A_1 + S_3A_1 = A_1A_2 + A_1A_3,$$

$$(A_2 + A_3)A_1 = S_1(A_2 + A_3) = S_1A_2 + S_1A_3 = A_2A_1 + A_3A_1.$$

Таким образом, множество  $M(n;Z)$  образует некоммутативное кольцо с делителями нуля. Если произвольному элементу кольца  $M(n;Z)$  поставить в соответствие его магическую сумму, то, таким образом, порождается эпиморфизм  $M(n;Z) \rightarrow Z$ .

Подмножество  $M(n;S) \subset M(n;Z)$  образует класс  $\overline{M}(n;S)$  матриц с магической суммой  $S \in Z$  и, таким образом, порождается фактор-кольцо  $\overline{M}(n;Z) \cong Z$ . Кроме того, подмножество  $M(n;S)$  в кольце  $M(n;Z)$  порождает двухсторонний идеал, содержащий матрицы с магической суммой кратной  $S$ . Поэтому, в принципе, в кольце  $M(n;Z)$  можно строить теорию сравнений по таким идеалам. Проще всего, однако, такую теорию строить по идеалу  $M(n;O)$ , так как его легче построить и в этом случае любой класс  $\overline{M}(n;S)$  по его представителю также строится гораздо легче.

2. Пусть  $P_n$  – множество  $(n \times n)$ -матриц перестановок. Определим отображение  $P_n \rightarrow R^3$  по правилу: всякой матрице из  $P_n$  поставим в соответствие вектор  $(1; d; d')$ , где  $d, d'$  – соответственно суммы элементов по главной и побочной диагоналям данной матрицы. Построение множества  $M(n; Z)$  реализует следующая

ТЕОРЕМА 1. Каждый класс матриц  $\bar{M}(n; S)$  из  $M(n; Z)$  строится с помощью целых решений уравнения:

$$x_1(1; d_1; d_1') + \dots + x_k(1; d_k; d_k') = (S, S, S), \quad (2)$$

где  $k$  зависит от  $n$ , причем при  $n = 2$  решения существуют только для четных  $S$ ; при  $n = 3$  – только для  $S$  кратных 3; при  $n > 3$  – решения существуют

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{при всех } S \in Z.$$

Рис. 1

Матрица из  $M(n; Z)$  называется простой, если ее нельзя представить в виде линейной комбинации магических матриц с меньшими (по модулю) магическими суммами. На рис. 1 (с точностью до автоморфизмов) показаны

простые матрицы при  $n = 3$ , которые могут быть двух типов: одна матрица типа 1 и 4 матрицы типа 2 (всего 5). При  $n = 4$  (рис. 2) простые матрицы существуют 4-х типов: 8 матриц типа 1 с магической суммой  $S = 1$ ; при  $S = 2$  имеется 8 матриц типа 2 и по две матрицы для типов 3; 4 (всего 20).

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 2

Приведенные системы простых матриц являются линейно зависимыми. Например, при  $n = 3$  ранг такой системы  $r(3) = 3$ ; при  $n = 4$ ,  $r(4) = 10$ . Дальнейшие оценки показывают, что при  $n \geq 4$  количество простых матриц в системе превосходит  $n^2$  и поэтому из нее всегда можно выделить базис из  $r(n) < n^2$  простых матриц. Следовательно, с учетом теоремы 1, можно считать, что  $M(n; Z)$  образует векторное пространство, в общем случае над полем  $Q$ , некоторой размерности  $r(n)$ . Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Множество  $M(n; Z)$  есть векторное пространство над полем  $Q$ , базис которого состоит из  $r(n)$  простых матриц и всякая матрица из  $M(n; Z)$  однозначно разлагается по этому базису.

Для примера на рис. 3 представлены разложения по базису для «классических» магических матриц (т.е. построенных из чисел  $1; 2; \dots; n^2$ ) размера  $n = 3$  и 4.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} &= 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \\
 + 9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &+ 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 3

В заключение отметим, что конкретное определение размерности  $r(n)$  векторного пространства  $M(n; \mathbb{Z})$  в общем случае представляет предмет отдельного комбинаторного исследования.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Постников М.М. Магические квадраты. М.: Наука, 1964.

УДК 517.984

**В. А. Халова**

#### О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ\*

В пространстве  $L_2[0,1]$  рассмотрим интегральный оператор вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x (x-t)f(t)dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} (1-x-t)f(t)dt + \sum_{k=1}^m (f, v_k)g_k(x), \quad (1)$$

где  $(f, v_k) = \int_0^1 f(t)v_k(t)dt$ ,  $v_k(t) \in C^2[0,1]$ ,  $g_k(x) \in C^2[0,1]$ , последовательности  $\{v_k(t)\}_1^m$ ,  $\{g_k(x)\}_1^m$  линейно независимые,  $g_k''(x)$  – функции ограниченной вариации,  $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$ ,  $x \in [0,1]$ .

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

Оператор (1) является одним из операторов, производная ядра которого имеет разрыв 1-го рода на линиях  $t = x$  и  $t = 1 - x$ . Впервые операторы подобного вида начал изучать А.П. Хромов [1]. В работе [2] изучался вопрос равносходимости спектральных разложений для оператора

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t)dt + \alpha \int_0^x A(x, t)f(t)dt.$$

Важным моментом в этих исследованиях является получение формулы для резольвенты и ее оценки. Данная статья является продолжением исследований А.П. Хромова по изучению подобных операторов.

Пусть [3]  $\Delta = \det \left\| \beta \delta_{kj} + (D^2 T g_k, v_j) \right\|_1^m \neq 0$ , где  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера,  $D = \frac{d}{dx}$ ,  $T = \alpha_1 E - \alpha_2 S$ ,  $E$  – единичный оператор,  $Sf(x) = f(1-x)$ . Обозначим  $L = \frac{1}{\beta} D^2 T$ ;

$$L_0 : Ly(x), \quad U_p(y) = \sum_{\tau=0}^{\sigma_p} [a_{\tau p} y^{(\tau)}(0) + b_{\tau p} y^{(\tau)}(1)] = 0, \quad p = 1, 2, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1; \\ L_1 : Ly(x), \quad V_p(y) = U_p(y) - (y, \varphi_p) = 0, \quad p = 1, 2.$$

Здесь  $V_p(y)$  условия из теоремы 2 из [3] после нормировки. Считаем, что условия регулярны по Биркгофу [4, с. 66 – 67].

Обозначим  $R_{0,\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ ,  $R_{1,\lambda} = (L_1 - \lambda E)^{-1}$  – резольвенты операторов  $L_0$  и  $L_1$  соответственно,  $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$  – резольвента Фредгольма оператора (1).

Рассмотрим задачу

$$z''(x) - \lambda \mathbf{D}z(x) = BF(x), \quad (2)$$

$$U_p(z) = \sum_{\tau=0}^{\sigma_p} [P_{\tau p} z^{(\tau)}(0) + Q_{\tau p} z^{(\tau)}(1)] = 0, \quad p = 1, 2, \quad (3)$$

где  $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ ,  $z_1(x) = z_2(1-x)$ ,  $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$ ,  $\sigma_1 = 0$ ,

$$\sigma_2 = 1, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$P_{\tau p} = \begin{pmatrix} a_{\tau p} + (-1)^\tau b_{\tau p} & a_{\tau p} - (-1)^\tau b_{\tau p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{\tau p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{\tau p} + (-1)^\tau a_{\tau p} & b_{\tau p} - (-1)^\tau a_{\tau p} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $V_1(x, \lambda)$ ,  $V_2(x, \lambda)$  – фундаментальная система решений однородного уравнения (2),

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{ij} = \mathbf{U}_i(V_j(x, \lambda)), \quad \mathbf{U}(f) = (\mathbf{U}_1(f), \mathbf{U}_2(f))^T.$$

ТЕОРЕМА 1. Если  $\lambda$  таково, что  $\Delta_0^{-1}(\lambda)$  существует, то краевая задача (2) – (3) разрешима и ее решение имеет вид

$$z(x, \lambda) = -(V_1(x, \lambda)V_2(x, \lambda))\Delta_0^{-1}(\lambda)\int_0^1 \mathbf{U}_x(g(x, t, \lambda))BF(t)dt + \int_0^1 g(x, t, \lambda)BF(t)dt, \quad (4)$$

где  $\int_0^1 g(x, t, \lambda)BF(t)dt$  – частное решение уравнения (3), а  $\mathbf{U}_x(\cdot)$  означает, что краевое условие  $\mathbf{U}$  применяется по переменной  $x$ . При этом  $R_{0,\lambda}$  существует и имеет место формула

$$R_{0,\lambda}f(x) = z_1(x, \lambda) + z_2(x, \lambda).$$

Обозначим  $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ ,  $y_1(x) = y_2(1-x)$ ,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) & 0 \\ 0 & \Phi_2(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi_p(t) = \begin{pmatrix} \varphi_p(t) & \varphi_p(t) \\ \varphi_p(1-t) & -\varphi_p(1-t) \end{pmatrix}, \quad \Delta_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_i(V_j(x, \lambda)),$$

$$\mathbf{V}_p(y) = \mathbf{U}_p(y) - \int_0^1 \Phi_p(t)y(t)dt = 0, \quad p = 1, 2. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2. Если  $\lambda$  таково, что  $\Delta_1^{-1}(\lambda)$  существует, то краевая задача (2),(5) разрешима и ее решение имеет вид

$$y(x, \lambda) = z(x, \lambda) + (V_1(x, \lambda)V_2(x, \lambda))\Delta_1^{-1}(\lambda)\int_0^1 \Phi(t)\begin{pmatrix} z(t, \lambda) \\ z(t, \lambda) \end{pmatrix}dt,$$

где  $z(x, \lambda)$  определяется формулой (4). При этом  $R_{1,\lambda}$  существует и имеет место формула

$$R_{1,\lambda}f(x) = y_1(x, \lambda) + y_2(x, \lambda). \quad (6)$$

Перейдем от параметра  $\lambda$  к  $\mu = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)$  и  $\mu$  снова обозначим  $\lambda$ .

Тогда в (2) матрица  $\mathbf{D}$  примет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , где  $d = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ . Положим

$\lambda = \rho^2$ ,  $0 \leq \arg \rho \leq \pi$  и обозначим  $d_1 = \sqrt{|d|}e^{i\frac{\arg d}{2}}$ ,  $0 \leq d < 2\pi$ . Разобьем  $0 \leq \arg \rho \leq \pi$  на секторы  $\gamma_{j-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, s$  ( $0 = \gamma_0 < \dots < \gamma_s = \pi$ ) таким образом, что числа  $\omega_1 = -\omega_2 = 1$ ,  $\omega_3 = -\omega_4 = d_1$  можно перенумеровать так, чтобы для любых  $\rho$  из рассматриваемого сектора выполнялось

$$\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_1 \leq \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_2 \leq 0 \leq \operatorname{Re}(-\rho \tilde{\omega}_2) \leq \operatorname{Re}(-\rho \tilde{\omega}_1).$$

Для определенности считаем, что  $0 \leq \arg \rho \leq \gamma_0$ . Обозначим через  $S_{\delta_0}$  область, получающуюся из сектора  $0 \leq \arg \rho \leq \gamma_0$  удалением всех нулей  $\det \Delta_0(\lambda)$  вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса  $\delta_0$ .

ТЕОРЕМА 3. В области  $S_{\delta_0}$  при  $|\rho| \rightarrow \infty$  справедливы оценки

$$\begin{aligned}\left\|D^s R_{0,\lambda} f\right\|_\infty &= O(|\rho|^{-1+s} \|f\|_1), & \left\|D^s R_{0,\lambda} f\right\|_1 &= O(|\rho|^{-1+s} \psi(\rho) \|f\|_\infty), \\ \left\|D^s R_{0,\lambda} f\right\|_1 &= O(|\rho|^{-1+s} \psi(\rho) \|f\|_1), & \left\|D^s R_{0,\lambda} \chi\right\|_\infty &= O(|\rho|^{-2+s}), \quad s = 0,1,\end{aligned}$$

где  $\psi(\rho) = \mathfrak{A}(\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_1) + \mathfrak{A}(\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_2)$ ,  $\mathfrak{A}(y) = \frac{1-e^{-y}}{y}$ ,  $y > 0$ ,  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  – нормы в пространствах  $L[0,1]$  и  $L_\infty[0,1]$  соответственно,  $\chi(x)$  – характеристическая функция отрезка  $[\eta_0, \eta_1] \subset [0,1]$ .

ТЕОРЕМА 4. Для любой  $f(x) \in L[0,1]$  в области  $S_{\delta_0}$  при  $|\rho| \rightarrow \infty$  уравнение

$$y(x) = R_{1,\lambda} f(x) - y'(0)R_{1,\lambda} N(x,0) + y'(1)R_{1,\lambda} N(x,1) - R_{1,\lambda} N_t' y'(x), \text{ где}$$

$$N(x,t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k,j=1}^m L g_k(x) T v_j(t), \quad N_t' f(x) = \int_0^1 N_t'(x,t) f(t) dt, \quad N_t'(x,t) = \frac{d}{dt} N(x,t),$$

имеет (и притом единственное) решение, имеющее абсолютно непрерывную производную. При этом  $R_\lambda$  существует,  $R_\lambda = y(x)$  и имеет место

$$R_\lambda f(x) = R_{1,\lambda} f(x) - R_{1,\lambda} N_t'(E + DR_{1,\lambda} N_t')^{-1} DR_{1,\lambda} f(x) + O(|\rho|^{-2} \|f\|_1).$$

С помощью формулы (6) и теоремы 3 аналогичные оценки будут иметь место и для  $R_{1,\lambda}$ . Эти же оценки и теорема 4 позволяют исследовать поведение  $R_\lambda$  при больших  $\lambda$ , которое играет важную роль в задаче о разложении по собственным функциям оператора.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378 – 405.
2. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // ДАН. 2001. Т. 379, № 6. С. 741 – 744.
3. Халова В.А. Задача обращения одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 125 – 127.
4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

А. П. Хромов, Д. Г. Шалтыко

**ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ  
СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ  
ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА\***

Рассмотрим на отрезке  $[0;1]$  краевую задачу, определяемую дифференциальным уравнением

$$y''' + p_2(x)y' + p_3(x)y + \rho^3 y = 0, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \arg(\rho) \leq \frac{\pi}{3}, \quad (1)$$

где функции  $p_2(x) \in C^1[0;1]$ ,  $p_3(x) \in C[0;1]$  и нормированными краевыми условиями

$$U_v(y) = \alpha_v y^{(k_v)}(0) + \beta_v y^{(k_v)}(1) + \sum_{j=0}^{k_v-1} (\alpha_{vj} y^{(j)}(0) + \beta_{vj} y^{(j)}(1)) = 0, \quad v = 1, 2, 3 \quad (2)$$

$$2 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0, \quad k_1 > k_3, \quad \prod_{v=1}^3 (|\alpha_v| + |\beta_v|) \neq 0.$$

Известно [1, с. 58], что дифференциальное уравнение (1) в каждом секторе  $S_j = \left\{ \frac{\pi(j-2)}{3} \leq \arg(\rho) \leq \frac{\pi(j-1)}{3} \right\}$ ,  $j = 1, 2$ , допускает фундаментальную систему решений  $\{y_k(x, \rho)\}_{k=1,2,3}$ , для которой при больших  $\rho$  справедливы асимптотические формулы

$$\frac{d^s}{dx^s} y_k(x, \rho) = (\rho \omega_k)^s e^{\rho \omega_k} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad \omega_k = e^{-\frac{2k-1}{3}\pi i}, \quad k = 1, 2, 3, \quad s = 0, 1, 2.$$

Предположим также, что характеристический определитель задачи (1), (2)  $\Delta(\rho) = \det(U_v(y_k(x, \rho)))_{v,k}$  можно представить в виде

$$\Delta(\rho) = A_0(\rho) + A_1(\rho)e^{\rho \omega_1} + A_2(\rho)e^{\rho \omega_2} + A_3(\rho)e^{\rho \omega_3},$$

причем

$$A_1(\rho) = \alpha \rho^{a_j} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad A_3(\rho) = \beta \rho^{b_j} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad a_j \leq b_j, \quad \alpha \beta \neq 0,$$

$$\rho \in S_j, \quad j = 1, 2.$$

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

Это означает, что краевые условия (2) являются нерегулярными [1, с. 66], т.е. функция Грина  $G(x, t, \rho)$  задачи (1), (2) имеет экспоненциальный рост по спектральному параметру как при  $t < x$ , так и при  $t > x$ , что представляет собой основную трудность при решении задачи о разложении по собственным и присоединенным функциям. Впервые подобная задача для простейшего дифференциального уравнения  $y'' + \rho^3 y = 0$  и двучленных краевых условий была рассмотрена и полностью решена А.П. Хромовым в работе [2].

Случай экспоненциального роста функции Грина только при  $t < x$  или при  $t > x$  встречался ранее в краевых задачах с нерегулярными распадающимися краевыми условиями. Такие задачи рассматривались многими авторами [3, 4]. В работе [4] приводится полное решение задачи о сходимости спектральных разложений для краевых задач с нерегулярными распадающимися краевыми условиями.

В настоящей статье получены условия, гарантирующие равномерную сходимость спектральных разложений. К сожалению, полученное достаточное условие значительно более жесткое, чем приводимое необходимое.

Имеет место

**ТЕОРЕМА 1.** Собственные числа задачи (1), (2) образуют бесконечную последовательность, все они, начиная с некоторого, просты и для них справедливы асимптотические формулы

$$\rho_k = \frac{(2k-1)\pi - \chi}{\sqrt{3}} + i \frac{\ln M}{\sqrt{3}} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \text{если } a_j = b_j,$$

$$\rho_k = \frac{(2k+1)\pi - \chi}{\sqrt{3}} + i \frac{\ln M - (b_j - a_j) \ln \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + o(1), \quad \text{если } a_j < b_j,$$

где  $\frac{\alpha}{\beta} = Me^{i\chi}$ .

Справедлива

**ТЕОРЕМА 2** (необходимое условие сходимости). Пусть ряд из собственных и присоединенных функций задачи (1), (2) сходится абсолютно и равномерно при  $x \in [x_0; x_1]$  к функции  $f(x)$ ,  $\frac{1}{3} < x_0 < x_1 < 1$ . Тогда  $f(x)$  является операторно-аналитической функцией на интервале  $\left(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{2}, x_0\right)$ .

Предположим теперь, что  $f(x)$  – операторно-аналитическая функция на отрезке  $[0; 1]$ , ее обобщенные ряды Тейлора в точках 0 и 1 имеют радиусы сходимости  $R_0$  и  $R_1$  соответственно, причем  $R_0 > 1 - R_1$ . Пусть, далее,

функции  $f(x)$ ,  $I(f)$ ,  $I^2(f)$ , ... удовлетворяют краевым условиям (2). Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3 (достаточное условие сходимости). Если  $R = \min\{R_0, R_1\} > \frac{1}{2}$ , то функция  $f(x)$  разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям на отрезке  $\left[\frac{1}{2} - \frac{R}{2} + \varepsilon; R - \varepsilon\right]$  для любого  $\varepsilon > 0$  т.е. выполняется

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \max_{\left[\frac{1}{2} - \frac{R}{2} + \varepsilon; R - \varepsilon\right]} |f(x) - S_q(f, x)| = 0,$$

где  $S_q(f, x)$  представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции  $f(x)$  по собственным и присоединенным функциям задачи (1),(2).

Из теоремы 2 легко получается

СЛЕДСТВИЕ. Если  $R > 1$ , то функция  $f(x)$  разлагается в равномерно сходящийся ряд на всем отрезке  $[0; 1]$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. Хромов А.П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182 – 193.
3. Хромов А.П. Разложение по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. 1966. Т. 70 (112). С. 310 – 329.
4. Хромов А.П. Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. Т. 6, № 6. С. 763 – 772.

УДК 517.51:518

Г. В. Хромова, И. Д. Молоденкова

#### ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ЗАДАЧИ КОЛМОГОРОВА-НИКОЛЬСКОГО\*

В данной статье рассматривается модификация известной задачи из теории приближения функций и дается решение этой модифицированной задачи в случае, когда для приближения периодической функции используется некоторое специфическое семейство интегральных операторов.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

Пусть  $f(x) \in W_2^2[-\pi, \pi]$  и удовлетворяет краевым условиям

$$f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi), \quad k = 0, 1.$$

Здесь  $W_2^2[-\pi, \pi]$  – одномерное пространство Соболева с нормой

$$\|f\|_{W_2^2} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} [f^2(x) + (f''(x))^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим семейство интегральных операторов  $K_\alpha$  ( $\alpha > 0$  – параметр) с ядрами  $K_\alpha(x, t)$  таких, что  $K_\alpha f \in C[-\pi, \pi]$  и  $\|K_\alpha f - f\|_{C[-\pi, \pi]} \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Рассмотрим далее класс функций

$$\tilde{M}_2^2[-\pi, \pi] = \{f(x) \in W_2^2[-\pi, \pi]: f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi), k = 0, 1; \|f\|_{W_2^2} \leq 1\}$$

и величины

$$\Delta_1^{(I)}(K_\alpha, \tilde{M}_2^2) = \sup \{ \|K_\alpha f - f\|_{C[-\pi, \pi]} : f \in \tilde{M}_2^2[-\pi, \pi] \}.$$

В теории приближения функций известна задача Колмогорова–Никольского – это задача получения представлений вида

$$\Delta_1(K_\alpha, M) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha),$$

где  $\Delta_1(K_\alpha, M) = \sup \{ \|K_\alpha f - f\|_C : f \in M \}$ ,  $K_\alpha$  – некоторое семейство операторов, “приближающее” функцию  $f(x)$  из некоторого класса  $M$ ,  $\psi(\alpha) = o(\varphi(\alpha))$ .

В [1], а также в публикациях, приведенных в [1], рассмотрено обобщение этой задачи на более “гладкую” метрику; в случаях, когда

$$M = M_2^r[a, b] = \{f(x) \in W_2^r[a, b] : \|f\|_{W_2^r} \leq 1\}$$

и

$$M = \tilde{M}_2^r[a, b] = \{f(x) \in W_2^r[a, b], f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b), k = 0, 1, \dots, r-1, \|f\|_{W_2^r} \leq 1\},$$

$r \geq 1$  – целое, получены выражения для  $\Delta_1(K_\alpha, M)$  и для аналогичных величин, соответствующих метрике  $C^{(I)}[a, b]$ , через ядра  $K_\alpha(x, t)$ , а на основании этих выражений получено решение указанной задачи для ряда операторов  $K_\alpha$ .

По аналогии с рассмотренными выше случаями имеет место

ТЕОРЕМА 1. Справедливо представление

$$\Delta_1^{(1)}(K_\alpha, \tilde{M}_2^2) = \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} K_\alpha(x, t) \tilde{g}(x, t, \alpha) dt - \tilde{g}(x, x, \alpha) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

где

$$\tilde{g}(x, t, \alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} K_\alpha(x, \xi) G(t, \xi) d\xi - G_x'(t, x), \quad (2)$$

$G(t, x)$  – функция Грина дифференциального оператора

$$L_\Gamma = \{l_\Gamma y = y^{(4)} + y, y^{(k)}(-\pi) = y^{(k)}(\pi), k = 0, 1, 2, 3\}.$$

Функция Грина  $G(t, x)$  имеет вид [2, 3]

$$G(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^4 c_l e^{\lambda_l(x-t)}, & t \leq x, \\ -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^4 c_l e^{\lambda_l[2\pi-(t-x)]}, & x \leq t, \end{cases} \quad (3)$$

где  $c_l = (1 - e^{2\pi\lambda_l})^{-1} \lambda_l$ ,  $\lambda_l = \sqrt[4]{-1}$ .

Из (3) следует выражение

$$G(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_l > 0}}^4 \frac{\lambda_l \operatorname{ch}\{\lambda_l[\pi - (x-t)]\}}{\operatorname{sh} \lambda_l \pi}, & t \leq x, \\ \frac{1}{4} \sum_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_l > 0}}^4 \frac{\lambda_l \operatorname{ch}\{\lambda_l[\pi - (t-x)]\}}{\operatorname{sh} \lambda_l \pi}, & x \leq t. \end{cases} \quad (4)$$

Возьмем в качестве семейства интегральных операторов осредняющие операторы  $A_H(x, f)$ , зависящие от параметра  $H = \frac{2\pi}{n+1}$ , где  $n$  – натуральное число, переводящие тригонометрические сплайны, введенные П.-Ж. Лораном [4], в их производные [5]. Ядра этих операторов  $K_H(x, t)$  имеют вид

$$K_H(x, t) = \sum_{i=1}^s \alpha_i(x) \varphi_i(t),$$

где  $s = 3, 5$  или  $7$  в зависимости от того, куда попадает  $x$ ,  $\varphi_i(t)$  – линейно независимые функции, получаемые сдвигом, для определения  $\alpha_i(x)$  выведены системы линейных алгебраических уравнений [5]. Используя (4) и (2), получена

ЛЕММА. Функция  $\tilde{g}(x, t, H)$  имеет вид

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{j=1}^3 \left[ m_1^{j+1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) \sum_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_l > 0}}^4 \frac{\lambda_l^j q(j) \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) h \right]^{j-1}}{4 \operatorname{sh} \lambda_l \pi} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. m_2^{j+1} \sum_{i=k+1}^s \alpha_i(x) \sum_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_l > 0}}^4 \lambda_l^j P(j) \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) h \right]^{j-1} \right] - \right. \\
& \quad \left. \left. - \sum_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_l > 0}}^4 \frac{\lambda_l^2 \operatorname{sh} \{ \lambda_l [\pi - (t-x)] \}}{4 \operatorname{sh} \lambda_l \pi} + o(h^2), \quad x \leq t, \right. \right. \\
\tilde{g}(x, t, H) = & \left\{ \sum_{j=1}^3 \left[ m_1^{j+1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) \sum_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_l > 0}}^4 \frac{\lambda_l^j q(j) \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) h \right]^{j-1}}{4 \operatorname{sh} \lambda_l \pi} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + m_2^{j+1} \sum_{i=k+1}^s \alpha_i(x) \sum_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_l > 0}}^4 \frac{\lambda_l^j P(j) \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) h \right]^{j-1}}{4 \operatorname{sh} \lambda_l \pi} \right] + \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_l > 0}}^4 \frac{\lambda_l^2 \operatorname{sh} \{ \lambda_l [\pi - (x-t)] \}}{4 \operatorname{sh} \lambda_l \pi} + o(h^2), \quad t \leq x, \right. \right. \tag{5}
\end{aligned}$$

где  $m_1 = m_2 = -1$ ,

$$\begin{aligned}
q(j) &= \begin{cases} \operatorname{ch} \lambda_l t, & j \text{ - нечетное,} \\ \operatorname{sh} \lambda_l t, & j \text{ - четное,} \end{cases} \\
P(j) &= \begin{cases} \operatorname{ch} [\lambda_l (2\pi + t)], & j \text{ - нечетное,} \\ \operatorname{sh} [\lambda_l (2\pi + t)], & j \text{ - четное,} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$x \in \left[ -\pi, x_1 - \frac{\delta_1}{2} \right], \quad h = \frac{13}{42} H.$$

$$\begin{aligned}
m_1 = 1, \quad q(j) &= \begin{cases} \operatorname{ch} [\lambda_l (\pi + x_s - t)], & j \text{ - нечетное,} \\ \operatorname{sh} [\lambda_l (\pi + x_s - t)], & j \text{ - четное,} \end{cases} \\
m_2 = -1, \quad P(j) &= \begin{cases} \operatorname{ch} [\lambda_l (\pi - x_s + t)], & j \text{ - нечетное,} \\ \operatorname{sh} [\lambda_l (\pi - x_s + t)], & j \text{ - четное,} \end{cases}
\end{aligned}$$

где  $s = 3$ ,  $x_3 = x_n + \frac{\delta_1}{2}$ ,  $x \in \left[ x_n + \frac{\delta_1}{2}, \pi \right]$ ,  $h = \frac{13}{42}H$ ;

$s = 5$ ,  $x_5 = x_l + \frac{\delta_1}{2}$ ;  $l = \overline{1, n-1}$ ,  $x \in \left[ x_l + \frac{\delta_1}{2}, x_{l+1} - \frac{\delta_1}{2} \right]$ ,  $h = \frac{6H}{35}$ ;

$s = 7$ ,  $x_7 = x_l - \frac{\delta_1}{2}$ ;  $l = \overline{1, n}$ ,  $\in \left[ x_l - \frac{\delta_1}{2}, x_l + \frac{\delta_1}{2} \right]$ ,  $h = \frac{H}{49}$ .

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Имеет место асимптотическое по  $H$  при  $H \rightarrow 0$  представление

$$\Delta_1^1(A_H, \tilde{M}_2^2) = BH^{\frac{1}{2}} + o\left(H^{\frac{1}{2}}\right),$$

где  $B = \max_s \left( \frac{m}{s} \right)^l \left( \frac{1}{q} \sum_{j=1}^s \alpha_j(x_s) \left( j - \frac{1}{2} \right) \sum_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_l > 0}}^4 \frac{\lambda_l^3 \operatorname{ch} \lambda_l \pi}{4 \operatorname{sh} \lambda_l \pi} \right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $s = 3$ ,  $m = 13$ ,

$q = 14$ ,  $l = \frac{1}{2}$ ,  $x_s = -\pi$  для отрезка  $\left[ -\pi, x_1 - \frac{\delta_1}{2} \right]$ ,  $x_s = x_n + \frac{\delta_1}{2}$  для отрезка

$\left[ x_n + \frac{\delta_1}{2}, \pi \right]$ ;  $s = 5$ ,  $m = 6$ ,  $q = 7$ ,  $l = \frac{1}{2}$ ,  $x_5 = x_l + \frac{\delta_1}{2}$  для отрезка

$\left[ x_l + \frac{\delta_1}{2}, x_{l+1} - \frac{\delta_1}{2} \right]$ ,  $l = \overline{1, n-1}$ ;  $s = 7$ ,  $m = 1$ ,  $q = 1$ ,  $l = 1$ ,  $x_7 = x_l - \frac{\delta_1}{2}$  для

отрезка  $\left[ x_l - \frac{\delta_1}{2}, x_l + \frac{\delta_1}{2} \right]$ ,  $l = \overline{1, n}$ .

Доказательство сводится к подстановке (5) в (1) и проведению соответствующих преобразований с учетом того, что  $\sum_{i=1}^s \alpha_i(x) \equiv 1$  и  $t = x$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Хромова Г.В. Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // ДАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605 – 609.
- Хромова Г.В. О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 1993. № 1. С. 13 – 18.
- Хромова Г.В., Молоденкова И.Д. Об оценке погрешности при приближении периодических функций осредняющими операторами // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2000. Вып. 2. С. 129 – 132.
- Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
- Молоденкова И.Д. Построение операторов, восстанавливающих производные // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 95 – 98.

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА  
В ВИДЕ СУММЫ ДВУХ РЕШЕНИЙ**

Дифференциальные уравнения бесконечного порядка представляют в настоящее время аналитический аппарат, который активно используется во многих вопросах комплексного анализа. Значительный вклад в развитие теории таких уравнений внесли А.Ф. Леонтьев и его ученики. В работах [1, 2] приводится ряд результатов, относящихся к дифференциальным уравнениям бесконечного порядка.

Обозначим через  $C_\rho$  класс бесконечно дифференцируемых на отрезке  $[-1;1]$  функций таких, что

$$\forall f \in C_\rho \quad \exists m_n \quad \forall n \geq 0 : \quad |f^{(n)}(x)| \leq A_f^{n+1} m_n, \quad x \in [-1;1], \quad (1)$$

где  $A_f$  – некоторая постоянная, которая зависит только от функции  $f(x)$ ,  $\{m_n\}$  – последовательность неотрицательных чисел такая, что выполнено условие

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln m_n}{n \ln n} < \frac{1}{\rho}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Отметим, что класс  $C_\rho$  в общем случае не является квазианалитическим классом бесконечно дифференцируемых на отрезке  $[-1;1]$  функций.

Рассмотрим оператор

$$M_L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(x), \quad x \in [-1;1],$$

характеристическая функция которого  $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$  является целой функцией порядка  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ .

Отметим некоторые свойства такого оператора.

1. Для любой функции  $f \in C_\rho$  функция  $\Psi(x) = M_L[f(x)]$  также принадлежит классу  $C_\rho$ .

2. Пусть  $L(\lambda) = L_1(\lambda) \cdot L_2(\lambda)$ , где  $L_j(\lambda)$  ( $j = 1, 2$ ) – целые функции порядка не выше  $\rho$ , тогда справедливо равенство

$$M_L(f) = M_{L_1}[M_{L_2}(f)] = M_{L_2}[M_{L_1}(f)].$$

Доказательство этих свойств оператора  $M_L(f)$  приведено в [3].

В данной статье рассматривается следующая задача. Пусть  $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$  – целая функция порядка  $\rho$  такая, что  $L(\lambda) = L_1(\lambda) \cdot L_2(\lambda)$ , где  $L_j(\lambda)$  ( $j = 1, 2$ ) – целые функции порядка не выше  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ , не имеющие общих нулей.

Рассмотрим уравнение

$$M_L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(x) = 0, \quad x \in [-1; 1]. \quad (2)$$

В таком случае любое решение уравнения (2) в классе  $C_\rho$  представляется в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad M_{L_j}(f_j) = 0, \quad (j = 1, 2). \quad (3)$$

Справедлива

**ТЕОРЕМА 1.** Для того чтобы любое решение  $f \in C_\rho$  уравнения (2) представлялось в виде (3), необходимо и достаточно, чтобы

$$1 \equiv L_1(\lambda)\varphi_1(\lambda) + L_2(\lambda)\varphi_2(\lambda), \quad (4)$$

где  $\varphi_1(\lambda)$ ,  $\varphi_2(\lambda)$  – целые функции порядка не выше  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ .

Отметим, что условия вида (4) впервые возникли в работах В.В. Напалкова [4], а затем в работах многих математиков.

Приведем доказательство достаточности. Пусть выполнено условие (4) и  $f \in C_\rho$  – решение уравнения (2), тогда

$$f(x) = M_L(f) = M_{L_2\varphi_2}(f) + M_{L_1\varphi_1}(f) = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in [-1; 1].$$

Покажем, что  $M_{L_j}(f_j) = 0$ , ( $j = 1, 2$ ). Имеем

$$\begin{aligned} M_{L_1}(f_1) &= M_{L_1}(M_{L_2\varphi_2}(f)) = M_{\varphi_2}(M_L(f)) = 0, \\ M_{L_2}(f_2) &= M_{\varphi_1}(M_L(f)) = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойствами 1 и 2 оператора  $M_L(f)$ . Достаточность условий (4) установлена.

Необходимость условий (4) доказывается в основном методом, указанным в работе [5].

Отметим, что данная теорема может быть распространена на случай, когда характеристическая функция уравнения (2) является произведением произвольного числа сомножителей.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $L(\lambda) = L_1(\lambda) \dots L_m(\lambda)$ , где  $L_j(\lambda)$  ( $j = \overline{1, m}$ ) – целые функции порядка не выше  $\rho$ , не имеющие общих нулей. Для того чтобы любое решение уравнения (2) из класса  $C_\rho$  представлялось в виде  $f(x) = f_1(x) + \dots + f_m(x)$ ,  $M_{L_j}(f_j) = 0$  ( $j = \overline{1, m}$ ), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$1 \equiv N_1(\lambda)\varphi_1(\lambda) + \dots N_m(\lambda)\varphi_m(\lambda),$$

здесь  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  – некоторые целые функции порядка не выше  $\rho$ ,  
 $N_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{I_1(\lambda)}, \dots, N_m(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{I_m(\lambda)}$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М., 1976.
2. Леонтьев А.Ф. Последовательность полиномов из экспонент. М., 1980.
3. Шевцов В.И. Об одном квазианалитическом классе функций. Саратов, 2000. 15 с. Деп. в ВИНТИ 20.04.2000, №1103 – В00.
4. Напалков В.В. Факторизация оператора типа свертки // Мат. заметки. 1974. Т. 15, № 1. С. 165 – 171.
5. Тимофеев А.Ю. О представлении решения уравнения бесконечного порядка в виде суммы двух решений // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 2. С. 245 – 256.

УДК 539.3

Н. С. Анофрикова, Е. В. Гуреева

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ БЕЗМОМЕНТНЫЕ ВОЛНЫ  
В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ**

Рассмотрим осесимметричную задачу о действии ударно приложенного нормального усилия на торец наследственно-упругой цилиндрической оболочки, материал которой обладает свойством упругого объемного расширения. Здесь основной вклад (по интенсивности напряжений и деформаций) вносит безмоментная составляющая по теории Кирхгофа-Лява. Уравнения этой составляющей выводятся из трехмерных уравнений наследственной теории упругости с помощью асимптотического интегрирования и, в случае цилиндрической оболочки, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} - 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{T_2}{R} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ 2Eh\left(1 - \Gamma^*\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)\right) &= T_1 + \left[v + \frac{1-2\nu}{2}\Gamma^*\right]T_2, \\ 2Eh\left(1 - \Gamma^*\left(-\frac{w}{R}\right)\right) &= T_2 + \left[v + \frac{1-2\nu}{2}\Gamma^*\right]T_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $T_i$  – нормальные усилия,  $u$  – тангенциальное перемещение,  $w$  – прогиб срединной поверхности оболочки,  $\alpha$  – координата вдоль образующей срединной поверхности цилиндра,  $t$  – время,  $R$  – радиус срединной поверхности цилиндра,  $h$  – полутолщина,  $E, \nu$  – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона;  $\rho$  – плотность материала.

Рассмотрим случай, когда оператор  $\Gamma^*$  определяется как интегральный оператор Вольтерра, ядром которого служит дробно-экспоненциальная функция  $\mathcal{E}_{-1/2}(-\beta, t)$  [1], то есть

$$\Gamma^* f(t) = k \int_0^t \mathcal{E}_{-1/2}(-\beta, t-t_*) f(t_*) dt_*, \quad (2)$$

где  $k, \beta$  – параметры материала.

Границные условия на торце  $\alpha = 0$ , соответствующие рассматриваемому типу воздействия, возьмем в виде:

$$T_1 = 2hH(t), w = 0, \quad (3)$$

где  $I$  – амплитуда,  $H(t)$  – функция Хевисайда.

Начальные условия:

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0. \quad (4)$$

Перейдем в уравнениях (1), граничных условиях (3) и начальных условиях (4) к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{\alpha}{R}, \quad \tau = \frac{tc_3}{R} \quad (5)$$

и к безразмерным параметрам

$$k = \sqrt{\frac{c_3}{R}} k^*, \quad \beta = \sqrt{\frac{c_3}{R}} \beta^*, \quad (6)$$

где  $c_3 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$  – мгновенная скорость двумерной продольной волны.

Также введем безразмерные усилия и перемещения

$$T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2} T_i^*, \quad u = Ru^*, \quad w = Rw^*. \quad (7)$$

В результате система (1) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} = 0, \\ & T_2^* - \frac{\partial^2 w^*}{\partial \tau^2} = 0, \\ & (1-\nu) \left( \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - k^* \beta^* \int_0^\tau \mathcal{E}_{-1/2}(-1, \beta^{*2}(\tau - \tau^*)) \frac{\partial u^*(\tau^*)}{\partial \xi} d\tau^* \right) = \\ & = T_1^* - \left( \nu T_2^* + \frac{1-2\nu}{2} k^* \beta^* \int_0^\tau \mathcal{E}_{-1/2}(-1, \beta^{*2}(\tau - \tau^*)) T_2^*(\tau^*) d\tau^* \right), \\ & -(1-\nu) \left( w^* - k^* \beta^* \int_0^\tau \mathcal{E}_{-1/2}(-1, \beta^{*2}(\tau - \tau^*)) w^*(\tau^*) d\tau^* \right) = \\ & = T_2^* - \left( \nu T_1^* + \frac{1-2\nu}{2} k^* \beta^* \int_0^\tau \mathcal{E}_{-1/2}(-1, \beta^{*2}(\tau - \tau^*)) T_1^*(\tau^*) d\tau^* \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия на торце  $\xi = 0$  запишутся в виде

$$T_1^* = I^* H(\tau), w^* = 0, \quad (9)$$

$$\text{где } I^* = \frac{I(1-v^2)}{E}.$$

Начальные условия:

$$u^* = \frac{\partial u^*}{\partial \tau} = w^* = \frac{\partial w^*}{\partial \tau} = 0 \text{ при } \tau = 0. \quad (10)$$

Применим к решению уравнений (8) интегральное преобразование Лапласа по переменной  $\tau$ . В результате получим следующее уравнение для нахождения изображения перемещения  $u^{*L}$ :

$$\frac{d^2 u^{*L}}{d\xi^2} - \lambda^2 u^{*L} = 0, \quad (11)$$

$$\text{где } \lambda = \sqrt{\frac{s^2(E_L + s^2(1-v_L^2))}{E_L(E_L + s^2)}}, E_L = 1 - \frac{k^*}{s^{1/2} + \beta^*}, v_L = v + \frac{1-2v}{2} \frac{k^*}{s^{1/2} + \beta^*},$$

$s$  – параметр интегрального преобразования.

Тогда решение для изображения продольного усилия  $T_1^{*L}$  с учетом (9) запишется в форме

$$T_1^{*L} = \frac{I^*}{s} e^{-\lambda \xi}. \quad (12)$$

Оригинал изображения (12) будем искать аналитически, раскладывая его в ряд по отрицательным степеням параметра преобразования, оставляя в степени экспоненты слагаемые с множителями  $s, s^{1/2}, s^0$ . Воспользуемся теоремой запаздывания и формулой обратного перехода [2]

$$\frac{1}{s^{1+n/2}} e^{-l\sqrt{s}} \Rightarrow (4\tau)^{n/2} i^n erfc \frac{l}{2\sqrt{\tau}} (n=0,1,2,\dots, l \geq 0), \quad (13)$$

где  $i^n erfc z$  – кратные интегралы вероятностей.

Окончательное решение в оригиналах имеет вид

$$T_1^* = I^* e^{-B\xi} \left[ i^0 erfc \frac{A\xi}{2\sqrt{\tau-\xi}} - \xi C 2\sqrt{\tau-\xi} i^1 erfc \frac{A\xi}{2\sqrt{\tau-\xi}} + \dots \right] H(\tau - \xi), \quad (14)$$

$$\text{где } A = \frac{k^* a}{2}, B = \frac{k^*}{8} \left[ 4a(k^* - \beta^*) - 4k^* b - k^* a^2 \right],$$

$$C = \frac{k^*}{16} \left[ 4a(k^* - \beta^*) (2(k^* - \beta^*) - k^* a) - 4k^* b (2(k^* - 2\beta^*) - k^* a) + k^{*2} a^3 \right],$$

$$a = \frac{(1 - v + v^2)}{1 - v^2}, \quad b = \frac{(1 - 2v)^2}{4(1 - v^2)}.$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Работников Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1974.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М., 1979.

УДК 539.3

А. А. Барышев

# ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВИБРАЦИОННОМ ИЗГИБЕ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Полная система разрешающих уравнений для определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) и температурного поля вязкоупругой прямоугольной пластины при вибрационном изгибе, учитывающая поперечные сдвиги и инерцию вращения, получена авторами статьи [1]. В этой статье приводятся численные значения максимумов основных характеристик НДС и температуры саморазогрева для различных способов закрепления краев пластины.

Интенсивность нагрузки, распределенной по грани  $\zeta = -1/2$ , полагается следующая:

$$q(\xi, \eta, t) = q_0 \sin \pi \xi \sin \pi \eta \cos \omega t. \quad (1)$$

В силу малости толщины пластинки теплообменом через ее края пренебрегаем, то есть считаем, что края теплоизолированы:

$$\text{при } \xi=0, \xi=1 \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0; \text{ при } \eta=0, \eta=1 \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0,$$

а на лицевых поверхностях выполняются следующие граничные условия:

$$\text{при } \zeta = \mp 1/2 \quad l_k \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \pm T \quad (k = 1, 2).$$

С помощью методики, основанной на использовании метода сплайн-коллокаций [2, 3], поиск решения двумерной краевой задачи для определе-

ния НДС сведено к нахождению решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение последней получено численно устойчивым методом дискретной ортогонализации С. К. Годунова [4]. Нахождение температуры саморазогрева из краевой задачи для уравнения теплопроводности также основано на последовательном применении методов сплайн-коллокаций и дискретной ортогонализации.

Как и в работе [1], модель А предполагает квадратичное изменение по толщине поперечных сдвигов, в модели Т поперечные сдвиги постоянны по толщине, а модель К основана на гипотезах Кирхгоффа. Соответствующие модели, учитывающие инерцию вращения, обозначены с индексом «и».

Вычислительный эксперимент проводился для случая, когда  $l_1 = l_2 = \lambda_q / h \alpha_s^{(k)}$ , то есть через грани  $\zeta = \mp 1/2$  происходит теплообмен по закону Ньютона ( $\alpha_s^{(k)}$  – коэффициент теплоотдачи во внешнюю среду).

Вычисления выполнены для пластин ( $a=b=0,5$  м), изготовленных из материалов ЭД-6 МА, ЭД-6 ТЭАТ и ПММА, физико-механические свойства которых приведены в [3], при единичном параметре нагрузки  $q_0$ .

Вычислительные эксперименты были выполнены для пластин, относительная толщина которых изменялась в интервале  $h_0 \in [0.02; 0.2]$ .

Рассмотрены различные способы закрепления сторон пластины. В случае шарнирного опищения всех краев пластины относительная разность амплитуд прогиба превышает 5% при  $h_0 = 0.09$  (модель А и модель К),  $h_0 = 0.1$  (модель Т и модель К). При указанных значениях относительной толщины максимальные температуры саморазогрева отличаются не более чем на 3.3%.

При жестко закрепленных краях пластины амплитуды прогибов отличаются более чем на 5 % при тех же относительных толщинах, что и в случае шарнирного опищения краев.

Когда один край жестко закреплен, а остальные шарнирно оперты, то при  $h_0=0.06$  ( $h_0=0.075$ ) максимальные амплитуды прогиба модели К меньше на 4.6 % (5.5 %), чем соответствующие значения для модели А (Т). Соответствующая этим толщинам максимальная температура не отличается более чем на 5 %.

Качественная картина изменения основных характеристик НДС по длине и ширине пластины, температуры саморазогрева по толщине, а также по длине и ширине для моделей, учитывающих поперечные сдвиги, не отличается от полученной для модели К другими авторами [3].

Результаты расчетов по моделям А и Т хорошо согласуются и в рассматриваемом интервале изменения толщины, относительные разности амплитуд характеристик НДС и температуры не превосходят 5 %.

Отметим, что критическая частота и температура саморазогрева увеличиваются, а амплитуда прогиба уменьшается от модели А к модели в следующей последовательности: модели А, Т, К (Аи, Ти, Ки).

Учет поперечных сдвигов не оказывает влияния на амплитуды изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящего момента  $H$  и перерезывающих сил  $N_x$ ,  $N_y$ . Их можно считать равными в рассматриваемом интервале изменения толщины для всех моделей.

При постоянной интенсивности нагрузки, то есть в случае, когда

$$q(\xi, \eta, t) = q_0 \cos \omega t \quad (2)$$

и все края пластины шарнирно оперты, максимумы амплитуды прогиба для первых трех критических частот совпадают во всех теориях с точностью до вычислительной погрешности. Температура саморазогрева, начиная со значения  $h_0=0.1$ , вычисленная по уточненным теориям, более чем на 5% превосходит соответствующий результат, определенный по классической теории. Перерезывающие силы  $N_x$ ,  $N_y$ , подсчитанные для второй, третьей критических частот, в условиях модели К превышают амплитуды указанных сил в предположениях моделей А и Т. Однако остальные характеристики НДС (изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящий момент  $H$ ) хорошо согласуются для первых трех критических частот. Заметим, что значение первой критической частоты при постоянной нагрузке совпадает со значением критической частоты при синусоидальной нагрузке, а максимальные амплитуды всех характеристик НДС и температура саморазогрева значительно превосходят соответствующие величины.

Качественная картина, полученная для моделей, учитывающих поперечные сдвиги, не отличается от результатов модели К.

На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что при рассмотренных способах закрепления краев пластины при  $h_0 \leq 0.1$  все рассмотренные теории дают близкие результаты.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барышев А.А., Недорезов П.Ф. Постановка задачи вибрационного изгиба вязкоупругой прямоугольной пластины с учётом поперечных сдвигов и инерции вращения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 169 – 171.
2. Недорезов П.Ф., Сироткина Н.М. Численные методы исследования установившихся колебаний вязкоупругих прямоугольных пластинок и круговых цилиндрических оболочек: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997.
3. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3 – 27.
4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем однородных линейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171 – 174.

А. А. Барышев, П. Ф. Недорезов

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ВИБРАЦИОННОГО ИЗГИБА  
ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ  
С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ**

Рассмотрим пластинку малой толщины  $h$ , отнесенную к декартовой системе координат, плоскость  $Oxy$  которой совмещена со срединной плоскостью пластиинки. Пластиинка совершаает установившиеся колебания под действием распределенной по грани  $z = -h/2$  нагрузкой интенсивности

$$q(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 q_k(x, y) \cos\left(\frac{\pi}{2}(k-1) - \omega t\right). \quad (1)$$

В статье принимаются следующие предположения: (а) нормальные напряжения  $\sigma_z$  на площадках, параллельных срединной плоскости, малы по сравнению с прочими напряжениями; (б) расстояния по нормали между двумя точками пластиинки после деформации остаются неизменными, следовательно,  $w = w(x, y, t)$ ; (в) деформации сдвига  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$  по толщине пластиинки меняются по квадратичному закону [1, 2]

$$\gamma_{xz} = f(z)\phi(x, y, t), \quad \gamma_{yz} = f(z)\psi(x, y, t), \quad (2)$$

где  $\phi(x, y, t)$  и  $\psi(x, y, t)$  – неизвестные функции, а  $f(z) = 1/2 \cdot (1/4 \cdot h^2 - z^2)$  – функция, характеризующая изменение указанных деформаций сдвига по толщине пластиинки (модель А) или компоненты перемещения  $u, v$  по толщине пластиинки меняются по линейному закону [3]

$$u(x, y, z, t) = z\gamma_x(x, y, t), \quad v(x, y, z, t) = z\gamma_y(x, y, t), \quad (3)$$

где  $\gamma_x(x, y, t)$  и  $\gamma_y(x, y, t)$  – искомые функции (модель Т).

Вязкоупругий материал пластиинки подчиняется линейному закону деформирования.

Неизвестные функции  $w(x, y, t)$ ,  $\phi(x, y, t)$ ,  $\psi(x, y, t)$  модели А и  $w(x, y, t)$ ,  $\gamma_x(x, y, t)$ ,  $\gamma_y(x, y, t)$  модели Т, соответствующие нагрузке (1), будем искать в виде

$$Z(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 Z^{(k)}(x, y) \cos\left(\frac{\pi}{2}(k-1) - \omega t\right). \quad (4)$$

Уравнения движения малого элемента пластиинки при изгибных колебаниях следующие:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz = N_x, \quad (x \Leftrightarrow y; u \Leftrightarrow v), \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность материала пластиинки.

Уравнения (5) при подстановке в них выражений для изгибающих, крутящего моментов и перерезывающих сил составляют полную систему для определения НДС при установившихся колебаниях вязкоупругой пластиинки.

Введя безразмерные координаты  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ ,  $\zeta = z/h$ , толщину  $h_0 = h/a$ , прогиб  $W_k = w_k/h$ , функции  $\Phi_k = h^2 \varphi_k$ ,  $\Psi_k = h^2 \psi_k$  ( $k = 1, 2$ ), задачу нахождения НДС рассматриваемой пластиинки можно свести к решению краевой задачи, записанной в переменных  $\xi$ ,  $\eta$ .

$$\begin{aligned} & \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 W_k + \rho h^2 \omega^2 a^2 (-1)^k \sum_{j=1}^2 d_{k+j-1} \left[ h \left( -\frac{1}{(5+K_M)(1-\tilde{\nu})} - \frac{1}{12} \right) \tilde{\nabla}^2 W_j + \frac{a^2}{h} W_j + \right. \\ & \left. + \frac{\rho \omega^2 h^4 a^2 (-1)^j}{12(5+K_M)(1-\tilde{\nu})} \sum_{l=1}^2 d_{j+l-1} W_l \right] = a^2 (-1)^k \sum_{j=1}^2 d_{k+j-1} \left[ \frac{h}{(5+K_M)(1-\tilde{\nu})} \tilde{\nabla}^2 q_j - \right. \\ & \left. - \frac{a^2}{h} q_j - \frac{\rho \omega^2 h^4 a^2 (-1)^j}{12(5+K_M)(1-\tilde{\nu})} \sum_{l=1}^2 d_{j+l-1} q_l \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\nabla}^2 \Phi_k - \frac{(5+K_M)a^2}{h^2} \Phi_k - \frac{\rho \omega^2 a^2 h^3}{6(1-\tilde{\nu})} (-1)^k \sum_{j=1}^2 d_{k+j-1} \Phi_j = h_0^2 p \tilde{\nabla}^2 \frac{\partial W_k}{\partial \xi} - \\ & - \frac{h_0^2 a^3 (-1)^k}{1-\tilde{\nu}} \rho h^2 \omega^2 s \sum_{j=1}^2 d_{k+j-1} \frac{\partial W_j}{\partial \xi} - \frac{h_0^2 a^3 (1+\tilde{\nu})}{(1-\nu)^2} (-1)^k r \sum_{j=1}^2 d_{k+j-1} \frac{\partial q_j}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (7)$$

$(\xi \Leftrightarrow \eta, \Phi \Leftrightarrow \Psi, k = 1, 2)$ ,

$$\begin{aligned} & \text{где } d_k = D_k / (D_1^2 + D_2^2), \quad d_3 = -d_1, \quad D_k = E_k h^3 / (12(1-\tilde{\nu}^2)) \quad (k = 1, 2), \\ & \tilde{\nabla}^2 = \partial^2 / \partial \xi^2 + c^2 \partial^2 / \partial \eta^2, \quad \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 = \partial^4 / \partial \xi^4 + 2c^2 \partial^4 / \partial \xi^2 \partial \eta^2 + c^4 \partial^4 / \partial \eta^4, \\ & c = a/b, \quad K_M = 0, \quad p = 20a/(h(1-\tilde{\nu})), \quad s = 2(1+\tilde{\nu})/(1-\tilde{\nu}) + 5/3, \quad r = 2, \end{aligned}$$

$E_1 + iE_2 = \int_0^\infty K(s) e^{i\omega s} ds$  – комплексный модуль, характеризующий вязкоупругие свойства материала.

Для определения неизвестных функций  $\gamma_x^{(k)}$ ,  $\gamma_y^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) модели Т необходимо в уравнении (7) положить  $K_M = 1$ ,

$p = 2a/(h(1 - \tilde{\nu}))$ ,  $r = 1/6$ ,  $s = [(1 + \tilde{\nu})/(1 - \tilde{\nu}) + 1]/6$ ,  $f(z) = h^2$ . При этом неизвестные функции связаны соотношениями

$$\gamma_x^{(k)} = h_0 \left( \frac{h_0}{c} \Phi_k - \frac{\partial W_k}{\partial \xi} \right), \quad \gamma_y^{(k)} = h_0 \left( \frac{h_0}{c} \Psi_k - c \frac{\partial W_k}{\partial \eta} \right). \quad (8)$$

Подчеркнутые слагаемые учитывают инерцию поперечного вращения. Заметим, что если в уравнении (6) опустить слагаемые, содержащие коэффициент  $K_M$ , то оно описывает изгиб пластинки в классической постановке.

К системе (6), (7) необходимо добавить краевые условия, соответствующие условиям закрепления или загружения краев пластины.

Для установившейся температуры саморазогрева  $T(x, y, z)$  пластины можно записать стационарное уравнение теплопроводности в виде [4]

$$h_0^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \frac{h^2}{\lambda_q} Q(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad (9)$$

где  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  – мощность тепловых источников, распределенных по объему пластины,  $\lambda_q$  – коэффициент теплопроводности материала.

При определении максимально возможной температуры саморазогрева считаем, что вся работа внешних сил переходит в тепловую энергию. Тогда функция  $Q$  определяется следующим образом:

$$Q(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left( \varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + \gamma_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + \gamma_{xz} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} + \gamma_{yz} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} \right) dt,$$

где интеграл определяет работу, произведенную внутренними силами при деформации единичного объема за один цикл колебаний.

Границные условия для температуры определяются условиями теплообмена пластины с внешней средой.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амбарцумян С.А. К теории изгиба анизотропных пластинок // Известия ОНН АН СССР. 1958. № 5. С. 69 – 77.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М., 1961.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., 1963.
4. Недорезов П.Ф., Сироткина Н.М. Численные методы исследования установившихся колебаний вязкоупругих прямоугольных пластинок и круговых цилиндрических оболочек: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997.

**КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА  
ОПТИМАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ  
УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА\***

Рассмотрим задачу построения оптимального кинематического стабилизирующего управления угловым движением твердого тела. В качестве управления рассматривается вектор абсолютной угловой скорости твердого тела, при сообщении которого твердому телу оно переходит асимптотически устойчивым образом из любого, заранее не заданного, начального углового положения на любую выбранную программную траекторию и в дальнейшем совершает асимптотически устойчивое движение по этой траектории. При этом должен выполняться некоторый критерий качества переходного процесса.

Уравнения возмущенного углового движения твердого тела имеют вид [1, 2]

$$2\dot{\bar{v}} = \delta\bar{\omega}_\xi \circ \bar{v}, \quad 2\dot{\bar{v}}^* = \bar{v}^* \circ \Delta\bar{\omega}_x, \quad (1)$$

где  $\bar{v}, \bar{v}^*$  – кватернионы ошибки ориентации, характеризующие отклонение действительной ориентации твердого тела от его программной ориентации, причем кватернион  $\bar{v}^*$  определен своими компонентами в связанной, а  $\bar{v}$  – в инерциальной системах координат.

Векторы  $\delta\bar{\omega}_\xi$  и  $\Delta\bar{\omega}_x$  – это искомые стабилизирующие управление угловым движением твердого тела, определяемые соотношениями  
 $\delta\bar{\omega}_x = \bar{\omega}_x - \bar{\omega}_x^0(t), \quad \Delta\bar{\omega}_x = \bar{\omega}_x - \bar{\omega}_x^0 = \bar{\omega}_x - \tilde{\bar{v}}^* \circ \bar{\omega}_z^0(t) \circ \bar{v}^*, \quad \delta\bar{\omega}_\xi = \bar{\lambda} \circ \delta\bar{\omega}_x \circ \tilde{\bar{\lambda}},$   
где  $\bar{\omega}_x$  – отображение вектора абсолютной угловой скорости твердого тела на оси связанной системы координат,  $\bar{\omega}_z^0$  и  $\bar{\omega}_x^0$  – отображения вектора абсолютной программной угловой скорости твердого тела на оси программной и связанной систем координат соответственно, символ  $\sim$  означает сопряженный кватернион.

Выберем следующие функционалы минимизации:

$$J = \frac{1}{4} \int_0^\infty (\alpha_1 |\bar{v}_v|^2 + \alpha_2 |\delta\bar{\omega}_\xi|^2) dt, \quad J = \frac{1}{4} \int_0^\infty (\alpha_1 |\bar{v}_v^*|^2 + \alpha_2 |\Delta\bar{\omega}_x|^2) dt, \quad (2)$$

где  $\bar{v}_v, \bar{v}_v^*$  – векторные части кватернионов  $\bar{v}, \bar{v}^*$ .

Задача заключается в построении стабилизирующих управлений  $\delta\bar{\omega}_\xi$  и  $\Delta\bar{\omega}_x$ , обеспечивающих асимптотическую устойчивость невозмущенного

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00988.

движения  $\bar{v} = \bar{v}^* = 1$  ( $\bar{\psi}_v = \bar{\psi}_v^* = 0$ ) и доставляющих минимум функционалам (2).

Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Л.С. Понtryгина. Функция Гамильтона для задачи, описываемой первыми соотношениями (1), (2) имеет вид

$$H = -(1/4) [\alpha_1 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \alpha_2 (\delta\omega_1^2 + \delta\omega_2^2 + \delta\omega_3^2)] + \\ + (1/2) \{ \psi_0 (-v_1 \delta\omega_1 - v_2 \delta\omega_2 - v_3 \delta\omega_3) + \psi_1 (v_0 \delta\omega_1 + v_3 \delta\omega_2 - v_2 \delta\omega_3) + \\ + \psi_2 (v_0 \delta\omega_2 + v_1 \delta\omega_3 - v_3 \delta\omega_1) + \psi_3 (v_0 \delta\omega_3 + v_2 \delta\omega_1 - v_1 \delta\omega_2) \},$$

а для задачи, описываемой вторыми соотношениями (1), (2) вид

$$H^* = -(1/4) [\alpha_1 (v_1^{*2} + v_2^{*2} + v_3^{*2}) + \alpha_2 (\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2 + \Delta\omega_3^2)] + \\ + (1/2) \{ \psi_0^* (-v_1^* \Delta\omega_1 - v_2^* \Delta\omega_2 - v_3^* \Delta\omega_3) + \psi_1^* (v_0^* \Delta\omega_1 + v_3^* \Delta\omega_2 - v_2^* \Delta\omega_3) + \\ + \psi_2^* (v_0^* \Delta\omega_2 + v_1^* \Delta\omega_3 - v_3^* \Delta\omega_1) + \psi_3^* (v_0^* \Delta\omega_3 + v_2^* \Delta\omega_1 - v_1^* \Delta\omega_2) \},$$

где  $v_i, v_i^*, (i = \overline{0, 3})$  – компоненты кватернионов  $\bar{v}, \bar{v}^*$ ,  $\psi_i, \psi_i^*, (i = \overline{0, 3})$  – вспомогательные (сопряженные) переменные,  $\delta\omega_i, \Delta\omega_i, (i = \overline{1, 3})$  – компоненты векторов  $\delta\bar{\omega}_\xi, \Delta\bar{\omega}_x$  (скалярные управление).

Уравнения для сопряженных переменных записутся в виде

$$2\dot{\bar{\psi}} = \alpha_1 \bar{v}_v + \delta\bar{\omega}_\xi \circ \bar{\psi}, \quad 2\dot{\bar{\psi}}^* = \alpha_1 \bar{v}_v^* + \bar{\psi}^* \circ \Delta\bar{\omega}_x. \quad (3)$$

Законы стабилизирующего управления, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, имеют вид

$$\delta\bar{\omega}_\xi = (1/\alpha_2) \text{vect}(\bar{\psi} \circ \tilde{\bar{v}}), \quad \Delta\bar{\omega}_x = (1/\alpha_2) \text{vect}(\tilde{\bar{v}}^* \circ \bar{\psi}^*). \quad (4)$$

Подчеркнем, что соотношения (4) справедливы в случае отсутствия ограничений на управления.

Подставляя соотношения (4) в уравнения (1) и (3), получаем уравнения задачи оптимального управления

$$\begin{cases} 2\dot{\bar{v}} = (1/\alpha_2) [\bar{\psi} - squal(\bar{\psi} \circ \tilde{\bar{v}}) \bar{v}], \\ 2\dot{\bar{\psi}} = \alpha_1 \bar{v}_v + (1/\alpha_2) \bar{\psi} \circ \tilde{\bar{v}} \circ \bar{\psi} - (1/\alpha_2) squal(\bar{\psi} \circ \tilde{\bar{v}}) \bar{\psi}; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 2\dot{\bar{v}}^* = (1/\alpha_2) [\bar{\psi}^* - squal(\tilde{\bar{v}}^* \circ \bar{\psi}^*) \bar{v}^*], \\ 2\dot{\bar{\psi}}^* = \alpha_1 \bar{v}_v^* + (1/\alpha_2) \bar{\psi}^* \circ \tilde{\bar{v}}^* \circ \bar{\psi}^* - (1/\alpha_2) squal(\tilde{\bar{v}}^* \circ \bar{\psi}^*) \bar{\psi}^*. \end{cases} \quad (6)$$

Полученные уравнения являются нелинейными и вряд ли могут быть решены аналитически в общем случае. Однако в случае, когда кватернионная сопряженная переменная  $\bar{\psi}$  или  $\bar{\psi}^*$  имеет нулевую векторную часть, т.е. когда  $\bar{\psi} \equiv \psi_0$  или  $\bar{\psi}^* \equiv \psi_0^*$  эти уравнения интегрируются в явном виде. В этом случае законы управления (4) принимают вид

$$\delta\bar{\omega}_\xi = -(1/\alpha_2) \psi_0 \bar{v}_v, \quad \Delta\bar{\omega}_x = -(1/\alpha_2) \psi_0^* \bar{v}_v^*. \quad (7)$$

Из вторых уравнений (5) и (6) и соотношений (7) следует, что

$$\psi_0 = \psi_0^* = \pm\sqrt{\alpha_1\alpha_2},$$

а первые уравнения систем (5) и (6) принимают вид

$$2\dot{v} = (1/\alpha_2)\psi_0(1 - v_0\bar{v}), \quad 2\dot{v}^* = (1/\alpha_2)\psi_0^*(1 - v_0\bar{v}^*).$$

Эти уравнения интегрируются аналитически. Запишем общие решения уравнений для переменных  $v_0$  и  $v_0^*$

$$v_0 = \frac{1 - C_0 \exp(-\psi_0 t / \alpha_2)}{1 + C_0 \exp(-\psi_0 t / \alpha_2)}, \quad v_0^* = \frac{1 - C_0^* \exp(-\psi_0^* t / \alpha_2)}{1 + C_0^* \exp(-\psi_0^* t / \alpha_2)},$$

где  $C_0, C_0^*$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (при  $t = 0$   $v_0 = v_0(0)$ ,  $v_0^* = v_0^*(0)$ ):

$$C_0 = \frac{1 - v_0(0)}{1 + v_0(0)}, \quad C_0^* = \frac{1 - v_0^*(0)}{1 + v_0^*(0)}.$$

Из решений видно, что невозмущенное движение для законов управления (7) асимптотически устойчиво при  $\psi_0 = \psi_0^* > 0$ , т.е. когда  $\psi_0 = \psi_0^* = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ .

**Заключение.** Рассмотрена в двух кватернионных постановках задача оптимальной нелинейной стабилизации. Построены законы управления и уравнения задачи оптимизации. Найдено частное аналитическое решение этой задачи. В отличие от кинематической задачи оптимального управления угловым движением твердого тела (задачи построения программного углового движения и управления), подробно изученной рядом авторов и имеющей аналитическое решение в общем случае, рассмотренная задача оптимальной нелинейной стабилизации является новой и более сложной.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: Уравнения ошибок, законы и алгоритмы коррекции (стабилизации) // Изв. РАН, МТТ. 1994. № 4. С. 3 – 12.
2. Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н. Векторное построение кинематического стабилизирующего управления угловым движением твердого тела // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 156 – 158.

Ю. А. Блинков, И. А. Чернов

## ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ГУДЕРЛЕЯ ГАЗОМ ТОМОТИКИ-ТАМАДЫ

Известно, что в классической гидродинамике большую роль играет пример обтекания цилиндра однородным на бесконечности потоком. Это сумма двух простейших решений уравнения Лапласа: диполя на бесконечности и диполя в начале координат. Сумма двух сингулярных решений позволяет правильно отразить топологию симметричного безотрывного обтекания конечного тела. Удачным оказалось то, что нулевая линия тока, разделяющая зоны внешнего и внутреннего течений, является окружностью. Конформное отображение внешности профиля заданного крыла малоскоростного самолета на внешность окружности – это следующий шаг в построении теории.

В аэrodинамике при учете сжимаемости среды теряется свойство линейности основного уравнения для функции тока в зависимости от пространственных координат, однако, как показал С.А. Чаплыгин, линейность сохраняется, если использовать метод годографа с переменными «величина скорости – угол скорости» в качестве независимых. Но набор точных решений уравнения Чаплыгина небогат. С другой стороны, здесь возможны различные режимы обтекания конечного тела в зависимости, например, от скорости однородного потока на бесконечности. Интересен, в частности, случай звуковой скорости на бесконечности.

Чтобы расширить теоретические возможности для изучения трансзвукового режима обтекания тел применяют метод аппроксимации уравнения Чаплыгина, которое считается точным, заменяя его приближенным, но обладающим дополнительным набором частных решений. Использование уравнения Трикоми вместо – Чаплыгина можно трактовать как трансзвуковое течение некого фiktивного газа – «газа Трикоми» – со своим законом зависимости плотности газа от его скорости.

Определим «профиль Гудерлея в газе Трикоми» как точное решение уравнения Трикоми, которое является линейной комбинацией на плоскости годографа двух автомодельных решений: соплового с  $n=2$  и профильного с  $n=4/5$  ( $n$  – это показатель степени в автомодельной переменной  $x/y^n$ ). Соответствующее решение изучалось в [1, 2].

С. Томотика, К. Тамада [3] предложили другую аппроксимацию, заменив уравнение Чаплыгина модельным уравнением, которое правильно описывает течение сжимаемой жидкости не только в трансзвуковом диапазоне скоростей, как уравнение Трикоми, но и при малых скоростях, как уравнение Лапласа. Использование этого модельного уравнения соответствует изучению течения «газа Томотики-Тамады».

Ниже рассмотрено точное решение этого модельного уравнения в виде линейной комбинации двух обобщенных автомодельных (соплового и профильного), которая описывает обтекание газом Томотики-Тамады коначного тела звуковым на бесконечности потоком.

1. Уравнение Чаплыгина для определения функции тока  $\psi$  возьмем в форме

$$\psi_{ww} + X(w)\psi_{\theta\theta} = 0. \quad (1)$$

Коэффициент  $X$  во втором слагаемом может быть выражен как функция  $w$  при помощи уравнения состояния газа и уравнения Бернулли

$$w = \int_1^q \frac{\rho}{q} dq, \quad X = \frac{q^2}{\rho^2} \left( \frac{1}{q^2} - \frac{1}{c^2} \right),$$

$$\rho = \left( \frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} q^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad c = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

где  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей газа,  $q$  – величина скорости.

В [3] коэффициент  $X(w)$  из (1) был заменен на аппроксимирующий

$$X(w) = a(1 - e^{2kw}), \quad a = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad k = \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Были введены новые независимые переменные  $(\tau, \beta)$

$$\tau = e^{kw}, \quad \beta = \frac{k}{\sqrt{a}} \theta.$$

Тогда основное уравнение приняло вид

$$\tau^2 \psi_{\tau\tau} + \tau \psi_\tau + (1 - \tau^2) \psi_{\beta\beta} = 0. \quad (2)$$

Было найдено [3] точное решение этого уравнения

$$\psi_1 = \tau \sin \omega \quad (3)$$

при условии, что

$$\beta - i \ln \lambda + \tau \sin \omega - \omega = 0, \quad (4)$$

где  $\lambda$  – произвольное вещественное число. Его значение влияет на местоположение особой точки этого решения на плоскости годографа. Если  $\psi_1$  – решение (2), то  $\psi_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta}$  – новое решение. Это дает возможность построить счетное множество частных решений, ассоциированных с (3).

2. Если положить в (4)  $\lambda=1$ , то особая точка решения (3) и всех других ассоциированных с ним будет находиться на звуковой линии, что не-

обходится при построении течений, в которых звуковая скорость является характерной.

Построим решение по аналогии с примером обтекания профиля Гуардлея газом Трикоми, но теперь для уравнения (2), т.е. возьмем линейную комбинацию двух решений

$$\psi = K \operatorname{Re}(\psi_1) + \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \beta^2}\right) = \operatorname{Re}\left(K \tau \sin \omega + \frac{\tau \sin \omega}{(1 - \tau \cos \omega)^3}\right),$$

где  $K$  – постоянная величина.

Соответствующий потенциал скоростей имеет вид

$$\phi = \sqrt{a} K \operatorname{Re}\left(\frac{\tau^2}{2} + \tau \cos \omega\right) - \sqrt{a} \operatorname{Re}\left(\frac{\tau^2 - \tau \cos \omega}{(1 - \tau \cos \omega)^3}\right).$$

Профилью соответствует условие  $\psi = 0$ ,  $\beta \neq 0$ , при этом достаточно построить его до предельной характеристики (в трансзвуковой зоне влияния).

Уравнения характеристик для (2) записываются в виде

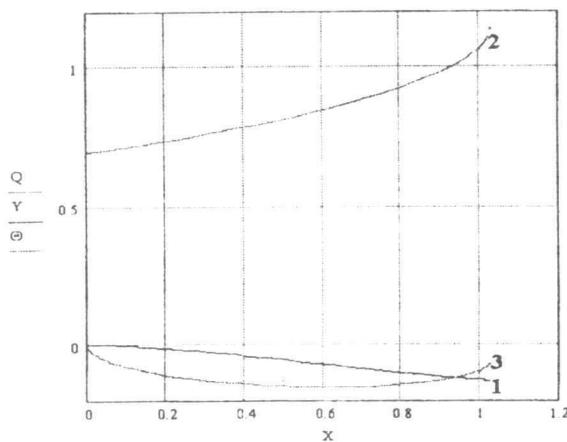
$$\pm (\beta - \beta_0) = \sqrt{\tau^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Предельной характеристике соответствует знак «минус» и  $\beta_0 = 0$ .

Форма профиля на плоскости  $(x, y)$  определяется по формулам

$$x = \int_{\phi_0}^{\phi} \left( \frac{1}{q} \cos \theta \right)_{\psi=0} d\phi, \quad y = \int_{\phi_0}^{\phi} \left( \frac{1}{q} \sin \theta \right)_{\psi=0} d\phi.$$

На рисунке представлены результаты расчётов при  $K = -0.4$  трансзвуковой части профиля.



Кривая 1 – это форма профиля (при  $y < 0$ ), кривая 2 – зависимость  $q(x)$ , кривая 3 – зависимость  $\theta(x)$

Данное значение  $K$  является нижней границей допустимых значений (отсутствие предельной линии в трансзвуковой зоне).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гудерлей К.Г. Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Личук С.Т. Обтекание профиля Гудерлея звуковым потоком газа // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1979. Вып. 7(10). С. 54 – 66.
3. Томотика С., Тамада К. Двумерное смешанное течение сжимаемой жидкости. Ч. 3 // Механика: Сб. перев. 1952. Вып. 2(12). С. 31 – 45.

УДК 533. 6. 011: 532. 529

Е. Н. Гамаюнова

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И ОТРАЖЕНИЙ УДАРНЫХ ВОЛН\*

Задача аналитического изучения взаимодействия и отражения относительно слабых ударных волн (УВ) (интенсивности  $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0$ ,  $P_{20} = (p_2 - p_0)/B_0$ ,  $B_0 = \rho_0 c_0^2$ ) с углом наклона  $\alpha$  к вертикали при различных режимах нерегулярных взаимодействий в газе и газожидкостной среде, характеризуемой параметром  $R_0(\gamma)$ , сводится к построению решения краевой задачи системы уравнений коротких волн [1] (во внутренних переменных  $X, Y(\delta, Y)$ ) для компонент скорости  $\mu, v$ , удовлетворяющего на фронтах УВ  $\delta = \delta^*(Y)$  (Maxa,  $q_n = 0$ ; отражённого,  $q_n = 1$ ; отражённого,  $q_n = \eta$ ) условиям динамической совместимости и асимптотическим условиям сращивания на границах с областями линейного и квазиодномерного решения.

Решение задачи ищется с учётом предположения о том, что поперечная составляющая скорости за тройными точками может иметь разрыв ( $\Delta v_n = v_n^+ - v_n^-$ ,  $n = 1, 2$ ).

Для описания течений в области возмущения за фронтами УВ используется класс параметрических решений, удовлетворяющий точно условиям на фронте при  $q = q^* = const$

$$\begin{aligned}\mu &= \phi_2(q)Y^2 + \phi_1(q)Y + \phi_0(q); \quad \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q); \\ v &= \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q).\end{aligned}\tag{1}$$

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00524.

Схемы нерегулярных взаимодействий и отражений относительно слабых УВ в области параметров  $\alpha^\vee, \eta$  характеризуются набором констант для верхней (с индексом 1) и нижней (с индексом 2) тройных точек взаимодействия. При допущении разрыва поперечной составляющей скорости, условия динамической совместности примут вид [2, 3]

$$v_n^\pm = \mp q_n A_n \pm B_n (\mu_n - q_n), \quad v_n^\mp = \mp C_n \mu_n, \quad A_n = \alpha^\vee \pm Y_n, \quad \delta_n = \frac{1}{2} (q_n + A_n^2), \quad (2)$$

$$B_n = \beta_n^\vee \mp Y_n, \quad B_n = (A_n^2 - \mu_n)^{1/2}, \quad C_n = \gamma_n^\vee \pm Y_n, \quad C_n = (q_n + B_n^2)^{1/2},$$

$$\beta_n^\vee = \frac{tg \beta}{\bar{\epsilon}^{1/2}}, \quad \gamma_n^\vee = \frac{tg \gamma}{\bar{\epsilon}^{1/2}}.$$

Параметры, определяющие УВ структуры  $\delta_n, Y_n, \mu_n, v_n^\mp, v_n^\pm; \beta_n^\vee, \gamma_n^\vee, q_0$  (геометрию фронтов, координаты, углы наклона в тройных точках, распределение параметров вдоль УВ фронтов), удовлетворяют системе 21 алгебраического уравнения, которую можно свести [2, 3] к анализу двух трансцендентных уравнений относительно  $A_1, A_2$  для модели С - развитого нерегулярного взаимодействия ударных волн

$$A_1^2 = 3z_1^2 - 2, \quad A_2^2 = 3z_2^2 - 2\eta, \quad A_1 + A_2 - 2\alpha^\vee = A, \quad (3)$$

$$3z_1^2 - 3z_2^2 - 1 + \eta = (z_1 - z_2)A,$$

$$A[6z_1^2 - 4 - \eta + (z_1 + z_2 - A)(2z_1 - z_2)] =$$

$$= \sqrt{3z_1^2 - 2} + \eta \sqrt{3z_2^2 - 2\eta} - 2 \left[ (z_1^2 - 1)^{3/2} + (z_2^2 - \eta)^{3/2} \right].$$

Анализ системы (3) позволяет провести классификацию УВ взаимодействий (структур УВ); определить границы областей существования (в плоскости  $\alpha^\vee, \eta$ ) различных УВ структур; рассчитать основные параметры при различных режимах взаимодействия УВ.

$$v_n^\mp = \mp \frac{\mu_n}{\sqrt{3}} (2q_n + A_n^2)^{1/2}, \quad v_n^\pm = \mp q_n A_n \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} (A_n^2 - q_n)^{3/2},$$

$$\mu_n = (q_n + 2A_n^2)/3, \quad \delta_n = (q_n + A_n^2)/2, \quad Y_n = \pm (A_n - \alpha^\vee), \quad (4)$$

$$\beta_n^\vee = \pm Y_n + \frac{1}{\sqrt{3}} (A_n^2 - q_n)^{1/2}, \quad \gamma_n^\vee = \mp Y_n + C_n, \quad C_n = \frac{1}{\sqrt{3}} (2q_n + A_n^2)^{1/2}.$$

На рисунке изображены расчётные значения параметров  $\Delta v, \mu, \delta^\vee$  в зависимости от  $\alpha^\vee$  при различных  $\eta$ .

Геометрию фронта Маха и значения параметров на нём согласно (1) определим при  $q = q_0$ , рассчитывая параметр  $q_0$  по формуле

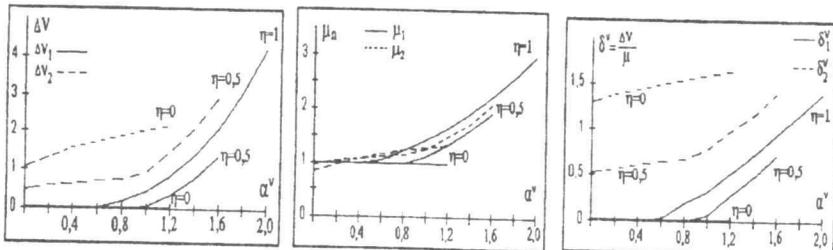
$$q_0 = (C_1 + C_2) / 2(Y_1 - Y_2).$$

Для отражённых УВ  $A_1B_1, A_2B_2$  при  $q^* = q_1$  и  $q^* = q_2$ , предполагая, что параметры в точке  $A_n$  ( $\delta = \delta_n, \mu = \mu_n, Y = Y_n$ ) известны, а  $B_n$  – точка вырождения отражённой УВ ( $\mu_n = q_n, \delta_n = q_n$ ), с помощью (1) получим систему двух уравнений относительно  $q^*$ ,  $Y_B$  с решением

$$q^* = \frac{a_n^2}{4(\delta_n - q_n)}, \quad Y_B = Y_n \pm \frac{a_n}{2q^*}, \quad a_n = \sqrt{2\delta_n - \mu_n - q_n}. \quad (5)$$

Используя (3), получим

$$q^* = \frac{1}{6}, \quad Y_B = Y_n \pm \sqrt{3(A_n^2 - q_n)}. \quad (6)$$



Модель  $C''$  – развитого нерегулярного отражения  $SMR$  получим в параметрическом виде при  $\eta = 1, z_1 = z_2$  ( $z_1$  – параметр), исключая  $A$  из 3-го уравнения (3),

$$A = \frac{1}{2z_1} \left[ 8z_1^2 - 5 - \sqrt{(8z_1^2 - 5)^2 - 8z_1(3z_1^2 - 2)^{1/2} + 16z_1(z_1^2 - 1)^{3/2}} \right], \quad 1 \leq z_1 \leq \sqrt{2},$$

$$\alpha^v = \sqrt{3z_1^2 - 2} - \frac{1}{2}A, \quad \mu_1 = 2z_1^2 - 1, \quad Y_1 = \frac{1}{2}A, \quad q_0 = \frac{z_1}{2\sqrt{3z_1^2 - 2 - \alpha^v}}. \quad (7)$$

Модель  $B$  – вырожденного нерегулярного взаимодействия получим в параметрическом виде  $z_2/A, \eta$  ( $A$  – параметр) из (3) в случае вырождения отражённой волны в верхней точке взаимодействия при  $z_1 = A_1 = 1$

$$z_2 = \frac{1}{6} \left[ A + \sqrt{(6 - A)^2 - 12(1 - \eta)} \right], \quad \alpha^v = \frac{1}{2} \left[ 1 - A + \sqrt{3z_2^2 - 2\eta} \right], \quad q_0 = \frac{1 + z_2}{2A}. \quad (8)$$

Модель  $B''$  – вырожденного нерегулярного отражения  $NMR$  получим из (3), (8) при  $\eta = 1$  в явном виде

$$A = 2(1 - \alpha^v), \quad Y_1 = 1 - \alpha^v, \quad q_0 = \frac{1}{2(1 - \alpha^v)}; \quad 0 \leq \alpha^v \leq \frac{1}{2}.$$

Уравнение фронта Маха и выражения для скоростей на нём в этом случае записываются в явном виде

$$\delta = \frac{1}{2(1 - \alpha^v)} Y^2 + \frac{1}{2}(1 + \alpha^v) \mu = -\frac{\alpha^v}{(1 - \alpha^v)^2} Y^2 + (1 + \alpha^v),$$

$$v = \frac{2\alpha^v}{(1 - \alpha^v)^3} Y^3 - \frac{1 + \alpha^v}{1 - \alpha^v} Y. \quad (9)$$

Результаты (4) – (9) характеризуют основные параметры и структуры взаимодействия УВ.

В общем случае для нерегулярных взаимодействий определение параметров  $q^*$ ,  $q_0$  позволяет рассчитать положение и структуру УВ, распределение параметров на фронтах.

Результаты аналитических исследований позволяют построить [2, 3] общую картину распределения параметров в области возмущения при отражении и взаимодействии УВ с учётом нелинейных особенностей.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндягин Г.П. Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изд. РАН. МГЖ. 1996. № 2. С. 183 – 190.
2. Шиндягин Г.П. Аналитическое исследование ударно-волновых структур и потоков при отражении и взаимодействии относительно слабых ударных волн // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2001. Вып. 15(18). С. 31 – 44.
3. Шиндягин Г.П., Гамаюнова Е.Н. Аналитическое исследование ударно-волновых структур и параметров при нелинейных взаимодействиях ударных волн // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 193 – 196.

УДК 539.3

Ю. П. Гуляев, М. С. Сухоловская

#### ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ В ОКРЕСТНОСТИ КВАЗИФРОНТА

Рассмотрим тонкий полубесконечный вязкоупругий стержень. Вязкоупругие свойства материала будут описываться с помощью определяющих соотношений, взятых в интегрально-операторной форме. Краевая задача при ударном воздействии запишется в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} &= \sigma(\xi, \tau) - \int_0^\tau K_*(\tau - \tau_*) \sigma(\xi, \tau_*) d\tau_*. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничное условие на левом конце стержня

$$\sigma(0, \tau) = IH(\tau), \quad (2)$$

условие непрерывности перемещения на переднем фронте волны

$$u(\xi, \tau)|_{\xi=k_c \tau} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma$  – напряжение,  $u$  – деформация,  $\tau$  – время,  $\xi$  – продольная координата,  $H(\tau)$  – ступенчатая функция Хевисайда,  $K_*(\tau - \tau_*)$  – разностное ядро.

В данной статье будет рассматриваться только окрестность квазифронта, который движется по закону

$$\xi = k_c \tau \quad (4)$$

со скоростью

$$k_c^2 = \frac{\beta}{\beta + 1}.$$

В окрестности квазифронта происходит быстрое изменение скорости и деформации.

Для получения уравнения движения квазифронта воспользуемся уравнением движения стержня и условием, что перемещения на квазифронте равны нулю. Для этого проинтегрируем три раза вдоль фронта волны условие (3):

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} k_c^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial \tau} 3k_c^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \tau^2} k_c + \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} = 0. \quad (5)$$

На основании уравнения движения (1) можно записать

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi \partial \tau}.$$

Подставив это уравнение в равенство (5) и проинтегрировав полученное уравнение в окрестности квазифронта по продольной координате, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} k_c^3 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} 3k_c^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} k_c + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = 0.$$

Принимая во внимание уравнение движения, можно записать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} k_c^3 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} 3k_c^2 + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} k_c + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = 0.$$

Подставив в полученное уравнение закон вязкоупругости (1), получим окончательную форму уравнения движения в окрестности квазифронта

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \left( 1 + \frac{3}{k_c} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \left( \frac{3}{k_c} + \frac{1}{k_c^3} \right) + \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} + \frac{3}{k_c} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \tau} = 0, \quad (6)$$

$$\text{где } \varphi^* = \int_0^\tau K_* (\tau - \tau_*) \sigma(\xi, \tau_*) d\tau_*$$

Для нахождения асимптотического решения в окрестности квазифронта воспользуемся методом обращения преобразования Лапласа. В изображениях уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \xi} \left( 1 + \frac{3}{k_c^2} + \frac{1}{\sqrt{s+\beta}} \right) + \frac{3s}{k_c} \left( 1 + \frac{1}{3k_c^2} + \frac{1}{\sqrt{s+\beta}} \right) \bar{\sigma} = 0, \quad (7)$$

где  $s$  – параметр преобразования Лапласа.

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\bar{\sigma} = I \frac{1}{s} \exp \left\{ - \frac{3s}{k_c} \left[ \frac{1 + \frac{1}{3k_c^2} + \frac{1}{\sqrt{s+\beta}}}{1 + \frac{3}{k_c^2} + \frac{1}{\sqrt{s+\beta}}} \right] \xi \right\}$$

Разложим его в ряд при  $s \rightarrow 0$ . Тогда получим асимптотику для квазифронта:

$$\bar{\sigma} = I \frac{1}{s} \exp \left\{ - \frac{1}{k_c} \left[ s - \frac{1}{2\beta(\beta+1)} s + \frac{4\beta+3}{8\beta^2(\beta+1)^2} s^2 \right] \xi \right\}.$$

При  $k_c = 1$  получим уравнение движения в окрестности переднего фронта волны

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} + \frac{3}{4} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \tau} = 0.$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коссович Л.Ю., Сухоловская М.С. // Механика деформируемых сред: Межвуз. сб. науч. ст. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 14. С. 87.

## ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ НАГРУЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

В связанных задачах взаимодействия потока жидкости или газа с плохообтекаемыми телами большое значение имеет закон распределения давления по поверхности тела, который определяет напряженно-деформированное состояние тела. В свою очередь, форма тела, полученная им в результате нелинейного деформирования, оказывает существенное влияние на формирование параметров обтекания. Ярким примером решения нелинейной задачи взаимодействия, полученного методом физических итераций, являются результаты работы [1], в которой мягкая оболочка (МО) может качественно менять свою форму в зависимости от положения точки отрыва на ее поверхности. Зонные схемы обтекания [2] замкнутых МО представлены в [3].

**1. Постановка задачи.** В настоящей статье рассматривается первая составляющая часть задачи взаимодействия – задача обтекания потоком вязкого нетеплопроводного газа жёсткого бесконечного цилиндра, помещенного поперёк потока (рис. 1). Основное внимание уделяется построению алгоритма численного расчета распределения давления газа по контуру цилиндра с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [4, 5].

В начальный момент времени в однородный поток вязкого нетеплопроводного газа перпендикулярно ему помещается жёсткий бесконечный цилиндр. Рассматривается задача плоского обтекания (рис. 1). На бесконечности заданы: скорость потока –  $U_\infty$ , плотность –  $\rho_\infty$ , полная энергия –  $E_\infty$ . Диаметр цилиндра –

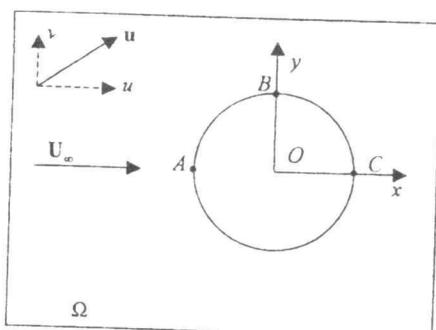


Рис. 1

*L.* Течение описывается тремя законами сохранения в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\sigma} \rho u \cdot d\sigma = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u \cdot dV + \int_{\sigma} \rho (u)^2 \cdot d\sigma - \int_{\sigma} \tilde{P} \cdot d\sigma = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \int_{\sigma} \rho Eu \cdot d\sigma - \int_{\sigma} \tilde{P} \cdot d\sigma = 0,$$

где  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $E$  – полная энергия,  $\tilde{\mathbf{P}}$  – тензор напряжений на элементарной площадке для газа, подчиняющегося закону Ньютона для вязких сред,

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} -p - \frac{2}{3\text{Re}}(-2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) & \frac{1}{\text{Re}}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) & 0 \\ \frac{1}{\text{Re}}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) & -p - \frac{2}{3\text{Re}}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) & 0 \\ 0 & -p - \frac{2}{3\text{Re}}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) \end{pmatrix},$$

его кинематическая вязкость характеризуется  $\mu$  и  $\lambda = -2\mu/3$ ;  $V$ ,  $\sigma$  – некоторый фиксированный объём и поверхность его ограничивающая;  $d\sigma$  – вектор элемента площади, направление которого совпадает с направлением внешней нормали, а модуль равен площади элемента. Уравнение состояния для идеального нетеплопроводного газа имеет вид  $p = \rho \cdot (\gamma - 1) \cdot \varepsilon$ , где  $\varepsilon = E - \mathbf{u}^2/2$  – внутренняя энергия,  $\gamma$  – отношение теплоёмкостей.

Начальные условия и условия прилипания для вязкого газа на поверхности цилиндра запишем в виде  $\mathbf{u} = (U_\infty, 0)$ ,  $E = E_\infty$ ,  $\rho = \rho_\infty$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}(r, 0) = (U_\infty, 0)$  и  $\mathbf{u}(r, t)|_{r=\Sigma} = 0$ . Для перехода к безразмерным переменным воспользуемся следующими масштабами:  $r \sim L$ ,  $\rho \sim \rho_\infty$ ,  $|\mathbf{u}| \sim U_\infty$ ,  $t \sim L/U_\infty$ ,  $E \sim U_\infty^2$ ,  $p \sim \rho_\infty U_\infty^2$ . При этом уравнения сохраняют свой вид. Параметрами подобия являются числа Рейнольдса ( $\text{Re}$ ) и Маха ( $M_\infty$ ), причем  $E_\infty = 0.5 + [(\gamma - 1)M_\infty^2]^{-1}$ .

**2. Алгоритм решения.** Расчетная область  $\Omega$  (рис. 1) покрывается сеткой треугольных элементов. На ней аппроксимируются законы сохранения потока массы, количества движения и полной энергии через грань конечного элемента за единицу времени

$$\begin{aligned} \Delta M &= -\Delta t \sum_{i=1}^3 \rho_i^* \mathbf{u}_i^* \mathbf{\sigma}_i, \\ \Delta Q &= \Delta t \sum_{i=1}^3 \left[ \tilde{\mathbf{P}}_i^* \mathbf{\sigma}_i - \rho_i^* (\mathbf{u}_i^*)^2 \mathbf{\sigma}_i \right], \\ \Delta E &= \Delta t \sum_{i=1}^3 \left[ \mathbf{u}_i^* \tilde{\mathbf{P}}_i^* \mathbf{\sigma}_i - \rho_i^* E_i^* \mathbf{u}_i^* \mathbf{\sigma}_i \right]. \end{aligned}$$

Символом «\*» отмечены параметры, взятые в серединах граней.

При аппроксимации краевых условий необходимо учитывать, что условия, заданные на бесконечности, сносятся на внешний контур расчетной области (рис. 1). Это ограничивает время расчета, так как отраженные возмущения могут внести изменения в поток.

На контактной границе не определены плотность и энергия. Оказалось, что при квадратичном законе распределения параметров, который принят для внутренних элементов, недостаточно уравнений для нахождения неизвестных. Дополнительное соотношение было выведено на основе гипотезы: производные по нормали к границе от плотности и энергии постоянны в приграничных элементах. Для нахождения недостающих параметров ( $\rho, E$ ) на контактной границе и серединах элементах ( $\rho, E, u$ ) воспользуемся формулой приближенного интегрирования второго порядка аппроксимации:  $A \sim S(a + b + c)/3$ , где  $A$  – интеграл от некоторой величины на треугольном элементе,  $a, b, c$  – значения этой величины на серединах граней,  $S$  – площадь треугольника.

С помощью гипотезы выразим значение на контактной границе через заданное значение на внешней поверхности элемента и серединах прилежащих к границе гранях (рис. 2):

$$a_3 \sim [a_2 h_2 + a_1 (h_1 - h_2)]/h_1.$$

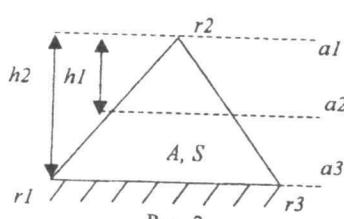


Рис. 2

Шаг по времени выбирался из соображений практической сходимости, которая была определена численным экспериментированием при изменении  $\Delta t$  и  $\Delta x$ . Ударные начальные условия приводят к тому, что в начальный период времени за цилиндром возникает область сильного разряжения. На этом этапе шаг выбирается так, чтобы относительное изменение параметров было меньше единицы (например, 0,01).

**3. Численные эксперименты.** В качестве примера расчёта взяты значения:  $Re=1000$ ,  $M_\infty = 0.2$ . На рис. 3 приведена эпюра распределения давления газа на верхнюю часть цилиндра в установившемся состоянии течения, а на рис. 4 даны изменения во времени давления в контрольных точках  $A, B$  и  $C$ , которые характеризуют начальный этап обтекания.

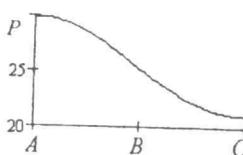


Рис. 3

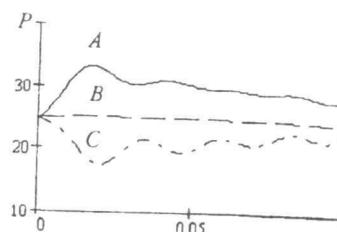


Рис. 4

Картина изолиний на рис. 5 показывает типичное распределение давления в расчетной области.

Полученные результаты качественно согласуются с имеющимися в литературе и показывают работоспособность данного алгоритма, который легко может быть адаптирован для расчета нагружения тел неканонической формы.

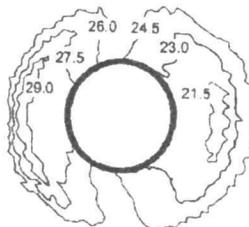


Рис. 5

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гудин Б.В., Ридель В.В., Шагидуллин Р.Р. Отрывное обтекание мягкой оболочки // Шестая Дальневост. конф. по мягким оболочкам. Владивосток, 1979. С. 123 – 127.
2. Паркинсон Г., Яндали Т. Модель следа с источниками за плохообтекаемым телом в потенциальном потоке // Механика: Сб. перев. 1971. Вып. 2(126). С. 86 – 102.
3. Шагидуллин Р.Р. Математические проблемы моделирования мягких оболочек. Казань: Изд-во КМО, 2001.
4. Коннор Дж., Бреббса К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979.
5. Сыгрле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: Пер. с англ. Б.И. Квасова / Под ред. Н.Н. Яненко. М.: Мир, 1980.

УДК 533.6.011:532.529

В. А. Китанин, Г. Д. Севостьянов

#### РАСЧЁТ РЕГУЛЯРНОГО ОТРАЖЕНИЯ ОКОЛОЗВУКОВОГО СКАЧКА ОТ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Стационарные околозвуковые плоские безвихревые течения идеального газа описываются системой Фальковича-Кармана [1] ( $u = M^2 - 1$ ,  $M$  – число Маха)

$$uu_x = v_y, \quad v_x = u_y, \quad (1)$$

на околозвуковом скачке  $x = h(y)$  имеем два условия

$$h' = -\frac{[v]}{[u]}, \quad (h')^2 = \langle u \rangle, \quad (2)$$

$[f]$  – разность и полусумма значений  $f_+$  и  $f_-$  разрывной на скачке функции  $f$ . Тогда уравнение ударной поляры Буземана (1943) имеет вид

$$[v]^2 = \langle u \rangle [u]^2.$$

Пусть косой околозвуковой скачок  $AO$  в слабосверхзвуковом однородном потоке ( $u = u_\infty = M_\infty^2 - 1 > 0$ ,  $v = v_\infty = 0$ ,  $y \geq 0$ ), имея уравнение  $x = -\gamma y$  ( $\gamma = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ ,  $\omega = \frac{\pi}{2} - \alpha$  – угол падения скачка  $AO$ ), регулярно отражается от плоской стенки (оси  $x$ ) в точке  $O$  ( $x = y = 0$ ) в виде криволинейного скачка  $OB$  с неизвестным уравнением  $x = h(y)$  (рис. 1, а).

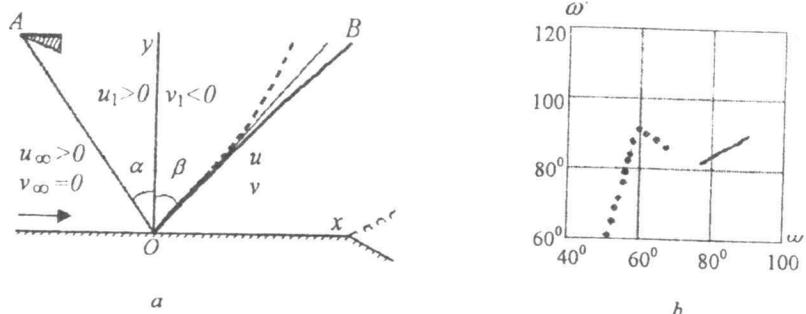


Рис. 1

Задача рассматривалась в 1937 г. Л. Крокко (Стоско L.), который ввёл “ежевидную” ударную поляру для кривого скачка в однородном потоке; К. Г. Гудерлей (Guderley K. G.) построил первое приближение на плоскости  $(u, v)$ , заменив элемент поляры Буземана её касательной. Первое и второе околозвуковые приближения на плоскости  $(x, y)$  построены в [2]. В данной статье построено третье околозвуковое приближение на  $(x, y)$  и дан расчёт поля давления за  $OB$  (причина искривления  $OB$  – течение уплотнения или разрежения ниже  $OB$  по потоку).

Между скачками  $AO$  и  $OB$  имеем однородный наклонный поток ( $u = u_1 > 0$ ,  $v = v_1 < 0$ ), в точке  $O$  за  $OB$  имеем точку Крокко ( $u(0,0) = u_c = -u_1/7$ ,  $v(0,0) = v_c = 0$ ), тогда [2]

$$u_1 = zu_\infty, z \approx 0,6060, v_1 = -0,3529u_\infty^{3/2}, \\ \alpha \approx \gamma \approx 0,8961\sqrt{u_\infty}, \beta \approx \delta = \operatorname{tg} \beta \approx 0,5096\sqrt{u_\infty}, \quad (3)$$

$\beta$  – угол наклона к оси  $y$  касательной к скачку  $OB$  в точке  $O$  ( $\omega' = \frac{\pi}{2} - \beta$  – угол его отражения). Тогда имеем линейную околозвуковую зависимость между углами  $\frac{\pi}{2} - \omega' \approx 0,5687(\frac{\pi}{2} - \omega) \ll 1$  (рис. 1, б).

На стенке  $y = 0$ ,  $x > 0$ :  $v = 0$ .

На скачке  $OB$  из (2), (3) имеем

$$\begin{aligned} u &= u_{\text{ck}} = u_c + 4\delta G(y) + 2G^2(y), \\ v &= v_{\text{ck}} = 4u_c G(y) - 6\delta G^2(y) - 2G^3(y), \\ h'(y) &= g(y) = \delta + G(y), \quad G(0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции  $h, g, G$  неизвестны.

За  $OB$  ищем решение (1) в виде рядов ( $y \geq 0$ )

$$\begin{aligned} u &= a_0(x) + a_1(x)y^2 + a_2(x)y^4 + \dots \\ v &= b_0(x)y + b_1(x)y^3 + b_2(x)y^5 + \dots \\ b_0 &= (a_0^2/2), \quad a_1 = b_0'/2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

аналитическая неизвестная функция  $a_0(x)$  при малых  $x$  ищется в виде

$$a_0(x) = u_c + d_0x + d_1x^2 + d_2x^3 + \dots, \quad (6)$$

$d_0 = g_c = u_x(0, 0)$  — параметр, пропорциональный кривизне скачка  $OB$  в точке  $O$  (градиент скорости);

аналогично

$$\begin{aligned} G(y) &= c_0y + c_1y^2 + c_2y^3 + \dots \\ h(y) &= \delta y + c_0y^2/2 + c_1y^3/3 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Записав (5) на скачке  $OB$  ( $x = h(y)$ ) и учитывая (4), (7), найдём коэффициенты в (6) и (7).

$$\begin{aligned} c_0 &= g_c/4, \quad c_1 = -\frac{15}{64} \frac{\delta g_c^2}{u_c} > 0, \quad c_2 = -\frac{427}{512} \frac{g_c^3}{u_c} > 0, \dots \\ d_0 &= g_c, \quad d_1 = -\frac{37}{32} \frac{g_c^2}{u_c} > 0, \quad d_2 = \frac{459}{512} \frac{g_c^3}{u_c} < 0, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда из (7) определим уравнение отражённого скачка  $OB$ :

$$x = h(y) = \delta y + \frac{g_c}{8}y^2 - \frac{5}{64} \frac{\delta g_c^2}{u_c} y^3 - \frac{427}{2048} \frac{g_c^3}{u_c} y^4 + \dots, \quad (9)$$

для ускоренного потока за  $OB$  имеем  $g_c > 0$ , для замедленного —  $g_c < 0$ , для косого скачка  $OB$   $g_c = 0$ . Из (5), (6), (8) найдём поле течения газа за  $OB$ , которое можно вместе с уравнением  $OB$  записать в универсальной форме, используя околозвуковой закон подобия Кармана-Фальковича (1947), при этом функции удовлетворяют системе, аналогичной (1):

$$X = \frac{|g_c|}{|u_c|} x, \quad Y = \frac{|g_c|}{\sqrt{u_c}} y, \quad \varepsilon = \text{sign } g_c = \pm 1, \quad \varepsilon^2 = 1,$$

$$\frac{u}{|u_c|} = U(X, Y) = -1 + \varepsilon X + \frac{37}{32} X^2 - \frac{21}{32} Y^2 - \varepsilon \frac{489}{256} X Y^2 + \varepsilon \frac{459}{256} X^3 + \dots,$$

$$\frac{v}{|u_c|^{3/2}} = V(X, Y) = Y \left( -\varepsilon - \frac{21}{16} X - \varepsilon \frac{489}{256} X^2 + \varepsilon \frac{107}{256} Y^2 + \dots \right), \quad (10)$$

$$X = H(Y) = \sqrt{3} Y + \frac{\varepsilon}{8} Y^2 + \frac{5\sqrt{3}}{64} Y^3 + \varepsilon \frac{427}{2048} Y^4 + \dots$$

Решение (10) записано до третьего приближения включительно по  $X$  и  $Y$ . Изобарами являются линии постоянства давления  $p$  или  $u$  (т.е.  $U$ ); они наклоняются в сторону области разрежения (рис. 2, *a*) и отклоняются от области уплотнения (рис. 2, *b*).

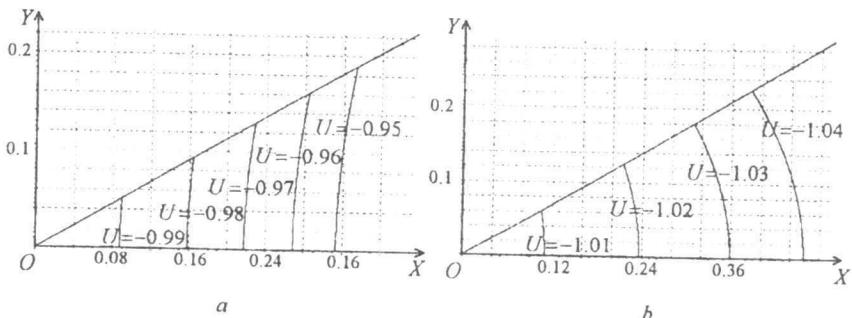


Рис. 2

Для степенных рядов использована процедура ускорения их сходимости. Остальные приближения получаются аналогично.

Эта особенность имеет место и при обтекании тонкого клина слабо-сверхзвуковым потоком ( $c u_1 > 1$ ), а также в перерасширенной слабосверхзвуковой плоской струе.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г. Д. Основы теории околозвуковых течений газа. Ч. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987.
2. Севостьянов Г. Д. Регулярное отражение околозвукового скачка от стенки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 181 – 184.

Д. В. Кондратов, Л. И. Могилевич, В. С. Попов

## ВОЗМУЩАЮЩИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ МОМЕНТ В ПОПЛАВКОВОМ МАЯТНИКОВОМ АКСЕЛЕРОМЕТРЕ С УПРУГИМ КОРПУСОМ

Рассматривается поплавковый маятниковый акселерометр (ПМА) и определяется влияние упругости корпуса ПМА на гидродинамические реакции при вибрации основания, на которое крепится прибор.

Задача состоит из уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости с учётом переносного движения основания маятникового акселерометра в системе координат  $r, \theta, y$ , жёстко связанной с центром поплавковой камеры, которые имеют вид [1]

$$\bar{W}_4 = -\frac{1}{\rho} \nabla P + v \Delta \bar{V}, \quad \nabla \bar{V} = 0,$$

где  $P$  – давление жидкости,  $\rho$  – плотность,  $v$  – кинематический коэффициент вязкости,  $\Delta = \nabla^2$  – оператор Лапласа;  $\bar{W}_4$  – абсолютное ускорение единицы объёма жидкости в камере,  $\nabla$  – оператор Гамильтона.

Границные условия на непроницаемых поверхностях в цилиндрической щели и условия свободного истечения жидкости в торцевые зазоры:

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{\partial u_3}{\partial t}; \quad V_\theta = \frac{\partial u_2}{\partial t}; \quad V_y = -\frac{\partial u_1}{\partial t}, \text{ при } r = R_2 + \delta + u_3 \\ V_r &= \dot{x}_1 \sin(\theta + \varphi) + \dot{z}_1 \cos(\theta + \varphi); \quad V_\theta = \dot{x}_1 \cos(\theta + \varphi) - \dot{z}_1 \sin(\theta + \varphi); \\ V_y &= 0, \text{ при } r = R_2 + e \cos \theta, \\ P &= 0 \text{ при } y = \pm \frac{l_2}{2}, \end{aligned}$$

где  $u_1 = u_1(y, \theta, t)$  – продольное упругое перемещение оболочки;  $u_2 = u_2(y, \theta, t)$  – окружное упругое перемещение оболочки;  $u_3 = u_3(y, \theta, t)$  – прогиб оболочки;  $x_1, z_1$  – перемещения центра масс поплавка относительно центра масс камеры;  $e$  – эксцентриситет центра масс поплавка;  $\delta$  – ширина цилиндрической щели.

Скалярные уравнения динамики корпуса ПМА как упругой замкнутой цилиндрической оболочки, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява с учётом переносного движения относительно инерциального пространства, запишутся в виде [2, 3, 4]

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{1 - \mu_0}{2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} - \frac{1 + \mu_0}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial \theta} - \frac{\mu_0}{R} \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{1 - \mu_0^2}{Eh_0} [p_0 h_0 W_{7s} - q_s];$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1-\mu_0}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial \theta} + \frac{1-\mu_0}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - a_0^2 \left[ 2(1-\mu_0) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \right] + \\
& + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - a_0^2 \left[ (1-\mu_0) \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^3} \right] = \frac{1-\mu_0^2}{E h_0} [\rho_0 h_0 W_{70} - q_\theta]; \\
& - \frac{\mu_0}{R} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - a_0^2 \left[ (2-\mu_0) \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^3} \right] + \frac{u_3}{R^2} + \\
& + a_0^2 \left[ R^2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \theta^4} \right] = \frac{1-\mu_0^2}{E h_0} [-\rho_0 h_0 W_{70} - q_n];
\end{aligned}$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона;  $\rho_0$  – плотность материала;  $R$  – радиус срединной поверхности;  $h_0$  – толщина оболочки;  $a_0^2 = \frac{h_0^2}{12R^2}$ ;  $W_7$  – абсолютное ускорение единицы площади срединной поверхности;  $\bar{n}_s$ ,  $\bar{n}_\theta$ ,  $n$  – продольное и окружное направление срединной поверхности оболочки и нормаль к ней;  $q_s$ ,  $q_\theta$ ,  $q_n$  – напряжения со стороны жидкости.

Границные условия для перемещений оболочки в условиях жёсткой заделки на торцах имеют вид  $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial y}$  при  $y = \pm \frac{l}{2}$ .

Методом возмущений с малым параметром  $\lambda = e/\delta < 1$  в нулевом приближении находятся компоненты силы, действующие на центр масс поплавка, закон движения поплавка в предположении гармонического звена движения корпуса прибора относительно инерциального пространства [3].

Гидродинамический момент в ПМА представляет собой двухчленное разложение по  $\lambda$  и записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
L_{2\text{жс}у2}^{1,3} = & \frac{\rho R_2 e^2 \omega^2}{\psi \operatorname{Re} \lambda} \left( \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \frac{l_2}{2} d\xi R_2 d\theta + \right. \\
& \left. + \lambda \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \xi} + \cos \theta \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \xi^2} \right] \Big|_{\xi=0} \frac{l_2}{2} d\xi R_2 d\theta \right).
\end{aligned}$$

Для нулевого приближения имеем

$$\frac{\rho R_2 e^2 \omega^2}{\psi \operatorname{Re} \lambda} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \frac{l_2}{2} d\xi R_2 d\theta = -\frac{m v}{\psi} [v_2 \dot{\beta}_2 - v_{12} q_1 + \varepsilon^2 w_2 \ddot{\beta} + \varepsilon^2 w_{12} \dot{q}_1].$$

Решая задачу в первом приближении по  $\lambda$ , получим искомую постоянную составляющую возмущающего гидродинамического момента в обозначениях [1]

$$\begin{aligned}
\langle L_{nxy} \rangle = & \frac{m\omega^2}{\psi 2\varepsilon^2} E_x E_z \left\{ -K_{os1} \left\{ 6v_e G - \frac{8}{15} F (2\varepsilon^2 w_e M_{s1} - 6v_e M_{s2}) + \right. \right. \\
& + \frac{4}{15} F (12v M_{s2} + 2\varepsilon^2 (1-w) M_{s1}) + \frac{1}{4} E_1 12v (M_{s1}^2 + M_{s2}^2) \Big\} - \\
& - K_{os22} \left\{ \frac{4}{15} F (2\varepsilon^2 w_e M_{os2} + 6v_e M_{os1}) + \frac{2}{15} F (12v M_{os2} - 2\varepsilon^2 (1-w) M_{os1}) + \right. \\
& + \frac{1}{4} E_1 12v (M_{s2} M_{os1} - M_{s1} M_{os2}) \Big\} - K_{os11} \left\{ -\frac{4}{15} F (2\varepsilon^2 w_e M_{os1} - 6v_e M_{os2}) + \right. \\
& + \frac{2}{15} F (12v M_{os2} + 2\varepsilon^2 (1-w) M_{os1}) + \frac{1}{4} E_1 12v (M_{s1} M_{os1} + M_{s2} M_{os2}) \Big\} + \\
& + \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}) \frac{1}{4} E_1 12v (M_{os1}^2 + M_{os2}^2) - \\
& - \frac{m\omega^2}{\psi 2\varepsilon^2} r_{m1} p_{m1} \sin(\varphi_{r1} - \varphi_{p1}) \left( \frac{1}{4} E_2 12v \frac{\delta^2}{\omega^2} \frac{\det_8 Y_{os}}{\psi^3} - 4v_{12} \frac{\delta^2}{\omega^2} \right).
\end{aligned}$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андрейченко К.П., Могилевич Л.И. Динамика гироскопов с цилиндрическим поплавковым подвесом. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987.
2. Чернов А.М. Гидродинамические реакции в поплавковом маятниковом акселерометре с упругим корпусом на выбирирующем основании // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 188 – 190.
3. Кондратов Д.В. Гидродинамические реакции в поплавковом маятниковом акселерометре с упругим корпусом при торцевых истечениях жидкости // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 160 – 163.
4. Андрейченко К.П., Могилевич Л.И. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом поплавка при торцевом истечении жидкости // Изв. вузов. Сер. Машиностроение, 1987. № 1. С. 33 – 41.

УДК 539.3

**Л. Ю. Коссович, Н. А. Пушкина, Ю. В. Шевцова**

## ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНАХ

Рассмотрим нестационарный волновой процесс в двухслойной пластине, каждый слой которой выполнен из изотропного упругого материала. В  $l$ -м слое введём декартову систему координат  $(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, z^{(l)})$ , совмещая плоскость  $Ox_1^{(l)}x_2^{(l)}$  со срединной плоскостью слоя и направляя ось  $z^{(l)}$  по

нормали к срединной плоскости. Введём обозначения:  $\sigma_{ij,l}$  – напряжения,  $v_{i,l}$  – перемещения в  $l$ -м слое пластины.

Будем предполагать, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки. Тогда граничные условия на них имеют вид ( $k = \overline{1,3}$ )

$$\begin{aligned} \text{при } z^{(1)} = -h_1 \quad \sigma_{3k,1} &= 0, \\ \text{при } z^{(2)} = -h_2 \quad \sigma_{3k,2} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия на стыке двух слоёв пластины сформулируем следующим образом:

$$\text{при } z^{(1)} = h_1, \quad z^{(2)} = -h_2 \quad \sigma_{3k,1} = \sigma_{3k,2}, \quad v_{k,1} = v_{k,2}. \quad (2)$$

Рассмотрим случай, когда к торцу пластины приложена ударная продольная нагрузка тангенциального типа, граничные условия для которого имеют вид

$$\text{при } x_1^{(l)} = 0 \quad \sigma_{11,l} = \varphi_l(x_2^{(l)}, z^{(l)})H(t), \quad \sigma_{1j,l} = 0 \quad (j = 2, 3), \quad (3)$$

где  $\varphi_i$  – чётная функция по  $z^{(l)}$ ,  $H(t)$  – функция Хевисайда.

Начальные условия – нулевые:

$$v_{i,l} = \frac{\partial v_{i,l}}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 3). \quad (4)$$

Произведём в уравнениях движения и уравнениях закона Гука, записанных для  $l$ -го слоя пластины, растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$x_i^{(l)} = R\eta_l^{q_l}\xi_i^{(l)}, \quad z^{(l)} = R\eta_l\zeta^{(l)}, \quad t_l = Rc_{2,l}^{-1}\eta_l^{q_l}\tau_l, \quad (5)$$

где  $\eta_l = h_l / R$  – основной малый параметр,  $c_{2,l}$  – скорость волны сдвига в  $l$ -м слое пластины,  $q_l$  – показатель изменяемости.

Введём следующие асимптотики для компонент напряжённо-деформированного состояния (НДС), опуская далее в записи индекс, обозначающий номер слоя ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} v_i &= R\eta^q v_i^0, \quad v_3 = R\eta^q v_3^0, \quad \sigma_{ii} = E\sigma_{ii}^0, \quad \sigma_{ij} = E\sigma_{ij}^0, \\ \sigma_{3i} &= E\eta^{1-q}\sigma_{3i}^0, \quad \sigma_{33} = E\eta^{2-2q}\sigma_{33}^0. \end{aligned} \quad (6)$$

В отличие от случая изотропной пластины, состоящей из одного слоя [1, 2], интенсивность напряжения  $\sigma_{3i}$  выбирается равной не  $3 - 3q$ , а  $1 - q$ . Это объясняется рассматриваемой в нашем случае неоднородностью граничных условий на лицевых поверхностях. В силу выбора асимптотик (6), в уравнения, записанные с учётом (5) в рамках погрешности  $O(\eta^{2-2q})$ , входят слагаемые, содержащие производные по  $\zeta$  от  $\sigma_{3i}^0$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Это позволяет удовлетворить всем граничным условиям на лицевых поверхностях при асимптотическом интегрировании.

Введём следующую зависимость компонент НДС от пространственной координаты:

$$\begin{aligned} v_i^0 &= v_i^{(0)}, \quad v_3^0 = v_3^{(0)} + \zeta v_3^{(1)}, \quad \sigma_{ii}^0 = \sigma_{ii}^{(0)}, \quad \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{(0)}, \\ \sigma_{3i}^0 &= \sigma_{3i}^{(0)} + \zeta \sigma_{3i}^{(1)}, \quad \sigma_{33}^0 = \sigma_{33}^{(0)} + \zeta \sigma_{33}^{(1)} + \zeta^2 \sigma_{33}^{(2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где величины с индексами в скобках от  $\zeta$  не зависят. Представленные в (7) законы изменения  $v_3^0, \sigma_{3i}^0 (i = \overline{1,3})$  принципиально отличаются от [1]: здесь чётные и нечётные составляющие имеют один и тот же асимптотический порядок.

Перейдём в граничных условиях (1), (2) к представлениям (5) – (7). Получим связь между компонентами НДС для первого и второго слоёв

$$\begin{aligned} \zeta^{(2)} = 1: \quad &\sigma_{3i,2}^{(0)} + \sigma_{3i,2}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33,2}^{(0)} + \sigma_{33,2}^{(1)} + \sigma_{33,2}^{(2)} = 0, \\ \zeta^{(2)} = -1, \quad &\zeta^{(1)} = 1: \\ \eta_2 E_2 (\sigma_{3i,2}^{(0)} - \sigma_{3i,2}^{(1)}) &= \eta_1 E_1 (\sigma_{3i,1}^{(0)} + \sigma_{3i,1}^{(1)}), \\ \eta_2 E_2 (\sigma_{33,2}^{(0)} - \sigma_{33,2}^{(1)} + \sigma_{33,2}^{(2)}) &= \eta_1^2 E_1 (\sigma_{33,1}^{(0)} + \sigma_{33,1}^{(1)} + \sigma_{33,1}^{(2)}), \\ v_{i,2}^{(0)} &= v_{i,1}^{(0)}, \quad \eta_2 (v_{i,2}^{(0)} - v_{i,2}^{(1)}) = \eta_1 (v_{i,1}^{(0)} + v_{i,1}^{(1)}), \\ \zeta^{(1)} = 1: \quad &\sigma_{3i,1}^{(0)} - \sigma_{3i,1}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33,1}^{(0)} - \sigma_{33,1}^{(1)} + \sigma_{33,1}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Приведём окончательный вид системы относительно асимптотически главных компонент  $\sigma_{ii,l}^{(0)}, \sigma_{ij,l}^{(0)}, v_{i,l}^{(0)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \eta_2 E_2 \sigma_{ii,2}^{(0)} + \eta_1 E_1 \sigma_{ii,1}^{(0)} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \eta_2 E_2 \sigma_{ij,2}^{(0)} + \eta_1 E_1 \sigma_{ij,1}^{(0)} \right) - \\ - \left( \frac{\eta_2 E_2}{2(1+v_2)} \frac{\partial^2 v_{i,2}^{(0)}}{\partial \tau_2^2} - \frac{\eta_1 E_1}{2(1+v_1)} \frac{\partial^2 v_{i,1}^{(0)}}{\partial \tau_1^2} \right) = 0, \\ \sigma_{ii,l}^{(0)} = \frac{1}{1+v_l^2} \left( \frac{\partial v_{i,l}^{(0)}}{\partial \xi_i} + v_l \frac{\partial v_{i,l}^{(0)}}{\partial \xi_j} \right), \quad \sigma_{ij,l}^{(0)} = \frac{1}{1+v_l} \left( \frac{\partial v_{i,l}^{(0)}}{\partial \xi_j} + v_l \frac{\partial v_{j,l}^{(0)}}{\partial \xi_i} \right), \quad v_{i,2}^{(0)} = v_{i,1}^{(0)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Приведём к размерной двумерной форме записи системы для асимптотически главных компонент НДС. С этой целью обозначим

$$v_{i,2} = v_{i,1} = v_i. \quad (10)$$

Введём усилия  $T_i, S$  и усреднённую плотность  $\rho$  по формулам

$$\begin{aligned} T_i &= 2(h_1 \sigma_{ii,1} + h_2 \sigma_{ii,2}), \quad S = 2(h_1 \sigma_{ij,1} + h_2 \sigma_{ij,2}), \\ \rho &= \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h}, \quad h = h_1 + h_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Получим окончательный вид разрешающей системы

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} + \frac{\partial S}{\partial x_j} - 2\rho h \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0, \quad T_i = C_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + C_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j}, \quad S = D \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$$C_1 = \sum_{l=1}^2 \frac{2E_l h_l}{1-v_l^2}, \quad C_2 = \sum_{l=1}^2 \frac{2E_l h_l v_l}{1-v_l^2}, \quad D = \sum_{l=1}^2 \frac{E_l h_l}{1+v_l}.$$
(12)

Из (12) следует выражение для скорости волны расширения по двумерной теории

$$c^2 = \frac{1}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2} \sum_{l=1}^2 \frac{E_l h_l}{1-v_l^2}.$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies.* London: Academic Press, 1998. 226 p.
2. Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83 – 91.

УДК 531.383

Л.И. Могилевич, В.С. Попов, А.М. Чернов

#### КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, ОКРУЖЁННОГО СЛОЕМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Имеется абсолютно твёрдое тело – корпус, содержащий цилиндрическую камеру радиусом  $R_1$ . Корпус подвергается воздействию гармонического виброускорения. Внутри камеры находится упругий цилиндр – цилиндрическая оболочка длиной  $\ell$ , толщиной  $h_0$  и внешнего радиуса  $R_2$ . Радиус срединной поверхности оболочки  $R \gg h_0$ . Внутренняя поверхность камеры и оболочка образуют цилиндр в цилиндре. Оболочка окружена слоем вязкой несжимаемой жидкости, полностью заполняющей цилиндрическую щель между оболочкой и стенками камеры и соединена с корпусом жесткой заделкой на торцах. Торцевые уплотнения не допускают истечения жидкости на торцах. Толщина слоя жидкости  $\delta \ll R_2$ , а амплитуда прогибов упругой оболочки значительно меньше  $\delta$ .

Связем систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  с корпусом и положим, что перемещения вдоль оси  $O_1y_1$  отсутствуют. Обозначим перемещения корпуса через  $x_0 = E_x \sin(\omega t + \phi_{x0})$ ,  $z_0 = E_z \sin(\omega t + \phi_{z0})$ . Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат  $r, \theta, y$ , полюс которой совпадает с на-

чалом координат  $O_1x_1y_1z_1$ , направления осей  $Oy$ ,  $O_1y_1$  обоих систем координат совпадают.

Введем безразмерные переменные и малые параметры задачи

$$\xi = (r - R_2)/\delta, \quad \zeta = 2y/\ell, \quad \theta = \theta, \quad \tau = \omega t, \quad \psi = \delta/R_2 \ll 1, \quad \lambda = w_m/\delta \ll 1,$$

$$u = u_m U, \quad v = v_m V, \quad w = w_m W, \quad \text{Re} = \delta^2 \omega / v, \quad V_r = w_m \omega U_\xi, \quad V_\theta = (w_m \omega / \psi) U_\theta,$$

$$V_y = (w_m \omega / \psi) \ell / (2R_2) U_\zeta, \quad p = p_0 + \rho v \lambda \omega / \psi^2 P - \rho R_2 [\ddot{x}_0 \sin \theta + \ddot{z}_0 \cos \theta], \quad (1)$$

$$c = \sqrt{E / (\rho_0 (1 - \mu_0^2))}, \quad a_0^2 = h_0^2 / (12R^2),$$

здесь  $\psi$  – относительная толщина слоя жидкости;  $\lambda$  – относительный прогиб оболочки;  $u_m, v_m, w_m$  – амплитуды упругих продольного и окружного перемещений оболочки и прогиба соответственно;  $U, V, W$  – безразмерные упругие продольное, окружное перемещение оболочки и ее прогиб соответственно;  $c$  – скорость звука в оболочке,  $E$  – модуль Юнга,  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона;  $\rho_0$  – плотность материала оболочки;  $U_\xi, U_\theta, U_\zeta$  – безразмерные составляющие вектора скорости жидкости;  $P$  – редуцированное безразмерное давление жидкости;  $p_0$  – уровень отсчета давления;  $\rho$  – плотность жидкости;  $v$  – кинематический коэффициент вязкости;  $\omega$  – частота колебаний,  $t$  – время.

Подставим (1) в уравнения Навье-Стокса и неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости и уравнения динамики упругой цилиндрической оболочки [1, 2] и опустим в них члены порядка  $\psi$ . В результате получим нелинейные уравнения гидроупругости, записанные в безразмерном виде, включающие в себя: уравнения динамики тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости и уравнения динамики цилиндрической оболочки. А также краевые условия на непроницаемых поверхностях камеры и оболочки, жесткой заделки оболочки и условие равенства нулю производной безразмерного давления по продольной координате на торцах, соответствующее отсутствию торцевого истечения жидкости.

Решение задачи гидроупругости искали методом возмущений в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра  $\lambda$

$$P = P_0 + \lambda P_1 + \dots, \quad U_\xi = U_{\xi 0} + \lambda U_{\xi 1} + \dots, \quad U_\theta = U_{\theta 0} + \lambda U_{\theta 1} + \dots, \quad (2)$$

$$U_\zeta = U_{\zeta 0} + \lambda U_{\zeta 1} + \dots, \quad U = U_0 + \lambda U_1 + \dots, \quad V = V_0 + \lambda V_1 + \dots, \quad W = W_0 + \lambda W_1 + \dots$$

Подставляя (2) в безразмерные уравнения гидроупругости в нулевом приближении по  $\lambda$ , линеаризуем их. Учтём наличие в колебательной системе демпфирования, за счет слоя жидкости, то есть быстрое затухание собственных колебаний и возникновение установившихся вынужденных колебаний одной формы. Поэтому рассмотрим далее вынужденные колебания. Решение полученной линейной задачи гидроупругости ищем в виде гармонических функций времени с коэффициентами, зависящими от коор-

динат. Зависимость  $U$ ,  $V$  и  $W$  от  $\zeta$  представлена многочленами второй, третьей и четвертой степени соответственно, а по  $\theta$  – в виде гармонических функций. Проводя решение уравнений динамики оболочки методом Бубнова-Галёркина в первом приближении по  $\zeta$  и  $\theta$  получим следующее выражение для прогиба оболочки:

$$w = -p_0 R^2 (1 - \zeta^2)^2 \left( p_0 h_0 c^2 \left[ \frac{16}{21} - \frac{32}{147} \mu_0^2 + 24 a_0^2 \left( \frac{2R}{\ell} \right)^4 \right] \right)^{-1} + \\ + \frac{4}{3} \frac{R^2 \omega^2}{c^2} \frac{4/5 de_1 (\rho R_2 / p_0 h_0 - 1) + de_2}{\sqrt{de_8}} [E_z \cos \theta \sin(\omega t + \varphi_{z0} + \psi^*(\omega)) + \\ + E_x \sin \theta \sin(\omega t + \varphi_{x0} + \psi^*(\omega))] (1 - \zeta^2)^2, \quad (3)$$

где  $\psi^*(\omega) = \operatorname{arctg}(-b_{33} de_1 / de_7)$ ,  $de_1 = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2$ ,  $de_2 = \alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}$ ,  $de_3 = \alpha_{13} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{23}$ ,  $de_7 = \alpha_{33} de_1 - \alpha_{23} de_2 + \alpha_{13} de_3$ ,  $de_8 = de_7^2 + b_{33}^2 de_1^2$ ,

$$b_{33} = -12 \chi B_0, \quad \alpha_{11} = \frac{16}{105} \frac{R^2 \omega^2}{c^2} - \frac{8}{5} \left( \frac{2R}{\ell} \right)^2 - \frac{8}{105} (1 - \mu_0), \quad \alpha_{12} = \frac{4}{15} \frac{2R}{\ell} (1 + \mu_0),$$

$$\alpha_{13} = \frac{64}{105} \frac{2R}{\ell} \mu_0, \quad \alpha_{22} = \frac{16}{15} \frac{R^2 \omega^2}{c^2} - \frac{4}{3} \left( \frac{2R}{\ell} \right)^2 (1 + 4a_0^2)(1 - \mu_0) - \frac{16}{15} (1 + a_0^2),$$

$$\alpha_{23} = -32/15 (2R/\ell)^2 a_0^2 (2 - \mu_0) - (1 + a_0^2) 32/35,$$

$$\alpha_{33} = -\frac{256}{315} \frac{R^2 \omega^2}{c^2} + \frac{256}{315} (1 + a_0^2) + \frac{128}{5} \left( \frac{2R}{\ell} \right)^4 a_0^2 + \frac{512}{105} \left( \frac{2R}{\ell} \right)^2 a_0^2 + 2\varepsilon^2 \alpha B_0,$$

$$B_0 = \frac{R^2 \omega^2}{c^2 \psi} \frac{\rho R_2}{p_0 h_0 \operatorname{Re}} \left[ \left( \frac{2R_2}{\ell} \right)^2 \frac{256}{105} - \left( \frac{2R_2}{\ell} \right)^4 \frac{128}{5} - \frac{256}{315} \right],$$

$$12\chi = 2\varepsilon^3 (sh\epsilon - \sin \epsilon) / [\varepsilon^2 (ch\epsilon + \cos \epsilon) - 2\varepsilon (sh\epsilon + \sin \epsilon) + 2(ch\epsilon - \cos \epsilon)],$$

$$2\varepsilon^2 \alpha = \frac{2\varepsilon^3 (\varepsilon (ch\epsilon + \cos \epsilon) - (sh\epsilon + \sin \epsilon))}{\varepsilon^2 (ch\epsilon + \cos \epsilon) - 2\varepsilon (sh\epsilon + \sin \epsilon) + 2(ch\epsilon - \cos \epsilon)}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{2}}.$$

Найдем амплитудную частотную характеристику (АЧХ) из полученного выражения (3) для прогиба

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{de_8 (0,8 de_1^0 (\rho R_2 / p_0 h_0 - 1) + de_2^0)^2 / (de_8^0 [0,8 de_1 (\rho R_2 / p_0 h_0 - 1) + de_2]^2)}}, \quad (4)$$

здесь  $de_1^0 = de_1|_{\omega \rightarrow 0}$ ,  $de_2^0 = de_2|_{\omega \rightarrow 0}$ ,  $de_8^0 = de_8|_{\omega \rightarrow 0}$ .

АЧХ (4) определяет три возможные резонансные частоты. Согласно (3) амплитуда колебаний на определенных частотах обращается в нуль. Данные частоты определяются из условия  $4/5 de_1 (\rho R_2 / p_0 h_0 - 1) + de_2 = 0$ .

Рассмотрим исследованную выше задачу в рамках одномассовой модели [3]. Для моделирования прогибов цилиндра введем упругую связь, с приведенным коэффициентом жесткости  $n$ , между корпусом и цилиндром. При этом считаем цилиндр абсолютно жестким с приведенной массой  $m_2$ . Для определения  $m_2$  и  $n$  представим цилиндр упругой балкой с торцевым закреплением, допускающим упругое перемещение торцов:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \beta(EJ)^{-1}W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = \pm \ell/2, \quad (5)$$

здесь  $\beta$  – коэффициент жёсткости относительно прогиба,  $J = 2\pi R_2 h_0 (R_2^2 + h_0^2/4)$  – момент инерции балки-цилиндра относительно оси.

Согласно методу приведённой массы [3], получим

$$m_2 = \frac{1}{35} \frac{m_0(20160 + 1050\beta^* \ell^3 + 17\beta^{*2} \ell^6)}{(\beta^* \ell^3 + 24)^2}, \quad n = 48 \frac{EJ\beta^*}{\beta^* \ell^3 + 24}, \quad (6)$$

здесь  $\beta^* = \beta(EJ)^{-1}$ ;  $m_0 = 2\pi R_2 h_0 \ell \rho_0$  – масса балки-цилиндра.

В данном случае  $\lambda = x_1/\delta \ll 1$  – относительное смещение центра масс твёрдого цилиндра, а уравнение движения центра масс твёрдого цилиндра с приведенной массой и упругой связью вдоль оси  $Ox_1$  имеет вид

$$m_2 \ddot{x}_1 + nx_1 = -m_2 \ddot{x}_0 + N_{\text{жкx}}, \quad (7)$$

где  $N_{\text{жкx}} = m \ddot{x}_0 - M \ddot{x}_1 - K \dot{x}_1$  – реакция слоя жидкости, приложенная к центру масс цилиндра полученная из решения уравнений динамики слоя жидкости;  $m = \pi R_2^2 \ell \rho$  – масса жидкости в объеме цилиндра;  $M = 2m^2 \alpha (\psi \text{Re})^{-1}$  – присоединенная масса жидкости;  $K = 12\chi m \omega (\psi \text{Re})^{-1}$  – коэффициент демпфирования;  $x_1$  – перемещение центра масс цилиндра. Для оси  $Oz_1$  формулы аналогичны.

Закон перемещений центра масс жесткого цилиндра с упругой связью вдоль оси  $Ox_1$  имеет вид

$$x_1 = \Delta m E_x \omega^2 \sin(\omega t + \phi_{x0} + \Psi(\omega)) / \sqrt{[n - (m_2 + M)\omega^2]^2 + K^2 \omega^2}, \quad (8)$$

здесь  $\Psi(\omega) = \arctg(K\omega / [(m_2 + M)\omega^2 - n])$ ;  $\Delta m = m - m_2$ .

Выражение (8) определяет АЧХ

$$A_1(\omega) = 1 / \sqrt{(1 - (m_2 + M)\omega^2/n)^2 + K^2 \omega^2/n^2}. \quad (9)$$

АЧХ (9) определяет резонансные частоты колебаний цилиндра. Согласно (9) данные частоты зависят от значений  $m_2$  и  $n$ . Следовательно, соответствующим выбором  $\beta^*$  можно обеспечить совпадение резонансных частот колебаний одномассовой системы и системы оболочка-слой жидкости. Значение коэффициента  $\beta^*$ , обеспечивающее точное совпадение ре-

резонансных частот, найдем из решения, относительно  $\beta^*$ , уравнения  $dA_1(\omega)/d\omega|_{\omega=\omega_p} = 0$ , здесь  $\omega_p$  – резонансная частота, определенная по (4).

В следующей таблице приведены результаты моделирования первой резонансной частоты цилиндра с параметрами:

$$R_2 = 6,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \ell = 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ м}, \delta = 10^{-2} \text{ м}, h_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}, E = 10^{11} \text{ Па}, \\ \rho_0 = 6,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, v = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Вид модели	Значение резонансной частоты $\omega$ , рад/с	Значение АЧХ
1. Одномассовая модель	10210,68 ( $\beta^* = 3961,12 \text{ м}^{-3}$ )	79,02
2. Оболочка-слой жидкости	10210,68	90,17

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
- Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977.
- Курс сопротивления материалов / Под ред. М.М Филоненко-Бородич. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956.

УДК 232.5; 232.135

**Л. И. Могилевич, А. И. Сафончик, М. И. Сафончик**

## ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ С УЧЁТОМ ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ

В настоящей статье рассматривается задача о развитии и затухании течения вязкопластичной среды в круглой трубе. Постановка задачи проводится на базе пятипараметрической реологической модели, позволяющей учесть не только различие в поведении материала при нагружении и разгрузке, но и учесть возможное проскальзывание вдоль твердой стенки. Гистерезис деформаций учитывается с помощью модели Слибара-Пасляя [1]. Наблюдаемое на практике "пристенное" скольжение обычно приписывают возникновению у стенки слоя вязкой жидкости (дисперсионная среда) с более низкой вязкостью, чем остальная среда.

Теоретические исследования совместного неустановившегося течения вязкой и вязкопластичной жидкостей для простейшего случая плоской трубы выполнено в работах [2,3].

Ниже реализуется другой подход, идея которого принадлежит основоположнику гидродинамической теории смазки Н.П. Петрову [4]. Применительно к вязкопластичной среде гипотезу о проскальзывании можно

сформулировать следующим образом. При достижении на стенке трубы некоторого критического напряжения  $\tau^*$  условие прилипания нарушается, и материал начинает скользить вдоль стенки.

Условие скольжения в цилиндрических координатах может быть записано в виде

$$\tau_\delta - \eta \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r=R} = \lambda V_z(R, t). \quad (1)$$

Здесь:  $\tau_\delta$  – динамический предел текучести,  $\eta$  – структурная вязкость,  $\lambda$  – коэффициент “внешнего” трения,  $R$  – радиус трубы, а остальные обозначения стандартны.

Поскольку наиболее вероятным соотношением между характерными параметрами можно считать  $\tau_\delta < \tau_{cm} < \tau^*$ , то при увеличении перепада давления разрушение структуры будет происходить сначала без скольжения, а затем со скольжением. При последующем уменьшении перепада давления восстановление структуры будет происходить не сразу. Этому будет предшествовать некоторый переходный этап, в течение которого напряжение на границе “ядра” будет уменьшаться от значения  $\tau_{cm}$  до  $\tau_\delta$ , а размеры “ядра” при этом остаются неизменными. Далее структура материала начнет восстанавливаться, а “ядро” увеличиваться в размерах.

Сформулируем теперь математическую постановку задачи. Необходимо решить уравнение:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\Delta P(t)}{l} + \eta \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) - \frac{\tau_\delta}{r} \quad (2)$$

в области  $r_0(t) < r < R$ ,  $t > 0$  при условиях

$$V_z(r, 0) = 0, \quad r_0(0) = R; \quad (3)$$

$$V_z(R, t) = 0 \text{ при } 0 < t < T_1; \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r=r_0(t)} = - \frac{\tau_{cm} - \tau_\delta}{\eta}. \quad (5)$$

Так как граница “ядра”  $r = r_0(t)$  неизвестна, то необходимо задать еще одно условие для её определения. Это условие легко получить, применив теорему импульсов к массе “ядра”  $M = \pi l \rho r_0^2(t)$ , имеющей скорость  $V_0(t)$

$$V_z \Big|_{r=r_0(t)} = V_0(t) = \frac{1}{\rho r_0^2(t)} \int_0^t \left[ \frac{\Delta P(\xi)}{l} r_0^2(\xi) - 2\tau_{cm} r_0(\xi) \right] d\xi. \quad (6)$$

Отметим, что в работах [3, 5], где рассмотрена аналогичная задача для обычной бингамовской жидкости, условие (6) сформулировано неточно, без учета изменения массы “ядра”.

Имеем задачу с “искомой” границей: необходимо найти функцию  $V_z(r, t)$ , удовлетворяющую уравнению (2) в области  $D\{r_0(t) < r < R, 0 < t < T_1\}$  и условиям (3) – (6), а также границу области  $r_0(t)$ . Для решения этой задачи использована предложенная в работе [5] модификация метода Колодниера.

Ограниченный объем статьи не позволяет в деталях воспроизвести все выкладки, поэтому ограничимся изложением принципиальной схемы построения решения. Сначала строится вспомогательное решение в виде суперпозиции регулярного и нерегулярного решений уравнения (2) с нулевыми начальными условиями  $V_z(r, t) = F(r, t) + N(r, t)$ . Регулярное решение  $F(r, t)$  ищется в области  $(0 < r < R)$  при условиях  $|F(r, t)| < const$ ,  $F(R, t) = -N(R, t)$  и записывается в виде ряда Фурье-Бесселя. Нерегулярное решение строится в области  $(0 < r \neq r_0(t) < \infty)$  в виде комбинации тепловых потенциалов простого и двойного слоев от источников, равномерно распределенных по окружности переменного радиуса  $r_0(t)$ . Мощности источников подбираются так, чтобы скачок функции на кривой  $r_0(t)$  совпадал с правой частью условия (6), а скачок производной – с правой частью условия (5). Отметим, что вспомогательное решение не зависит от конкретного вида кривой. Потребовав далее, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow r_0(t)-0} V_z(r, t) = 0, \quad (7)$$

получим уравнение для определения  $r_0(t)$ .

Показывается, что если  $r_0(t)$  является решением уравнения (7), то  $V_z(r, t) \equiv 0$  в области  $0 < r < r_0(t)$  и, следовательно, выполняется

$$\lim_{r \rightarrow r_0(t)-0} \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0. \quad (8)$$

Доказывается и обратное утверждение. Уравнение (7) и (8) являются нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерровского типа. Вопрос о методах их численного решения обсуждается.

Подставив найденную функцию  $r_0(t)$  во вспомогательное решение для  $r > r_0(t)$ , получаем решение задачи.

В момент  $t = T_1$  напряжение на стенке трубы достигнет значения  $\tau^*$  и начнется проскальзывание материала. Для этого временного отрезка ( $T_1 < t < T_2$ ) изменится лишь условие (4), его нужно заменить условием (1).

Это различие скажется только на регулярной составляющей вспомогательного решения. Построение регулярного решения и в этом случае не представляет большого труда. Оно записывается также в виде ряда Фурье-Бесселя, только суммирование ведется по корням уже другого трансцендентного уравнения. В момент  $t = T_2$  перепад давления начинает уменьшаться, но восстановление структуры сразу не произойдет, так как на границе "ядра" в этот момент напряжение равно  $\tau_{cm}$ . Должен пройти некоторый промежуток времени ( $T_2 < t < T_3$ ), пока оно не упадет до значения  $\tau_\partial$ . В этот промежуток "ядро" не изменяет своих размеров  $r_0(t) = r_0(T_2)$ , поэтому решаются задачи течения со скольжением и без скольжения в области с постоянными границами. Изменяются условия на поверхности "ядра"

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r=r_0(T_2)} = - \frac{\tau(t) - \tau_\partial}{\eta}, \quad (9)$$

$$V_0(t) = V_0(T_2) + \frac{1}{\rho} \int_{T_2}^t \left[ \frac{\Delta P(\xi)}{l} - \frac{2}{r_0(T_2)} \tau(\xi) \right] d\xi. \quad (10)$$

Решения опять записываются в виде рядов Фурье – Бесселя.

С момента  $t = T_3$  начнётся восстановление структуры. Построение решения проводится аналогично первым двум этапам, только условие (5) заменяется условием

$$\left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r=r_0(t)} = 0. \quad (11)$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Slibar A., Paslay P.R. Retarded Flow of Bingham Materials // J. of Appl. Mech. 1959. March. P. 107 – 112.
2. Огibalов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. 430 с.
3. Сафончик А.И. Неустановившееся течение вязкопластичной среды между параллельными стенками с учётом эффектов пристенного скольжения и запаздывания восстановления структуры // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун – та, 1975. Вып. 4(7). С. 166 – 181.
4. Петров Н.П. Гидродинамическая теория смазки / Под ред. Л.С. Лейбензона. М.,Л. ГТТИЗ, 1934. 245 с.
5. Сафончик А.И. Некоторые задачи неустановившегося течения вязкопластичных сред: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1962. 109 с.

# РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА «ПУМА» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИКВАТЕРНИОННОЙ ТЕОРИИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ\*

Обратная задача кинематики роботов-манипуляторов состоит в определении обобщенных координат робота по заданным местоположению и ориентации его выходного звена (схваты). Существуют различные методы решения обратных задач кинематики роботов, однако все они сопряжены с существенными трудностями, связанными с решением систем трансцендентных уравнений. В данной статье предлагается новый метод решения обратных задач кинематики роботов. Его суть состоит в том, что решение обратной задачи кинематики сводится к решению задачи Коши для кинематических дифференциальных уравнений движения роботоманипулятора, в которых векторы абсолютных угловой и линейной скоростей выходного звена выступают в качестве управлений и формируются по принципу обратной связи таким образом, чтобы любое заданное положение выходного звена робота было асимптотически устойчивым в целом.

Применение этого метода рассмотрим на примере манипулятора «Пума» [1]. Для решения обратной задачи используются уравнения прямой задачи кинематики и дифференциальные кинематические соотношения.

**1. Обратная задача кинематики как задача кинематического управления.** Введем в рассмотрение следующие системы координат:  $X$  – неподвижная (инерциальная), связанная с основанием манипулятора,  $Y^{(i)}$  – связанная с  $i$ -м звеном,  $Y$  – связанная с выходным звеном манипулятора. Углы относительных поворотов звеньев вокруг их осей  $X_3$ ,  $Y_1^{(1)}$ ,  $Y_1^{(2)}$ ,  $Y_2^{(3)}$ ,  $Y_1^{(4)}$ ,  $Y_2^{(5)}$  обозначим соответственно через  $\theta_1, \dots, \theta_6$ . Эти шесть углов и будут обобщенными координатами манипулятора.

Взаимную ориентацию и местоположение введенных систем координат будем задавать собственными кватернионами конечных поворотов  $\bar{\lambda}_j$  и бикватернионами конечных перемещений  $\bar{l}_j, (j = \overline{1, 6})$  [2] в соответствии со схемой перемещений

$$X \xrightarrow{\bar{\lambda}_1, \bar{l}_1} Y^{(1)} \xrightarrow{\bar{\lambda}_2, \bar{l}_2} Y^{(2)} \xrightarrow{\bar{\lambda}_3, \bar{l}_3} Y^{(3)} \xrightarrow{\bar{\lambda}_4, \bar{l}_4} Y^{(4)} \xrightarrow{\bar{\lambda}_5} \\ \xrightarrow{\bar{\lambda}_5} Y^{(5)} \xrightarrow{\bar{\lambda}_6, \bar{l}_6} Y^{(6)}(Y) \sim X \longrightarrow Y. \quad (1)$$

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00988.

Бикватернионы относительных конечных перемещений звеньев манипулятора определяются соотношениями

$$\bar{\Lambda}_j = \bar{\lambda}_j \circ \bar{l}_j, (j = \overline{1,6}), \quad (2)$$

где кватернион  $\bar{\lambda}_j$  и бикватернион  $\bar{l}_j$  характеризуют соответственно угловое движение и поступательное перемещение системы координат  $Y^{(i)}$  относительно  $Y^{(i-1)}$  ( $\bar{\Lambda}_5 = \bar{\lambda}_5$ , так как имеет место только вращательное движение системы координат  $Y^{(5)}$  относительно  $Y^{(4)}$ ). Символ  $\circ$  означает кватернионное произведение.

Тогда результирующий бикватернион будет иметь вид

$$\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}_1 \circ \bar{\Lambda}_2 \circ \bar{\Lambda}_3 \circ \bar{\Lambda}_4 \circ \bar{\Lambda}_5 \circ \bar{\Lambda}_6. \quad (3)$$

Запишем выражения для векторов  $\bar{\omega}^{(i)}$  абсолютных угловых скоростей звеньев манипулятора и векторов  $\bar{V}_{O_i}$ , ( $i = \overline{1,6}$ ) абсолютных скоростей выбранных полюсов  $O_i$  (начал систем координат  $Y^{(i)}$ ) в рекуррентной форме. Проектируя полученные соотношения для векторов  $\bar{\omega}$  и  $\bar{V}$  абсолютных угловой и линейной скоростей выходного звена манипулятора на оси системы координат  $Y$  и разрешая их относительно переменных  $\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_6$ , получим матричное нелинейное дифференциальное уравнение

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}^T = [J(\theta_1, \dots, \theta_6)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_Y(t) \\ \bar{\omega}_Y(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

относительно переменных  $\theta_1, \dots, \theta_6$ , в котором  $J$  – якобиан манипулятора. Это уравнение описывает собой кинематику манипулятора.

Величины  $\bar{\omega}_Y$  и  $\bar{V}_Y$  (отображения векторов  $\bar{\omega}$  и  $\bar{V}$  на базис  $Y$ ) выступают в качестве управлений, построение которых по принципу обратной связи может быть выполнено таким образом, чтобы выходное звено манипулятора переходило из любого произвольно выбранного начального положения в заданное конечное асимптотически устойчивым образом.

Таким образом, обратная задача кинематики может быть сформулирована как задача Коши для системы дифференциальных уравнений (4) при условии, что управления  $\bar{\omega}_Y$  и  $\bar{V}_Y$  обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом любого заданного положения выходного звена роботоманипулятора.

**2. Построение законов управления, использующих бикватернион ошибки ориентации.** В соответствии с теорией кинематического управления в качестве управления ориентацией и местоположением твёрдого тела (выходного звена манипулятора) выступает кинематический винт

$$\bar{U}_Y = \omega_0 + \bar{\omega}_Y + s(V_0 + \bar{V}_Y), \quad (5)$$

где  $s$  – комплексность Клиффорда такая, что  $s^2 = 0$ ;  $\omega_0$  и  $V_0$  – вспомогательные переменные.

Построение требуемого винта (управления) может быть выполнено в связанной системе координат  $Y$  по простейшей формуле

$$\bar{U}_Y = k \bar{\Lambda}^{-1} \circ (\bar{M}^{-1} - 1) \circ \bar{\Lambda}, \quad \bar{M} = \bar{\Lambda}(t) \circ \tilde{\bar{\Lambda}}^*, \quad (6)$$

являющейся дуальным аналогом кватернионной формулы, полученной в [3], где  $\bar{M}$  – бикватернион ошибки ориентации и местоположения выходного звена для текущего момента времени, определенный в связанной системе координат,  $k = const > 0$  – скалярный (в общем случае дуальный) коэффициент усиления обратной связи, соответствующий выбор которого обеспечивает нахождение искомых величин с требуемой точностью.

В соотношении (6) бикватернион  $\bar{\Lambda}$  текущей ориентации выходного звена манипулятора находится по формулам (2), (3), а бикватернион программы ориентации  $\tilde{\bar{\Lambda}}^*$  является заданным (при отладке программы он может быть рассчитан по формулам (2), (3) по задаваемым значениям  $\theta_1^*, \dots, \theta_6^*$ ).

Выделяя в (6) главную и моментную части, получим законы формирования требуемых угловой  $\bar{\omega}$  и линейной  $\bar{V}$  скоростей движения выходного звена манипулятора, подстановка которых в уравнения (5) приводит к уравнениям замкнутой управляемой системы.

**3. Решение обратной задачи.** Алгоритм решения обратной задачи кинематики заключается в численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (4) с учетом (5), (6) для некоторых произвольно выбранных (из заданных диапазонов) начальных значений обобщенных координат  $\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_6^{(0)}$ .

Закон управления (6) гарантирует асимптотически устойчивый выход схвата робота-манипулятора в заданное конечное положение  $\bar{\Lambda}^*$ , в результате которого звенья занимают положения, соответствующие заданным значениям углов  $\theta_1^{(\Gamma)}, \dots, \theta_6^{(\Gamma)}$ .

К достоинствам предлагаемого метода относятся единственность решения, быстродействие и высокая точность.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Fu K.S., Gonzalez R.C., Lee C.S.G. Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence. McGraw-Hill, 1987.
2. Челников Ю.Н. Об одном винтовом методе описания движения твердого тела // Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 129 – 138.
3. Плотников П.К., Сергеев А.Н., Челников Ю.Н. Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. 1991. № 5. С. 9 – 18.

## О ВЛИЯНИИ РАСКРОЯ ТКАНИ НА ПРОЦЕСС ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ В МЯГКОЙ МЕМБРАНЕ

Рассматривается плоская квадратная тканевая мембрана (рис. 1, *a*), находящаяся под действием ударных нагрузок, лежащих в ее плоскости. Верхний край мембранны ( $P'P$ ) закреплен в недеформированном состоянии, боковые края свободны. К нижней кромке ( $MM'$ ) прикладывается либо равномерно распределенная нагрузка ( $T^*$ ), либо она остаётся свободной, а усилие передается мембране через каркасные ленты, подкрепляющие боковые стороны квадрата и нагруженные растягивающей силой ( $N^*$ ) (рис. 1, *b*). Тканевая мембрана с произвольной ориентацией осей анизотропии – основы и утка, рассчитывается по сеточной модели<sup>1</sup>.

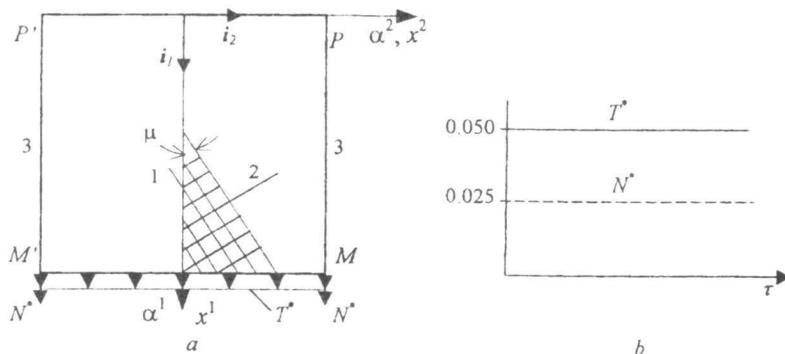


Рис. 1. Квадратная тканевая мембрана под действием ударных нагрузок:  
*a* – конструкция, раскрой и параметризация тканевой мембранны:  $\mu$  – угол раскроя,  
 1 – основа, 2 – уток, 3 – каркасные ленты; *b* – закон нагружения мембранны

Математическая постановка задачи и методика её численного решения приведены в [1]. Сохраняя принятые там обозначения, выпишем определяющие соотношения в безразмерной форме:

– уравнение движения полудискретной модели мембранны

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \frac{1}{\gamma_1} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha^1} (N\mathbf{e}_1 + \Phi_+^1 + \Phi_-^1) + (\mathbf{F}^2 \lambda_1)^+ - (\mathbf{F}^2 \lambda_1)^- \right];$$

<sup>1</sup> Сдвиговая жёсткость предполагается пренебрежимо малой по сравнению с жёсткостью на растяжение в направлениях осей анизотропии.

– физические соотношения для направлений анизотропии – утка (у) и основы (о) ткани, для абсолютно гибких каркасных лент и соответствующие ограничения, характерные для мягких оболочек,

$$T_0 = \varepsilon_0 + v\varepsilon_y, \quad T_0 \geq 0, \quad T_y = \varepsilon_y + v\varepsilon_0, \quad T_y \geq 0, \quad N = E\varepsilon, \quad N \geq 0;$$

– начальные условия ( $k=1,2$ )

$$x^k(\alpha^1, \alpha^2, 0) = \alpha^k, \quad V^k(\alpha^1, \alpha^2, 0) = 0;$$

– граничные условия

$$(P'P) - x^1 = 0, \quad x^2 = \alpha^2, \quad (\alpha^1 = 0, \quad -0.5 \leq \alpha^2 \leq 0.5);$$

$$(M'M) - F^1 \cdot i_1 = T^*(\tau), \quad (\alpha^1 = 1, \quad -0.5 \leq \alpha^2 \leq 0.5);$$

$$\text{или} - Ne_i i_1 = N^*(\tau), \quad (\alpha^1 = 1, \quad \alpha^2 = \pm 0.5);$$

$$(P'M'), (PM) - F^2 \equiv T^{12}\mathbf{e}_1 + T^{22}\mathbf{e}_2 = 0, \quad (0 \leq \alpha^1 \leq 1, \quad \alpha^2 = \pm 0.5).$$

Задача решается по явной схеме сквозного счета метода конечных разностей. Случаи  $\mu = 0^\circ$  и  $\mu = 45^\circ$ , для которых достаточно рассмотреть одну из симметричных частей мембранны, изучены в [1]. Здесь приводятся некоторые результаты для  $\mu = 30^\circ$ . На схемах (рис. 2, a; рис. 3, c), построенных по данным численных экспериментов, сплошными линиями показаны фронты продольных  $P$ -волн растяжения, прерывистыми –  $S$ -волны сдвига [2, 3]. На остальных рисунках показаны изолинии усилий и скорости в указанные моменты времени  $\tau$ .

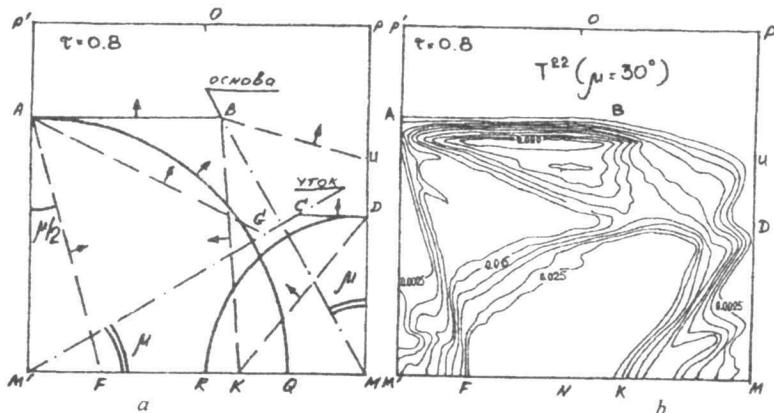


Рис. 2. Распределённая нагрузка на однородную мембрану:

a – схема фронтов; b – изолинии усилия  $T^{22}$

При нагружении однородной мембранны фронты продольных волн  $AB$  и  $CD$  распространяется от  $M'M$  вдоль основы и утки соответственно. Из точек  $M'$  и  $M$  исходят дифрагированные  $P$ -волны  $AQ$  и  $DR$  и  $S$ -волны  $AF$  и

$DK$ , порожденные свободными кромками. Скорости первых определяются продвижением фронтов продольных волн вдоль кромок в точках А и D, которые зависят от угла раскроя, а ориентация вторых – соотношением скоростей  $S$ - и  $P$ -волн. Из точки  $B$ , двигающейся вдоль основы от точки  $M$  с единичной скоростью, исходят две волны сдвига  $BU$  и  $BK$  (рис. 2, б).

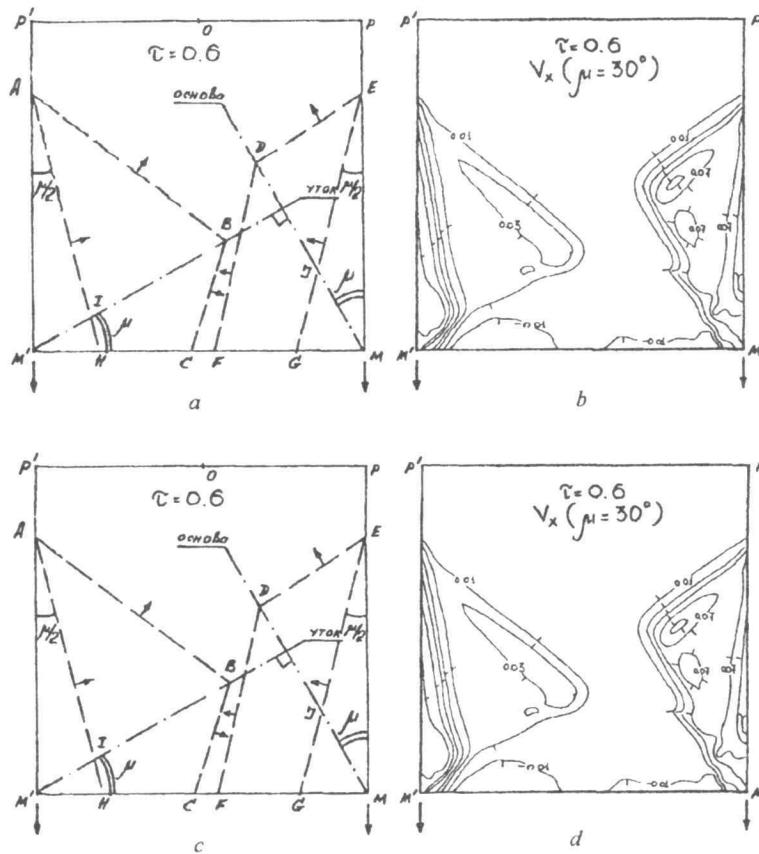


Рис. 3. Сосредоточенная нагрузка на каркасированную мембрану:  
а, с – схемы фронтов; б, д – изолинии скорости  $V_x$

Нагружение мембранны вдоль боковых лент (см. рис. 1, а) качественно изменяет волновую картину. Ударная нагрузка, приложенная к контурным лентам, передается на мембрану за счет условий совместного деформирования лент и прилегающих к ним элементов ткани: деформация ленты

раскладывается по направлениям основы и утка ткани и возбуждает в ней волновой процесс. Ориентация выделенных на рис. 3 градиентов усилий и скоростей связана с направлениями анизотропии. Наиболее четко определяются сдвиговые волны: возмущения, распространяющиеся вдоль основы и утка, порождают фронты  $DE$ ,  $DF$  и  $BA$ ,  $BC$ , а вдоль боковых кромок – дифрагированные волны  $AN$  и  $EG$ . Усилия  $T_o$  и  $T_y$  достигают максимальных значений ( $\sim 0.1$ ) в окрестностях точек  $B$  и  $D$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990.
2. Кольский Г. Волны напряжения в твёрдых телах. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
3. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Расчёт оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука, 1997.

УДК 301.15.15.07.02

**Я. Г. Сапунков**

#### КВАТЕРНИОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВСТРЕЧИ ДВУХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ\*

С помощью принципа максимума Понтрягина решена с использованием векторных или кватернионных элементов орбиты пространственная задача оптимального управления о встрече двух космических аппаратов (КА), один из которых движется по эллиптической орбите только под действием силы притяжения к центру. Уравнения движения КА в этих переменных являются регулярными и обладают структурой удобной для численного решения задач оптимального управления с применением ЭВМ.

1. В безразмерных кватернионных элементах орбиты движение КА описывается уравнениями [1]

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\phi} = -\varepsilon Q \mathbf{F}_1 \sin \phi, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\phi} = \varepsilon Q \mathbf{F}_1 \cos \phi, \quad \frac{dt}{d\phi} = u^2 \sqrt{2Q}, \quad Q = A^2 + B^2,$$

где  $\mathbf{q} = P(\mathbf{u})\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{F}_1 = u^2 \mathbf{q} + (\mathbf{w}, \mathbf{q})\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{u} = A \cos \phi + B \sin \phi$ ,  $\mathbf{w} = -A \sin \phi + B \cos \phi$ , (1) где  $P(\mathbf{u})$  – матрица, с помощью которой вектора  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ , определяющие положение и скорость КА в пространстве, выражаются через  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  [2]

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 02-01-00988.

$$P(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_0 \\ -u_3 & -u_0 & u_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{r} = P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \frac{2}{r(2Q)^{1/2}} P^T(\mathbf{u})\mathbf{w}, \quad (2)$$

на безразмерный управляющий параметр р тяги наложено ограничение

$$|\mathbf{p}| \leq 1, \quad (3)$$

$\varepsilon$  – отношение максимальной тяги к характерному значению силы притяжения аппарата к центру,  $\varphi$  – независимая переменная,  $t$  – время,  $(\mathbf{u}, \mathbf{q})$  обозначает скалярное произведение двух четырехмерных векторов,  $P^T(\mathbf{u})$  – транспонированная матрица. Кватернионные элементы орбиты космических аппаратов удовлетворяют условию

$$l(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_0 B_1 - A_1 B_0 + A_2 B_3 - A_3 B_2 = 0.$$

Для перехода к размерным переменным, которые определяют положение и скорость КА, время и вектор тяги, необходимо безразмерные величины умножить на масштабные множители  $R$ ,  $(\gamma M/R)^{1/2}$ ,  $R^{3/2}/(\gamma M)^{1/2}$ ,  $p_{\max}$  соответственно. Здесь  $R$  – масштаб длины (например, большая полуось орбиты),  $\gamma$  – гравитационная постоянная,  $M$  – масса центра притяжения,  $p_{\max}$  – максимальная тяга двигателя КА.

В начальный момент состояние КА определяется соотношениями

$$t=0, \quad \varphi=0, \quad \mathbf{A}=\mathbf{A}_n, \quad \mathbf{B}=\mathbf{B}_n. \quad (4)$$

Движение неуправляемого аппарата в безразмерных кватернионных переменных описывается соотношениями

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{A}_a \cos \varphi_a + \mathbf{B}_a \sin \varphi_a, \quad \mathbf{w}_a = -\mathbf{A}_a \sin \varphi_a + \mathbf{B}_a \cos \varphi_a, \quad Q_a = \mathbf{A}_a^2 + \mathbf{B}_a^2, \quad \mathbf{A}_a = \text{const}, \quad \mathbf{B}_a = \text{const},$$

$$\frac{dt}{d\varphi_a} = u^2 (2Q_a)^{1/2}, \quad \text{при } \varphi_a=0 \quad t=0. \quad (5)$$

Величина  $\varphi_a$  является независимой переменной для описания движения неуправляемого аппарата и связана с  $\varphi$  соотношением

$$\frac{d\varphi_a}{d\varphi} = \frac{u^2}{u_a^2} \left( \frac{Q}{Q_a} \right)^{1/2}, \quad \text{при } \varphi=0 \quad \varphi_a=0. \quad (6)$$

Мягкая встреча управляемого и неуправляемого аппаратов определяется условиями

$$P^T(\mathbf{u}(\varphi_k))\mathbf{u}(\varphi_k) = P^T(\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k)))\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k)), \quad (7)$$

$$Q_a^{1/2} P^T(\mathbf{u}(\varphi_k))\mathbf{w}(\varphi_k) = Q^{1/2}(\varphi_k) P^T(\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k)))\mathbf{w}_a(\varphi_a(\varphi_k)). \quad (8)$$

Жёсткая встреча определяется только условием (7). Значение  $\varphi_k$  заранее не задается. Качество процесса управления определяется функционалом

$$I = \int_0^{\varphi_k} \left( \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2 \right) dt = \int_0^{\varphi_k} \left( \alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2 \right) u^2 (2Q)^{1/2} d\varphi, \quad (9)$$

представляющим собой свёртку с весовыми множителями  $a_i \geq 0$  ( $i=1, 2$ ) двух критерииев, определяющих длительность процесса и затраченную энергию.

Требуется найти допустимое управление, удовлетворяющее ограничению (3), которое переводит управляемую систему (1), (6) из начального состояния (4) на перемещающееся многообразие (7), (8) или (7) в зависимости от варианта встречи (мягкая или жёсткая встреча) и сообщает минимальное значение функционалу (9).

2. Функция Гамильтона-Понтрягина  $H$  имеет вид

$$H = -\varepsilon(a_1 + a_2 \varepsilon^2 p^2) u^2 Q^{1/2} + \varepsilon Q(F_1, \Pi) + \varepsilon \theta \frac{u^2}{u_a^2} \left( \frac{Q}{Q_a} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Pi = \psi_b \cos \varphi - \psi_a \sin \varphi, \quad (10)$$

где  $\psi_a, \psi_b$  – сопряжённые четырёхмерные переменные, и скалярная переменная  $\theta$  удовлетворяют сопряженной системе уравнений, которая имеет вид

$$\frac{d\psi_a}{d\varphi} = \varepsilon(F_2 \cos \varphi + F_3 \sin \varphi + A F_4), \quad \frac{d\psi_b}{d\varphi} = \varepsilon(F_2 \sin \varphi - F_3 \cos \varphi + B F_4), \quad \theta = C_1 u_a^2 Q_a^{1/2},$$

$$F_2 = 2Q^{1/2}[a_1 + a_2 \varepsilon^2 p^2 - Q^{1/2}(q, \Pi) - C_1]u - QP(u^2 \Pi + w(w, \Pi))p, \\ F_3 = Q[(w, q)\Pi + (w, \Pi)q], \quad F_4 = u^2 Q^{1/2}(a_1 + a_2 \varepsilon^2 p^2 - C_1) - 2(F_1, \Pi), \quad C_1 = const. \quad (11)$$

Из условия максимума следует, что вектор оптимального управления  $p_{opt}(\varphi)$  определяется из соотношений

$$\overline{p}_{opt} = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{2a_2 \varepsilon^2 u^2} P^T(u)(u^2 \Pi + w(w, \Pi)), \\ \overline{p}_{opt} = \overline{p}_{opt}, \text{ если } |\overline{p}_{opt}| \leq 1, \quad \text{или} \quad \overline{p}_{opt} = \frac{\overline{p}_{opt}}{|\overline{p}_{opt}|}, \text{ если } |\overline{p}_{opt}| > 1. \quad (12)$$

Правый конец траектории находится на перемещающемся многообразии в фазовом пространстве и на нем должны выполняться условия трансверсальности, которые в случае мягкой встречи имеют вид

$$l(\psi_a, A) + l(\psi_b, B) = 0, \quad l(\Pi, u) = 0, \quad \varepsilon \theta + (\psi_a, B) - (\psi_b, A) = 0, \quad H - \varepsilon \theta = 0. \quad (13)$$

В случае жёсткой встречи условия трансверсальности записутся в виде

$$l(\psi_a, A) + l(\psi_b, B) = 0, \quad \Pi = 0, \quad \varepsilon u^2 \theta + (P^T(u_a)w_a, P^T(u, \Phi)) = 0, \\ u^2 H + (P^T(u)w, P^T(u, \Phi)) = 0, \quad \text{где } \Phi = \psi_a \cos \varphi + \psi_b \sin \varphi. \quad (14)$$

Решение поставленной задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (1), (11) с учётом (12) с начальными условиями (4) и граничными условиями (7), (8), (13) или (7), (14) в зависимости от варианта встречи на правом конце траектории.

3. Для решения краевой задачи разработан метод, сочетающий модифицированный метод Ньютона и метод градиентного спуска. Метод реализован в программе на языке PASCAL. Ниже приведены результаты расчёта для случая, когда  $a_1=0.2$ ,  $a_2=40$ ,  $\epsilon=0.2$ . В начальный момент времени управляемый КА движется по круговой орбите Земли и начинает движение для мягкой встречи с КА, который движется по эллиптической орбите в плоскости несовпадающей с плоскостью орбиты Земли. В таблице в безразмерных переменных приведены координаты положения и вектора скорости космических аппаратов.

**Таблица фазовых состояний КА (в безразмерных переменных)**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
2.3100	0.7500	0.1750	-0.1006	0.6037	0.1409
2.3320	0.1830	0.0427	0.0557	0.6348	0.1481

В первой строке таблицы указано начальное состояние управляемого аппарата, во второй – неуправляемого, а в третьей – их состояние в момент мягкой встречи. В безразмерных переменных длительность перелёта равна 21.6153 или 3.4402 земных года.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Космич. исслед. 1993. Т. 31, вып. 3. С. 3 – 15.
2. Сапунков Я.Г. Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космич. исслед. 1996. Т. 34, вып. 4. С. 428 – 433.

УДК 533.6011

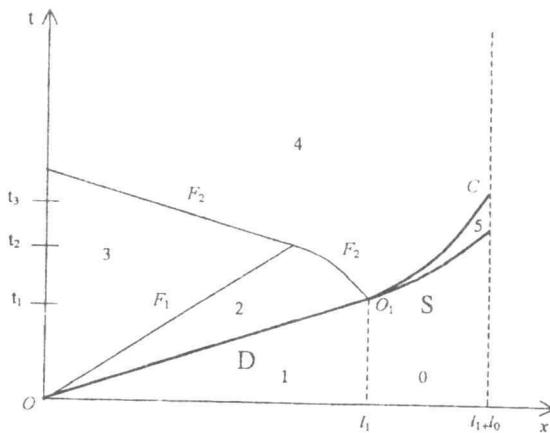
Я. Г. Сапунков, Г. П. Шиндяпин, В. А. Поршнев, В. Н. Федорец

#### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В КАМЕРЕ ДЕТОНАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ\*

В статье метод расчёта движения продуктов детонации в цилиндрической детонационной камере длиной  $l_1$  [1] обобщается на случай, когда к камере присоединен диффузор длиной  $l_0$  с углом полурасщора  $\alpha$ , заполненный нейтральным газом (воздухом).

\* Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, научно-технической программы, проект № 01.01.030.

**1. Постановка задачи.** Ось  $Ox$  направляется вдоль оси камеры и диффузора. Сечение  $x=0$  соответствует закрытому концу камеры, сечение  $x=l_1$  разделяет в начальный момент взрывчатую смесь, находящуюся в детонационной камере левее этого сечения, и воздух в диффузоре. Сечение  $x=l_1+l_0$  соответствует открытому концу диффузора. У закрытого конца камеры создается детонационная волна Чепмена-Жуге, которая движется по камере в положительном направлении оси  $Ox$ . На рисунке изображена картина течения продуктов детонации и воздуха на плоскости  $Oxt$ . Указаны основные линии сильных и слабых разрывов.



В момент  $t_1$ , когда детонационная волна  $D$  достигнет сечения  $x=l_1$ , возникает произвольный разрыв, который распадается на ударную волну  $S$ , которая движется по воздуху, находящемуся в диффузоре, и приводит его в движение, контактный разрыв  $C$ , который разделяет воздух и продукты детонации, и волну разрежения в продуктах детонации, фронт которой  $F_2$ .

На рисунке область 0 соответствует диффузору, который в начальный момент заполнен воздухом, область 1 – камере с взрывчатой смесью, область 2 – центрированной волне разрежения за фронтом детонации. Линия  $F_1$  – задний фронт центрированной волны разрежения, он отделяет её от области покоя 3 в продуктах детонации. Область 4 соответствует возмущенному движению продуктов детонации, а область 5 – воздуху, прошедшему через ударную волну  $S$ .

**2. Уравнения движения, начальные и граничные условия.** Обозначим через  $S(x)$  площадь сечения камеры и диффузора, через  $p_3, \rho_3, a_3$  – давление, плотность и скорость звука в области покоя 3 соответственно. Движение продуктов детонации в камере и диффузоре оказывается изэнтропическим и описывается следующей системой уравнений.

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v S)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\gamma_2 - 1} a_3^2 \left( \frac{\rho}{\rho_3} \right)^{\gamma_2 - 1} \right] = 0, \quad p = p_3 \left( \frac{\rho}{\rho_3} \right)^{\gamma_2}. \quad (1)$$

В системе уравнений (1) через  $\rho$ ,  $p$ ,  $v$ ,  $\gamma_2$  обозначены плотность, давление, скорость и отношение теплоемкостей продуктов детонации соответственно.

Движение воздуха в диффузоре описывается уравнениями

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v S)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\gamma_0 p}{S} \frac{\partial}{\partial x} (v S) = 0. \quad (2)$$

В системе уравнений (2)  $\rho$ ,  $p$ ,  $v$ ,  $\gamma_0$  – плотность, давление, скорость и отношение теплоемкостей воздуха соответственно.

Движения детонационной волны и продуктов детонации на промежутке времени  $0 \leq t \leq t_1$  описаны в [1]. Состояние продуктов детонации в момент времени  $t=t_1$  является начальным состоянием для расчета их дальнейшего движения, начальные условия для воздуха при  $t=t_1$  имеют вид

$$l_1 \leq x \leq l_1 + l_0, \quad p=p_0, \quad \rho=\rho_0, \quad v=0, \quad (3)$$

где  $p_0$ ,  $\rho_0$  – атмосферное давление и плотность воздуха при атмосферном давлении соответственно.

Решение систем дифференциальных уравнений (1), (2) после момента времени  $t_1$  должно удовлетворять граничным условиям на закрытом конце камеры, на контактном разрыве, на ударной волне и на выходном сечении диффузора. На дне камеры выполняется условие

$$\text{при } x=0, \quad t>t_1, \quad v=0. \quad (4)$$

Скорость движения контактного разрыва обозначим через  $U_c$ , через  $v_{c4}$ ,  $p_{c4}$  – скорость и давление в области 4 в продуктах детонации непосредственно перед контактным разрывом, а через  $v_{c5}$ ,  $p_{c5}$  – скорость и давление воздуха в области 5 непосредственно за контактным разрывом. Тогда условия на контактном разрыве при  $t>t_1$ ,  $x=x_c$ , где  $x=x_c(t)$  – закон движения контактного разрыва, запишутся в виде

$$v_{cx} = v_{c5} = U_c; \quad p_{c4} = p_{c5}. \quad (5)$$

Скорость движения ударной волны  $S$  обозначим через  $U_s$ , скорость звука в области 0 перед ударной волной обозначим через  $a_0$ . Обозначив через  $v_{s5}$ ,  $p_{s5}$ ,  $\rho_{s5}$  скорость, давление и плотность в воздухе в области 5 непосредственно за ударной волной получим

$$v_{s5} = U_s \frac{2}{\gamma_0 + 1} \left( 1 - M_0^2 \right), \quad p_{s5} = p_0 \left( \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 + 1} M_0^2 - \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} \right),$$

$$\rho_{s5} = p_0 \frac{(\gamma_0 + 1) M_0^2}{(\gamma_0 - 1) M_0^2 + 2}, \quad M_0^2 = \frac{U_s^2}{a_0^2}, \quad a_0 = \sqrt{\gamma_0 \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (6)$$

В выходном сечении диффузора выполняется условие для давления  
 $t>0, x=l_1+l_0, p=p_0.$  (7)

При этом проверяется выполнение ограничения на скорость: скорость течения газов в выходном сечении меньше или равна скорости звука. Если это условие нарушается, то давление в выходном сечении диффузора определяется из условия, что скорость течения газов в выходном сечении равна скорости звука.

Таким образом, параметры течения продуктов детонации и воздуха в детонационном двигателе определяются в результате решения краевой задачи для систем дифференциальных уравнений (1) и (2) для продуктов детонации и воздуха соответственно с начальными условиями (3) и граничными условиями (4) – (7).

**3. Результаты расчёта.** Для решения краевой задачи с использованием ЭВМ составлена программа на языке PASCAL, в которой реализован метод Лакса-Вендроффа. Расчёты и проведенные эксперименты показывают, что наличие диффузора увеличивает суммарный импульс давления детонационного двигателя на 30%.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я.Г., Шиндягин Г.П., Поршнев В.А., Федорец О.Н. Математическая модель детонационного двигателя // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 178 – 181.

УДК 232.5; 232.135

М. И. Сафончик

#### СВЕДЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается течение вязкопластичной среды по наклонной плоскости под действием силы тяжести. При постановке задачи учитывается неодинаковое поведение материала при нагружении и разгрузке (реологическая модель содержит два предела текучести: статический  $\tau_{cm}$  и динамический  $\tau_d$ ). Основной математической трудностью при решении задачи является наличие неизвестной, изменяющейся во времени границы области вязкопластичного течения.

Ниже предлагается метод решения задачи, являющийся несколько измененным методом “мгновенных собственных функций”, разработанным В.Г. Меламедом для решения задачи Стефана [1].

Пусть слой вязкопластичного материала толщины  $H$  находится на плоскости, угол наклона которой к горизонту изменяется, сначала возраста, а затем убывая. При угле наклона  $\alpha_0 = \arcsin \frac{\tau_{cm}}{g\rho H}$  начнется течение материала вдоль плоскости. При достаточно больших размерах плоскости, течение можно считать плоскопараллельным. Направив ось  $OX$  вдоль плоскости, а ось  $OY$  перпендикулярно потоку, сформулируем для единственной отличной от нуля компоненты скорости  $V_x(y, t)$  краевую задачу в виде

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = g \sin \alpha(t) + v \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \quad 0 < y < h(t), \quad t > 0; \quad (1)$$

$$V_x(y, 0) = 0, \quad h(0) = 0; \quad (2)$$

$$V_x(0, t) = 0 \quad - \text{условие прилипания}; \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=h(t)} = \begin{cases} \frac{\tau_{cm} - \tau_\delta}{\eta} & \text{при нагружении,} \\ 0 & \text{при разгрузке;} \end{cases} \quad (4)$$

$$V_x \Big|_{y=h(t)} = U(t) = \frac{1}{H - h(t)} \left[ g \int_0^t [H - h(\xi)] \sin \alpha(\xi) d\xi - \frac{\tau_{cm} t}{\rho} \right]. \quad (5)$$

Здесь  $v = \frac{\eta}{\rho}$  – аналог кинематической вязкости,  $h(t)$  – внешняя граница зоны вязкопластичного течения, остальные обозначения стандартны.

Вводя новые переменные по формулам

$$z = H \frac{y}{h(t)}, \quad t_1 = t, \quad V_x(y, t) = V(z, t_1), \quad (6)$$

получим краевую задачу в области с постоянными границами ( $0 < z < H$ ,  $t > 0$ )

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{h^2(t)}{vH^2} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} - z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V}{\partial z} - g \sin \alpha(t) \right], \quad (7)$$

$$V(0, t) = 0, \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=H} = \frac{h(t)}{H} \frac{\tau_{cm} - \tau_\delta}{\eta}, \quad (9)$$

$$V(H, t) = U(t). \quad (10)$$

Решение строится следующим способом. Рассматривается функция  $V(z, t)$  в виде ряда Фурье

$$V(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2H}, \quad (11)$$

где время  $t$  входит в коэффициенты ряда в качестве параметра. Ряд сходится равномерно внутри интервала вместе со своими производными, а при подходе к границам терпит разрыв. Поэтому граничные условия понимаются как предельные при подходе к границам изнутри области. Коэффициенты ряда находятся обычным способом

$$A_n(t) = \frac{2}{H} \int_0^H V(z, t) \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2H} dz. \quad (12)$$

Интегрируя (12) два раза по частям и потребовав, чтобы функция  $V(z, t)$  удовлетворяла уравнению и граничным условиям, получим для коэффициентов ряда бесконечную связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} A'_n(t) + \frac{(2n-1)^2 \pi^2 v}{h^2(t)} A_n(t) + \frac{3}{2} \frac{h'(t)}{h(t)} A_n(t) &= \frac{2v(-1)^{n-1}}{h(t)} \frac{\tau_{cm} - \tau_\partial}{\eta} + \\ &+ \frac{4g \sin \alpha(t)}{\pi(2n-1)} + 2(-1)^{n-1} U(t) \frac{h'(t)}{h(t)} - \frac{h'(t)}{2h(t)} \sum_{m \neq n=1}^{\infty} A_m(t) \frac{(-1)^{m+n-1} (2n-1)^2}{(m-n)(m+n-1)}, \end{aligned} \quad (13)$$

которую нужно решать при начальных условиях  $A_n(0) = 0$ .

Укорачивая систему (13), можно построить решение с любой степенью точности. Доказано, что при увеличении числа членов укороченной системы приближенное решение стремится к точному [1].

Если в некоторый момент  $t = T_1$  угол наклона плоскости к горизонту начнет уменьшаться, то восстановления структуры материала сразу не произойдет. Будет иметь место некоторый переходный временной промежуток  $T_1 < t < T_2$ , когда размеры зоны течения не изменяются, а напряжение на границе "ядра" падает от  $\tau_{cm}$  до  $\tau_\partial$ . На этом этапе решается обычная краевая задача в области  $(0 < z < H)$ .

Уравнение (7) упрощается

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{h_1^2}{vH^2} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} - g \sin \alpha(t) \right]. \quad (14)$$

Изменяются условия (9) и (10)

$$\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=H} = \frac{h_1}{H} \frac{\tau(t) - \tau_\partial}{\eta}, \quad (15)$$

$$U(t) = U(T_1) + g \int_{T_1}^t \sin \alpha(\xi) d\xi - \frac{1}{\rho(H-h_1)} \int_{T_1}^t \tau(\xi) d\xi. \quad (16)$$

За начальное распределение скоростей берется то, которое сложилось к концу первого этапа. Граница области  $h(t) = h(T_1) = h_1$  не будет изменяться до тех пор, пока напряжение на ней не упадет до значения  $\tau_\partial$ . Решение строится тем же методом, но для каждого коэффициента ряда Фурье полу-

чается независимое уравнение. Окончание этого этапа соответствует моменту  $t = T_2$ , когда напряжение на границе “ядра” достигло значения  $\tau_\delta$ .

Если угол наклона плоскости будет продолжать уменьшаться, то начнется восстановление структуры материала. Область течения начнет уменьшаться. Решение на этом этапе ( $t > T_2$ ) строится аналогично первому этапу, изменится лишь условие (9), вместо которого будет условие

$$\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z=H} = 0 \quad (17)$$

и пределы интегрирования в условии (5).

Отметим, что аналогичная задача для обычной бингамовской жидкости решена другим методом в [2]. В этой работе допущены неточности при формулировке одного из граничных условий на неизвестной поверхности. В данной статье эта неточность исправлена.

В заключение отметим, что подобным методом решаются задачи в случаях, когда собственные числа можно задать в явном виде. При условиях третьего рода и в осесимметричных задачах этот метод не применим.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Меламед В.Г. Сведение задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. Геофизика. 1958. № 7. С. 848 – 869.
2. Сафончик А.И. Некоторые задачи неуставновившегося течения вязкопластичной среды: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1962. 109 с.

УДК 533.6.011:532.529

Г. Д. Севостьянов

#### РЕГУЛЯРНОЕ НЕСИММЕТРИЧНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОКОЛОЗВУКОВЫХ СКАЧКОВ

Построено околозвуковое поле течения за двумя криволинейными скачками (в результате пересечения косых скачков; причина их искривления – зона уплотнения или разрежения ниже по потоку).

Околозвуковое безвихревое течение идеального газа описывается уравнениями Фальковича-Кармана [1] ( $u = M^2 - 1$ ,  $M$  – число Маха)

$$uu_x = v_y, \quad v_x = u_y, \quad (1)$$

на скачке  $x = h(y)$  имеем два условия

$$h' = -\frac{[v]}{[u]}, \quad (h')^2 = \langle u \rangle, \quad (2)$$

$[f] < f >$  – разность и полусумма значений  $f_+$  и  $f_-$  разрывной на скачке функции  $f$ .

Ударная поляра Буземана (1943) согласно (2) имеет уравнение

$$[v]^2 = [u]^2 < u >.$$

Пусть в однородном слабосверхзвуковом потоке ( $u = u_\infty = M_\infty^2 - 1 > 0$ ,  $v = v_\infty = 0$ ,  $y \geq 0$ ), параллельном оси  $x$ , в точке  $O(0, 0)$  пересекаются два косых скачка  $A_+O$  ( $x = -\gamma_+ \cdot y$ ,  $y \geq 0$ ) и  $A_-O$  ( $x = \gamma_- \cdot y$ ,  $y \leq 0$ );  $\gamma_+, \gamma_- > 0$  – постоянные. Эти скачки переходят в неизвестные кривые скачки  $OB_+$  ( $x = h_+(y) \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ) и  $OB_-$  ( $x = h_-(y) \geq 0$ ,  $y \leq 0$ ). Между  $A_+O$  и  $OB_+$  имеется наклонный однородный поток ( $u = u_{1+} > 0$ ,  $v = v_{1+} < 0$ ), аналогично между  $A_-O$  и  $OB_-$ :  $u = u_{1-} > 0$ ,  $v = v_{1-} > 0$ . Индекс “+” (“-”) относится к области  $y \geq 0$  ( $y \leq 0$ ).

1. Нулевое приближение:  $u(0, 0) = u_0$ ,  $v(0, 0) = v_0$ .

Строим три ежевидные поляры (“дикобразы” Буземана) [2] по значению потоков:  $P(0, u_\infty)$ ,  $P_+(v_{1+}, u_{1+})$ ,  $P_-(v_{1-}, u_{1-})$ ; две последние скользят вершинами по  $P$ . Требование, чтобы из точки  $O$  выходила одна линия тока, приводит к тому, что в точке пересечения  $(v_0, u_0)$  на плоскости  $(v, u)$  правой стороны  $P_+$  и левой стороны  $P_-$  наклоны “иголок”  $dv/du$  этих поляр одинаковы (условие совместности двух потоков в точке  $O$ ) [2]:

$$\begin{aligned} (u_\infty - u_{1+})\gamma_+ + (u_\infty - u_{1-})\gamma_- &= (u_{1+} - u_0)\delta_+ + (u_{1-} - u_0)\delta_-, \\ \delta_+ \frac{3u_0 + \delta_+^2}{u_0 + 3\delta_+^2} + \delta_- \frac{3u_0 + \delta_-^2}{u_0 + 3\delta_-^2} &= 0, \\ u_\infty + u_{1\pm} &= 2\gamma_\pm^2, \quad u_{1\pm} + u_0 = 2\delta_\pm^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Точка  $(v_0, u_0)$  вычерчивает внутри поляры  $P$  дозвуковое ежевидное ядро, “дикобразик” (при  $v_0 = 0$  его верх – точка Крокко  $Q$  [2]:  $u_0 \approx -0,0866u_\infty$ ; низ – точка  $S$ :  $u_0 \approx -0,3693u_\infty$ ). Проведя через  $(v_0, u_0)$  на  $(v, u)$  поляры  $P_+$  и  $P_-$ , найдём величины  $(v_{1+}, u_{1+})$  и  $(v_{1-}, u_{1-})$ , т. е. нулевое приближение  $u \equiv u_0$ ,  $v \equiv v_0$  с косыми скачками  $OB_{+0}$  и  $OB_{-0}$  ( $x = \delta_\pm |y|$ ;  $\delta_\pm > 0$ ).

2. Следующие приближения.

Возмущения ниже точки  $O$  (наличие тела или разряжения потока) искривляют скачки  $OB_+$  и  $OB_-$ .

Решение (1) за ними ищем с помощью двух произвольных функций  $A_0$  и  $B_0$ :

$$u = A_0(x) + B_0(x)y + \frac{1}{2} \left( A_0 A_0' \right)' y^2 + \frac{1}{6} \left( A_0 B_0' \right)'' y^3 + \dots,$$

$$v = B_0(x) + A_0 A_0' y + \frac{1}{2} (A_0 B_0')' y^2 + \dots, \quad (4)$$

$$A_0(x) = u_0 + d_0 x + d_1 x^2 + d_2 x^3 + \dots,$$

$$B_0(x) = v_0 + e_0 x + e_1 x^2 + e_2 x^3 + \dots$$

Тогда для второго приближения по малым  $x, y$  имеем

$$\begin{aligned} u &= u_0 + d_0 x + e_0 y + d_1 x^2 + \left( u_0 d_1 + \frac{1}{2} d_0 \right) y^2 + 2 e_1 y x + \dots \\ v &= v_0 + u_0 d_0 y + e_0 x + \left( u_0 e_1 + \frac{1}{2} d_0 e_0 \right) y^2 + \left( 2 u_0 d_1 + d_0^2 \right) y x + e_1 x^2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение скачка  $B_+OB_-$  ищем в виде ряда

$$\begin{aligned} x = h_{\pm}(y) &= \delta_{\pm} |y| + \frac{1}{2} c_{0\pm} y^2 + \frac{1}{3} c_{1\pm} |y|^3 + \dots \\ G_{\pm}(y) &= |h_{\pm}'| - \delta_{\pm}, \quad G_{\pm}(0) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Записав условия (2) на  $B_+OB_-$  с помощью (6), имеем

$$\begin{aligned} u &= u_{\text{ck}} = u_0 + 4 \delta_{\pm} c_{0\pm} |y| + (4 \delta_{\pm} c_{1\pm} + 2 c_{0\pm}^2) y^2 + \dots \\ v &= v_{\text{ck}} = v_0 - 2(u_0 + \delta_{\pm}^2) c_{0\pm} y - [2(u_0 + \delta_{\pm}^2) c_{1\pm} \operatorname{sign} y + 6 \delta_{\pm} c_{0\pm}^2] y^2 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Приравняв  $u, v$  в (7) значениям из (5) на скачке (6), выразим все коэффициенты в (5) и (6) через  $d_0 = g_0 = u_x(0, 0)$  – градиент скорости в точке  $O$ , учитывая второе равенство в (3)

$$e_0 = -\frac{3u_0 + \delta_{\pm}^2}{u_0 + 3\delta_{\pm}^2} \delta_{\pm} d_0 \operatorname{sign} y, \dots; \quad c_{0\pm} = \frac{1}{4} \left( d_0 + \frac{e_0}{\delta_{\pm}} \operatorname{sign} y \right), \dots \quad (8)$$

Симметричное пересечение скачков (регулярное отражение скачка от стенки  $x$ : ( $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma$ ,  $\delta_+ = \delta_- = \delta$ ,  $u_{1+} = u_{1-} = u_1 = -7u_0$ ) рассмотрено в [3] и в нашей статье этого сборника:

$$e_0 = e_1 = e_2 = \dots = 0, \quad c_{0\pm} = c_0 = \frac{d_0}{4}, \quad c_1 = -\frac{15}{64} \frac{\delta d_0^2}{u_0} > 0, \dots$$

$$d_1 = -\frac{37}{32} \frac{d_0^2}{u_0} > 0, \dots$$

Коэффициент давления выражается через функцию  $u$  из (5):

$$c_p = -2 \frac{u - u_{\infty}}{(k+1) M_{\infty}^2},$$

$k > 1$  – отношение теплоёмкостей.

В теории “коротких” волн для аналогичной особенности не учитывается условие (3) соединения потоков в точке  $O$ , что приводит к появлению фиктивного “жидкого клина”, вызванного встречной фиктивной струйкой газа.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г.Д. Основы теории околозвуковых течений газа. Ч. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987.
2. Guderley K.G. Theorie schallnaher strömungen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1957 / Пер. с нем. К. Г. Гудерлей. Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Севостьянов Г.Д. Регулярное отражение околозвукового скачка от стенки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 181 – 184.

УДК 539.3

Н. М. Сироткина, Н. С. Сироткина

### РАСЧЁТ ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОКРЫТИЯХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ИЗГИБА ДВУХСЛОЙНОЙ БАЛКИ

В покрытиях после их нанесения, как правило, возникают внутренние напряжения. Величина этих напряжений является весьма важной характеристикой покрытия, поскольку она определяет сцепляемость покрытия с подслоем, коррозионную стойкость, износостойкость и другие важные с точки зрения практики свойства. Для определения напряжений в покрытиях большинство исследователей используют следующий экспериментальный метод: покрытие (плёнка) наносится на тонкую пластинку (подложку), в результате чего последняя изгибаются. Далее замеряется радиус кривизны  $R$  изогнутой пластинки и рассчитывается величина напряжений по формуле Стони [1]

$$\sigma_R = \frac{E_s h_s^2}{6R h_f}, \quad (1)$$

где  $h_f$  – толщина пленки,  $h_s$  – толщина подложки,  $E_s$  – модуль Юнга материала подложки.

Заметим, что формула (1) применима только в том случае, когда толщина пленки значительно меньше толщины подложки. Она выведена в предположении, что внутреннее напряжение, возникающее в проводимом эксперименте, определяется только свойствами покрытия, в то время как на самом деле оно зависит от условий работы покрытия, в данном случае

от материала и толщины подложки. В настоящей статье предложен подход, свободный от этого недостатка.

Рассмотрим консольную пластинку длины  $a$  и ширины  $2b$ , состоящую из двух различных изотропных слоев. Введем систему координат  $(x, y, z)$  таким образом, чтобы область, занимаемая пластинкой, определялась неравенствами  $0 \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ ,  $-h_2 \leq z \leq h_1$ , где  $h_1$ ,  $h_2$  – толщины слоев,  $z=0$  соответствует поверхности контакта. Будем отмечать все величины, относящиеся к верхнему слою ( $z > 0$ ), индексом “1”, а к нижнему слою ( $z < 0$ ) – индексом “2”. В частности,  $E_k$  ( $k=1,2$ ) – модули Юнга верхнего и нижнего слоя соответственно.

В ходе эксперимента покрытие (верхний слой) получает некоторое объёмное расширение (будем называть его *собственным* объёмным расширением). Подложка (нижний слой) препятствует свободной деформации покрытия, в результате чего пластина изгибаются. Таким образом, для описания проводимого эксперимента требуется изучить изгибную деформацию описанной выше двухслойной пластины, вызванную различным собственным объёмным расширением верхнего и нижнего слоев. Эта задача является обобщением задачи о температурном изгибе биметаллической пластины [2].

Будем полагать, что собственные объёмные расширения слоев зависят только от переменной  $z$ , и обозначим их  $\theta_k(z)$ . Примем, что  $b/a \ll 1$ ,  $h_1/a \ll 1$ ,  $h_2/a \ll 1$ , тогда пластина можно рассматривать как балку, испытывающую изгиб в плоскости  $(x, z)$ . Примем также, что выполняются гипотезы теории изгиба балок [3]. Тогда из всех характеристик НДС отличными от нуля будут только напряжения  $\sigma_x^{(k)}$ ,  $\sigma_{xz}^{(k)}$  и перемещения  $u^{(k)}$ ,  $w^{(k)}$ , для которых имеют место следующие соотношения:

$$w^{(1)} = w^{(2)} = w(x), \quad u^{(1)} = u^{(2)} = u(x) - z \frac{dw}{dx}, \quad (2)$$

$$\sigma_x^{(k)} = E_k \left( \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - E_k \theta_k(z), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial x} = 0, \quad \sigma_{xz}^{(1)} \Big|_{z=0} = \sigma_{xz}^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad \sigma_{xz}^{(1)} \Big|_{z=h_1} = \sigma_{xz}^{(2)} \Big|_{z=-h_2} = 0. \quad (4)$$

Перейдем от напряжений к интегральным характеристикам

$$N_x = \int_0^{h_1} \sigma_x^{(1)} dz + \int_{-h_2}^0 \sigma_x^{(2)} dz, \quad M_x = \int_0^{h_1} \sigma_x^{(1)} z dz + \int_{-h_2}^0 \sigma_x^{(2)} z dz, \quad Q_x = \int_0^{h_1} \sigma_{xz}^{(1)} dz + \int_{-h_2}^0 \sigma_{xz}^{(2)} dz, \quad (5)$$

где  $N_x$  – нормальное усилие,  $M_x$  – изгибающий момент,  $Q_x$  – перерезывающая сила. Из уравнений (4) следует

$$\frac{dN_x}{dx} = 0, \quad \frac{dM_x}{dx} = Q_x, \quad \frac{dQ_x}{dx} = 0. \quad (6)$$

Подставляя (3) в (5), получим соотношения, связывающие нормальное усилие и изгибающий момент с перемещениями

$$N_x = B \frac{du}{dx} - C \frac{d^2 w}{dx^2} - n_0, \quad M_x = C \frac{du}{dx} - D \frac{d^2 w}{dx^2} - m_0, \quad (7)$$

где

$$B = E_1 h_1 + E_2 h_2, \quad C = \frac{1}{2} (E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2), \quad D = \frac{1}{3} (E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3), \quad (8)$$

$$n_0 = E_1 \int_0^{h_1} \theta_1 dz + E_2 \int_{-h_2}^0 \theta_2 dz, \quad m_0 = E_1 \int_0^{h_1} \theta_1 z dz + E_2 \int_{-h_2}^0 \theta_2 z dz. \quad (9)$$

Запишем граничные условия на концах балки

$$x = 0 : u = w = \frac{dw}{dx} = 0, \quad x = a : N_x = M_x = Q_x = 0. \quad (10)$$

Из уравнений (6) и граничных условий (10) следует  $N_x \equiv M_x \equiv Q_x \equiv 0$ . Полагая в (7) левые части равными нулю, получим систему для определения перемещений, решая которую, находим с учётом граничных условий (10)

$$u = \frac{m_0 C - n_0 D}{C^2 - BD} x, \quad w = \frac{1}{2} \frac{m_0 B - n_0 C}{C^2 - BD} x^2. \quad (11)$$

Из (11) можно приблизённо определить радиус кривизны

$$\frac{1}{R} \approx \frac{m_0 B - n_0 C}{C^2 - BD}. \quad (12)$$

Пусть собственное объёмное расширение покрытия не зависит от переменной  $z$  ( $\theta_1(z) = \theta_0$ ), собственное объёмное расширение подложки отсутствует ( $\theta_2(z) = 0$ ). Следуя традиции, будем искать не величину  $\theta_0$ , а величину

$$\sigma_0 = -E_1 \theta_0, \quad (13)$$

которая представляет собой напряжение, возникающее в покрытии, если его деформация полностью стеснена. Очевидно, что эта величина зависит только от материала покрытия.

Из формулы (12) с учётом (9) и (13) выражаем

$$\sigma_0 = \frac{1}{R} \frac{C^2 - BD}{h_1 C - 0.5 h_1^2 B}, \quad (14)$$

Если  $h_1 \ll h_2$ , то формулу (14) можно упростить. В результате получим формулу, совпадающую с формулой Стони (1). Это объясняется тем, что при малой толщине покрытия напряжение, возникающее в нём в проводимом эксперименте, мало отличается от  $\sigma_0$ . Формула (14) позволяет определить пределы применимости формулы Стони. Анализ показал, что с ростом толщины покрытия погрешность формулы (1) быстро растет, при  $E_1 \ll E_2$  её можно оценить величиной  $h_1/h_2 \cdot 100\%$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Stoney G. Proc. R. Soc. Ser. A. London, 1909. Vol. 32. P. 172.
2. Григорьев Э.И. Тонкие биметаллические пластинки и оболочки // Инж. сб. 1953. Т. XVII. С. 69 – 120.
3. Дарков А.В., Штиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1969.

УДК 533. 6. 011: 532. 529

Г. П. Шиндяпин, Е. Н. Гамаюнова

#### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ НЕРЕГУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ОТРАЖЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН\*

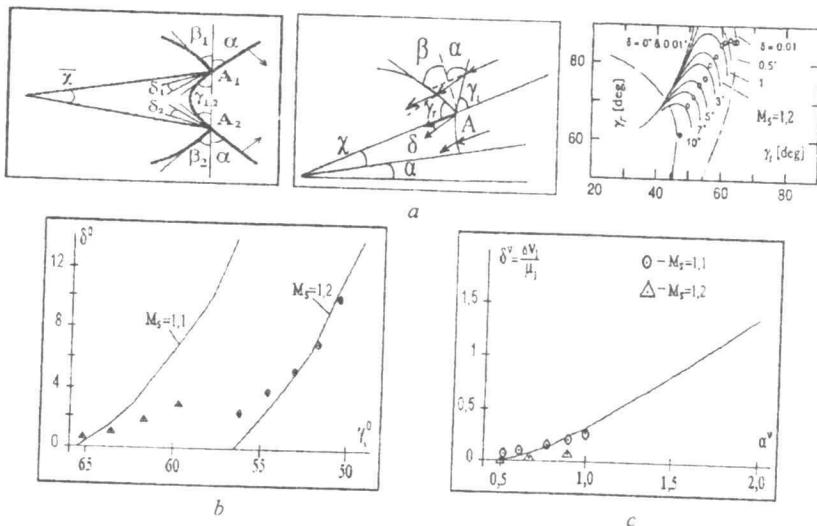
1. Интерес к задачам нерегулярного взаимодействия и отражения относительно слабых (интенсивности  $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0$ ,  $P_{20} = (p_2 - p_0)/B_0$ ,  $B_0 = \rho_0^2 c_0^2$ ) ударных волн (УВ) (с углом наклона  $\alpha$  к вертикали) в газе и газожидкостной среде, характеризуемой параметром  $R_0(\gamma)$ , обусловлен [1 – 6] запросами практики, связанными с решением проблем авиакосмической, нефтегазодобывающей промышленности и др., а также проблемой получения фундаментальных знаний (построения физически адекватной теории).

Установленные экспериментально [4, 5] режимы взаимодействия и отражения – развитого маховского (простого маховского –  $SM$ , с невырожденными отражёнными волнами), вырожденного маховского (Неймановского –  $NM$ , с вырождением одной из отражённых волн), регулярного ( $R$ ) –

\* Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ по программе «Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники», проект 205.01.01.030, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00524.

теоретически найдены [1 – 3] (режимы  $C, B, A$  соответственно) с помощью асимптотики коротких волн, позволяющей рассчитать возникающие УВ структуры и поля потока за ними.

На рисунке, *a* в левой части изображены схемы общего случая невырожденного нерегулярного взаимодействия и отражения УВ (режимы  $C, C'$  [2]), характеризуемые разрывом поперечной составляющей скорости и соответствующим разрывом в направлении скорости (углом  $\delta_n$ ) за тройными точками.



2. Для относительно слабых ударных волн исследование сводится [1, 2] к анализу в области взаимодействия во внутренних переменных  $X, Y(\delta, Y)$  решения краевой задачи для компонент скорости  $\mu, v$  системы уравнений коротких волн

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_Y + \mu = 0, \quad \mu_Y = v_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)}, \quad (1)$$

удовлетворяющего на фронтах УВ  $\delta = \delta^*(Y)$  ( $A_1A_2$  – Maxa,  $q_n = 0$ ;  $A_1B_1$  – отражённого,  $q_n = 1$ ;  $A_2B_2$  – отражённого,  $q_n = \eta$ ) условиям

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\delta^*}{dY} \right)^2 &= 2\delta - \mu - \mu_1, \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta^*}{dY} = v - v_1, \quad \mu = P^{(1)} = H, \\ \mu_1 &= q_n, \quad v_1 = -q_n(Y \pm \alpha^v), \quad \alpha^v = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma)}, \quad \eta = \frac{P_{10}}{P_{20}} \end{aligned} \quad (2)$$

и асимптотическим условиям срашивания на границах с областями линейного и квазидномерного решения (за фронтами отражённых волн).  $\alpha^\vee$ ,  $\eta$  – параметры подобия задачи.

3. При анализе решений краевых задач [1, 2] используются условия динамической совместимости (2) на фронтах в тройных точках (для верхней точки  $n = 1$  и верхний знак, для нижней точки  $n = 2$  и нижний знак)

$$\begin{aligned} A_n &= \alpha^\vee \pm Y_n, \quad \delta_n = \frac{1}{2}(q_n + A_n^2), \quad \bar{\epsilon} = P_{10}R_0(\gamma); \\ B_n &= \beta_n^\vee \mp Y_n, \quad B_n = (A_n^2 - \mu_n)^{1/2}, \quad \beta_n^\vee = \frac{tg \beta}{\bar{\epsilon}^{1/2}}; \\ C_n &= \gamma_n^\vee \pm Y_n, \quad C_n = (q_n + B_n^2)^{1/2}, \quad \gamma_n^\vee = \frac{tg \gamma}{\bar{\epsilon}^{1/2}}; \\ v_n^+ &= \mp q_n A_n \pm B_n (\mu_n - q_n), \quad v_n^- = \mp C_n \mu_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Используется параметрическое решение ( $q$  – параметр) системы (1), удовлетворяющее точно условиям (2) на фронте Маха при  $q = q_0 = const$  вида

$$\begin{aligned} \mu &= \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q); \quad \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q); \\ v &= \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q). \end{aligned} \quad (4)$$

Система начальных условий для функций  $\varphi_2(q_0) \dots \chi_0(q_0)$  (получаемая при подстановке (4) в (2) при  $q = q_0$ ) и условия (3) дополняется [1] соотношением притока массы в зону за фронтом Маха (учитывающим условия срашивания с линейным решением) и соотношениями, выражаящими принцип экстремального поворота потока за фронтами отражённых волн в окрестности тройных точек. Полученная таким образом система 21 уравнения (11 при  $\eta = 1$ ) позволяет определить ударно-волновые структуры (координаты, углы наклона УВ в тройных точках, положение фронта Маха) и параметры потока в тройных точках и на фронте Маха.

Решение этой системы сводится в общем случае к решению системы двух трансцендентных алгебраических уравнений относительно параметров  $A_1$ ,  $A_2$ . Анализ решения [2] этой системы позволил определить области существования основных ударно-волновых структур ( $A$  – регулярного;  $C$  – развитого нерегулярного;  $B$  – вырожденного нерегулярного взаимодействия и отражения –  $A'', C'', B''$  УВ), построить математические модели во всех областях, кроме области  $C$ , основанные на явном параметрическом представлении решения.

4. Для общего случая невырожденного нерегулярного взаимодействия (области  $C$ ) основная система уравнений для  $A_1$ ,  $A_2$  сводится в переменных  $R$ ,  $W$

$$R = z_1 - z_2, \quad W = 2z_1 - z_2, \quad \eta = 9R^2 - (6W - A)R + 1, \\ 3z_1^2 = A_1^2 + 2, \quad 3z_2^2 = A_2^2 + 2\eta, \quad A = A_1 + A_2 - 2\alpha^\nu \quad (5)$$

к решению уравнения для

$$A[k_0 - (W + R)A] - n_0 = (p_0 + AR) \cdot (l_0 - 2RA)^{1/2} - 2(z_0 - RA)^{3/2}, \quad (6) \\ k_0 = 8W^2 - 9WR - 3R^2 - 5; \quad p_0 = 9R^2 - 6WR + 1; \\ n_0 = (3W^2 - 6WR + 3R^2 - 2)^{1/2} - 2(W^2 - 2WR + R^2 - 1)^{3/2}; \\ l_0 = 3W^2 - 6R^2 - 2; \quad r_0 = W^2 + 2WR - 5R^2 - 1.$$

Входящий в (6) малый параметр  $RA$  ( $RA \ll 1$ ) обращается в ноль на границах области решения  $C$  ( $R = 0$  при  $\eta = 0$ ;  $A = 0$  при  $Y_1 = Y_2$ ). Решение (6), построенное с точностью до степеней  $(RA)^2$ , имеет вид

$$A = \frac{k_0 + m_0 - \sqrt{(k_0 + m_0)^2 - 4(W + R - S_0) \cdot t_0}}{2(W + R - S_0)}, \\ m_0 = (p_0 l_0^{-1/2} - l_0^{1/2} - 3r_0^{1/2}) \cdot R; \quad t_0 = n_0 + p_0 l_0^{1/2} - 2r_0^{3/2}; \quad (7) \\ S_0 = \left( \frac{1}{2} P_0 l_0^{-3/2} + l_0^{-1/2} + \frac{3}{4} r_0^{-1/2} \right) \cdot R^2.$$

Решение (7) удовлетворяет точно (6) на границе 1 между развитым нерегулярным  $C$  и регулярным  $A$  взаимодействием ( $Y_1 = Y_2$ ) и при  $\eta = 1$  и имеет максимальную относительную погрешность  $\epsilon = 2,7\%$  на границе 2 между нерегулярным  $C$  и вырожденным  $B$  взаимодействием. Таким образом, задавая  $R$  и  $W$ , найдём согласно (7)  $A = A(R, W)$  и согласно (5)  $\alpha^\nu = \alpha^\nu(R, W)$ ,  $\eta = \eta(R, W)$ , а также  $A_1 = A_1(R, W)$ ,  $A_2 = A_2(R, W)$ , через которые выражаются [3] все остальные параметры задачи.

5. Решение (7) позволяет найти границу 2 области  $C$  с областью  $B$  (вырожденного взаимодействия, когда  $A_1 = 1; z_1 = 1$ ) при  $R = 1 - z_2$ ,  $W = 2 - z_2$  ( $0,821 \leq z_2 \leq 1$ ) в явном виде

$$\eta = 3z_2^2 - 2 + (1 - z_2) \cdot A(z_2), \\ \alpha^\nu = \frac{1}{2} \left[ 1 - A(z_2) + (3z_2^2 - 2\eta)^{1/2} \right], \quad (8)$$

а также следующие выражения

$$A_2 = \sqrt{3z_2^2 - 2\eta}, \quad q_0 = \frac{1 + z_2}{2A(z_2)},$$

через которые выражаются остальные параметры на границе 2.

6. На рисунке,  $b$ ,  $c$  проведено сравнение расчётных значений (сплошные линии для угла  $\delta$  ( $\operatorname{tg} \delta_n = \pm \Delta v_n / \mu_n$ ,  $\Delta v_n = v_n^+ - v_n^-$ ), характеризующего разрыв в направлении скоростей за тройной точкой) с экспе-

риментальными данными [5] при отражении УВ ( $\eta = 1$ ,  $n = 1$ ,  $\delta = \delta_1$ ; см. рисунок, а – правая часть). Сравнение показывает хорошее соответствие данных для  $\delta(\gamma_i)$  (см. рисунок, б) при различных значениях  $M_s$  ( $M_s^2 - 1 = P_{10} \cdot R_0(\gamma)$ ), универсальный характер (см. рисунок, в) зависимости  $\delta^\vee = \delta^\vee(\alpha^\vee)$ ,  $\delta^\vee = \lg \delta / (P_{10} R_0(\gamma))^{1/2}$  для относительно слабых УВ.

Аналитические результаты подчёркивают физическую адекватность теории, объясняют особенности нелинейных процессов взаимодействия УВ, их асимптотический характер, что выгодно отличает их от результатов [6] и др. численных исследований.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндягин Г.П. Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изд. РАН. МГЖ. 1996. №2. С. 183 – 190.
2. Шиндягин Г.П. Аналитическое исследование ударно-волновых структур и потоков при отражении и взаимодействии относительно слабых ударных волн // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 15 (18). С. 31 – 44.
3. Шиндягин Г.П., Гамаконова Е.Н. Аналитическое исследование ударно-волновых структур и параметров при нелинейных взаимодействиях ударных волн // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 193 – 196.
4. Smith W. R. Mutual reflection of two shock waves of arbitrary strengths // Phil. Fluids. 1959. Vol. 2. № 5. P. 533 – 541.
5. Adachi T., Suzuki T., Kobayashi S. Mach Reflection of a Weak shock wave // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. B. 1994. Vol. 60. № 575. P. 2281 – 2296.
6. Zakharian A.R., Brio M., Hunter J.K., Webb G.M. The von Neumann paradox in weak shock reflection // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 422. P. 193 – 205.

## СОДЕРЖАНИЕ

### СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АГАФОНОВА Н. Ю. Интегральные представления решения уравнения Пуассона в составных трехмерных областях .....	3
АНДРЕЕВА Н. Л. О линейно-выпуклой задаче оптимального управления с двумя закреплёнными концами .....	6
БЕЛОУСОВА Л. П. Интегральные операторы с переменными пределами интегрирования и их точное обращение .....	9
БЛИНКОВ Ю. А., ИВАНОВ В. А., КОВАЛЕВ А. Д., МОЗЖИЛКИН В. В., ОРЕЛ А. А. Математическое моделирование оперативного управления грузоперевозками по железной дороге .....	12
БУТЕРИН С. А. О единственности восстановления одномерного возмущения оператора свертки .....	15
ВАХЛАЕВА Л. Ф., МОЛОДЕНКОВА Т. В., ПАВЛОВА Е. А. Разностные схемы для слабонелинейного многомерного уравнения теплопроводности .....	18
ВОДОЛАЗОВ А. М. К проблемам обобщённых характеров .....	22
ВОЛОСИВЕЦ С. С. Сильный $\mathcal{P}$ -ичный интеграл и сильная $\mathcal{P}$ -ичная производная .....	24
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом .....	27
ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. Неголономные почти симплектические многообразия с присоединенной связностью .....	31
ГАЛАЕВ С. В., КОМКОВ П. П. Согласование предпочтений в решётке отношений .....	34
ГОРБУНОВ О. Б. Об обратной задаче для системы Дирака с неинтегрируемой особынностью внутри интервала .....	37
ГРИГОРЬЕВА Е. В. Достаточные условия экстремальных свойств функции Пика ...	40
ГУСЕВ Г. И. О канонических формах аналитических функций от двух переменных в радикальских полях .....	42
ДМИТРИЕВ О. Ю. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи десятого порядка .....	45
ДУДОВ С. И. Об устойчивости решения задачи о внутренней оценке выпуклого компакта шаром произвольной нормы .....	48
ЗЛАТОРУНСКАЯ И. В. Оценка погрешности решения одной экстремальной задачи .....	51
ИВАНОВ В. А., ШЕВЫРЁВ С. П. Генератор тестов .....	54
ИВАНЧЕНКО И. П. О локальном изометрическом вложении римановых пространств друг в друга .....	58
ИШИНА С. И. Об определяемости универсальных проективно-планарных автоматов полугруппами их входных сигналов .....	61
КОЗЛОВА С. И., МИХАЙЛОВ В. Н. Асимптотические оценки вероятностей состояний однородных цепей Маркова .....	64
КОНОПЛЕВ А. Б. Критерий выпуклости функции расстояния от точек до образов мультиотображения .....	67
КОРОЛЕВА О. А. Об аналитических свойствах L-функций числовых полей .....	70
КУДРЯВЦЕВ М. В. Оценка рациональной тригонометрической суммы со знаменателем $P^n$ .....	72

КУЗНЕЦОВ В. Н. К задаче о целостности L-функций числовых полей .....	75
КУЗНЕЦОВА И. А. Минимальные метрики и их обобщения .....	77
ЛУКОМСКИЙ С. Ф. Альтернативные характеристики пространств Лоренца, близ-	
ких к $L^\infty$ .....	81
ЛУНЬКОВ А. Д. Задачи теплопроводности со случайным тепловыделением .....	84
ЛЯШКО М. А. Оптимальность решения интервальной системы линейных алгеб- раических уравнений .....	87
МИТРОФАНОВ А. Ю. Коэффициент эргодичности стохастической матрицы и устойчивость цепей Маркова .....	90
МИХАЙЛОВ В. Н., ТОЧИЛКИНА С. А. Распределение векторной функции от не- зависимых дискретных случайных величин .....	93
МОЗЖИЛКИН В. В. Математическая модель процесса намотки ленты .....	96
МОЛЧАНОВ В. А. Нестандартная конструкция ядра свободной проконечной полу- группы .....	99
НАЗАРОВА Е. В. О равносходимости разложений по собственным функциям инте- гральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях .....	102
НЕБАЛУЕВ С. И. Группы гомологий прямого произведения толерантных про- странств .....	105
НОВИКОВ В. В. Критерий равномерной сходимости интерполяционного процесса Лагранжа с узлами в нулях многочленов Чебышева 2 рода .....	108
НОВИКОВ В. Е. Решётка понятий $n$ -арных отношений .....	111
ПАСЕЧНИК М. В. Дележи в бескоалиционных играх с квазипорядоченными исходами .....	114
РАЗУМОВСКАЯ Е. В. Задача Громуолла для функций класса Базилевича .....	117
РОЗЕН В. Б. Решётка подклассов класса антагонистических игр .....	120
РОМАНОВА С. В. Оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения .....	123
РЫХЛОВ В. С. Условия сильной нерегулярности простейшего дифференциального оператора .....	125
СИДОРОВ С. П. Приближение дифференцируемых функций модификациями опе- раторов Баскакова .....	128
СОРОКИН Г. А. О некоторых применениях одного преобразования рядов .....	131
ТИМОФЕЕВ В. Г. Необходимое и достаточное условие конечности константы в одном многомерном неравенстве Колмогорова .....	134
ТРОШИНА Н. Ю. Принцип максимума для дискретной задачи оптимального управления со связанными краевыми условиями .....	137
ТРУШКОВА Е. А. Функции, синтезирующие семейства оптимальных траекторий линейных управляемых систем .....	140
ФИЛИППОВ В. И. Системы представления, состоящие из неотрицательных функ- ций, в пространствах $E_\Phi$ .....	143
ФИРСТОВ В. Е. Алгебраические структуры на множестве магических матриц .....	147
ХАЛОВА В. А. О резольвенте одного класса интегральных операторов .....	149
ХРОМОВ А. П., ШАЛТЫКО Д. Г. Об условиях сходимости спектральных разло- жений одной краевой задачи третьего порядка .....	153
ХРОМОВА Г. В. МОЛОДЕНКОВА И. Д. Об одной модификации задачи Колмого- рова-Никольского .....	155
ШЕВЦОВ В. И. Представление решения уравнения бесконечного порядка в виде суммы двух решений .....	160