

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2001

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат.
М34 ун-та, 2001. – Вып. 3. – 200 с. : ил.

Сборник содержит труды специалистов в области математики и механики. Представлены исследования по традиционным для Саратовского университета направлениям, а также по новым разделам теории функций, геометрии, алгебры, механики жидкости и газа, механики деформируемого твёрдого тела и приложениям.

Для научных работников и специалистов в области математики, механики.

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук *Д. В. Прохоров* (отв. редактор),
доктор физ.-мат. наук *А. П. Хромов*,
доктор физ.-мат. наук *Г. П. Шиндейлин*,
кандидат физ.-мат. наук *В. В. Мозжилкин*,
кандидат физ.-мат. наук *В. Б. Поплавский* (отв. секретарь)

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1609-4751

© Саратовский государственный
университет, 2001

УДК 519.23

Е. Л. Александров, В. А. Кутепов

**МАТРИЧНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
СИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ
С РАВНЫМИ КОНЕЧНЫМИ ДЕФЕКТНЫМИ ЧИСЛАМИ**

1. Нахождение в явном виде спектральных функций симметричных или самосопряженных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H , является важной и часто трудной задачей.

Такие проблемы появляются в квантовой механике, в теории случайных процессов, в квантовых стохастических уравнениях и т.д. Например, в квантовой механике наблюдаемая есть некоторый самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве M состояний квантомеханической системы. В отличие от классической механики, наблюдаемая в состоянии $\phi \in M$ принимает не фиксированное значение, а является случайной величиной с функцией распределения вероятностей $F(t) = (E_t \phi, \phi)$, где E_t – спектральная функция оператора A . Средним значением наблюдаемой в состоянии ϕ будет $(A\phi, \phi)$.

В статье мы получаем формулу, описывающую все обобщенные спектральные функции симметричного оператора A , действующего в H с дефектными числами (n, n) , $n < \infty$.

2. В дальнейшем предполагается, что A – плотно заданный с индексами дефекта (n, n) .

Введем следующие обозначения: $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)$ – базис дефектного подпространства N_λ оператора A , \dot{A} – его фиксированное самосопряженное расширение, $\dot{U}_{\lambda\lambda_0} = (A - \lambda_0 I)(\dot{A} - \lambda \dot{I})^{-1}|_{N_{\lambda_0}}$, $\dot{U} = \dot{U}_{i,-i}$,

$$X(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \{P_{N_i}, \dot{U}_{\lambda,-i}\} \{\dot{U}, \dot{U}_{\lambda,-i}\}^{-1}, \quad \omega(\lambda) = \overset{*}{\dot{U}} F(\lambda),$$

где $F(\lambda)$ – произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция,

значения которой линейные нерастягивающие операторы из \mathcal{N}_i в \mathcal{N}_{-i} , $P_{\mathcal{N}_i}$ – ортопроектор на дефектное подпространство \mathcal{N}_i .

Здесь $\{\cdot, \cdot\}$ означает псевдоскалярное произведение [1].

Совокупность обобщенных резольвент оператора A определяется равенством [1]

$$R_\lambda(A)f = R_\lambda(\overset{\circ}{A})f + \\ + (\lambda - i)^{-1} \{ \overset{\circ}{U}, \overset{\circ}{U}_{\lambda, -i} \}^{-1} [I - \omega(\lambda)X(\lambda)]^{-1} [\omega(\lambda) - I] \{ \overset{\circ}{U}, \overset{\circ}{U}_{\lambda, -i} \} f.$$

Спектральные функции E_t оператора A находятся применением формулы обращения Стильтьеса.

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор A регулярный, т.е. $\overset{\circ}{A}$ имеет чисто точечный спектр. Пусть, далее, $\Omega(\lambda)$ – матричная функция, соответствующая операторнозначной функции $\omega(\lambda)$ в базисе $\varphi_1(i), \dots, \varphi_n(i)$, $\Phi_\lambda^T = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda))$, $\Phi_{\lambda, \mu} = \Phi_\lambda \Phi_\mu^T$ ($\operatorname{Im} \lambda \geq 0, \operatorname{Im} \mu \geq 0$). Для любого вещественного σ определим матричную функцию $\rho(\sigma)$, полагая

$$\rho(\sigma) = \int_0^\sigma \Phi_{t, -i}^{-1} d\tilde{\rho}(t) \Phi_{ti}^{-1},$$

$$\text{где } \rho(t) = \pi^{-1} \Phi_{ii} \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^t \operatorname{Re} \{ [X(\lambda)\Omega(\lambda) + E][X(\lambda)\Omega(\lambda) - E]^{-1} \} d\sigma.$$

Тогда для любого $f \in H$ и любых α, β ($\alpha < \beta$)

$$E_{\alpha \beta} f = \int_\alpha^\beta (f, \varphi_\sigma)^T d\rho(\sigma) \varphi_\sigma, \quad E_{\alpha \beta} = E_{\beta+0} - E_\alpha.$$

3. Пример оператора дифференцирования. Обозначим через $\overset{\circ}{P}$ оператор дифференцирования m -го порядка в $L^2(R)$

$$\overset{\circ}{P} f = \sum_{k=0}^m a_k f^{(k)}, \quad (1)$$

определенный на максимально возможном линеале $D(\overset{\circ}{P})$ функций f , m раз дифференцируемых на R , производная $f^{(m-1)}$ абсолютно непрерывна и все производные $f^{(k)}$, ($k = 1, \dots, m$) принадлежат $L^2(R)$. Оператор $\overset{\circ}{P}$ является оператором свертки с обобщенной функцией Шварца $\xi = \sum_{k=0}^m a_k \delta^{(k)}$,

где δ – функция Дирака: $\overset{\circ}{P} f = \xi * f$. Пусть $C(\{a_\alpha\})$ означает множество функций $f \in D(\overset{\circ}{P})$ таких, что $f(a_\alpha) = f'(a_\alpha) = \dots = f^{(k_\alpha)}(a_\alpha) = 0$,

$0 \leq k_\alpha < \infty$, $\alpha = 1, 2, \dots$. Определим P как замыкание оператора, заданного $D(P) = C(\{a_\alpha\})$ равенством (1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть многочлен

$$P(t) = \sum_{k=0}^m a_k (2\pi i t)^k$$

вещественный. Тогда оператор P является симметричным с индексами дефекта (n, n) , $n = \sum k_\alpha \leq \infty$. Элементы дефектного подпространства \mathfrak{N}_λ определяются следующим образом:

$\varphi_{aj}(x; \lambda) = \bar{F}\{t^j \exp(-2\pi i t a_\alpha)[P(t) - \lambda]\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, k_\alpha,$
где F – преобразование Фурье в $L^2(R)$, $\bar{F} = F^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров Е. Л., Ильмушкин Г. М. Обобщенные резольвенты изометрических и симметрических операторов // Известия вузов. Сер. Математика. 1977. № 1 (176). С. 14 – 23.
2. Александров Е. Л. О спектральных свойствах операторов свертки // Депонировано в ВИНТИ 29.12.85, № 123-B86. – 25 с.

УДК 519.23

Е. Л. Александров, А. Хеббеш

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕГУЛЯРНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СОДЕРЖАЩИХ ИНВОЛЮЦИЮ

1. Пусть T – замкнутый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(T)$. Число λ называется точкой регулярного типа оператора T , если существует такое $k = k(\lambda) > 0$, что при всех $f \in D(T)$ $\|(T - \lambda I)f\| \geq k \|f\|$. Оператор T называется регулярным, если все точки комплексной плоскости являются для него точками регулярного типа. Для регулярности симметричного оператора A достаточно, чтобы все вещественные точки были для него точками регулярного типа. Если хотя бы одно самосопряженное расширение симметричного оператора A с конечными дефектными числами имеет дискретный спектр, то и любое его другое самосопряженное расширение будет обладать этим свойством. Для того, чтобы этот случай имел место, необходимо и достаточно, чтобы A был регулярным [1].

В статье приводится критерий регулярности симметричного оператора с конечными дефектными числами, изучается спектр самосопряженного оператора умножения в H , содержащего инволюцию. Кроме того,

приводится конструкция линейных многообразий $D(A)$, на которых операторы умножения с инволюцией имеют ненулевые дефектные числа. Такие проблемы возникают при решении некоторых операторных уравнений, в квантовых стохастических уравнениях [2], в теории случайных процессов при исследовании ковариационных операторов и т.д.

2. Пусть $\{e_k\} (k=1,2,\dots)$ – ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве H ; m – множество всех последовательностей (α_k) , $\alpha_k \in C$; c – множество всех ограниченных последовательностей.

Введем множество H_m и H_c формальных элементов $a = \sum a_k e_k = (a_k)$, где соответственно $(a_k) \in m$ и $(a_k) \in c$. Если $b = (b_k)$ – формальный элемент и $\phi(z)$ – функция комплексного переменного z , определенная на всех b_k , то положим $\phi(b) = \sum \phi(b_k)e_k$. Для линейно независимых элементов $\theta_k \in H_m$, $k = 1, 2, \dots, n$ введем подпространство формальных элементов $H_\theta \subset H_m$, положив

$$H_\theta = \{g = f + \sum_{k=1}^n c_k \theta_k, f \in H, c_k \in C\},$$

а также проектор Q из H_θ на H : $Qg = f$. Для формальных элементов введем операцию умножения: $a \circ b = \sum a_k b_k e_k$.

Рассмотрим оператор $A_a f = Q(a \circ f)$, определенный на линеале $D(A_a) = \{f \in H : a \circ f \in H_\theta\}$, также $\overset{\circ}{T} f = a \circ f + b \circ \check{f}$, где $\check{f} = Uf$, U – самосопряженный и одновременно унитарный оператор в H (инволюция), продолженный естественным образом на H_m , заданный на $D(\overset{\circ}{T}) = \{f \in H : \|a \circ f\| + \|b \circ \check{f}\| < \infty\}$ и $T_1 = Q(a \circ f + b \circ \check{f})$, заданный на $D(T_1) = \{f \in H : a \circ f + b \circ \check{f} \in H_\theta\}$.

ТЕОРЕМА 1.

- 1) Оператор $\overset{\circ}{T}$ ограничен тогда и только тогда, когда $a, b \in H_c$; он является самосопряженным тогда и только тогда, когда $a = \bar{a} = (\bar{a}_k)$ и $b = \bar{b}$;
- 2) операторы A_a и T_1 являются замкнутыми плотно заданными;
- 3) если $a = \bar{a}$ и для любого $k=1,\dots,n$ и некоторого λ , $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ $\theta_k \circ (a - \lambda)^{-1} \in H$, то оператор $A = A_a^*$ будет симметричным с индексами дефекта (n, n) ;
- 4) резольвента $R_\lambda(\overset{\circ}{T})$ оператора $\overset{\circ}{T}$ находится по формуле

$$R_\lambda(\overset{\circ}{T})f = P^{-1}(\lambda) \circ [(\check{a} - \lambda) \circ f - b \circ \check{f}]$$

и определена для тех $\lambda \in C$, для которых

$$|(\tilde{a} - \lambda) \circ P^{-1}(\lambda)| + |b \circ P^{-1}(\lambda)| \in H_c,$$

где $P(\lambda) = (a - \lambda) \circ (\tilde{a} - \lambda) - b \circ \tilde{b}$;

5) спектр $\overset{\circ}{T}$ – дискретный, его собственные значения λ_k определяются по формуле

$$\lambda_k = 0,5[(a_k + a_{\bar{k}}) + \text{Sign}(\bar{k} - k)\sqrt{(a_k - a_{\bar{k}})^2 + 4b_k b_{\bar{k}}}],$$

где $Ue_k = e_{\bar{k}}$.

Соответствующие ортонормированные собственные функции ψ_k определяются следующим образом:

$$\psi_k = (|(\lambda_k - a_k)(\lambda_k - a_{\bar{k}})|^2 + |b_k b_{\bar{k}}|^2)^{-0,5} [(\lambda_k - a_k)(\lambda_k - a_{\bar{k}})e_k + b_k b_{\bar{k}}e_{\bar{k}}];$$

6) если $a = \bar{a}, b = \bar{b}$ и для любого $k = 1, \dots, n$

$$\varphi_k(\lambda) = P^{-1}(\lambda) \circ [(\tilde{a} - \lambda) \circ \theta_k - b \circ \tilde{\theta}_k] \in H,$$

то оператор $T = T_1^*$ является симметричным с индексами дефекта (n, n) , $\varphi_k(\lambda)$ принадлежат его дефектному подпространству \mathfrak{N}_{λ} .

3. Сформулируем критерий регулярности симметричного оператора A в H .

ТЕОРЕМА 2. Замкнутый линейный оператор A в H является регулярным и симметричным с индексами дефекта (n, n) тогда и только тогда, когда при некотором ортонормированном базисе $\{e_k\}$ в H существуют формальные элементы $a \in H_m$, $\theta_k \in H_m$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяющие условиям

$$a = \bar{a}, \theta_k \circ (a - \lambda)^{-1} \in H, k = 1, 2, \dots, n, \text{Im} \lambda \neq 0, A = A_a^*.$$

Пример. Оператор дифференцирования в $L^2(0, 2\pi)$ $Pf = if'$, $f \in D(P)$, определенный на линеале $D(P)$ функций f абсолютно непрерывных на $[0, 2\pi]$ таких, что $f' \in L^2(0, 2\pi)$ и удовлетворяющих условию $f(0) = f(2\pi) = 0$ является регулярным. Для него имеем

$$\{e_k\} = \{e^{-ikx}\}, k \in \mathbb{Z}, a = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} ke^{-ikx}, \theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М. Г. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // Укр. мат. журн. 1949. Т. 1, № 2. С. 3 – 97.

2. Чеботарев А. М. Квантовое стохастическое уравнение унитарно эквивалентно симметричной краевой задаче для уравнения Шредингера // Математ. заметки. 1997. Т. 61, вып. 4. С. 612 – 622.

Н. Л. Андреева

О ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО НОРМЕ

Рассмотрим задачу оптимального управления, описанную линейными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + bu, \quad t \in [0,1], \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

интегральным выпуклым критерием качества

$$I(x, u) = \int_0^1 F(x, u, t) dt \rightarrow \inf \tag{2}$$

и ограничениями на управляющую функцию

$$\|u(t)\|_{L_2[0,1]} \leq c. \tag{3}$$

Здесь A – матрица размерности $n \times n$; b, x_0 – заданные векторы, c – заданная константа, $F(x, u, t)$ – равномерно-выпуклая по (x, u) функция, имеющая производные $F'_x, F'_u, F''_{uu}, F''_{xt}, F''_{ut}$, причём F'_x, F'_u удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных (x, u) .

Равномерная выпуклость подынтергальной функции $F(x, u, t)$ обеспечивает строгую выпуклость функционала $I(x, u)$. Исходная задача будет иметь единственное решение, как задача на минимум строго выпуклого функционала $I(x, u)$ из (2) на выпуклом не пустом множестве пар функций $(x(t), u(t))$, удовлетворяющих ограничениям (1) и (3).

Для решения задачи (1) – (3) используем метод штрафных функционалов, рассмотрим штрафные функционалы $\Phi_k(x, u)$ вида

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, u) &= \frac{1}{\varepsilon_k} \left\| x(t) - e^{At} x_0 - \int_0^t e^{A(t-\xi)} b u(\xi) d\xi \right\|_{L_2^n[0,1]}^2 + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_k} [\|u(t)\|_{L_2[0,1]} - c]^2, \end{aligned} \tag{4}$$

где числовая последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$, функция $y_+ = \max(0, y)$, e^{At} – матричная экспонента.

Исходную задачу (1) – (3) заменим на последовательность задач ($k = 1, 2, \dots$)

$$I_k(x, u) = I(x, u) + \Phi_k(x, u) \rightarrow \inf. \tag{5}$$

Другими словами, задачу (1) – (3) на условный экстремум заменим на последовательность задач на безусловный экстремум функционалов (5), где $u(t) \in L_2[0,1]$; $x(t) \in L_2^n[0,1]$. Функционалы $\Phi_k(x, u)$ определены в (4) и зависят от малого параметра $\varepsilon_k \downarrow 0$. Первое слагаемое в формуле (4) есть “штраф” за нарушение дифференциальных уравнений (1). Второе слагаемое соответствует ограничениям (3), и оно не равно нулю, как только это ограничение нарушается. Эти слагаемые выбраны таким образом, чтобы для любого $k = 1, 2, \dots$ функционал $\Phi_k(x, u)$ являлся выпуклым. Функционал $I_k(x, u)$ из (5) является строго выпуклым как сумма строго выпуклого и выпуклого функционалов. Для каждого значения k задача (5) имеет единственное решение $(x_k(t), u_k(t))$. По аналогии с тем, как это проделывалось раньше в [1, 2], можно доказать, что пара функций $(x_k(t), u_k(t))$ является единственным решением системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} x(t) - e^{At} x_0 - \int_0^t e^{A(t-\xi)} b u(\xi) d\xi - \frac{\varepsilon_k}{2} F'_x(x, u, t) = 0, \\ F'_u(x, u, t) + 2\varepsilon_k^{-1} c u(t) \cdot \left(\|u(t)\|_{L_2[0,1]} - c \right)_+ / \|u(t)\|_{L_2[0,1]} + \\ + \int_t^1 \left(e^{A(\xi-t)} b, F'_x(x(\xi), u(\xi), \xi) \right)_{R_n} d\xi = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где под знаком интеграла в последнем слагаемом записано скалярное произведение в пространстве векторов размерности n . Первое уравнение из системы (6) задаёт $x(t)$ по формуле, “совпадающей” с формулой Коши с точностью до слагаемого $\frac{\varepsilon_k}{2} F'_x(x, u, t)$, которое является малым в силу $\varepsilon_k \downarrow 0$. Если из первого уравнения системы (6) выразить $x(t)$ и подставить во второе уравнение, то его можно рассматривать как уравнение относительно функции $u(t)$.

ТЕОРЕМА. Последовательность $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^\infty$ функций, удовлетворяющих системе уравнений (6), сходится к решению $(x^*(t), u^*(t))$ задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

Схема доказательства. Из метода штрафных функционалов известна ограниченность норм последовательностей $\|x_k(t)\|_{L_2^n[0,1]}, \|u_k(t)\|_{L_2[0,1]}$ ($k = 1, 2, \dots$) (см. [3]). Используя конкретный вид выпуклых штрафных функционалов $\Phi_k(x, u)$ из (4), можно доказать сходимость норм $\|x_k(t)\|_{L_2^n[0,1]} \rightarrow \|x^*(t)\|_{L_2^n[0,1]}, \|u_k(t)\|_{L_2[0,1]} \rightarrow \|u^*(t)\|_{L_2[0,1]}$ при $k \rightarrow \infty$, откуда будет следовать сходимость по норме в $L_2[0,1]$.

$\|x_k(t) - x^*(t)\|_{L_2^n[0,1]} \rightarrow 0$, $\|u_k(t) - u^*(t)\|_{L_2[0,1]} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Исследуя интегральные уравнения (6) для приближённых решений $x_k(t), u_k(t)$, можно доказать, что функции $\{x_k(t), u_k(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, откуда и получим сходимость последовательности $\{x_k(t), u_k(t)\}$ к решению задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Н. Л. Алгоритм решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Математика и её приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 56 – 57.
2. Андреева Н. Л. Интегральные уравнения с малым параметром для решения линейно-выпуклой задачи оптимального управления // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 6 – 7.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

УДК 519.61

Е. В. Бабенкова, Ю. П. Васильев

ДЕМПФИРОВАНИЕ МЕТОДА СЕКУЩИХ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В работе [1] рассматривается демпфированный метод секущих приближенного решения нелинейного уравнения. В данной статье на основании работ [2, 3] предлагается построение модифицированного метода секущих с демпфирующим множителем для приближенного решения нелинейных уравнений с недифференцируемыми операторами.

Пусть такие уравнения имеют вид

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

где $P: D \subset R^n \rightarrow R^n$ недифференцируемый оператор, действующий в области D конечномерного банахова пространства R^n .

Рассмотрим итерационный процесс с формулой

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k J(x_k, x_{k-1} - x_k)^{-1} P(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad x_{-1}, x_0 \in D, \quad (2)$$

x_{-1}, x_0 – начальные приближения; α_k – демпфирующий множитель, подавляющий скачки отклонений от нуля невязки и увеличивающий скорость сходимости итераций [1]; J – линейный оператор, аппроксимирующий производную Гато некоторого дифференцируемого оператора

$P_1 : D \subset R^n \rightarrow R^n$ с параметром $h \in D_h \subset R^n$. Определим его следующим образом (например, для матрицы Якоби) [1]:

$$J(x, h) = \left(\frac{1}{h_1} \left[P_1(x + h_1 e^1) - P_1(x) \right], \dots, \frac{1}{h_n} \left[P_1(x + h_n e^n) - P_1(x) \right] \right), \quad (3)$$

где

$$J : D_J \times D_h \subset R^n \times R^n \rightarrow L(R^n), x + h_i e^i \in D, h_i \neq 0, i = \overline{1, n}, (x, h) \in R^n \times R^n,$$

e^i – i -й базисный (координатный) вектор.

Предположим, что $0 \in R^n$ является предельной точкой для D_h и отображение J является консистентной аппроксимацией для P'_1 на $D_0 \subset D_J$, то есть $\lim_{h \rightarrow 0} J(x, h) = P'_1(x)$ (равномерно по $x \in D_0$), где $h \in D_h$ (см. [1]).

1. Предположим, что $P'_1, F = P - P_1$ удовлетворяют на D условию Липшица с постоянными k_0 и k_1 соответственно.

Для обоснования сходимости итерационного процесса (2) – (3) доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть в открытом шаре $S_0(x_0, \rho)$ для $h \in D_h \cap S_h(0, \rho)$ существует $J^{-1}(x, h)$ и выполняются условия:

- 1) $\|E - P'_1(x)J^{-1}(x, h)\| \leq \gamma, 0 < \gamma;$
- 2) $\|J^{-1}(x, h)\| \leq \lambda, 0 < \lambda;$
- 3) $\|P(x_0)\| \leq \eta, 0 < \eta, \gamma' = \gamma + k_1 \lambda < 1, x_0 - x_{-1} \in D_h \cap S_h(0, \rho);$

4) шар $\bar{S}(x_0, r_1) = \left\{ \|x - x_0\| \leq r_1, r_1 = \frac{\lambda \eta}{1 - \tilde{\alpha}_0^*} \right\} \subset S_0(x_0, \rho)$, где постоянная $\tilde{\alpha}_0^*$ определяется в ходе доказательства теоремы.

Тогда в шаре $\bar{S}(x_0, r_1)$ существует решение x^* уравнения (1): $P(x) = 0$, к которому сходится последовательность приближений (2) – (3) с

$$\alpha_k^* = \min \left\{ 1, \frac{1 - \gamma'}{k_0 \lambda^2 \|P(x_k)\|} \right\}. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим $z_k = -J(x_k, x_{k-1} - x_k)^{-1} P(x_k)$. Рассмотрим функцию $P(x_k + t z_k)$, где t – числовой параметр. Имеет место оценка

$$\|P(x_k + t z_k) - P(x_k) - t P'_1(x_k) z_k\| \leq \frac{t^2}{2} k_0 \|z_k\|^2 + k_1 t \|z_k\|.$$

Тогда

$$\|P(x_k + t z_k)\| \leq (|1-t| + t\gamma') \|P(x_k)\| + \frac{t^2}{2} k_0 \lambda^2 \|P(x_k)\|^2 = \Psi(t),$$

где $\gamma' = \gamma + k_1 \lambda < 1$. Минимум функции $\Psi(t)$ достигается в точке $t^* = \alpha_k^*$ (см. (4)).

Следовательно, для процесса (2) справедливо неравенство

$$\|P(x_{k+1})\| \leq \Psi(\alpha_k^*) \leq \|P(x_k)\| \cdot \left(1 - \frac{\alpha_k^*}{2}(1 - \gamma')\right)^{def} = \tilde{\alpha}_k^* \|P(x_k)\|.$$

По построению очевидно, что $0 < \alpha_0^* \leq \alpha_1^* \leq \dots \leq 1$, и из (4) видим, что, начиная с некоторого номера k все $\alpha_k^* = 1$ (если $\alpha_0^* = 1$, то получаем обычный метод секущих). Таким образом, построенный модифицированный метод секущих с демпфированием (2) – (3) сходится. ■

Замечание. Из доказательства видно, что для реализации алгоритма полученной первой модификации метода секущих требуется знание оценок k_0, γ' , что не всегда эффективно с практической точки зрения.

2. Для метода секущих с демпфирующим параметром α_k рассмотрим вторую модификацию.

Очевидно, в (2) вектор $z_k = -J(x_k, x_{k-1} - x_k)^{-1} P(x_k)$ указывает направление, по которому можно улучшать приближения, а параметр α_k выбирается таким, чтобы норма $\|P(x_k + \alpha_k z_k)\|$ была尽可能 меньше. Рассмотрим функции

$$\eta_k(t) = \|P(x_k + tz_k)\|, \quad \psi_k(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \|P(x_k)\|, \quad t \in [0, 1].$$

Пусть последовательность $\{\alpha_k\}$, $0 < \alpha_k < 1$ удовлетворяет условиям

$$\prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right) = 0, \quad \eta_k(\alpha_k) \leq \psi_k(\alpha_k). \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть в открытом шаре $S_0(x_0, \rho)$ и для $h \in D_h \cap S_h(0, \rho)$, существует $J^{-1}(x, h)$ (см. (2)) и выполняются условия:

- 1) $\|J^{-1}(x, h)\| \leq \lambda$, $0 < \lambda$;
- 2) $\|P(x_0)\| \leq \eta$, $0 < \eta$, $x_{-1} - x_0 \in D_h \cap S_h(0, \rho)$;
- 3) шар $\bar{S}(x_0, r_2) = \{x - x_0 \leq r_2, r_2 = 2\lambda\eta\} \subset S_0(x_0, \rho)$.

Тогда в шаре $\bar{S}(x_0, r_2)$ существует решение x^* уравнения (1), к которому сходится итерационный процесс (2) – (3) с α_k из (5).

Доказательство. Рассмотрим строго возрастающую последовательность $s_m = \alpha_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right)$. Она сходится, и справедливы оценки $0 < s_m \leq 2$. Если $\prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right) = 0$, то $s = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = 2$ (см. [3]). Отсюда по индукции нетрудно доказать оценки

$$\|P(x_k)\| \leq \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2}\right) \eta, \|x_k - x_0\| \leq s_{k-1} \lambda \eta < 2\lambda \eta,$$

из которых следует фундаментальность последовательности $\{x_k\}$ и существование пределов

$$\|P(x^*)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|P(x_k)\| = 0, x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k,$$

где x^* – решение (1). ■

Замечания.

1. Для получения последовательности $\{\alpha_k\}$ может быть применен способ последовательного половинения α_k и ряд других приёмов с проверкой условий (5) [3].

2. В качестве примеров рассматривались нелинейные уравнения с недифференцируемым оператором Ван дер Вардена и др.

3. В конкретных случаях удачным выбором J и α_k удается получить демпфирование скачков приближений и значительное ускорение сходимости. В общем случае скорость сходимости линейная. Для дифференцируемого оператора в уравнении (1) получается асимптотически квадратичная скорость сходимости [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975.
2. Зинченко А. И. О приближенном решении функциональных уравнений с недифференцируемыми операторами // Мат. Физика: Респ. межвед. сб. Киев, 1973. Вып. 14. С. 55 – 58.
3. Фридрих Ф. Об одном видоизменении методов Ньютона и градиентного для решения нелинейных функциональных уравнений // Методы вычислений. Л., 1966. С. 22 – 29.

Ю. А. Блинков

ИНВОЛЮТИВНЫЕ БАЗИСЫ ТОРИЧЕСКИХ ИДЕАЛОВ*

Рассмотрим задачу вычисления множества образующих торического идеала I [1 – 4], которые задаются соотношениями между мономами $\{m_1, \dots, m_k\}$ состоящими из переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$. Решение можно получить, определив ядро гомоморфизма $\pi: k[v_1, \dots, v_k] \rightarrow k[x_1, \dots, x_k]$. Гомоморфизм π задается следующими соотношениями: $v_1 \mapsto m_1, \dots, v_k \mapsto m_k$. Рассмотрим идеал J над $k[x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_k]$, генерируемый образующими $\{v_1 - m_1, \dots, v_k - m_k\}$. Определим допустимое упорядочение, разделяющее переменные x_1, \dots, x_n и v_1, \dots, v_k , тогда базис Грёбнера G идеала J даст соотношения между мономами $\{m_1, \dots, m_k\}$, заданными $G \cup k[v_1, \dots, v_k]$.

В работах [5 – 8] были рассмотрены алгоритмы построения базисов Грёбнера специального вида, основанные на понятии инволютивного деления [6, 7, 9].

Определение 1. Мы будем говорить, что на множестве мономов M определено инволютивное деление L , если для любого конечного подмножества $U \subset M$ и для любого $u \in U$ задан подмоноид $L(u, U)$ моноида M , удовлетворяющий следующим условиям:

a) из $w \in L(u, U)$ и $v | w$ следует $v \in L(u, U)$;

b) из $u, v \in U$ и $uL(u, U) \cap vL(v, U) \neq \emptyset$ следует $u \in vL(v, U)$ или $v \in uL(u, U)$;

c) из $v \in U$ и $v \in uL(u, U)$ следует $L(v, U) \subseteq L(u, U)$;

d) из $V \subseteq U$ следует $L(u, U) \subseteq L(u, V)$ для всех $u \in V$.

Элементы $L(u, U)$ называются мультипликативными для u .

Для каждого $u \in U$ данное определение приводит к разделению

$$\{x_1, \dots, x_n\} = M_L(u, U) \cup NM_L(u, U), \quad M_L(u, U) \cap NM_L(u, U) = \emptyset$$

множества переменных на два непересекающихся подмножества мультипликативных $M_L(u, U) \subset L(u, U)$ и немультипликативных $NM_L(u, U) \cap L(u, U) = \emptyset$ переменных.

В инволютивном делении, определённом на множестве мономов, не делящих друг друга в обычном смысле, может быть только один инволютивный делитель для произвольного монома. Это следствие свойства b) инволютивного деления позволяет организовать его эффективный поиск,

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-15-96691, № 01-01-00708, и INTAS, грант № 99-1222.

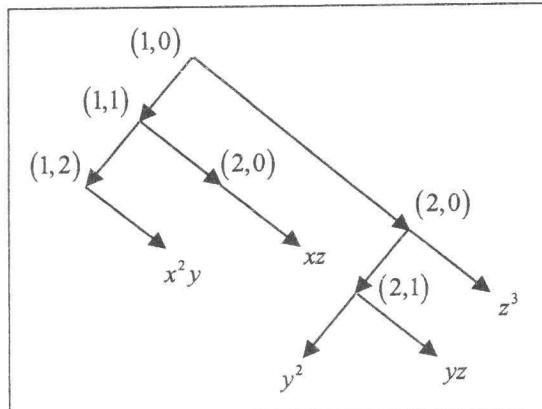
используя, например, метод сепарирующих мономов [10] или дерево Жане [11].

Определение 2. Деление Жане [12]. Для каждого индекса переменной $1 \leq i \leq n$ распределим элементы U по подгруппам, определяемым набором неотрицательных целых чисел d_1, \dots, d_i :

$$[d_1, \dots, d_i] = \{u \in U \mid d_j = \deg_j(u), 1 \leq j \leq i\}.$$

Тогда переменная x_i является мультиплективной по Жане для $u \in U$, если $i=1$ и $\deg_1(u) = \max \{\deg_1(v) \mid v \in V\}$, или если $i > 1$, $u \in [d_1, \dots, d_{i-1}]$ и $\deg_i(u) = \max \{\deg_i(v) \mid v \in [d_1, \dots, d_{i-1}]\}$.

Построим бинарное дерево, которое будем называть деревом Жане, структура которого отражает требуемое разбиение на подгруппы множества U , упорядоченное внутри каждой подгруппы по степеням переменных. Рассмотрим множество мономов $U = \{x^2y, xz, y^2, yz, z^3\}$, ($x \succ y \succ z$) и отобразим его в виде дерева Жане как показано на рисунке.



Дерево Жане

Листья дерева соответствуют мономам рассматриваемого множества. Левому потомку соответствует узел с большей степенью текущей переменной. Правый потомок указывает на узел с более старшей переменной согласно выбранному упорядочению. Структура дерева учитывает, в отличие от [11], разреженность мономов представленных в базисах торических идеалов из-за большого количества переменных. Данная информация представлена в паре, где первый элемент пары представляет собой номер текущей переменной, а второй – её степень.

Дерево Жане имеет временную сложность [11] нахождения делителя $O(n+d)$, для n -переменных и мономов, ограниченных общей степенью d .

При данных условиях, число мономов, не делящих друг друга в обычном смысле, имеет верхнюю оценку $\binom{n+d-1}{n-1}$, равную в точности числу мономов степени d .

Ввиду большого числа переменных и отсутствия арифметики основная сложность алгоритма построения базиса Грёбнера лежит в огромном числе двучленов [3 – 4], возникающих при построении базиса торического идеала. Быстрое определение делителя для проведения редукций при вычислении S -полинома (или немультиплликативного продолжения для инволютивного алгоритма) значительно ускоряет алгоритм, поскольку число элементов в базисе Грёбнера экспоненциально зависит от степени исходных полиномов и количества переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Conti P., Traverso C.* Buchberger algorithm and integer programming. Proceedings AAECC-9 (new Orleans), Springer LNCS. 1991. Vol. 539. P. 130 – 139.
2. *Di Biase F., Urbanke R.* An algorithm to calculate the kernel of certain polynomial ring homomorphisms. Experimental Mathematics. 1995. Vol. 4. P. 227 – 234.
3. *Pottier L.* Groebner bases of toric ideals. Rapport de recherche 2224 (1997), INRIA Sophia Antipolis.
4. *Bigatti A. M., La Scala R., Robbiano L.* Computing toric ideals // J. Symbolic Computation. 1999. Vol. 27. P. 351 – 365.
5. *Жарков А. Ю., Блинков Ю. А.* Инволютивные системы алгебраических уравнений // Программирование. 1994. № 1. С. 53 – 56.
6. *Gerdt V. P., Blinkov Yu. A.* Involutive Bases of Polynomial Ideals // Mathematics and Computers in Simulation. 1998. Vol. 45. P. 519 – 542.
7. *Gerdt V. P., Blinkov Yu. A.* Minimal Involutive Bases // Mathematics and Computers in Simulation. 1998. Vol. 45. P. 543 – 560.
8. *Apel J.* Gröbner Approach to Involutive Bases // J. Symbolic Computation. 1995. № 19. P. 441 – 458.
9. *Гердт В. П., Блинков Ю. А.* Инволютивное деление мономов // Программирование. 1998. № 6. С. 22 – 24.
10. *Блинков Ю. А.* Метод сепарирующих мономов для инволютивных делений // Программирование. 2001. № 3. С. 43 – 45.
11. *Гердт В. П., Янович Д. А., Блинков Ю. А.* Быстрый поиск делителя Жане // Программирование. 2001. № 1. С. 32 – 36.
12. *Janet M.* Leçons sur les Systèmes d'Equations aux Dérivées Partielles // Cahiers Scientifiques, IV, Gauthier-Villars. Paris, 1929.

Е. В. Варламова, Л. Л. Громова

**ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ
ДЛЯ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА α^***

Обозначим через S_α^* , $0 \leq \alpha < 1$, класс регулярных функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ в единичном круге и таких, что

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

При $\alpha=0$ имеем класс $S_0^* = S^*$ функций, звездообразных в единичном круге.

В настоящей статье изучается функционал

$$M_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^{\lambda_1} |f'(re^{i\theta})|^{\lambda_2} d\theta, \text{ где } f(z) \in S_\alpha^*, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, 0 < r < 1.$$

К исследованию интегральных средних обращались многие авторы, (см., например, [1, 2, 5]).

Известно [3] следующее: если $f(z) \in S^*$, $0 < r < 1$, $z = re^{i\theta}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 1 - 2\lambda_2$, $\lambda_2 \geq 0$, то

$$M_f(r) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K(z)|^{\lambda_1} |K'(z)|^{\lambda_2} d\theta. \quad (1)$$

Неравенство (1) точное только для функций Кёбе $K(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\gamma} z)^2}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Получим аналогичные неравенства в классе S_α^* , изменив схему рассуждений в [3]. Используем интегральное представление для $f(z) \in S_\alpha^*$

$$f(z) = z \exp \left\{ -2(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - e^{i\theta} z) d\mu(\theta) \right\}, \quad (2)$$

где $\mu(\theta)$ – неубывающая функция для $\theta \in [-\pi; \pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1$. Считая $\mu(\theta)$ кусочно-постоянной, получим из (2) функции вида

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00123.

$$f_n(z) = \frac{z}{\prod_{k=1}^n (1 - e^{i\theta_k} z)^{2(1-\alpha)\beta_k}} \in S_\alpha^*, \quad \theta_k \in [-\pi; \pi] \text{ и } \beta_k \geq 0, \sum_{k=1}^n \beta_k = 1.$$

Эти функции образуют подкласс $S_{\alpha,n}^* \subset S_\alpha^*$, всюду плотный в S_α^* , поэтому нижеследующие теоремы достаточно доказать для $f_n(z)$.

Сначала сформулируем вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 [4]. Пусть $\phi(t), \psi(t)$ – вещественные, чётные, 2π -периодические положительные функции, $t \in \mathbb{R}$. Если ϕ, ψ не возрастают на $(0; \pi)$, тогда $\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\psi(t+\theta) dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\psi(t) dt$. Неравенство точное только для $\theta = 0$.

Лемма 1 непосредственно следует из неравенств для функций-перестановок [4].

ЛЕММА 2. Пусть ϕ, ψ – неотрицательные, чётные, 2π -периодические функции на \mathbb{R} . Если ϕ, ψ не возрастают на $(0; \pi)$ или не убывают на $(0; \pi)$ и если $s > 0, t \geq 1, \theta_j \in \mathbb{R}, \beta_j > 0, \sum_{j=1}^n \beta_j = 1$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^n \gamma^{s\beta_k} (\theta + \theta_k) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \psi(\theta + \theta_j) \right)^t d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \phi^s(\theta) \psi^t(\theta) d\theta. \quad (3)$$

Лемма 2 является следствием неравенства Гёльдера, Минковского ($t \geq 1$) и леммы 1.

ЛЕММА 3. Пусть ϕ, ψ – неотрицательные чётные, 2π -периодические функции на \mathbb{R} . Если ϕ, ψ не возрастают на $(0; \pi)$, $s > 0, 0 < t < 1, \theta_j \in \mathbb{R}, \beta_j > 0, \sum_{j=1}^n \beta_j = 1$, тогда (3) выполняется, если существует γ , $0 < \gamma < t$, такое,

что $\phi^s \psi^{t-\gamma}$ не возрастает на $(0; \pi)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^n \gamma^{s\beta_k} (\theta + \theta_k) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \psi(\theta + \theta_j) \right)^t d\theta \leq \\ & \leq \prod_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} \phi^s(\theta + \theta_k) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \psi(\theta + \theta_j) \right)^t d\theta \right)^{\beta_k}. \end{aligned}$$

$$\text{Положим } \int_{-\pi}^{\pi} \phi^s(\theta) \psi^\gamma(\theta) \psi^{-\gamma}(\theta) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \psi(\theta + \theta_j) \right)^t d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^s(\theta) \psi^t(\theta))^{\frac{\gamma}{t}} \left(\varphi^s(\theta) \psi^{\frac{-\gamma t}{t-\gamma}}(\theta) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \psi(\theta + \theta_j) \right)^{\frac{t^2}{t-\gamma}} \right)^{\frac{t-\gamma}{t}} d\theta.$$

Применяя неравенство Гёльдера, выбираем γ так, что $0 < \gamma < t$ и $\frac{t^2}{t-\gamma} \geq 1$.

Применяя неравенство Минковского, получаем утверждение леммы 3.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(z) \in S_\alpha^*$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 1$. Тогда $M_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^{\lambda_1} |f'(re^{i\theta})|^{\lambda_2} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_\alpha(z)|^{\lambda_1} |K'_\alpha(z)|^{\lambda_2} d\theta$, $0 < r < 1$,

$z = re^{i\theta}$. Оценка точная, экстремальной является функция Кёбе

$$K_\alpha(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\gamma} z)^{2(1-\alpha)}}, \quad \gamma \in \Re.$$

Доказательство. Полагаем $f(z) = f_n(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} M_{f_n}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(z)|^{\lambda_1} |f'_n(z)|^{\lambda_2} d\theta = \frac{1}{2\pi r^{\lambda_2}} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(z)|^{\lambda_1 + \lambda_2} \left| \frac{zf'_n(z)}{f_n(z)} \right|^{\lambda_2} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi r^{\lambda_2}} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^n \left(\left| \frac{z}{(1 - e^{i\theta_k} z)^{2(1-\alpha)}} \right|^{\lambda_1 + \lambda_2} \left| \frac{zf'_n(z)}{f_n(z)} \right|^{\lambda_2} \right)^{\beta_k} d\theta. \end{aligned}$$

$$\frac{zf'_n(z)}{f_n(z)} - \alpha = (1 - \alpha) \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{1 + e^{i\theta_k} z}{1 - e^{i\theta_k}}, \quad 0 \leq \beta_k < 1, \quad \sum_{k=1}^n \beta_k = 1.$$

$$\text{Обозначим } \varphi(\theta + \theta_k) = \left| \frac{z}{(1 - e^{i\theta_k} z)^{2(1-\alpha)}} \right|, \quad \psi(\theta + \theta_j) = \left| \frac{1 + e^{i\theta_j} z(1 - 2\alpha)}{(1 - e^{i\theta_j} z)} \right|.$$

Функции $\varphi_1(\theta) = |1 - re^{i\theta}|$ и $\psi_1(\theta) = \left| \frac{1 - re^{i\theta}}{1 + re^{i\theta}(1 - 2\alpha)} \right|$ возрастают на $(0; \pi)$ при $0 < r \leq 1$. Из леммы 1 и леммы 2 имеем

$$M_{f_n}(r) \leq \frac{r^{\lambda_1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{(1 - z)^{2(1-\alpha)}} \right|^{\lambda_1 + \lambda_2} \left| \frac{1 + z(1 - 2\alpha)}{1 - z} \right|^{\lambda_2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |K_\alpha(z)|^{\lambda_1} |K'_\alpha(z)|^{\lambda_2} d\theta.$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$f(z) \in S_\alpha^*, \quad \sqrt{2} - 1 \leq \alpha < 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Re, \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0,$$

$$0 \leq \lambda_2 < 1, (1-\alpha)\lambda_1 + (2-\alpha)\lambda_2 \geq 1.$$

Тогда утверждение теоремы 1 сохраняется.

Доказательство. Снова полагаем $f(z) = f_n(z)$. Применяя лемму 3, положим

$$t = \lambda_2, \quad s = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \gamma = \frac{\lambda_2(1-\alpha)(\lambda_1 + \lambda_2)}{(1-\alpha)\lambda_1 + (2-\alpha)\lambda_2},$$

$$P(\theta) = \varphi^s(\theta) \psi^{\frac{-\gamma t}{t-\gamma}}(\theta) = \varphi^{\lambda_1 + \lambda_2}(\theta) \psi^{-(1-\alpha)(\lambda_1 + \lambda_2)}(\theta) = \\ = \left| \frac{1}{(1-z)^{2(1-\alpha)}} \right|^{\lambda_1 + \lambda_2} \left| \frac{1+z(1-2\alpha)}{1-z} \right|^{-(1-\alpha)\lambda_1 + \lambda_2} = \left| \frac{1}{(1-z)(1+z(1-2\alpha))} \right|^{(1-\beta)(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Если $1/2 \leq \alpha < 1$, то функция $P_1(\theta) = |1 - re^{i\theta}| |1 + re^{i\theta(1-2\alpha)}|$ возрастает на $(0; \pi)$ при $0 < r \leq 1$. Если же $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha < 1/2$, то

$$P_2(\theta) = |1 - re^{i\theta}|^2 |1 + r(1-2\alpha)e^{i\theta}|^2 -$$

квадратный трёхчлен для $s = -\cos t$. Легко убедиться, что $P_2(\theta)$ возрастает на $(0; \pi)$ при $0 < r \leq 1$, что завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(z) \in S_\alpha^*$, $0 < \alpha < \sqrt{2} - 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$, $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq \lambda_2 \leq 1$, $\lambda_1(1-\alpha) + \lambda_2(2-\alpha) \geq 1$.

Тогда утверждение теоремы 1 сохраняется при

$$0 < r < \frac{\sqrt{1-2\alpha} + 1 - \alpha}{\alpha\sqrt{1-2\alpha}}, z = re^{i\theta}.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что при $0 < \alpha < \sqrt{2} - 1$ функция $P_1(\theta)$ возрастает при $\theta \in (0; \pi)$ для $r \in (0; r_0)$, где $r_0 = \frac{-\sqrt{1-2\alpha} + 1 - \alpha}{\alpha\sqrt{1-2\alpha}} < 1$. Рассуждая, как в теореме 2, завершаем доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baernstein A. II Integral means univalent functions and circular simmetrization.* Acta Math. 1974. № 133. С. 139 – 169.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: Наука, 1966.
3. Громова Л. Л., Зыбина Т. Т. Об интегральных средних для звездообразных функций. Уч. зап. СГПИ. 1968. Вып. 46. С. 6 – 12.
4. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ГИИЛ, 1948.
5. Livingston A. E. On the integral means of univalent, meromorphic function // Pacif. J. Math. 1977. Vol. 72. P. 167 – 180.

Л. Ф. Вахлаева, Т. В. Вахлаева, Е. А. Павлова

**ЭКОНОМИЧНЫЕ АЛГОРИТМЫ
РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Для решения разностных уравнений математической физики применяются итерационные методы, которые учитывают специфику матрицы системы, имеющей большое число нулевых элементов, и не требуют хранения в памяти ЭВМ матрицы большого порядка. Рассматриваются следующие итерационные методы: простая итерация, метод Зейделя, метод верхней релаксации, полпеременно-треугольный метод, метод переменных направлений, которые применяются к решению разностных краевых задач для уравнения Пуассона, уравнения с переменными коэффициентами, бигармонического уравнения, слабонелинейного уравнения второго порядка. При этом используются два типа аппроксимации частных производных – второго и четвертого порядков точности. В результате вычислительных экспериментов на модельных задачах найдены экономичные алгоритмы для каждого класса задач.

Любой двухслойный итерационный метод может быть записан в канонической форме

$$B \frac{y^{(k+1)} - y^{(k)}}{\tau_k} + Ay^{(k)} = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$y^{(0)}$ – начальное приближение задано, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_M^{(0)})$, B – линейный оператор, имеющий обратный B^{-1} , τ_k – итерационный параметр, A – квадратная матрица размерности $M \times M$, соответствующая исходной системе разностных уравнений

$$Ay = f. \quad (2)$$

Если B – диагональная или треугольная матрица, то счет идет по явным формулам, в противном случае решение системы (2) сводится к решению системы

$$By^{(k+1)} = By^{(k)} + \tau_k(f - Ay^{(k)}), \quad y^{(0)} \text{ – задано.} \quad (3)$$

Задача состоит в выборе оператора B и параметров τ_k таким образом, чтобы число арифметических действий, необходимых для получения решения системы (3) с требуемой точностью $\varepsilon > 0$, было наименьшим для заданного класса задач, т.е. в выборе экономичного алгоритма. Общее число арифметических действий, необходимых для получения решения системы (2) с точностью ε , определяется по формуле: $Q_n(\varepsilon) = q_0 n(\varepsilon)$, где $q_0(B, A)$ – число арифметических действий на каждой итерации, $n(\varepsilon)$ – ко-

личество итераций, необходимых для получения решения с точностью ε . Минимизировать q_0 можно с помощью оператора B , а также путем понижения порядка системы разностных уравнений (2), а этого можно добиться повышением порядка точности разностных уравнений.

1. Первая краевая задача для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), \quad \bar{D} = \{0 \leq (x_1, x_2) \leq 1\} = D + \Gamma, \quad U|_{\Gamma} = \mu(x). \quad (4)$$

Введем сетку $\bar{\omega}_h = \{x_{ij} = (ih, jh), (i, j) = \overline{0, N}, h = 1/N\}$ и сеточную функцию $y_{ij} = y(ih, jh)$. Задаче (4) сопоставим разностную схему 2-го порядка точности

$$y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h, \quad y|_{\gamma_h} = \mu(x). \quad (5)$$

Для решения полученной системы разностных уравнений $Ay = f$ применим итерационные методы [1]:

а) простой итерации (в этом случае $B=E$);

б) Зейделя и верхней релаксации ($B = D + \omega A^{-1}$, $\tau_k \equiv \omega, A = A^{-1} + D + A^+$) $\omega = 1$ для метода Зейделя, счет по явным формулам;

в) попеременно-треугольный метод (один шаг итерации разбивается на два этапа, на каждом счет осуществляется по явным формулам);

г) метод переменных направлений (тоже два этапа, однако здесь используется на каждом этапе метод прогонки);

д) метод верхней релаксации, примененный к разностной схеме повышенной точности

$$y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + h^2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} / 6 = -\left(f + h^2 (f_{\bar{x}_1 x_1} + f_{\bar{x}_2 x_2}) / 12\right). \quad (6)$$

Использование схемы 4-го порядка приводит к уменьшению порядка системы разностных уравнений в 7 – 8 раз и к уменьшению $Q_n(\varepsilon)$ в 3 – 4 раза по сравнению с другими методами для схемы (5). Итак, для задачи (4) оптимальным экономичным алгоритмом является метод верхней релаксации, примененный к разностной схеме (6).

2. Третья краевая задача для трехмерного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} LU &\equiv \sum_{\alpha=1}^3 A_{\alpha} \frac{\partial^2 U}{\partial x_{\alpha}^2} = -f(x), \quad 0 < x = (x_1, x_2, x_3) < 1, \\ K \frac{\partial U}{\partial n} &= CU - g(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Здесь n – внутренняя нормаль к границе Γ , $g(x)$ – заданная функция, K и C – заданные коэффициенты.

Построены разностные схемы 4-го порядка точности. Здесь уже применение схемы повышенной точности сокращает порядок системы

не в 7 раз, а в десятки раз. Сравнение на модельных задачах показало, что самым экономичным является метод верхней релаксации для схемы 4-го порядка точности.

3. Первая краевая задача для уравнения с переменными коэффициентами

$$\sum_{\alpha=1}^3 B_\alpha(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad 0 < x = (x_1, x_2, x_3) < 1.$$

Построены разностные схемы 2-го и 4-го порядков точности. Исследования на модельных задачах показали, что экономичным алгоритмом является метод верхней релаксации для схемы 4-го порядка.

4. Первая краевая задача для слабонелинейного уравнения в трехмерной области

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} = K_0 \left(x, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3} \right), \quad 0 < x = (x_1, x_2, x_3) < 1.$$

В [2] построены разностные схемы 2-го и 4-го порядков точности для двумерного уравнения, найден экономичный алгоритм – метод верхней релаксации, примененный к схеме 4-го порядка точности. Вычислительные эксперименты на модельных задачах в случае трехмерной области подтвердили этот вывод.

5. Бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = q(x), \quad 0 < x = (x_1, x_2) < 1.$$

Краевые условия двух типов:

$$a) U|_{\Gamma} = \frac{\partial U}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad b) U|_{\Gamma} = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}|_{\Gamma} = 0.$$

Построены разностные схемы 2-го и 4-го порядка, для их решения применены итерационные методы. Сравнение на модельных задачах показало, что экономичный алгоритм – это метод верхней релаксации для схемы повышенной точности.

Итак, на основании исследований, проведенных на модельных задачах для пяти уравнений математической физики, сделан вывод, что оптимальным экономичным алгоритмом является метод верхней релаксации для схемы повышенной точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Вахлаева Л. Ф., Вахлаева Т. В. Разностные методы повышенной точности для слабонелинейного эллиптического уравнения и сравнение их со схемами 2-го порядка точности. Саратов, 1996. 9 с. Деп. в ВИНИТИ. 24.09.96. № 2855-В 96.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ p -ВАРИАЦИИ НА ПРЯМОЙ*

Пусть функция $f(x)$ определена на R , $1 < p < \infty$. Рассмотрим следующую величину

$$\omega_{1-\sqrt[p]{p}}(f, \delta) = \sup_{-\infty < a < b < \infty} \sup_{|\xi| \leq \delta} \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p},$$

где $\xi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$, а $|\xi| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ – диаметр разбиения ξ . Если $\omega_{1-\sqrt[p]{p}}(f, \delta)$ ограничены константой, не зависящей от δ , то f принадлежит пространству $V_p(R)$ функций ограниченной p -вариации на R . Если же $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{1-\sqrt[p]{p}}(f, \delta) = 0$, то f называется p -абсолютно непрерывной функцией на R ($f \in C_p(R)$). Норма в $V_p(R)$ и $C_p(R)$ задается равенством

$$\|f\|_p = \max \left\{ \sup_{\delta > 0} \omega_{1-\sqrt[p]{p}}(f, \delta), \sup_{x \in R} |f(x)| \right\}.$$

Можно рассмотреть также p -вариационные модули более высокого порядка ($k \in N$)

$$\omega_{k-\sqrt[p]{p}}(f, \delta) = \sup \left\{ \omega_{1-\sqrt[p]{p}}(\Delta_h^{k-1} f(x), |h|) : |h| \leq \delta \right\}.$$

Как и в случае 2π -периодических функций [1], свойства функций ограниченной p -вариации на R связаны со свойствами функций из $L_p(R)$. Так, для $f \in V_p(R)$ выполнено неравенство

$$\omega_k(f, \delta)_{L_p} \leq \delta^{\sqrt[p]{p}} \omega_{k-\sqrt[p]{p}}(f, \delta),$$

а для f , у которой $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(k)} \in L_p(R)$, мы имеем

$$\omega_{k-\sqrt[p]{p}}(f, \delta) \leq \delta^{k-\sqrt[p]{p}} \|f^{(k)}\|_{L_p}.$$

Для целых функций g экспоненциального типа не выше σ и $k \in N$ верно неравенство

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-15-96123.

$$\|g^{(k)}\|_{L_p} \leq C(p) \sigma^{k-\frac{1}{p}} \|g\|_p.$$

С помощью этих результатов доказываются прямые и обратные теоремы приближения в $C_p(R)$. Пусть $A_\sigma(f)_p$ ($A_\sigma(f)_{L_p}$) – наилучшее приближение $f \in C_p(R)$ ($L_p(R)$) целыми функциями экспоненциального типа не выше σ . Тогда имеет место аналог теоремы Джексона-Стечкина [2, с. 272]

$$A_\sigma(f)_p \leq C \omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \frac{1}{\sigma}).$$

Верен также аналог обратной теоремы С.Б.Стечкина-А.Ф.Тимана-М.Ф.Тимана [2, с. 353]

$$\omega_{k-\frac{1}{p}}(f, \frac{1}{\sigma}) \leq C \sigma^{-k+\frac{1}{p}} \sum_{v=1}^{[\sigma]} [A_v(f)]_p v^{k-\frac{1}{p}-1}.$$

Следует отметить также такой результат. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L_p(R)$ и ряд $\sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{1}{p}-1} A_m(f)_{L_p}$ сходится. Тогда $f(x)$ эквивалентна $f_0(x) \in L_p(R)$ и

$$A_n(f_0)_p \leq C \left(A_n(f)_{L_p} n^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{\frac{1}{p}-1} A_i(f)_{L_p} \right).$$

В случае 2π -периодических функций аналогичные результаты были получены А.П. Терехиным [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терехин А. П. Приближение функций ограниченной p -вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1965. № 2. С. 171 – 187.
2. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

УДК 519.853.3 + 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДИСКРЕТНОГО МУЛЬТИОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Пусть в точках t_k , $k \in [0:N]$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq 1$, заданы значения функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$: $y_{1,k} = y_1(t_k)$, $y_{2,k} = y_2(t_k)$, причём $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $k \in [0:N]$. Рассмотрим дискретное мультиотображение (м.о.) $\Phi(\cdot)$, значе-

нием которого в каждой точке t_k , $k \in [0:N]$ является отрезок $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$. Обозначим через $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ полином n -й степени с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$.

Рассмотрим следующую задачу о наилучшем приближении м.о., заданного дискретно в узлах t_k , полиномом n -й степени:

$$\max_{k \in [0:N]} h(\Phi(t_k), p_n(A, t_k)) \longrightarrow \inf_{A \in R^{n+1}} . \quad (1)$$

Здесь $h(U, V) = \max \left\{ \sup_{u \in U} \inf_{v \in V} |u - v|, \sup_{v \in V} \inf_{u \in U} |u - v| \right\}$ – расстояние Хаусдорфа между множествами U и V из R^1 .

Обозначим через $\rho = \inf_{A \in R^{n+1}} \max_{k \in [0:N]} h(\Phi(t_k), p_n(A, t_k))$. Ясно, что

$\rho \geq \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}$. Путём несложных преобразований исходная задача (1) сводится к следующей:

$$\max_{k \in [0:N]} \max \{y_{2,k} - p_n(A, t_k), p_n(A, t_k) - y_{1,k}\} \longrightarrow \inf_{A \in R^{n+1}} . \quad (2)$$

2. Нетрудно показать, что для $N \leq n$ при переборе всех возможных значений параметров $r_k \in [-1; 1]$, $k \in [0:N]$, решение систем уравнений

$$p_n(A, t_k) - r_k(q - q_k) = \bar{y}_k, \quad k \in [0:N],$$

$$\text{где } \bar{y}_k = \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2}; \quad q_k = \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}; \quad q = \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}$$

даст нам все решения задачи (2). При этом $\rho = q$. Решение будет единственным только при $N = n$ и $q_k = q$, $k \in [0:N]$.

3. Принципиальный интерес представляет случай, когда $N = n + 1$. Запишем задачу (2) в виде

$$\varphi(A) \stackrel{df}{=} \max_{k \in [0:n+1]} f(A, k) \longrightarrow \inf_{A \in R^{n+1}}, \quad (3)$$

$$\text{где } f(A, k) \stackrel{df}{=} \max \{y_{2,k} - p_n(A, t_k), p_n(A, t_k) - y_{1,k}\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Решение задачи (3) существует. Для того чтобы вектор A^* был решением задачи (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

а) в некоторой точке t_s , $s \in [0:n+1]$

$$p_n(A^*, t_s) - y_{1,s} = y_{2,s} - p_n(A^*, t_s) = \max_{k \in [0:n+1]} f(A^*, k);$$

б) для всех $k \in [0:n+1]$ имеет место равенство

$$\xi_k (y_{1,k} - p_n(A^*, t_k)) + (1 - \xi_k) (y_{2,k} - p_n(A^*, t_k)) = (-1)^{\xi_k} h, \\ \xi_k \in \{0; 1\}, \xi_{k+1} = 1 - \xi_k, \quad (4)$$

где $h = \max_{k \in [0 : n+1]} f(A^*, k)$. При этом $\rho = h$.

Приведём краткую схему доказательства.

Существование полинома наилучшего приближения $p_n(A^*, t)$ получено из доказанной ограниченности при любом $c \geq 0$ множества $M_c = \left\{ A \in R^{n+1} / \max_{k \in [0 : n+1]} |p_n(A, t_k)| \leq c \right\}$.

Достаточность условия а) очевидна.

Предположим, что выполняется б) и, например, $\xi_0 = 1$. Тогда (4) можно представить в виде

$$y_k - p_n(A^*, t_k) = (-1)^{k+1} h, \quad k \in [0 : n+1], \quad (5)$$

где $\{y_k\}$, $k \in [0 : n+1]$ – селектор м.о., принимающий значения

$$y_k = \begin{cases} y_{1,k}, & \text{если } k = 2m, \\ y_{2,k}, & \text{если } k = 2m+1. \end{cases}$$

Согласно теореме 2.1 [1, с. 14], ввиду условий (5), $p_n(A^*, t)$ – полином наилучшего приближения для селектора $\{y_k\}$, при этом

$$h = \inf_{A \in R^{n+1}} \max_{k \in [0 : n+1]} |y_k - p_n(A, t_k)|. \quad (6)$$

С другой стороны, в соответствии с условием б), имеем

$$\inf_{A \in R^{n+1}} \max_{k \in [0 : n+1]} |y_k - p_n(A, t_k)| \leq \inf_{A \in R^{n+1}} \max_{k \in [0 : n+1]} f(A, k) \leq \\ \leq \max_{k \in [0 : n+1]} f(A^*, k) = h.$$
(7)

Из (6) – (7) следует, что A^* – решение задачи (3) и $\rho = h$.

Необходимость. Пусть $p_n(A^*, t)$ – полином наилучшего приближения м.о. $\Phi(t)$, и при этом не удовлетворяет условию а). Это, в частности, означает, что

$$h = \max_{k \in [0 : n+1]} f(A^*, k) > \max_{k \in [0 : n+1]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}. \quad (8)$$

Можно показать, что из (8) следует

$$h = f(A^*, k), \quad k \in [0 : n+1]. \quad (9)$$

Далее, используя (8) – (9), теорему 2.1 [1, с. 14], а также выпуклость функции $\varphi(A)$ доказывается, что имеет место б).

4. Наконец, доказано, что имеет место следующая
ТЕОРЕМА 2. Если выполняется неравенство

$$h > \max_{k \in [0 : n+1]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}, \quad (10)$$

где h определено в (8), то решение задачи (3) единственno.

Простые примеры показывают, что неравенство (10) не является необходимым условием единственности решения задачи (3).

Пример. Пусть

$$n = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1,$$

$$y_{1,0} = 1, \quad y_{1,1} = 0,$$

$$y_{2,0} = 1, \quad y_{2,1} = 2.$$

В этом случае условие (10) не выполняется, но задача (3) имеет единственное решение – полином $p_0(A^*, t) \equiv 1$, $t \in [0; 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ НА НЕГОЛОННОМНОМ МНОГООБРАЗИИ

На гладком многообразии X_n рассматривается неголономное многообразие X_n^m , заданное вместе с оснащением X_n^{n-m} . Вводится понятие допустимой тензорной структуры, в том числе, – допустимой почти симплектической и допустимой симплектической структур. Определяются симплектическая и почти симплектическая допустимые связности. Доказывается, что в отличие от голономного случая существуют не замкнутые почти симплектические формы, допускающие симметричные почти симплектические связности.

Под неголономным многообразием будем понимать тотальное пространство X_n^m векторного подрасслоения $\mu = (X_n^m, P, X_n)$ касательного расслоения $\tau = (T(X_n), \pi, X_n)$ гладкого класса C^∞ многообразия X_n . Многообразие X_n^m задано вместе со своим оснащением X_n^{n-m} . Число m называется размерностью, а $(n-m)$ – коразмерностью многообразия X_n^m . Под допустимыми тензорными структурами типа (s, t) будем понимать гладкие сечения тензорных расслоений $\underbrace{X_n^m \otimes \dots \otimes X_n^m}_s \otimes \underbrace{(X_n^m)^* \otimes \dots \otimes (X_n^m)^*}_t$, где в каждой точке $x \in X_n$ пространство $(X_n^m)_x^*$ является пространством линей-

ных форм, заданных на $(X_n^m)_x$. Будем обозначать с помощью $F_t^s(X_n)$ ($F_t^s(X_n^m)$) модуль тензорных полей (допустимых тензорных полей) типа (s, t) , заданных (может быть локально) на X_n . Имеет место естественное вложение $F_t^s(X_n^m) \subset F_t^s(X_n)$. Например, дифференциальную форму $\lambda \in F_1^0(X_n)$ мы будем называть допустимой, если $\lambda|_{X_n^{n-m}=0}$.

Под допустимой аффинной связностью на X_n будем понимать закон ∇ , ставящий в соответствие каждому $\bar{U} \in F_0^1(X_n^m)$ линейное отображение $\nabla_{\bar{U}}$ модуля $F_0^1(X_n^m)$ в себя, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \quad \nabla_{f_1\bar{U}_1 + f_2\bar{U}_2} = f_1\nabla_{\bar{U}_1} + f_2\nabla_{\bar{U}_2}; \quad 2) \quad \nabla_{\bar{U}}(f\bar{V}) = f\nabla_{\bar{U}}\bar{V} + (\bar{U}f)\bar{V}.$$

Пару (X_n^m, ω) , где ω – дифференциальная допустимая 2-форма ранга m , назовем неголономным почти симплектическим многообразием, а форму ω – допустимой почти симплектической формой. Если форма ω замкнута, то ω называется допустимой симплектической формой. Форма ω может быть замкнутой только в случае интегрируемости оснащения X_n^{n-m} [1]. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением (X_n^m, ω) с инволютивным оснащением, что позволяет использовать атлас карт $\chi(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, m$; $p, q = m+1, \dots, n$) таких, что векторные поля $\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}$ в каждой точке принадлежат $(X_n^{n-m})_x$. В этом случае векторные поля

$$\bar{e}_a = H(\partial_a) = \partial_a - \Gamma_a^p \partial_p, \quad (1)$$

где $H : T(X_n) \rightarrow X_n^m$ – проектор, являются допустимыми и линейно независимыми [1]. Кроме того, имеет место равенство

$$[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = M_{ab}^p \partial_p. \quad (2)$$

Допустимая аффинная связность ∇ называется почти симплектической, если $\nabla\omega = 0$. Следующие два предложения являются обобщениями на неголономный случай известных результатов [2] о почти симплектических связностях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\overset{\circ}{\nabla}$ – произвольная допустимая связность с коэффициентами $\overset{0}{\Gamma}_{bc}^a$. Тогда связность $\overset{1}{\nabla}$, коэффициенты $\overset{1}{\Gamma}_{bc}^a$ которой определяются равенствами

$$\overset{1}{\Gamma}_{bc}^a = \overset{0}{\Gamma}_{bc}^a + \frac{1}{2}\omega^{da}\overset{\circ}{\nabla}_b\omega_{cd}, \quad (3)$$

является почти симплектической.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Связность $\overset{2}{\nabla}_c$ с коэффициентами

$$\overset{2}{\Gamma}{}^a_{bc} = \overset{1}{\Gamma}{}^a_{bc} + \omega^{da} B_{bcd}, \quad (4)$$

является почти симплектической, если $B_{bcd} = B_{bcd}$.

Если $d\omega = 0$, то почти симплектическая связность с нулевым тензором кручения

$$T(\bar{u}, \bar{v}) = \nabla_{\bar{u}} \bar{v} - \nabla_{\bar{v}} \bar{u} - H[\bar{u}, \bar{v}] \quad (5)$$

называется симплектической связностью. Как следует из (2), (5), коэффициенты $\overset{1}{\Gamma}{}^a_{bc}$ симметричной связности относительно системы координат, определяемой базисом (1), симметричны: $\overset{1}{\Gamma}{}^a_{bc} = \overset{1}{\Gamma}{}^a_{cb}$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\overset{\circ}{\nabla}$ – симметричная связность, тогда $\overset{\circ}{\nabla}$ симметрична тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\overset{0}{(\nabla_{\bar{u}} \omega)(\bar{v}, \bar{w})} = D\omega(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = d\omega(H\bar{u}, H\bar{v}, H\bar{w}). \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. Если почти симплектическая форма ω допускает симметричную почти симплектическую связность, то $D\omega = 0$.

Доказательство. Пусть $\overset{\circ}{\nabla}$ – симметричная почти симплектическая связность, тогда равенство (3) примет вид $\overset{1}{\Gamma}{}^a_{bc} = \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bc}$. Следовательно, $\overset{\circ}{\nabla}$ – симметричная связность и выполняется (6), что и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если форма ω замкнута, то (X_n^m, ω) допускает симплектическую связность.

Доказательство. По теореме Дарбу замкнутая форма является интегрируемой. Полагая $\overset{1}{\Gamma}{}^a_{bc} = 0$ в адаптированной к ω карте, мы получаем искомую связность.

В отличие от голономного случая [2], замкнутость формы не эквивалентна существованию совместимой с ней симметричной связности. Для подтверждения этого приведем пример допустимой не замкнутой формы ω с симметричной связностью $\overset{\circ}{\nabla}$ такой, что $\nabla\omega = 0$.

Пример. Пусть X_3 – гладкое многообразие, получающееся из R^3 исключением точек (x^1, x^2, x^3) , для которых $x^2 = 0$ или $x^3 = 0$. Рассмотрим на X_3 неголономное многообразие X_3^2 , определяемое полями $\bar{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3$, $\bar{e}_2 = \partial_2$, и его оснащение, определяемое полем ∂_3 . Форма $\omega = x^3 dx^1 \wedge dx^2$ является почти симплектической формой: $d\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \neq 0$. Связность $\overset{\circ}{\nabla}$ зададим, полагая $\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bc} = 0$. Тензор B_{abc} определим равенствами $B_{111} = b_1$, $B_{112} = b_2$, $B_{122} = b_3$, $B_{211} = b_2 + \frac{x^2}{2}$, $B_{212} = b_3$, $B_{222} = b_4$, где b_1, b_2, b_3, b_4 – произвольные функции. Используя

(4), найдем явное выражение для Γ_{bc}^a . Учитывая, что $\omega_{12} = x^3$, $\omega^{21} = \frac{1}{x^3}$,

$$\text{получаем } \Gamma_{21}^1 = \frac{2}{x^3} \frac{b_3}{x^3}, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{2}{x^3} \frac{\Gamma_{12}^2}{2x^3} = -\frac{x^2}{2x^3} - \frac{b_2}{x^3}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галаев С. В., Гохман А. В. Обобщенные гамильтоновы системы на многообразиях со связностью // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Вып. 2. Изд-во Сарат. ут-та. С. 16 – 19.

2. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1995.

УДК 517.11

А. Н. Гамова

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ФОРМУЛ

Появление нестандартного анализа потребовало его теоретико-множественного обоснования. Теория Э. Нельсона (IST) рассматривает множества канторовского универсума как *стандартные и нестандартные*. Стандартные множества – это то, с чем имеет дело классическая математика, не оперирующая с константами, являющимися отличными от нуля бесконечно малыми, и что описывается в рамках теории множеств Цермело-Френкеля (ZFC), консервативным расширением которой является IST.

В язык теории IST добавляется новый предикатный символ $st(x)$ (x стандартно) и кванторы \forall^{st} , \exists^{st} . Формулы (строящиеся обычным образом) различаются как внутренние (формулы ZFC) и внешние (не являющиеся формулами ZFC). Аксиомы IST наряду с аксиомами ZFC содержат три новые аксиомы:

Принцип переноса

(T) $\forall^{st} t_1 \dots \forall^{st} t_k (\forall^{st} x A(x, t_1, \dots, t_k) \rightarrow \forall x A(x, t_1, \dots, t_k))$, где $A(x, t_1, \dots, t_k)$ – внутренняя формула со свободными переменными x, t_1, \dots, t_k , не содержащая других свободных переменных.

Принцип идеализации

(I) $\forall^{st \text{ fin}} z \exists x \forall y \in z B(x, y) \leftrightarrow \exists x \forall^{st} y B(x, y)$, где $B(x, y)$ внутренняя формула со свободными переменными x, y и, возможно, другими свободными переменными.

Принцип стандартизации

(S) $\forall^{st} x \exists^{st} y \forall^{st} z (z \in y \leftrightarrow z \in x \ \& \ C(z))$,

где $C(z)$ внутренняя или внешняя формула со свободной переменной z и, возможно, другими свободными переменными.

Из аксиом IST по правилам вывода исчисления предикатов имеем:

- (1) $\forall^{\text{st}} x \exists^{\text{st}} y A(x,y) \leftrightarrow \exists^{\text{st}} y^* \forall^{\text{st}} x A(x,y^*(x))$ и двойственная к ней
- (1') $\exists^{\text{st}} x \forall^{\text{st}} y A(x,y) \leftrightarrow \forall^{\text{st}} y^* \exists^{\text{st}} x A(x,y^*(x));$
- (2) $\forall x \forall^{\text{st}} y A(x,y) \leftrightarrow \forall^{\text{st}} y \forall x A(x,y)$ и двойственная к ней
- (2') $\exists x \exists^{\text{st}} y A(x,y) \leftrightarrow \exists^{\text{st}} y \exists x A(x,y);$

где $A(x,y)$ внутренняя или внешняя формула, содержащая наряду со свободными переменными x, y возможно и другие стандартные переменные.

- (3) $\forall^{\text{st}} x A(x) \leftrightarrow \forall x A(x)$ и двойственная к ней
- (3') $\exists^{\text{st}} x A(x) \leftrightarrow \exists x A(x);$
- (4) $\forall^{\text{st fin}} z \exists x \forall y \in z A(x,y) \leftrightarrow \exists x \forall^{\text{st}} y A(x,y)$ и двойственная к ней
- (4') $\exists^{\text{st fin}} z \forall x \exists y \in z A(x,y) \leftrightarrow \forall x \exists^{\text{st}} y A(x,y),$

где $A(x,y)$ внутренняя формула.

Из (3) и (3') следует, что для кванторов \forall^{st} и \exists^{st} имеют место обычные правила. Приведенные выше эквивалентности позволяют сводить многие понятия и утверждения нестандартной теории множеств и строящейся на этой основе нестандартной математики к эквивалентным выражениям канторовской математики. Процедура таких преобразований носит название алгоритма Нельсона. Суть алгоритма Нельсона состоит в приведении формулы к виду, когда может быть применен принцип переноса (снятия внешнего квантора стандартности).

Цель работы – программная реализация алгоритма Нельсона. Далее приводится описание вычислительного алгоритма.

Шаг 1. Высказывание нестандартного анализа записывают как формулу IST, т.е. без сокращений.

Шаг 2. Формулу IST приводят к пренексной нормальной форме $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n A(x_1, \dots, x_n)$, где $A(x_1, \dots, x_n)$ внутренняя формула, а Q_i ($i=1, \dots, n$) один из кванторов $\forall, \exists, \forall^{\text{st}}, \exists^{\text{st}}$. Если $n=0$, то процедура заканчивается.

Шаг 3. Если Q_n – внутренний квантор, то $A := Q_n x_n A(x_1, \dots, x_n)$ и переходят к шагу 2.

Шаг 4. Если Q_n – внешний квантор, то ищут первый внутренний квантор, просматривая кванторную приставку $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ справа налево.

Шаг 5. Если на шаге 4 внутренних кванторов не встретилось, то согласно (3) или (3') квантор Q_n заменяют на соответствующий внутренний квантор и переходят к шагу 2 (т.е. последовательно справа налево «стирают» верхний индекс st у каждого квантора).

Шаг 6. Пусть Q_m – первый встретившийся на шаге 4 внутренний квантор. Допустим, что Q_{m-1} – внешний квантор того же типа, что и Q_m , тогда применяют эквивалентности (2) или (2') и переходят к шагу 2.

Шаг 7. Если все кванторы Q_{m+1}, \dots, Q_n имеют один и тот же тип, то применяют эквивалентности (4) или (4') и переходят к шагу 2.

Шаг 8. Если происходит перемена типа квантора, т.е. если Q_m, Q_{p+1} – кванторы одного типа, а Q_{m+1}, Q_p – другого, противоположного типа, то

«склеивая» однотипные кванторы Q_{m+1}, \dots, Q_p , применяют эквивалентности (1) или (1*) и переходят к шагу 2.

Примеры, реализованные в программе в виде модулей:

- $\forall x \exists^{\text{st}} y \forall^{\text{st}} z A(x,y,z) \leftrightarrow \forall z^* \exists^{\text{fin}} y' \forall y \exists y \in y' A(x,y,z^*(y))$
- $\forall x \exists y \forall^{\text{st}} z A(x,y,z) \leftrightarrow \forall x \forall^{\text{fin}} z \exists y \forall z \in z A(x,y,z)$
- $\forall x (\forall^{\text{st}} y A(x,y) \rightarrow^{\text{st}} z B(x,z)) \leftrightarrow \forall z \exists^{\text{fin}} y' \forall x (\forall y \in y' A(x,y) \rightarrow B(x,z))$
- $\forall t (\forall^{\text{st}} x A(t,x) \leftrightarrow^{\text{st}} y B(t,y)) \leftrightarrow \forall y \forall z \exists^{\text{fin}} x \exists^{\text{fin}} w \forall t ((\forall x \in x A(t,x) \rightarrow B(t,y)) \& (\forall w \in w B(t,w) \rightarrow A(t,z)))$
- $\forall x (\forall^{\text{st}} y A(x,y) \rightarrow \exists z \forall^{\text{st}} w B(x,z,w)) \leftrightarrow \forall^{\text{fin}} w' \exists^{\text{fin}} y' \forall x (\forall y \in y' A(x,y) \rightarrow \exists z \forall w \in w B(x,z,w)).$

Собственно программа состоит из двух частей. В первой части синтаксическое дерево приводится к пренексной нормальной форме, во второй реализован алгоритм преобразования для дерева в пренексной нормальной форме. Для приведения дерева к пренексной нормальной форме осуществляется прямой обход следующего вида: если логическая связка не является эквивалентностью, то к пренексной нормальной форме приводится сначала левое поддерево, а затем правое; если логическая связка есть эквивалентность, то эта вершина заменяется на новую, у которой кванторная приставка пуста и логическая операция – конъюнкция. У левого поддерева кванторная приставка такая же, как у эквивалентности, логическая операция есть импликация из левого операнда эквивалентности в правый. У правого поддерева конъюнкции кванторная приставка как у эквивалентности, логическая операция есть импликация из правого операнда эквивалентности в левый, кроме того, в этом поддереве все квантифицированные переменные заменены на новые, до этого в дереве не встречавшиеся. После замены вершины обход дерева продолжается, начиная с новой вершины. Если очередное поддерево приведено к пренексной нормальной форме, то его кванторная приставка переносится в кванторную приставку родительской вершины (согласно правилам оперирования с кванторами). В результате кванторная приставка будет только у корневого узла. (Порядок вынесения кванторов из поддеревьев: сначала из левого, потом из правого, или сначала из правого, потом из левого, существенно влияет на алгоритм.)

Алгоритм для формулы в пренексной нормальной форме осуществлен в виде цикла, который повторяется, пока кванторная приставка не пуста. Если в голове списка оказывается внутренний квантор, то он удаляется из кванторного списка синтаксического дерева и добавляется в новый список, который после того, как мы исчерпаем исходный список, станет результатом работы алгоритма. Если в голове списка стоит внешний квантор, то ищется первый внутренний квантор, заодно проверяется, не меняется ли тип кванторов, предшествующих внутреннему, на двойственный начальному. Если при просмотре кванторной приставки внутренних кванторов не обнаружено, то к первому квантору в кванторной приставке применяется принцип переноса. Если внутренний и предшествующий

ему квантор одного типа, то они меняются местами. Если произошла смена типа квантов, то применяется принцип идеализации, иначе - принцип стандартизации.

Программа состоит из трех модулей. В основном модуле реализованы: синтаксический анализ, лексический анализ и вычислительный алгоритм. Во втором даны описания лексических и синтаксических структур, а также некоторые вспомогательные функции и процедуры для работы с ними. Третий модуль содержит процедуру, выдающую сообщение об ошибке.

ЛИТЕРАТУРА

Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 83, № 6. P. 1165 – 1198.

УДК 517.984

О. Б. Горбунов

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ДИРАКА С НЕИНТЕГРИУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

1. Рассмотрим краевую задачу для системы Дирака вида

$$BY' + (P(x) + P_\gamma(x))Y = \lambda Y, \quad 0 < x < \pi, \quad \gamma \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$V_1^T(\alpha)Y(0) = V_1^T(\beta)Y(\pi) = 0, \quad (2)$$

где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}, \quad P_\gamma(x) = \frac{\mu}{x - \gamma} \begin{pmatrix} \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(\alpha) = (V_1(\alpha), V_2(\alpha)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad T - \text{знак транспонирования.}$$

Здесь $p_k(x)$ – комплекснозначные функции, $\mu, \alpha, \beta, \varphi$ – комплексные числа. Пусть для определенности $\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, $\mu + 1/2 \notin \mathbb{N}$, и пусть $|x - \gamma|^{-2\operatorname{Re}\mu} |p_k(x)| \in L(0, \pi)$, $p_k(x) \in W_1^1(0, \pi)$, $k = 1, 2$.

Система Дирака без особенности изучена достаточно полно (см., например, [1]). Цель работы – выявить аналитические и асимптотические свойства характеристической функции ($X\Phi$) задачи (1), (2), исследовать поведение спектра и функции Вейля ($\Phi\mathcal{V}$) задачи (1), (2). Для оператора Штурма-Лиувилля подобные результаты получены в [2].

При работе с задачей (1), (2) важную роль играет специальная фундаментальная система решений системы уравнений (1) $\{S_j(x, \lambda)\}_{j=1,2}$, изучавшаяся в [3]. Эти решения могут быть найдены из следующих интегральных уравнений:

$$S_j(x, \lambda) = C_j(x, \lambda) + \int_{\gamma}^x C(x, \lambda) C^{-1}(t, \lambda) B P(t) S_j(t, \lambda) dt, \quad j = 1, 2,$$

где $C(x, \lambda) = (C_1(x, \lambda), C_2(x, \lambda))$, $C_j(x, \lambda) = (x - \gamma)^{\mu_j} V(-\varphi) \hat{C}_j(\lambda(x - \gamma))$,

$$\left(\hat{C}_1(t), \hat{C}_2(t) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \begin{pmatrix} tc_{1,2k+1} & c_{2,2k} \\ -c_{1,2k} & tc_{2,2k+1} \end{pmatrix}, \quad c_{j,2k+1} = c_{j,2k} (2\mu_j + 1 + 2k)^{-1},$$

$$c_{j,2k} = c_{j,0} \left((-1)^k 2^k k! \prod_{s=0}^{k-1} (2\mu_j + 1 + 2s) \right)^{-1}, \quad c_{10} c_{20} = 1, \quad \mu_j = (-1)^j \mu, \quad j = 1, 2,$$

здесь и далее считаем, что $x^\mu = \exp(\mu(\ln|x| + i \arg x))$, $\arg x \in (-\pi, \pi]$, при этом $S_j(x, \lambda)$ – целые по λ первого порядка, и $\det(S_1(x, \lambda), S_2(x, \lambda)) \equiv 1$, где $S(x, \lambda) = (S_1(x, \lambda), S_2(x, \lambda))$.

В [3] также получена следующая асимптотика при $|\lambda(x - \gamma)| \geq 1$ и $|\lambda| \rightarrow \infty$:

$$S_j(x, \lambda) = \beta_j^0 \lambda^{-\mu_j} e^{2i\pi\mu_j m} \left(e^{-i\lambda(x-\gamma)+i\varphi} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}_{\gamma} - (-1)^j e^{i\pi\mu_j l^0} e^{i\lambda(x-\gamma)-i\varphi} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}_{\gamma} \right), \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где $\left[(a_i)_{i=1,2} \right]_{\gamma} = \left(a_i + O(|\lambda(x - \gamma)|^{-\nu}) \right)_{i=1,2}$, $\beta_1^0 \beta_2^0 = \frac{1}{4i \cos \pi \mu}$,

$$\nu = \begin{cases} 1, \operatorname{Re} \mu \geq 1/2, \\ 2\operatorname{Re} \mu, 0 < \operatorname{Re} \mu < 1/2, \end{cases}, \quad l^0 = \begin{cases} -1, \arg(\lambda(x - \gamma)) \in \Pi_0, \\ 1, \arg(\lambda(x - \gamma)) \in C\Pi_0, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} 1, \arg \lambda \in \Pi_1, x < \gamma, \\ -1, \arg \lambda \in \Pi_{-1}, x > \gamma, \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad C\Pi_0 = \Pi_{-1} \cup \Pi_1,$$

$$\Pi_k = \{z : \arg z \in (\pi(5k - 3)/(6 - 2k), \pi(5k + 3)/(6 + 2k))\}, \quad k = 0, \pm 1.$$

2. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Phi_2(x, \lambda) = S(x, \lambda) S^{-1}(0, \lambda) V_2(\alpha),$$

$$\psi_2(x, \lambda) = S(x, \lambda) S^{-1}(\pi, \lambda) V_2(\beta),$$

$$\Delta(\lambda) = V_1^T(\beta) \Phi_2(\pi, \lambda) = -V_1^T(\alpha) \psi_2(0, \lambda) = V_1^T(\beta) S(\pi, \lambda) S^{-1}(0, \lambda) V_2(\alpha),$$

$$\Phi_1(x, \lambda) = -\psi_2(x, \lambda) / \Delta(\lambda),$$

$$M(\lambda) = V_2^T(\alpha) \Phi_1(0, \lambda),$$

функцию $\Delta(\lambda)$ назовем ХФ задачи (1), (2), её нули совпадают с собственными значениями (СЗ) задачи (1), (2), поскольку $\det(\Phi_2, \psi_2) \equiv \Delta(\lambda)$; функция $M(\lambda)$ называется ФВ задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 1. ХФ $\Delta(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

$$1) \Delta(\lambda) = -\frac{1}{2i} e^{i(\pi\lambda + \alpha - \beta)} [1] + \frac{1}{2i} e^{-i(\pi\lambda + \alpha - \beta)} [1] - l \sin \pi\mu e^{il(\lambda(\pi - 2\gamma) - 2\phi - \alpha - \beta)} [1],$$

где $[1] = (1 + O(|\lambda|^{-\nu}))$, при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $l = \begin{cases} -1, & \arg \lambda \in \Pi_0, \\ 1, & \arg \lambda \in C\Pi_0; \end{cases}$

2) существуют $h > 0, C_h > 0$, что $\Delta(\lambda) \geq C_h \exp(\pi|\operatorname{Im}\lambda|)$, при $|\operatorname{Im}\lambda| \geq h$, следовательно, весь спектр задачи (1), (2) лежит в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < h$;

3) число нулей N_a ХФ $\Delta(\lambda)$ в $R_a = \{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| \leq h, \operatorname{Re}\lambda \in [a, a+1]\}$ равномерно ограничено по a ;

4) обозначим $G_\delta = \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| \geq \delta, k \in \mathbb{Z}\}$, где $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – СЗ задачи 1, тогда $\Delta(\lambda) \geq C_\delta \exp(\pi|\operatorname{Im}\lambda|), \lambda \in G_\delta$;

5) существует $R_n \rightarrow +\infty$, что при достаточно малом δ , все окружности $|\lambda| = R_n$ лежат в G_δ при всех n ;

6) $\Delta(\lambda)$ однозначно определяется своими нулями $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, с учетом кратности.

Для определённости ограничимся случаем простого спектра, то есть случаем, когда ХФ имеет только простые нули.

ТЕОРЕМА 2. ФВ $M(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) $M(\lambda)$ – мероморфна, и имеет полюса в СЗ задачи (1), (2);

2) справедлива асимптотика

$$M(\lambda) = \frac{\cos(\pi\lambda + \alpha - \beta) - i \sin \pi\mu e^{il(\lambda(\pi - 2\gamma) - 2\phi - \alpha - \beta)}}{\sin(\pi\lambda + \alpha - \beta) + l \sin \pi\mu e^{il(\lambda(\pi - 2\gamma) - 2\phi - \alpha - \beta)}} + O(|\lambda|^{-\nu}),$$

при $|\lambda| \rightarrow \infty, \lambda \in G_\delta$;

3) имеет место разложение

$$M(\lambda) = M^0(\lambda) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{a_k}{\lambda - \lambda_k} - \frac{a_k^0}{\lambda - \lambda_k^0} \right),$$

где $\{\lambda_k^0\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ – СЗ, $M^0(\lambda)$ – ФВ задачи (1), (2) с $P(x) \equiv 0$, причём ряд сходится «со скобками», то есть $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k| < R_n} ;$

4) ФВ однозначно определяется заданием вычетов $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ и СЗ $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
2. Юрко В. А. О восстановлении дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля с особенностями внутри интервала // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 143 – 156.
3. Горбунов О. Б. О системе Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 21 – 24.

УДК 517.984

А. П. Гуревич, А. П. Хромов

О ЗАМЫКАНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^q[0,1]$ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА*

Обозначим через D_L область определения оператора $L(y) = y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + p_n(x)y(x)$, $x \in [0;1]$, с условиями

$$V_j(y) = U_j(y) - (y, \varphi_j) = 0, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{k_j} (a_{jk} y^{(k)}(0) + b_{jk} y^{(k)}(1)), \quad (y, \varphi_j) = \int_0^1 y(x) \varphi_j(x) dx, \quad \varphi_j(x) \in C[0;1].$$

Предполагаем, что формы $U_j(y)$ нормированы [1, с. 65 – 66]. Операторы такого вида встречаются, например, в [2]. В данной статье найдено замыкание D_L в пространстве $C^q[0,1]$, $q = 0, 1, \dots, n-1$.

Обозначим через n_q наименьшее значение j , при котором $k_j \leq q$.

ЛЕММА 1. Предположим, что $f(x) \in C^q[0,1]$ и удовлетворяет краевым условиям $V_j(f) = 0$, $j = n_q, \dots, n$. Тогда существует последовательность $\{y_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что 1) $y_m(x) \in C^n[0;1]$; 2) $V_j(y_m) = 0$, $j = n_q, \dots, n$; 3) $y_m(x) \rightarrow f(x)$ в пространстве $C^q[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\{p_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность алгебраических многочленов, сходящаяся к $f(x)$ в пространстве $C^q[0,1]$. Тогда $V_j(p_m) \rightarrow V_j(f) = 0$ при $m \rightarrow \infty$, $j = n_q, \dots, n$. То есть, $V_j(p_m) = o_m(1)$. Обозначим через $\{\psi_i(x)\}_{i=n_q}^n$ произвольный набор функций из $C^n[0,1]$, для

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

которых $U_j(\psi_i) = \delta_{ji}$ при $j \geq i$ (δ_{ji} – символ Кронекера). Очевидно, такие функции существуют. Действительно, пусть краевое условие $U_i(y) = 0$ таково, что $a_{ik_i} \neq 0$, тогда в качестве $\psi_i(x)$ можно взять интерполяционный алгебраический многочлен, определяемый условиями $\psi_i^{(s)}(0) = 0$, $s = 0, 1, \dots, k_i - 1$, $\psi_i^{(k_i)}(0) = \frac{1}{a_{ik_i}}$; $\psi_i^{(s)}(1) = 0$, $s = 0, 1, \dots, k_i$. Легко видеть, что при таком выборе $\psi_i(x)$ выполнены условия $U_j(\psi_i) = 0$ при $j > i$, $U_i(\psi_i) = 1$. Случай $a_{ik_i} = 0$, $b_{ik_i} \neq 0$ рассматривается аналогично.

Обозначим через $h_v(x) \in C^n[0,1]$ ($v = 1, 2, \dots$) функцию такую, что

- 1) $h_v(x) \equiv 1$ при $x \in [0, \frac{1}{2v}] \cup [1 - \frac{1}{2v}, 1]$;
- 2) $h_v(x) = 0$ при $x \in [\frac{1}{v}, 1 - \frac{1}{v}]$;
- 3) $0 \leq h_v(x) \leq 1$ при $x \in [\frac{1}{2v}, \frac{1}{v}] \cup [1 - \frac{1}{v}, 1 - \frac{1}{2v}]$.

Пусть $\psi_{iv}(x) = \psi_i(x)h_v(x)$. Очевидно, $(\psi_{iv}, \varphi_j) = o_v(1)$ при $v \rightarrow \infty$, $U_j(\psi_{iv}) = U_j(\psi_i)$. Поэтому $V_j(\psi_{iv}) = U_j(\psi_i) + o_v(1)$ при $v \rightarrow \infty$. Будем искать требуемую последовательность в виде $y_m(x) = p_m(x) - \sum_{i=n_q}^n C_i^{(m)} \psi_{iv}(x)$, где v выберем позднее.

Для определения $C_i^{(m)}$ получаем систему уравнений

$$V_j(y_m) = V_j(p_m) - \sum_{i=n_q}^n C_i^{(m)} (U_j(\psi_{iv}) + o_v(1)) = 0, \quad j = n_q, \dots, n, \quad \text{т.е.}$$

$$\sum_{i=n_q}^n C_i^{(m)} (U_j(\psi_{iv}) + o_v(1)) = V_j(p_m), \quad j = n_q, \dots, n. \quad (2)$$

Матрица $\|U_j(\psi_{iv})\|_{j,i=n_q}^n$ является верхнетреугольной, на её главной диагонали стоят единицы. Следовательно, $\det \|U_j(\psi_{iv})\|_{j,i=n_q}^n = 1$. А так как элементы матрицы системы (2) являются ограниченными по v , то при v достаточно больших определитель этой матрицы по модулю не меньше $\frac{1}{2}$. Выберем любое из таких v и зафиксируем. Но тогда, так как $V_j(p_m) = o_m(1)$, то система (2) имеет единственное решение, причем $C_i^{(m)} = o_m(1)$. Отсюда, $y_m(x) \rightarrow f(x)$ в норме $C^q[0,1]$. Лемма доказана.

Обозначим $D_i = \{y(x) \in C^n[0,1] : V_j(y) = 0, j = i, i+1, \dots, n\}$ $i = 1, 2, \dots, n_q$.

Пусть далее $\overline{D_i}$ – замыкание D_i по норме $C^q[0,1]$.

ЛЕММА 2. При $i = 2, \dots, n_q$ справедливы включения $D_i \subset \overline{D_{i-1}}$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $a_{i-1,k_{i-1}} \neq 0$. Пусть $f(x) \in D_i$. Построим последовательность $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty} \subset D_{i-1}$, сходящуюся к $f(x)$ в $C^q[0,1]$. Положим $\psi_{i-1,m}(x) = \frac{(1-x)^{k_{i-1}+1} \sin^{k_{i-1}}(mx)}{k_{i-1}! m^{k_{i-1}}}$, $m=1,2,\dots$. Тогда $\psi_{i-1,m}^{(k_{i-1})}(0)=1$, $\psi_{i-1,m}^{(k_{i-1})}(1)=0$, $\psi_{i-1,m}^{(s)}(0)=\psi_{i-1,m}^{(s)}(1)=0$, $s=0,\dots,k_{i-1}-1$, и, кроме того, $\psi_{i-1,m}(x) \rightarrow 0$ в $C^q[0,1]$.

Функции $\psi_s(x)$ ($s=i,\dots,n$) возьмем те же, что и в лемме 1. $\psi_{sv}(x)=\psi_s(x)h_v(x)$. Будем искать $f_m(x)$ в виде

$$f_m(x) = f(x) - C_{i-1}^{(m)} \psi_{i-1,m}(x) - \sum_{s=i}^n C_s^{(m)} \psi_{sv}(x). \quad (3)$$

Обозначим $V_{i-1}(f) = a$. Тогда для определения $C_s^{(m)}$ приходим к системе алгебраических уравнений

$$C_{i-1}^{(m)} V_l(\psi_{i-1,m}) + \sum_{s=i}^n C_s^{(m)} V_l(\psi_{sv}) = a \delta_{l,i-1}, \quad l=i-1,\dots,n. \quad (4)$$

Но $V_{i-1}(\psi_{i-1,m}) = a_{i-1,k_{i-1}} + o_m(1)$. Поэтому матрица системы (4) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{i-1,k_{i-1}} + o_m(1) & \dots & \dots & \dots \\ o_m(1) & 1 + o_v(1) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_m(1) & o_v(1) & \dots & 1 + o_v(1) \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы, стоящие во $2,\dots,n-i+1$ столбцах, не зависят от m и равномерно ограничены по v , поэтому

$$\det A = a_{i-1,k_{i-1}} + o_m(1) + o_v(1). \quad (5)$$

Выберем v настолько большим, чтобы в формуле (5) последнее слагаемое удовлетворяло условию $|o_v(1)| \leq \frac{|a_{i-1,k_{i-1}}|}{4}$ и зафиксируем. Но тогда

при m достаточно больших $|\det A| \geq \frac{|a_{i-1,k_{i-1}}|}{2}$. Поэтому система (4) имеет

единственное решение при m достаточно больших такое, что $C_{i-1}^{(m)} = O(1)$, $C_s^{(m)} = o_m(1)$, $s=i,\dots,n$. С учетом формулы (3) получаем требуемое.

ТЕОРЕМА. Справедливо равенство $\overline{D_1} = D^0$, где D^0 – множество функций из $C^q[0,1]$, удовлетворяющих условиям $V_j(y) = 0$, $j=n_q,\dots,n$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что D^0 замкнуто в $C^q[0,1]$, и, следовательно, $\overline{D_1} \subset D^0$. Пусть $f(x) \in D^0$. Для произвольного

$\varepsilon > 0$ в силу леммы 1 найдется функция $f_{n_q}(x) \in D_{n_q}$ такая, что $\|f - f_{n_q}\| < \varepsilon$ ($\|\cdot\|$ – норма в $C^q[0,1]$). Из леммы 2 следует, что существует система функций $\{f_i(x)\}_{i=2}^{n_q-1}$ такая, что $f_i(x) \in D_i$ и $\|f_i - f_{i-1}\| < \varepsilon$. Отсюда

$$\|f - f_1\| \leq \|f - f_{n_q}\| + \sum_{i=2}^{n_q} \|f_i - f_{i-1}\| < n_q \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд. М.: Наука, 1969.
2. Хромов А. П. Теорема равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378 – 405.

УДК 517.984

О. Ю. Дмитриев

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу

$$y''' - \lambda y = 0, \quad (1)$$

$$U_1(y) = a_{11}y(0) + y(1) = 0,$$

$$U_2(y) = a_{21}y'(0) + a_{22}y(0) + y'(1) = 0, \quad (2)$$

$$U_3(y) = a_{31}y''(0) + a_{32}y'(0) + a_{33}y(0) + y''(1) = 0,$$

где a_{ij} – константы и λ – спектральный параметр.

В данной статье обобщается результат А. П. Хромова при $n = 3$ [1]. Если выполняются условия

$$a_{11}a_{21} + a_{21}a_{31} + a_{31}a_{11} \neq 0,$$

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0,$$

$$a_{22} + a_{32} = 0,$$

$$a_{33} = 0,$$

(3)

то краевые условия (2) являются нерегулярными по Биркгофу [2, с. 66 – 67]. Функция Грина $G(x, t, \lambda)$ в таком случае имеет экспоненциальный рост при больших $|\lambda|$, причем как при $x < t$, так и при $x > t$. Основные трудности связаны с преодолением такого роста и их удается преодолеть за счёт использования специального функционального уравнения, которому должна удовлетворять разлагаемая функция.

Положим $\lambda = -\rho^3$ $\left(\arg \rho \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]\right)$. Тогда $y_j(x) = y_j(x, \rho) = \exp \rho \omega_j x$, где $\omega_j = \exp\left(\frac{2j-1}{3}\pi i\right)$, $j = \overline{1, 3}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Для собственных чисел λ_k справедливы асимптотические формулы: $\lambda_k = -\rho_k^3$, $\rho_k = \rho_{k+h}^0 + O\left(\frac{1}{k}\right)$, $\rho_k^0 = \frac{(2k+1)\pi}{2 \sin \frac{\pi}{3}}$,

где h – некоторое целое число, не зависящее от k . При этом все собственные значения, начиная с некоторого, простые.

Обозначим

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, \rho) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix}, & \varphi_2(x, \rho) &= \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix}, \\ \varphi_3(x, \rho) &= \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

где $U_{ij} = U_i(y_j)$.

$\varphi(x, \rho) = \alpha \varphi_1(x, \rho) + \beta \varphi_2(x, \rho) + \gamma \varphi_3(x, \rho)$, где α, β, γ – некоторое число. Если $\rho = \rho_k$, то $\varphi(x, \rho_k)$ будет собственной функцией.

Имеем

$$\varphi(x, \rho_k) = \begin{cases} O(\rho_k^3 \exp(\rho_k \omega_2 x + \rho_k \omega_3)), & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ O(\rho_k^3 \exp(\rho_k \omega_1 x)), & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases} \quad (4)$$

Если z – комплексное, то справедлива оценка

$$|\varphi(z, \rho_k)| = O(|\rho_k^3| |\exp(\rho_k \omega_1 z)| + |\exp(\rho_k \omega_2 z + \rho_k \omega_3)| + |\exp(\rho_k \omega_3 z)|). \quad (5)$$

Если $x \in [0, \frac{1}{3}]$ и фиксировано, то

$$|\varphi(x, \rho_k)| \geq C |\rho_k^3| |\exp(\rho_k \omega_2 x + \rho_k \omega_3)|. \quad (6)$$

Если $x \in [\alpha, \beta]$, где $\frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq 1$, то для каждого достаточно большого $|\rho_k|$ найдется $x_k \in [\alpha, \beta]$ такое, что

$$|\varphi(x_k, \rho_k)| \geq C |\rho_k^3| |\exp(\rho_k \omega_1 x_k)|. \quad (7)$$

Обозначим T_x ($x > \frac{1}{3}$) правильный треугольник в комплексной плоскости с центром в точке $\frac{1}{3}$ и одной из вершин в точке x .

Перейдем теперь к необходимым условиям равномерной сходимости рядов по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.).

ТЕОРЕМА 1. Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi(x, \rho_k) \quad (8)$$

сходится в точке $x = \alpha$, где $\alpha \in [0; \frac{1}{3}]$, то он сходится абсолютно и равномерно внутри $T_{1-2\alpha}$ к аналитической функции. Если он сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$, где $\frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq 1$, то он сходится абсолютно и равномерно в T_α к аналитической функции. Сумма f ряда (8) удовлетворяет функциональному уравнению

$$\begin{aligned} \Phi(f, x) = b_{11} f(\bar{\omega}_1 x) + b_{31} f(\bar{\omega}_3 x) + b_{12} \int_{1/3}^{\bar{\omega}_1 x} f(z) dz + b_{32} \int_{1/3}^{\bar{\omega}_3 x} f(z) dz + \\ + 3f(1-x) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $b_{11} = a_{11} - \omega_1 a_{21} + \omega_1^2 a_{31}$, $b_{31} = a_{11} - \omega_3 a_{21} + \omega_3^2 a_{31}$, $b_{12} = -\omega_1 a_{22} + \omega_1^2 a_{32}$, $b_{32} = -\omega_3 a_{22} + \omega_3^2 a_{32}$.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд (8) сходится равномерно на $[0,1]$, f – его сумма и μ не является собственным значением, то функция $g(x) = R_\mu f = \int_0^1 G(x, t, \mu) f(t) dt$ аналитически продолжима в T_1 , ограничена

в угле $|\arg z| \leq \frac{\pi}{3}$, $|z| \leq z_0$ и удовлетворяет уравнению (9). В заключение сформулируем теорему о разложении.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x) \in L[0,1]$ и при некотором натуральном κ функция $g(x) = R_\mu^\kappa f$ удовлетворяет следующим условиям:

а) аналитически продолжима в четырехугольник \tilde{T}_1 с вершинами

$$0, \frac{\omega_1}{2}, 1, \frac{\omega_3}{2};$$

б) непрерывна на интервалах $\left(0; \frac{\omega_1}{2}\right)$, $\left(0; \frac{\omega_3}{2}\right)$;

в) ограничена в угле $|\arg z| \leq \frac{\pi}{3}$, $|z| \leq z_0$;

г) при $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет уравнению (9).

Тогда $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на $(0,1)$ ряд Фурье по с.п.ф. краевой задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Хромов А. П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Математика и её приложения. Саратов, 1991.
- Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

АЛГОРИТМ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НОРМЫ*

1. Пусть D заданный выпуклый компакт из R^P , функция $n(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы на R^P , $\rho(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} n(x - y)$ – уклонение множества A от множества B , $h(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$ – расстояние Хаусдорфа между множествами A и B в норме $n(x)$, $Bn(x, r) = \{y \in R^P : n(x - y) \leq r\}$ – шар в норме $n(x)$ с центром в точке x и радиусом r . Тогда задачу о наилучшем приближении выпуклого компакта D шаром нормы $n(x)$ в метрике Хаусдорфа, порожденной этой нормой, можно записать в виде

$$h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in R^P, r \geq 0}. \quad (1)$$

Свойства решения этой задачи изучались в [1] для случая евклидовой нормы и в [2] для произвольной нормы $n(x)$.

В данной статье предлагается алгоритм получения приближенного решения задачи (1). Отправным моментом для его построения послужила доказанная в [2]

ТЕОРЕМА 1. Задача (1) эквивалентна задаче

$$\Phi(x) \equiv R(x) + P(x) \rightarrow \min_{x \in R^P}, \quad (2)$$

где $R(x) = \max_{y \in D} n(x - y)$, $P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x)$, $\rho_A(x) = \min_{y \in A} n(x - y)$,

$\Omega = R^P \setminus D$. При этом, если пара (x_0, r_0) является решением задачи (1), то точка x_0 является решением задачи (2). И наоборот, если точка x_0 – решение задачи (2), то пара (x_0, r_0) , где $r_0 = (R(x_0) - P(x_0))/2$ является решением задачи (1). При этом

$$\min_{x \in R^P, r \geq 0} h(D, Bn(x, r)) = (R(x_0) + P(x_0))/2.$$

В [2] показано, что функция $\Phi(x)$ является выпуклой на R^P . Поэтому к решению задачи (2) можно применять известные методы минимизации выпуклых функций. Предлагаемый ниже в п. 3 алгоритм использует специфику свойств целевой функции $\Phi(x)$, как суммы функций маргинального вида.

* Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

2. Сначала рассмотрим случай, когда задача (2), а следовательно и задача (1), может быть сведена к задаче линейного программирования.

Пусть компакт D и шар $Bn(0_p, 1)$ являются многогранниками, заданными в виде

$$D = \left\{ y \in R^P : \langle A_i, y \rangle + a_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \right\}, \quad (3)$$

$$Bn(0_p, 1) = \left\{ y \in R^P : \langle B_j, y \rangle + b_j \geq 0, \quad j = \overline{1, l} \right\}, \quad (4)$$

где A_i и B_j из R^P , a_i и b_j из R^1 , $b_j > 0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

Нетрудно доказать, что справедлива

ЛЕММА 1. Если D и $Bn(0_p, 1)$ имеют вид (3) и (4) соответственно, а $x \in D$, то

$$R(x) = \max_{j=\overline{1, l}} \{ \langle D_j, x \rangle + d_j \} \quad \rho_\Omega(x) = \min_{i=\overline{1, m}} \{ \langle C_i, x \rangle + c_i \},$$

$$\text{где } D_j = -\frac{B_j}{b_j}, \quad d_j = \max_{y \in -D} \langle D_j, y \rangle, \quad C_i = \frac{A_i}{n^*(A_i)}, \quad c_i = \frac{a_i}{n^*(A_i)},$$

$$n^*(A_i) = \max_{n(v) \leq 1} \langle v, A_i \rangle.$$

Как показано в [2], центр хотя бы одного шара наилучшего приближения содержится в D . Поэтому, как следует из теоремы 1 и леммы 1, для получения хотя бы одного решения задачи (1) нам достаточно решить задачу

$$\max_{\substack{i=\overline{1, m}, \\ j=\overline{1, l}}} \{ \langle D_j - C_i, x \rangle + d_j - c_i \} \rightarrow \max_{x \in D}. \quad (5)$$

Осталось заметить, что задача (5) известным приемом [3] сводится к задаче линейного программирования. А именно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если D и $Bn(0_p, 1)$ являются многогранниками (3) и (4) соответственно, то задача (5) эквивалентна задаче

$$\begin{cases} z \rightarrow \min, \\ \langle D_j - C_i, x \rangle + d_j - c_i \leq z, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, l}, \\ x \in D. \end{cases} \quad (6)$$

При этом, если (z^*, x^*) – решение задачи (6), то x^* – решение задачи (5). И наоборот, если x^* – решение задачи (5), то (z^*, x^*) , где $z^* = R(x^*) - \rho_\Omega(x^*)$, есть решение задачи (6).

3. Для произвольного выпуклого компакта D и произвольной используемой нормы $n(x)$ предлагается следующая схема построения последовательности приближений решения задачи (2), принадлежащего множеству D .

Пусть на k -м шаге алгоритма получена тройка объектов $\{D_k, M_k, x_k\}$.

В ней D_k и M_k являются многогранниками, содержащими соответственно множества D и $Bn(0_p, 1)$, а точка $x_k \in D_k$ является решением задачи

$$R_k(x) - P_k(x) \rightarrow \min_{x \in D_k}. \quad (7)$$

Здесь $R_k(x) = \max_{y \in D} n_{M_k}(y - x)$, $n_{M_k}(x) = \inf \{ \alpha > 0 / x \in \alpha M_k \}$ – функция Минковского множества M_k , $P_k(x) = \min_{y \in R^P \setminus D_k} n(x - y)$. При $k=0$ выбор многогранников $D_0 \supset D$ и $M_0 \supset Bn(0_p, 1)$ осуществляется произвольно. Важно отметить, что задача (7) приёмом, использованным в п. 2, сводится к задаче линейного программирования.

Переход к новой тройке $\{D_k, M_k, x_k\}$ осуществляется следующим образом.

Построение D_{k+1} . Если $x_k \in D$, то в любой точке $y_k \in \Omega$, для которой $\rho_\Omega(x_k) = n(x_k - y_k)$, строим опорную гиперплоскость $\pi(y_k)$ к D . Если же $x_k \notin D$, то берем любую точку $y_k \in D$, для которой $\rho_D(x_k) = n(x_k - y_k)$, и находим гиперплоскость $\pi(y_k)$, разделяющую D и $Bn(x_k, \rho_D(x_k))$. Построенная гиперплоскость $\pi(y_k)$ вместе с гранями многогранника D_k образует новый многогранник $D_{k+1} \supset D$.

Построение M_{k+1} . Берем любую точку $z_k \in D$, для которой $R(x_k) = n(x_k - z_k)$ и в точке $\frac{z_k - x_k}{n(z_k - x_k)}$ находим опорную гиперплоскость $\pi(z_k)$ к $Bn(0_p, 1)$. Вместе с гранями многогранника M_k она образует новый многогранник $M_{k+1} \supset Bn(0_p, 1)$.

Теперь в качестве x_{k+1} берём решение задачи (7) при $k:=k+1$.

Доказано, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Любая предельная точка x^* последовательности $\{x_k\}$ является центром шара наилучшего приближения, а $r^* = \frac{R(x^*) + \rho_\Omega(x^*)}{2}$

его радиусом, причем

$$h(D, Bn(x^*, r^*)) = \frac{R(x^*) - \rho_\Omega(x^*)}{2}.$$

Доказательство теоремы 3 основано на использовании формулы субдифференциала функции $\Phi(x)$, полученной в [2], её липшицевости, применения теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский М. С., Силин Д. Б. О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Труды МИРАН. 1995. Т. 211. С. 338 – 354.

2. Дудов С. И., Златорунская И. В. Равномерная оценка выпуклого компакта шагом произвольной нормы // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13 – 38.

3. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1964.

УДК 519.62/.624.3

В. С. Зюзин, Н. А. Рычкова

**СУЖЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ,
СОДЕРЖАЩИХ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

В работе [1] мы рассматривали нахождение интервальных сплайнов, включающих точное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Этот метод несвободен от одного существенного недостатка – эффекта «раскрутки»¹. Итерационный метод, предлагаемый в данной работе, подавляет нежелательный эффект. Он основывается на методе последовательных приближений Пикара, который, как показано в [2], имеет высокую скорость сходимости

$$v_n - u_n \leq \frac{c}{2^{2^n}},$$

где v_n и u_n – верхняя и нижняя оценка решения дифференциального уравнения с начальным условием.

В этой статье мы будем рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$y'(t) = P_2(y), y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

где $P_2(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2$, $b_i \in R, i = \overline{0, 2}$,

поскольку широкий класс ОДУ можно свести путем замены переменных с увеличением порядка системы к ОДУ, правые части которых имеют квадратичную форму относительно неизвестной функции.

Решение задачи (1) будем находить в виде интервальной функции, включающей точное решение по итерационной схеме

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t P_2(y^s(\tau)) d\tau, s - \text{номер итерации}, \\ y^{s+1}(t) &= Z(\tilde{y}), \text{ где } Z - \text{процедура сворачивания}. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве начального приближения $y^0(t)$ можно взять интервальный сплайн степени $p - S_p(t)$, построение которого описано в [1]. Поскольку [1]

¹ Расширение границ интервала, включающего решение, с увеличением номера шага.

$$y^0(t) \subseteq S_p(t) = [\underline{S}_p(t), \bar{S}_p(t)] \text{ или } \underline{S}_p(t) \leq \underline{y}^0(t) \leq \bar{y}^0(t) \leq \bar{S}_p(t),$$

где $y^0(t), y^s(t), S_p(t) \in I(R)$, $I(R)$ – множество интервалов,

$$\forall a \in I(R) \quad a = [\underline{a}, \bar{a}] = \{x \mid x \in R \wedge \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\},$$

а интервальная арифметика и операция интегрирования монотонны по включению, то

$$P_2(y^0(t)) \subseteq P_2(S_p(t)) \quad \text{и} \quad \int P_2(y^0(t)) dt \subseteq \int P_2(S_p(t)) dt.$$

Следовательно, решения задач

$$y'(t) = P_2(\underline{S}_p(t)) \quad \text{и} \quad y'(t) = P_2(\bar{S}_p(t))$$

$$y(t_0) = y_0 \quad y(t_0) = y_0$$

дают верхнюю и нижнюю оценку точного решения дифференциального уравнения (1)

$$\underline{y}^1(t) \leq y(t) \leq \bar{y}^1(t), \quad y(t) \subseteq [\underline{y}^1(t), \bar{y}^1(t)] = y^1(t).$$

Итак, для сужения начального приближения $y^0(t)$ будем пользоваться схемой (2). Поскольку в качестве $y^0(t)$ выбран сплайн, т.е. многочлен степени p

$$y^0(t) = \sum_{i=0}^p a_i^0 (t - t_0)^i, \quad a_i^0 \in I(R),$$

то его интегрирование не представляет трудности, и каждое следующее приближение $y^{s+1}(t)$ также является полиномом. Положим

$$y^s(t) = \sum_{i=0}^p a_i^s (t - t_0)^i, \quad (y^s(t))^2 = \sum_{i=0}^{2p} A_i (t - t_0)^i, \quad a_i^s, A_i \in I(R).$$

Коэффициенты A_i находим по формулам

$$A_i = \begin{cases} (a_0^s)^2, & i = 0, s - \text{номер итерации}; \\ \frac{1}{ia_0^s} \sum_{k=1}^i [3k - i] a_k^s A_{i-k}, & i = \overline{1, p}; \\ \frac{1}{ia_0^s} \sum_{k=1}^p [3k - i] a_k^s A_{i-k}, & i = \overline{p+1, 2p}. \end{cases} \quad (3)$$

После интегрирования получим интервальный многочлен степени $(2p+1)$

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (b_0 + b_1 \sum_{i=0}^p a_i^s (\tau - t_0)^i + b_2 \sum_{i=0}^{2p} A_i (\tau - t_0)^i) d\tau = \sum_{i=0}^{2p+1} \alpha_i (t - t_0)^i.$$

Затем для понижения степени многочлена $\tilde{y}(t)$ применим процедуру сворачивания по следующей схеме:

$$(t - t_0)^i \subseteq [0, h^{i-p}](t - t_0)^p, i = \overline{p+1, 2p+1}, h - \text{шаг сетки.}$$

После этого каждый член многочлена $\tilde{y}(t)$, начиная с номера $p+1$, будет иметь степень p , а коэффициенты a_i^{s+1} ($i=0, \dots, p$) результирующего многочлена $y^{s+1}(t)$ запишутся следующим образом:

$$a_i^{s+1} = \begin{cases} y_0, & i=0; \\ b_0 + b_1 a_0^s + b_2 (a_0^s)^2, & i=1, s - \text{номер итерации}; \\ \frac{1}{i} (b_1 a_{i-1}^s + b_2 A_{i-1}), & i=\overline{2, p-1}; \\ \frac{b_1}{p} a_{p-1}^s + \frac{b_2}{p} A_{p-1} + \frac{b_1}{p+1} a_p^s [0, h] + \sum_{k=p+1}^{2p+1} \frac{b_2}{k} A_{k-1} [0, h^{k-p}], & i=p. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что формула (4) представляет собой рекуррентную формулу нахождения коэффициентов многочлена $y^{s+1}(t)$ итерационным методом (2) с «огрублением».

ТЕОРЕМА. Если справедливо соотношение

$$\omega(a_i^{s+1}) \leq \omega(a_i^s), \quad i = \overline{0, p}, \quad (5)$$

то ширина многочлена $y^{s+1}(t)$ не будет превышать ширину $y^s(t)$

$$\omega(y^{s+1}(t)) \leq \omega(y^s(t)).$$

Доказательство. Пользуясь свойствами интервального анализа [3], получим:

$$\omega(y^{s+1}(t)) = \omega\left(\sum_{i=0}^p a_i^{s+1} (t - t_0)^i\right) = \sum_{i=0}^p \omega(a_i^{s+1}) (t - t_0)^i, \text{ поскольку } t \geq t_0$$

$$\omega(y^s(t)) = \sum_{i=0}^p \omega(a_i^s) (t - t_0)^i.$$

Из неравенства (5) следует, что теорема доказана.

Пользуясь условием сходимости итераций (5), можно подбирать ширину шага h или степень p для достижения необходимой точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zyuzin V. S. and Rychkova N. A. Finding interval splines for a solution of a system of ordinary differential equations with initial conditions with the help of Taylor series. Extended abstracts of SCAN'97. Lion, 1997.
2. Лузин Н. Н. Собрание сочинений. 1959. В 3 т. Т. 3: Работы по различным вопросам математики. М.: Издательство Академии наук СССР.
3. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1986.

С. В. Иванов

РАЗРАБОТКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНИКОВ

Данная статья посвящена формализации процесса создания электронных обучающих систем. В ней будет выведен общий алгоритм работы электронных учебников, а также приведены соображения по организации работ по разработке и программированию электронных учебников.

Основные понятия

Мультимедиа-среда – информационная среда, в которой представление информации осуществляется различными способами (с помощью текста, звука, видео, анимации и неподвижных рисунков). Гипертекст – способ представления текстов, при котором переход между его отдельными частями осуществляется путем выбора ключевых слов. Электронная книга – интерактивная мультимедийная система, обеспечивающая пользователям доступ к постранично организованной информации. Авторская система – среда разработки электронных книг, в общем случае имеющая сходство со средами визуальных языков программирования и содержащая встроенный язык макрокоманд. Электронным учебником (ЭУ) назовем электронную книгу учебного содержания.

На основании проведенного обзора мирового опыта создания ЭУ [1 – 6] были сделаны следующие выводы. В общем случае любой ЭУ должен включать в себя два основных элемента: средства получения информации и средства навигации по электронной книге.

Таким образом, в общем случае работа ЭУ может быть представлена в виде алгоритма, приведенного на рис. 1.

Система навигации (2) по книге обычно состоит из частей, изображённых на рис. 2. Рекомендуется снабжать каждую страницу книги кнопками перехода на следующую-предыдущую страницу и на страницу, содержащую схему всего курса или содержание. Эти команды также следует разместить в системном меню.

Рассмотрим пункт «получение информации» (3). Сама концепция мультимедиа предусматривает подразделения этого пункта (рис. 3).

Каждый из этих пунктов алгоритма может распадаться на сложные подалгоритмы.



Рис. 1. Алгоритм работы
электронных учебников

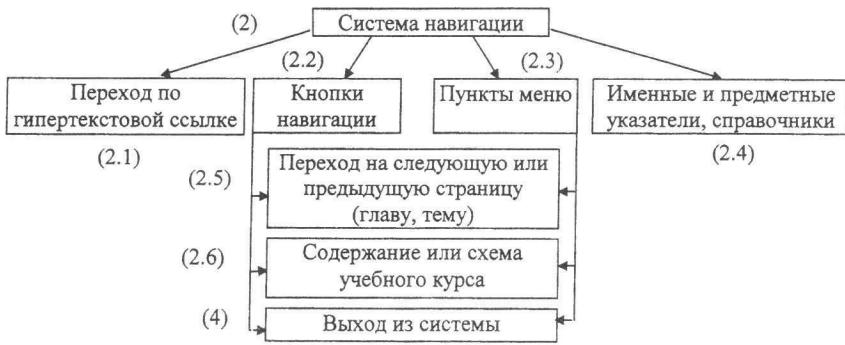


Рис. 2. Система навигации



Рис. 3. Способы получения информации в электронных учебниках

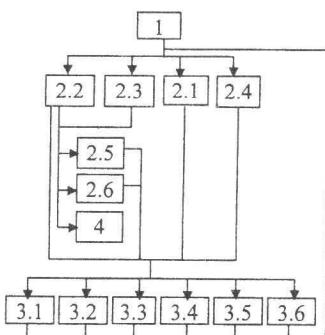


Рис. 4. Общий АЭУ

Итак, если объединить схемы, изображённые на рис. 1 – 3, то получим общий алгоритм для электронных учебников (АЭУ) (рис. 4).

Следует более подробно рассмотреть вопрос программирования тестирующего блока в электронных учебниках, так как компьютерное тестирование является одним из основных направлений внедрения информационных технологий в образование и является важным элементом электронного учебника. Обычная тестирующая программа состоит из базы данных, содержащей вопросы (тексты, рисунки, видео и др.

формы представления информации в мультимедиа среде) и эталоны правильных ответов, и процедур анализа ответов тестируемого и выставления оценок.

Рассмотрим самые распространенные разновидности компьютерных тестов: без ограничения времени, с ограничением времени на весь тест, с ограничением времени на каждый вопрос в отдельности. Также могут встречаться тесты, обладающие сразу несколькими этими свойствами. Кроме того, способы ответов на вопросы теста бывают следующих видов:

выбрать один ответ из нескольких вариантов, выбрать несколько ответов из нескольких вариантов, ввести ответ вручную.

На рис. 5 представлены алгоритмы работы тестирующих систем различных типов. Пункт «Регистрация» заключается в запросе данных тестируемого для последующего генерирования базы данных тестируемых и аттестационного листа. Пункт «Представление вопроса» предназначен для ознакомления тестируемого с вопросом (вывод текстовой информации, рисунков и т. д.). «Реакция пользователя» – это ожидание события (нажатия клавиши при вводе с клавиатуры, нажатия кнопки на экране для выбора варианта ответа, перехода к следующему вопросу, выхода из теста). «Результат» – вывод на экран, в файл или на принтер аттестационного листа тестируемого.

Все приведенные в данной статье алгоритмы были проверены с помощью сетей Петри и их деревьев достижимости.

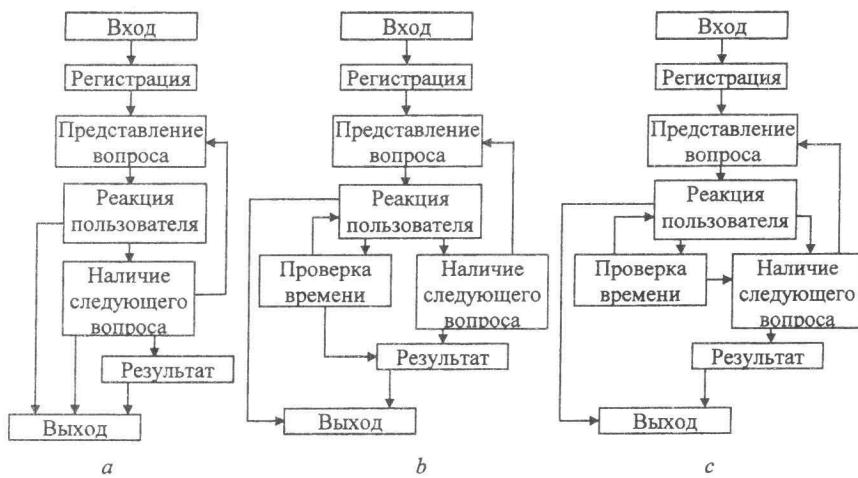


Рис 5. Алгоритм работы тестирующей системы: *a* – с неограниченным временем тестиирования; *b* – с ограничением времени на весь тест; *c* – с ограничением времени на каждый вопрос в отдельности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петренко А. И. Мультимедиа. Киев: Торгово-издательское бюро ВНВ, 1994.
2. Иванов В. А., Иванов С. В., Шевырев С. П. О методах разработки электронных обучающих систем. 48 с. Деп. в ВИНТИ 10.08.99. № 2608-В99.
3. Кибернетика и проблемы обучения: Сб. статей / Под ред. А. И. Берга. М.: Прогресс, 1970.
4. Шрейдер Ю. А. Экспертные системы: их возможности в обучении // Вестник высшей школы. 1987. № 2. С. 14.
5. Multimedia – in practice. Nederland: Bureau Interactive Training, 1993.
6. Proc. of The International Conference “Computer Based Learning in Science”. Vienna, 1993, 18-21 December.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ*

Известные в теории обратных задач мощные методы Гельфанд-Левитана и спектральных отображений не всегда удобны в численной реализации, прежде всего, ввиду их значительной трудоемкости. В статье предлагается метод численного решения обратной задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке, использующий ряд соотношений метода спектральных отображений и требующий относительно небольшого количества операций.

Рассмотрим следующую задачу (см., например, [1]).

ЗАДАЧА. По заданным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ определить потенциал $q(x)$ и коэффициенты h, H краевых условий оператора Штурма-Лиувилля $L(q(x), h, H)$

$$\begin{cases} ly \equiv -y'' + q(x)y \\ y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть даны числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, обладающие свойствами:

$$\lambda_n \neq \lambda_m, n \neq m, \alpha_n > 0, \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{k_n}{n}, \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_n}{n}, \{k_n\}, \{\kappa_n\} \in l_2. \quad (2)$$

Тогда [1, с. 52] найдется единственный оператор $L(q(x), h, H)$, где $q(x) \in L_2[0, \pi]$ – вещественная функция, h, H – вещественные числа, для которого данные числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ являются спектральными данными.

Если при этом модельный оператор $L(\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$ выбран так, что

$$\tilde{\omega} \equiv \tilde{h} + \tilde{H} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \tilde{q}(x) dx = \omega \quad (3)$$

и $\{\tilde{\lambda}_n, \tilde{\alpha}_n\}_{n=0}^{\infty}$ – спектральные данные модельного оператора, то справедливо соотношение [1, с. 77])

$$q(x) = \tilde{q}(x) - 2\varepsilon'_0(x), h = \tilde{h} + \varepsilon_0(0), H = \tilde{H} - \varepsilon_0(\pi), \quad (4)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741, и программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.

$$\varepsilon_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \phi(x, \lambda_n) \tilde{\phi}(x, \lambda_n) - \frac{1}{\tilde{\alpha}_n} \phi(x, \tilde{\lambda}_n) \tilde{\phi}(x, \tilde{\lambda}_n) \right\}, \quad (5)$$

где $\phi(x, \lambda)$ – решение задачи Коши

$$ly = \lambda y, y(0) = 1, y'(0) = h. \quad (6)$$

Далее, пусть по-прежнему числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ фиксированы, также пусть выбран и зафиксирован модельный оператор $L(\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$. Введем следующим образом (нелинейное) отображение S , действующее в пространстве $L_2[0, \pi] \times \mathbf{R}^2$: по заданной (произвольной) тройке $(q(x), h, H)$ построим для каждого λ решение $\phi(x, \lambda)$ задачи Коши

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, y(0) = 1, y'(0) = h, \quad (7)$$

подставляя найденное таким образом $\phi(x, \lambda)$ в правые части соотношений (4), (5), получим новую тройку $(\bar{q}(x), \bar{h}, \bar{H})$. Определим S как отображение, ставящее тройку $(q(x), h, H)$ в соответствие полученную указанным способом тройку $(\bar{q}(x), \bar{h}, \bar{H})$. Из предыдущего ясно, что тройка $(q^0(x), h^0, H^0)$, доставляющая решение задачи для данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, является неподвижной точкой отображения S . Наряду с отображением S рассмотрим отображение S_N , определяемое так же, как и S , но с заменой

в правой части (5) бесконечной суммы на $\sum_{n=0}^N$. Предлагаемый численный

метод решения обратной задачи состоит в том, что в качестве приближенного решения принимается неподвижная точка отображения S_N , которая ищется с помощью метода последовательных приближений. При этом число N должно быть выбрано до начала итераций, исходя из предварительного анализа данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, в частности, сравнения их с асимптотическими формулами (2), а также из имеющейся априорной информации о решении.

Алгоритм. Даны числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющие (2).

1. Выбираем модельный оператор $L(\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$ так, чтобы выполнялось (3). Выбираем N .

2. Выбираем начальное приближение. Можно, в частности, положить $q^{(0)}(x) = \tilde{q}(x), h^{(0)} = \tilde{h}, H^{(0)} = \tilde{H}$.

3. Для каждого $r = 0, 1, 2, \dots$ выполняем следующие шаги:

a) для $\lambda = \lambda_n, \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_n, n = \overline{0, N}$ находим $\phi(x, \lambda)$ как решение задачи Коши (7), где $q(x) = q^{(r)}(x), h = h^{(r)}$;

b) находим следующее приближение из соотношений

$$q^{(r+1)}(x) = \tilde{q}(x) - 2\epsilon_0'(x), h^{(r+1)} = \tilde{h} + \epsilon_0(0), H^{(r+1)} = \tilde{H} - \epsilon_0(\pi),$$

$$\epsilon_0(x) = \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \phi(x, \lambda_n) \tilde{\phi}(x, \lambda_n) - \frac{1}{\tilde{\alpha}_n} \phi(x, \tilde{\lambda}_n) \tilde{\phi}(x, \tilde{\lambda}_n) \right\}.$$

Для прекращения итераций можно использовать любой из общепринятых критериев.

Заметим, что при вычислении $\epsilon_0'(x)$ можно избежать применения формул численного дифференцирования, если воспользоваться, например, соотношением

$$\phi'(x, \lambda) = -\rho \sin \rho x + h \cos \rho x + \int_0^x \cos \rho(x-t) q(t) \phi(t, \lambda) dt, \rho^2 = \lambda,$$

где $\phi(x, \lambda)$ – решение задачи Коши (7).

Проведенные численные эксперименты показали, что метод сходится достаточно быстро (для широкого класса задач при выборе $5 \leq N \leq 25$ для достижения хорошего качества восстановления оказалось достаточно 5 – 10 итераций).

В заключение отметим, что приведённый метод идейно близок итерационному алгоритму, предложенному W. Rundell [2], но не использует оператора преобразования, что даёт возможность для его обобщения на уравнения произвольных порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001.

2. Chadan K., Colton D., Paivarinta L., Rundell W. An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems. SSSIAM, Philadelphia, 1997.

УДК 519.4

С. И. Ишина

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПРОЕКТИВНО-ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТАХ*

В статье изучаются алгебраические свойства проективно-планарных (сокращенно, Р-планарных) автоматов. Под Р-планарным автоматом понимается автомат без выходных сигналов $A=(X, \Gamma, \delta)$ с множеством состояний X , наделённым структурой проективной плоскости $\Pi=(X, L)$ (где X – множество точек и L – множество прямых, удовлетворяющих известным аксиомам проективной плоскости [1]), полугруппой входных сигналов Γ и

* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

функцией переходов δ . При этом для любого $\gamma \in \Gamma$ функция переходов $\delta_\gamma(x) = \delta(x, \gamma)$ является эндоморфизмом проективной плоскости, т.е. преобразованием точек этой плоскости, сохраняющим её прямые.

Пара отображений $f = (f_1, f_2)$ называется гомоморфизмом Р-планарного автомата $A = (\Pi, \Gamma, \delta)$ в Р-планарный автомат $A_1 = (\Pi_1, \Gamma_1, \delta_1)$, если $f_1: \Pi \rightarrow \Pi_1$ и $f_2: \Gamma \rightarrow \Gamma_1$ – такие гомоморфизмы проективных плоскостей и полугрупп соответственно, что для любых $(x, \gamma) \in X \times \Gamma$ выполняется равенство: $f_1(\delta(x, \gamma)) = \delta_1(f_1(x), f_2(\gamma))$. Если f_1 – тождественное преобразование плоскости Π , то f называется гомоморфизмом по входным сигналам.

В общем случае при отсутствии равнодействующих сигналов в автомате $A = (\Pi, \Gamma, \delta)$ полугруппа Γ изоморфно вкладывается в полугруппу эндоморфизмов $\text{End}\Pi$, т.е. можно считать, что $\Gamma \subset \text{End}\Pi$. В случае $\Gamma = \text{End}\Pi$, автомат A , следуя [2], будем называть универсальным Р-планарным автоматом и обозначать $\text{Atm}\Pi$. Автомат $\text{Atm}\Pi$ является универсальным притягивающим объектом в категории Р-планарных автоматов G , т.е. обладает следующим универсальным свойством: для всякого Р-планарного автомата $A = (\Pi, \Gamma, \delta)$ существует и при том единственный гомоморфизм по входным сигналам этого автомата в автомат $\text{Atm}\Pi$.

Основной результат настоящей статьи даёт решение задачи конкретной характеризации универсальных Р-планарных автоматов: здесь приводится перечень условий, при которых на множестве состояний автомата $A = (X, \Gamma, \delta)$ можно так определить структуру проективной плоскости Π , что полугруппа входных сигналов Γ будет равна полугруппе эндоморфизмов плоскости Π .

Пусть X – произвольное непустое множество и Γ – полугруппа преобразований множества X . Тогда Γ определяет на множестве X следующие канонические отношения:

$$\lambda_\Gamma = \cup\{\varphi^3: \varphi \in \Gamma\}, \text{ где } \varphi^3(x, y, z) = (\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)) \text{ для } (x, y, z) \in X^3,$$

$$Q_\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3: X^3 \subset \lambda_\Gamma(x_1, x_2, x_3)\},$$

$R_\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3: X^3 \setminus \Delta_x^3 \subset \lambda_\Gamma^{-1}(x_1, x_2, x_3)\}$, где λ_Γ^{-1} – обратное отношение и

$$\Delta_x^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3: x_i = x_j \text{ для некоторых } 1 \leq i \neq j \leq 3\}.$$

Алгебраическую систему $M = (X, R_\Gamma)$ будем называть каноническим релятивом полугруппы Γ .

Полугруппу Γ будем называть 3-ограниченно замкнутой, если она содержит все такие преобразования φ множества X , которые на любом трехэлементном подмножестве $Y \subset X$ совпадают с некоторым преобразованием $\psi \in \Gamma$.

Для некоторого тернарного отношения R на множестве X множество $Y \subset X$ называется R -связанным, если $Y^3 \subset R$.

Отношение $R \subset X^3$ называется эквивалентностью на множестве X , если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (T1) $(x, x, x) \in R$ для любого $x \in X$;
- (T2) $(x_1, x_2, x_3) \in R \Rightarrow (x_2, x_1, x_3), (x_1, x_3, x_2) \in R$;
- (T3) для любых попарно различных элементов $x_1, x_2 \in X$ и любых $x, y \in X$ $(x, x_1, x_2), (x_2, x_1, y) \in R \Rightarrow (x, x_1, y) \in R$.

При этом R называется нетривиальной квазиуниверсальной эквивалентностью, если выполняются условия:

- (T4) $R \neq X^3$;
- (T5) для любых $x_1, x_2 \in X$ найдется такой элемент $x_3 \in X$, что $(x_1, x_2, x_3) \in R$.

Для произвольной проективной плоскости $\Pi = (X, L)$ определим на множестве X отношение коллинеарности B_Π по следующей формуле:

$$B_\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 : x_1, x_2, x_3 \in l, \text{ для некоторой прямой } l \in L\}$$

ЛЕММА 1. Для любой проективной плоскости $\Pi = (X, L)$ каноническое отношение R_Γ полугруппы эндоморфизмов $\Gamma = \text{End}\Pi$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) отношение R_Γ является нетривиальной квазиуниверсальной эквивалентностью на множестве X ;
- 2) множество $Y \subset X$ в том и только том случае является прямой плоскостью Π , если оно является максимальным R_Γ -связным множеством;
- 3) для любого преобразования ψ множества X условие $\psi \in \Gamma$ равносильно тому, что $\psi^3(R_\Gamma) \subset R_\Gamma$.

ЛЕММА 2. Пусть X – произвольное непустое множество и R – нетривиальная квазиуниверсальная эквивалентность на множестве X . Тогда для множества всех максимальных R -связных множеств L алгебраическая система $\Pi = (X, L)$ является проективной плоскостью и для отношения B_Π коллинеарности её точек выполняется равенство $B_\Pi = R$.

ТЕОРЕМА. Пусть $A = (X, \Gamma, \delta)$ – произвольный автомат, полугруппа входных сигналов которого рассматривается как полугруппа преобразований множества X . Тогда A в том и только том случае является универсальным Р-планарным автоматом $\text{Atm}\Pi$ для некоторой проективной плоскости $\Pi = (X, L)$, если Γ является 3-ограниченно замкнутой полугруппой, каноническое отношение R_Γ которой является нетривиальной квазиуниверсальной эквивалентностью и канонические отношения R_Γ и Q_Γ удовлетворяют следующим условиям:

- (T6) $R_\Gamma \cup Q_\Gamma = X^3$;
- (T7) для любых $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ найдется такой $x \in X$, что $(x_1, x_2, x), (x_3, x_4, x) \in R_\Gamma$.

Причем в этом случае существует единственный универсальный Р-планарный автомат с множеством состояний X , для которого полугруппа Γ является полугруппой входных сигналов.

Доказательство. Пусть Γ – полугруппа входных сигналов некоторого универсального Р-планарного автомата $\text{Atm}\Pi$ с множеством состояний X , т.е. $\Gamma = \text{End}\Pi$. Тогда по лемме 1 полугруппа Γ совпадает с множеством всех эндоморфизмов своего канонического релятива $M = (X, R_\Gamma)$ и каноническое отношение R_Γ полугруппы Γ является нетривиальной квазиуниверсальной эквивалентностью на множестве X , т.е. выполняются свойства (T1) – (T5). Кроме того, R_Γ удовлетворяет условию (T7), так как согласно аксиоме проективной плоскости, через две точки проходит одна и только одна прямая.

Убедимся, что R_Γ и Q_Γ удовлетворяют условию (T6). Пусть для некоторых точек $a_1, a_2, a_3 \in X$ выполняется условие $(a_1, a_2, a_3) \notin R_\Gamma$. Тогда из условия 2) леммы 1 следует, что множество $Y = \{a_1, a_2, a_3\}$ не содержится ни в какой прямой. Так как в проективной плоскости Π каждое двухэлементное множество определяет одну прямую, то множество $\{a_1, a_2, a_3\}$ состоит из трех точек, которые одновременно не принадлежат никакой прямой плоскости Π , но все собственные подмножества этого множества содержатся в некоторых прямых плоскости Π . Для произвольных точек $x_1, x_2, x_3 \in X$ можно определить преобразование ψ множества X , которое является эндоморфизмом проективной плоскости Π . Тогда $\{a_1, a_2, a_3\} \in Q_\Gamma$. Это доказывает (T6).

Очевидно, что полугруппа Γ является 3-ограниченно замкнутой.

Обратно, пусть полугруппа Γ является 3-ограниченно замкнутой полугруппой преобразований множества X и канонические отношения R_Γ и Q_Γ удовлетворяют условиям (T1) – (T7). В силу леммы 2 отношение R_Γ определяет проективную плоскость $\Pi = (X, L)$, множеством прямых которой является множество всех максимальных R_Γ -связных множеств.

Для построенной с помощью 3-ограниченно замкнутой полугруппы Γ плоскости Π выполняется $\Gamma = \text{End}\Pi$. Таким образом Γ является полугруппой входных сигналов некоторого универсального Р-планарного автомата.

Отметим также, что построенная проективная плоскость, удовлетворяющая условию $\Gamma = \text{End}\Pi$, однозначно определяется рассматриваемой полугруппой преобразований с помощью ее канонического релятива R_Γ . Это означает, что в данном случае существует единственная проективная плоскость Π , для которой выполняется равенство $\Gamma = \text{End}\Pi$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970.
2. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\int_0^x k(x-t)k^*(t)dt = 1, \quad (1)$$

где $x \in [0,1]$, $k(x) = \frac{x^{\alpha-1} \ell(x)}{\Gamma(\alpha)}$, $k^*(x) = \frac{x^{-\alpha} \ell^*(x)}{\Gamma(1-\alpha)}$, $\ell(x)$ – заданная медленно

меняющаяся в нуле функция, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $\alpha \in (0,1)$ $\ell^*(x)$ – искомая функция.

Предположим, что функция $\ell(x)$ аналитически продолжается во всю комплексную плоскость с сохранением свойства медленного изменения в нуле, то есть

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{\ell'(s^{-1})}{\ell(s^{-1})} = 0, \quad |\arg s| \leq \pi,$$

и при этом $\ell(s)$ не имеет нулей в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Для функции $\ell^*(x)$ при $x \rightarrow 0$ имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\ell^*(x) = \ell^{-1}(x)(1 + o(1)). \quad (2)$$

Доказательство теоремы опирается на лемму, доказательство которой вполне аналогично доказательству леммы 2 из [1 с. 176].

ЛЕММА. В предположении абсолютной сходимости соответствующих интегралов справедливы следующие асимптотические представления:

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ell(t) dt = \frac{\ell(s^{-1})}{s^\alpha} (1 + o(1)), \quad (3)$$

где $s \rightarrow \infty$, $s \in \mathbb{C}$, $|\arg s| \leq \pi$,

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx} (1 + o(1))}{s^{2-\alpha} \ell(s^{-1})} ds = \frac{x^{1-\alpha}}{\ell(x) \Gamma(2-\alpha)} (1 + o(1)), \quad (4)$$

где $x \rightarrow 0$, $\sigma > 0$. Здесь и далее полагаем, что ветви степенных функций вида s^β , $\beta > -1$, задаются условием $s^\beta > 0$ при $s = x > 0$.

Схема доказательства. Решение уравнения (1) будем проводить с помощью преобразования Лапласа. Формальное применение этого преобразования к (1) даёт [2, с. 462]

$$L(k(x))(s)L(k^*(x))(s) = s^{-1}, \quad (5)$$

где $L(k(x))(s)$ обозначает преобразование Лапласа функции $k(x)$, зависящее от комплексного аргумента s , и определяется левой частью формулы (3) (см. определение функции $k(x)$). Используя асимптотику (3), получаем из (5)

$$L(k^*(x))(s) = s^{\alpha-1} \ell^{-1}(s^{-1})(1+o(1)). \quad (6)$$

Из этого представления и свойств функции ℓ следует, что единственное локально суммируемое решение уравнения (1) может быть получено применением обратного преобразования Лапласа L^{-1} к (6) [3, с. 176 – 185].

Из свойств преобразования Лапласа следует, что формула (4) представляет собой асимптотику обратного преобразования Лапласа функции

$\int_0^x k^*(t)dt$. То есть

$$\int_0^x k^*(t)dt = \frac{x^{1-\alpha}}{\ell(x)\Gamma(2-\alpha)}(1+o(1)), \quad x \rightarrow 0.$$

Чтобы преодолеть трудности при обращении преобразования Лапласа в применении к формуле (6), воспользуемся теоремой X из [2, с. 477], а именно, будем искать обратное преобразование Лапласа не функции $k^*(x)$, а произведения функций x и $k^*(x)$. В нашем случае имеем

$$xk^*(x) = L^{-1}(J) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} J(s)e^{sx} ds, \quad (7)$$

где $\sigma > 0$, $J(s) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} L(x)(q)L(k^*(x))(s-q)dq$, $a > \sigma$, $L(x)(q) = \Gamma(2)q^{-2}$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} L(xk^*(x))(s) &= \int_0^\infty tk^*(t)e^{-st} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} L(x)(q)e^{qt} dq k^*(t)e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{\Gamma(2)}{q^2} \int_0^\infty k^*(t)e^{-(s-q)t} dt \right) dq. \end{aligned}$$

Здесь $\operatorname{Re}(s-q) > 0$ и внутренний интеграл можно заменить через $L(k^*(x))(s-q)$, для которого справедливо представление (6), а изменение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости.

Найдём асимптотику функции $J(s)$. С этой целью используем представление для $L(x)(q)$ и асимптотическое представление для $L(k^*(x))(s-q)$ из (6), так что

$$J(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(2)}{q^2} \frac{(s-q)^{\alpha-1}}{\ell((s-q)^{-1})} (1+o(1)) dq. \quad (8)$$

В представлении (8) рассмотрим главную часть асимптотики без $o(1)$. Полученный интеграл обозначим $J_{0,\ell}$:

$$J_{0,\ell} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(2)}{q^2} \frac{(s-q)^{\alpha-1}}{\ell((s-q)^{-1})} dq, \quad (9)$$

где $\operatorname{Re}(s-q) > 0$ и $\operatorname{Re}s > a$.

Делая замену $1-q/s = \tau$ в формуле (9), получим

$$J_{0,\ell} = -\frac{\Gamma(2)}{2\pi i s^{2-\alpha}} \int_{1-\operatorname{Re}(a/s)-i\infty}^{1-\operatorname{Re}(a/s)+i\infty} \frac{1}{(1-\tau)^2 \ell((s\tau)^{-1}) \tau^{1-\alpha}} d\tau.$$

Согласно лемме и в силу свойств функции ℓ , для получения асимптотики функции $J_{0,\ell}$ нам нужно определить значение интеграла J_0 :

$$J_0 = -\int_{1-\operatorname{Re}(a/s)-i\infty}^{1-\operatorname{Re}(a/s)+i\infty} \frac{1}{(1-\tau)^2 \tau^{1-\alpha}} d\tau = \int_{\operatorname{Re}(a/s)-i\infty}^{\operatorname{Re}(a/s)+i\infty} \frac{1}{(1-\xi)^{1-\alpha} \xi^2} d\xi = 2\pi i (1-\alpha).$$

Поэтому, используя лемму и лемму 2 из [1 с. 176], получим

$$J_{0,\ell} = \frac{1-\alpha}{s^{2-\alpha} \ell(s^{-1})} (1+o(1)).$$

Повторяя аналогичные действия для слагаемого с $o(1)$ в представлении (8) для J , приходим к следующей асимптотической формуле

$$J = \frac{1-\alpha}{s^{2-\alpha} \ell(s^{-1})} (1+o(1)).$$

Применяя лемму к формуле (7), получим

$$xk^*(x) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(1-\alpha)e^{sx} (1+o(1))}{s^{2-\alpha} \ell(s^{-1})} ds = \frac{(1-\alpha)x^{1-\alpha}}{\ell(x)\Gamma(2-\alpha)} (1+o(1)),$$

и так как $(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \Gamma(2-\alpha)$, то отсюда немедленно вытекает справедливость формулы (2). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: ГИФМЛ, 1958.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЁМКОСТИ РОБЕНА*

Задачи, связанные с исследованием свойств ёмкостей различных множеств, занимают важное место среди экстремальных задач геометрической теории функций. При этом, в силу конформной инвариантности ёмкости, большое внимание уделяется подмножествам единичной окружности.

В [1] П. Дюреном и М. Шиффером был определен инвариант, называемый ёмкостью Робена $\delta(A)$ множества, который обобщал понятие логарифмической ёмкости $d(A)$. Для определения воспользуемся описанием $\delta(A)$ и $d(A)$ в терминах экстремальной длины [2]. Пусть Γ – семейство локально спрямляемых кривых в области Ω . Измеримая по Борелю функция $\rho(z) \geq 0$, удовлетворяющая для всех $\gamma \in \Gamma$ неравенству $\int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq 1$,

называется допустимой метрикой для Γ . Тогда экстремальная длина $\lambda(\Gamma)$ семейства кривых Γ определяется следующим образом:

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)} = \inf_{\rho} \iint_{\Omega} \rho^2(z) dx dy, \quad z = x + iy. \quad (1)$$

Обозначим через $\lambda_{\Omega}(C, D)$ экстремальное расстояние между связными подмножествами C и D границы Ω , которое определяется как экстремальная длина семейства кривых Γ , соединяющих C и D в Ω . Пусть границей $\partial\Omega = A$ области $\Omega \subset \bar{\mathbb{C}}$, $\infty \in \Omega$ является аналитическая жорданова кривая, окружность $C_r = \{z : |z| = r\}$ содержит внутри $\partial\Omega$. Обозначим через Ω_r часть Ω , лежащую внутри C_r . Тогда логарифмическая ёмкость $d(A; \Omega)$ множества A относительно Ω определяется формулой

$$d(A; \Omega) = e^{-\gamma(A)}, \quad \gamma(A) = \lim_{r \rightarrow \infty} (2\pi\lambda_{\Omega_r}(A, C_r) - \log r). \quad (2)$$

Если $\partial\Omega = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, то ёмкость Робена $\delta(A; \Omega)$ множества A относительно Ω равна

$$\delta(A; \Omega) = e^{-\rho(A)}, \quad \rho(A) = \lim_{r \rightarrow \infty} (2\pi\lambda_{\Omega_r}(A, C_r) - \log r). \quad (3)$$

Экстремальные задачи об оценках логарифмической ёмкости для подмножеств единичной окружности рассматривались в работах А. Бейрлинга, К. Померенке, В. Дубинина, А. Солынина (см., например, [3]). В экстремальных задачах такого рода зачастую возникает вопрос о поведе-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00123, INTAS, грант № 99-00089.

нии ёмкости при переходе от не симметричной области к области, обладающей тем или иным видом симметрии.

В представленной статье исследуется изменение ёмкости Робена дуги окружности в случае не симметричной области.

Пусть Ω есть внешность единичного круга, $\partial\Omega = A \cup B$. Хорошо известно, что ёмкость Робена дуги окружности, опирающейся на угол α $\delta(A; \Omega) = \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ и она не зависит от положения дуги. Ситуация существенно меняется, если область Ω не симметрична. Мы рассмотрим простой, но в то же время весьма важный случай не симметричности области Ω .

Пусть Ω есть внешность единичного круга с радиальным разрезом, составляющим угол Θ с положительным направлением действительной оси. $\Omega = \{z : |z| > 1\} \setminus [0; r \cdot e^{i\Theta}]$, $r > 1$. Пусть A дуга окружности, опирающаяся на угол α .

Без ограничения общности будем считать, что $A = e^{i\beta}$, $\pi - \alpha < \beta < \pi$. Отобразим Ω на внешность единичного круга с помощью функции

$$F = \psi + \sqrt{\psi^2 - 1}, \quad \psi = \left(ze^{-i\Theta} + \frac{1}{z}e^{i\Theta} - R + 1\right) \cdot \frac{1}{R+1}, \quad R = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad (4)$$

$$F(\infty) = \infty.$$

При этом дуга A переходит в дугу, соответствующую центральному углу φ . Используя известную формулу и конформную инвариантность ёмкости Робена, получим

$$\delta(A; \Omega) = C \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{4}, \quad (5)$$

где

$$C = \frac{2}{R+1}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{\sqrt{1-l_1^2}}{l_1} - \frac{\sqrt{1-l_2^2}}{l_2}}{1 + \frac{\sqrt{1-l_1^2}}{l_1} \cdot \frac{\sqrt{1-l_2^2}}{l_2}} \right), \quad (6)$$

$$l_1 = -\left(\cos\Theta + \frac{R-1}{2}\right) \frac{2}{R+1}, \quad l_2 = -\left(\cos(\Theta + \alpha) + \frac{R-1}{2}\right) \frac{2}{R+1}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что ёмкость Робена A — $\delta(A; \Omega)$ зависит от положения разреза, то есть от угла Θ .

Рассмотрим ёмкость Робена $\delta(A; \Omega)$, заданную формулой (5), как функцию угла Θ при фиксированном значении α . $\delta(A; \Omega) = \delta(\Theta)$. Изучая эту функцию, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Если $0 < \alpha < \pi$, то для $\Theta \in \left(-\pi - \frac{\alpha}{2}; -\frac{\alpha}{2}\right)$ ёмкость Робена $\delta(A; \Omega)$ монотонно возрастает, а для $\Theta \in \left(\frac{\alpha}{2}; \pi - \frac{\alpha}{2}\right)$ – монотонно убывает и справедливы следующие оценки:

$$1 - \frac{2(3-R) \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \frac{R-1}{2}\right) + 4\sqrt{2(R-1) \cdot (R+(R-1)\cos \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2})}}{(R+1)^2} \leq \\ \leq \delta(A; \Omega) \leq \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{R+1}.$$

Если $\pi < \alpha < 2\pi$, то для $\Theta \in \left(-\pi - \frac{\alpha}{2}; -\frac{\alpha}{2}\right)$ ёмкость Робена $\delta(A; \Omega)$ монотонно убывает, а для $\Theta \in \left(\frac{\alpha}{2}; \pi - \frac{\alpha}{2}\right)$ – монотонно возрастает, и справедливы оценки, аналогичные предыдущим.

В заключение заметим, что при $R \rightarrow 1$ неравенства обращаются в точные равенства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duren P., Schiffer M. Robin functions and energy functionals of multiply connected domains // Pacific J. Math. 1991. Vol. 148. P. 251 – 273.
2. Duren P., Pfaltzgraff J. Robin capacity and extremal length // J. Math. Anal. Appl. 1993. Vol. 17. P. 110 – 119.
3. Дубинин В.Н. Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. №1. С. 1 – 76.

УДК 681.3

А. Д. Ковалев, В. В. Мозжилкин

ОПЕРАТИВНАЯ РЕОРГАНИЗАЦИЯ БАЗ ДАННЫХ

Сопровождение приложения баз данных, функционирующего в локальной вычислительной сети, связано, с одной стороны, с установкой обновленной версии приложения на автоматизированных рабочих местах пользователей (что не является проблемой) и, с другой стороны, с необходимостью реорганизации общих баз данных, размещаемых на сервере. Необходимость реорганизации может быть связана с расширением, изменением или уточнением схем баз данных, модификаций правил целостности, оптимизацией наборов индексов и т.п. При этом в результате смены поколения информационное содержание баз данных должно быть наследовано

или автоматически модифицировано в соответствии с задачами обновления версии приложения.

В данной статье предлагается подход, основанный на построении универсального модуля реорганизации, управляемого данными. Подход реализуется с помощью типовых средств современных СУБД и позволяет автоматизировать процесс реорганизации при рассылке обновленных версий приложения по различным организациям, эксплуатирующим различные версии приложения. Описываемая ниже схема соответствует реорганизации «по месту», что актуально при больших объемах баз данных. Проведение реорганизации на специально заведенной копии хотя и возможно, но излишне, поскольку реализованный протокол реорганизации позволяет при любых сбоях системы (отключении питания, сбоях оборудования, нехватке памяти и т.п.) перевести базы данных в состояние, соответствующее старому или новому поколению.

Схема идентификации поколений и состояния реорганизации включает следующие элементы.

1. В директории баз данных:

1.1. *_Generation_XX'_XX''.id* – идентификационный файл баз данных. При $XX' = XX'' (= XX)$ базы данных относятся к поколению с номером XX (для номеров поколений должна быть фиксирована разрядность с тем, чтобы можно было легко проверять корректность данных). При $XX' < XX''$ базы данных находятся в переходном состоянии реорганизации.

1.2. *_generation_XX'_<имя файла>, ...* – переименованные файлы баз данных, относящиеся к младшему поколению XX' и подлежащие удалению или замене на файлы старшего поколения XX'' . Наличие переименованных файлов в директории возможно лишь в процессе реорганизации.

2. В корневой директории приложения:

2.1. *_Reorganization_ZZ_ZZ.id* – идентификационный файл приложения, определяющий номер ZZ требуемого поколения баз данных.

2.2. *_REORGANIZATION_XX_YY, ...* – директории управляющих данных для различных пар младшего и старшего поколений (XX и YY). Каждая из этих директорий может содержать следующие элементы: 2.2.1 – 2.2.4.

2.2.1. *_reorganization_XX_YY.<расширение>* – реорганизующий программный файл в откомпилированной форме. Наличие этого файла не обязательно. Если файл существует, то он автоматически вызывается из универсального модуля реорганизации, что позволяет провести доформирование реорганизующих данных во временной рабочей директории (см. ниже).

2.2.2. *_reorganization_<имя файла>, ...* – произвольные дополнительные файлы, ассоциированные с реорганизующим программным файлом и позволяющие упростить его структуру.

2.2.3. *_delete_file_<имя файла>, ...* – файлы, в наименовании которых содержатся имена файлов поколения XX , подлежащих удалению в поколении YY .

2.2.4. <имя файла>, ... – файлы в структуре поколения YY , используемые при реорганизации соответствующих файлов баз данных из поколения XX в поколение YY .

2.3. _REORGANIZATION_XX_YY.TMP, ... – временная рабочая директория, предназначенная для формирования реорганизующих данных. Директория может содержать следующие элементы: 2.3.1 – 2.3.3.

2.3.1. _ПОДГОТОВЛЕНО_ДЛЯ_ПЕРЕСЫЛКИ_B_<путь к директории баз данных> – временная маркерная поддиректория.

2.3.2. _delete_file_<имя файла>, ... – файлы, копируемые из директории управляющих данных (см. 2.2.3).

2.3.3. <имя файла>, ... – файлы, которые первоначально копируются из директории управляющих данных и могут в дальнейшем модифицироваться реорганизующим программным файлом (см. 2.2.4).

Универсальный модуль реорганизации баз данных выполняет следующие функции:

- 1) контроль завершенности процесса реорганизации,
- 2) контроль соответствия требуемого и имеющегося поколения баз данных,
- 3) планирование этапов реорганизации в соответствии с имеющимися управляющими данными,
- 4) проведение этапов реорганизации,
- 5) обнаружение и обработка исключительных (аварийных) ситуаций.

Поэтапная реорганизация баз данных проводится согласно следующему протоколу.

1. Открыть базы данных в монопольном режиме доступа. Если базы данных используются другими пользователями и получить монопольный доступ к ним не представляется возможным, то реорганизация не проводится и её следует провести позже.

2. В цикле по всем этапам реорганизации до тех пор, пока базы данных не перейдут в требуемое поколение, выполнять шаги 2.1 – 2.13 (для реорганизации баз данных из поколения XX в поколение YY).

2.1. Создать временную рабочую директорию.

2.2. Скопировать во временную рабочую директорию все файлы директории управляющих данных за исключением _reorganization_*.*.

2.3. Выполнить реорганизующий программный файл (если он существует). При вызове программному файлу передаются пути доступа к директории баз данных, временной рабочей директории и директории управляющих данных, а также номера младшего и старшего поколений реорганизации.

2.4. Создать временную маркерную поддиректорию.

2.5. Переименовать идентификационный файл баз данных из _Generation_XX_XX.id в _Generation_XX_YY.id. Тем самым доступ к базам данных со стороны других пользователей приложения будет заблокирован.

2.6. Закрыть базы данных.

2.7. Переименовать файлы в директории баз данных с <имя файла> на *generation_XX_<имя файла>* для всех файлов, встречающихся во временной рабочей директории в виде *_delete_file_<имя файла>* или <имя файла>.

2.8. Скопировать в директорию баз данных все файлы временной рабочей директории за исключением *_delete_file_*.**.

2.9. Удалить из директории баз данных все файлы *_generation_*.** (за исключением идентификационного файла *_Generation_XX_YY.id*).

2.10. Открыть базы данных в монопольном режиме доступа.

2.11. Переименовать идентификационный файл баз данных из *_Generation_XX_YY.id* в *_Generation_YY_YY.id*.

2.12. Удалить временную маркерную поддиректорию.

2.13. Удалить временную рабочую директорию.

3. Закрыть базы данных.

В зависимости от особенностей языка СУБД в универсальном модуле реорганизации может потребоваться довольно значительное число ловушек исключительных ситуаций. Однако программирование ловушек осуществляется один раз. Стандарт программирования реорганизующих программных файлов предусматривает возврат в вызывающий универсальный модуль реорганизации значения NULL – для аварийного завершения без выдачи сообщения, FALSE – для аварийного завершения с выдачей общего сообщения, TRUE – для нормального продолжения работы.

Рассматриваемый подход реализован в среде Visual FoxPro 5 при разработке АСУ вагоноремонтного депо «Магистраль-С» [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. РФ. Роспатент. Свид. об офиц. рег. прогр. для ЭВМ № 990930 от 20.12.1999.

УДК 517.972

А. Б. Коноплев

ФОРМУЛА СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧКИ ДО ОБРАЗА ВЫПУКЛОГО МУЛЬТИОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть X, Y – конечномерные действительные пространства, $Z = X \times Y$ – их декартово произведение и $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_Z$ – нормы в этих пространствах. Символом $\|\cdot\|$ будем обозначать евклидову норму в X .

Рассмотрим мультиотображение $F: X \rightarrow 2^Y$, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ множество $F(x) \subset Y$. Множества

$$\text{dom } F = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}, \quad \text{gr } F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$$

называются соответственно *эффективной областью* и *графиком* мультиотображения F .

Мультиотображение называется *выпуклым* (*замкнутым*), если его график есть выпуклое (замкнутое) множество в Z .

Мультиотображение F удовлетворяет условию Липшица на множестве $\text{dom } F$ с константой $L > 0$, если для любых $x_1, x_2 \in \text{dom } F$ выполняется неравенство

$$h(F(x_1), F(x_2)) \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

Здесь $h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_Y, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|_Y \right\}$ — расстояние

Хаусдорфа между множествами A и B .

Рассмотрим функцию расстояния от точки $z = (x, y) \in \text{dom } F \times Y$ до образа мультиотображения

$$d_F(z) = \inf_{w \in F(x)} \|y - w\|_Y$$

и обычную функцию расстояния от точки $z \in Z$ до множества $\Omega \subset Z$

$$\rho_\Omega(z) = \inf_{u \in \Omega} \|z - u\|_Z.$$

Эти функции используются в негладком анализе для решения задач об оценке и аппроксимации множеств и мультиотображений [1 – 3].

Введем обозначение

$$Q(z, \Omega) = \{u \in \Omega \mid \|z - u\|_Z = \rho_\Omega(z)\}.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть замкнутое мультиотображение F удовлетворяет на $\text{dom } F$ условию Липшица с константой L , а норма в Z имеет вид

$$\|\cdot\|_Z = \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y, \quad (1)$$

причем $\|x'\|_X > L\|x'\|$, $\forall x' \neq 0$. Тогда для всех $z = (x, y) \in \text{dom } F \times Y$ выполняется равенство $d_F(z) = \rho_{\text{gr } F}(z)$ и справедливо включение

$$Q(z, \text{gr } F) \subset \{x\} \times F(x). \quad (2)$$

Доказательство. Очевидно, что ввиду выбора нормы (1), для любого $z \in \text{dom } F \times Y$ имеет место неравенство

$$d_F(z) \geq \rho_{\text{gr } F}(z). \quad (3)$$

В случае, когда $z \in \text{gr } F$, имеем $d_F(z) = \rho_{\text{gr } F}(z) = 0$. Если же $z \notin \text{gr } F$, то, в силу замкнутости $\text{gr } F$, найдется пара $(x_1, y_1) \in \text{gr } F$ такая, что

$$\rho_{\text{gr } F}(z) = \|x - x_1\|_X + \|y - y_1\|_Y. \quad (4)$$

Предположим противное, что $d_F(z) \neq \rho_{\text{gr}F}(z)$. Тогда, с учетом (3), имеем неравенство

$$d_F(z) > \rho_{\text{gr}F}(z), \quad (5)$$

которое, в свою очередь, влечет $x \neq x_1$.

Теперь из определения расстояния Хаусдорфа, неравенства треугольника для нормы $\|\cdot\|_Y$ и соотношений (1), (4), (5) получим

$$\begin{aligned} h(F(x_1), F(x)) &\geq \inf_{w \in F(x)} \|y_1 - w\|_Y = \inf_{w \in F(x)} \|y_1 - y + y - w\|_Y \geq \\ &\geq \inf_{w \in F(x)} \|y - w\|_Y - \|y - y_1\|_Y = d_F(z) - \|y - y_1\|_Y = \\ &= d_F(z) - \rho_{\text{gr}F}(z) + \|x - x_1\|_X > L\|x - x_1\|, \end{aligned}$$

что противоречит липшицевости F . Тем самым мы доказали, что

$$x_1 = x, \quad (6)$$

$$d_F(z) = \rho_{\text{gr}F}(z). \quad (7)$$

С учетом (1) и (7) множество $\mathcal{Q}(z, \text{gr}F)$ можно записать в виде

$$\mathcal{Q}(z, \text{gr}F) = \{u = (v, w) \in \text{gr}F \mid \|v - x\|_X + \|w - y\|_Y = \inf_{w' \in F(x)} \|y - w'\|_Y\}.$$

Используя (6), получаем (2). Теорема доказана.

Напомним, что *субдифференциалом* выпуклой функции $f: X \rightarrow R$ в точке $x \in X$ называется множество

$$\partial f(x) = \{v \in X \mid f(x') - f(x) \geq \langle v, x' - x \rangle, \quad \forall x' \in X\}.$$

Обозначим через $K(u, \Omega)$ конус допустимых направлений множества $\Omega \subset Z$ в точке $u \in \Omega$, а через $K^+(u, \Omega)$ сопряженный к нему конус.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть мультиотображение F с выпуклой эффективной областью является выпуклым и удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда функция $d_F(z)$ является выпуклой на $\text{dom } F \times Y$, а ее субдифференциал в точках $z = (x, y) \in \text{dom } F \times Y$ выражается формулой

$$\partial d_F(z) = \{\partial \|0\|_X \times \partial \|y - w\|_Y\} \cap -K^+((x, w), \text{gr}F), \quad (8)$$

где $w \in F(x)$ любая точка, для которой выполняется равенство $\|y - w\|_Y = d_F(z)$.

Доказательство. По определению выпуклого мультиотображения $\text{gr}F$ является выпуклым множеством. Известно [3, с. 88], что в этом случае $\rho_{\text{gr}F}(z)$ выпуклая на Z функция. В соответствии с формулой субдифференциала функции расстояния от точки до выпуклого множества, полученной в [1], имеем

$$\partial \rho_{\text{gr}F}(z) = \partial \|z - u\|_Z \cap -K^+(u, \text{gr}F), \quad \forall u \in \mathcal{Q}(z, \text{gr}F). \quad (9)$$

Найдем субдифференциал нормы $\|\cdot\|_Z$. В соответствии с определением субдифференциала принадлежность пары $(v, w) \in \partial\|(x, y)\|_Z$ означает выполнение неравенства

$$\|x'\|_X - \|x\|_X + \|y'\|_Y - \|y\|_Y \geq \langle v, x' - x \rangle + \langle w, y' - y \rangle, \quad \forall (x', y') \in X \times Y. \quad (10)$$

Легко видеть, что пара (v, w) , удовлетворяющая нижеследующей системе неравенств (11), удовлетворяет и неравенству (10)

$$\begin{cases} \|x'\|_X - \|x\|_X \geq \langle v, x' - x \rangle \\ \|y'\|_Y - \|y\|_Y \geq \langle w, y' - y \rangle \end{cases}, \quad \forall (x', y') \in X \times Y. \quad (11)$$

Следовательно, справедливо включение $\partial\|x\|_X \times \partial\|y\|_Y \subset \partial\|(x, y)\|_Z$. Чтобы показать обратное включение, достаточно положить в неравенстве (10) $x' = x$, а затем $y' = y$. Таким образом,

$$\partial\|(x, y)\|_Z = \partial\|x\|_X \times \partial\|y\|_Y. \quad (12)$$

Подставляя соотношения (12) в (9) и используя (7) и (2), получаем (8). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дудов С. И. Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530 – 542.
2. Минченко Л. И., Борисенко О. Ф., Грицай С. П. Многозначный анализ и возмущенные задачи нелинейного программирования. Минск, 1993.
3. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

МИНИМАЛЬНЫЕ И ПРОТОМИНИМАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТРИКИ

Теория вероятностных метрик развита в работах В. М. Золотарёва и его школы [1]. Целью настоящей статьи является отыскание условий, при которых данная простая метрика является минимальной для некоторой сложной метрики, и нахождение способов построения сложных метрик с фиксированными минимальными метриками.

Пусть (U, d) – полное сепарабельное метрическое пространство, (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство, P^1 – класс одномерных распределений, то есть распределений случайных элементов, определённых на Ω и принимающих значения в U , P^2 – класс двумерных распределений, то есть распределений случайных элементов, определённых на Ω и принимающих значения в $U \times U$.

Определение 1. Вероятностной метрикой называется отображение $\mu: \mathbb{P}^2 \rightarrow R$, удовлетворяющее условиям:

1) $\mu(P_0) = 0$, где P_0 – двумерное распределение случайного вектора (X, Y) , обладающего свойствами $P_X = P_Y = P$, $P\{X = Y\} = 1$;

2) $\mu(P_{12}) = \mu(P_{21})$, где двумерные распределения P_{12} и P_{21} связаны соотношением $P_{12}(A \times B) = P_{21}(B \times A)$, $A, B \in \mathcal{B}(U)$, где $\mathcal{B}(U)$ – класс борелевских подмножеств U .

3) $\mu(P_{12}) \leq \mu(P_{13}) + \mu(P_{32})$ для любых согласованных распределений P_{12}, P_{13}, P_{32} .

(Набор двумерных распределений называется согласованным, если существует распределение большей размерности, соответствующие двумерные маргинальные распределения которого совпадают с данными).

Определение 2. Метрика μ называется простой, если она зависит только от одномерных маргинальных распределений, то есть удовлетворяет условию

$$\forall P_{12}, P_{12}' \left(P_1 = P_1', P_2 = P_2' \rightarrow \mu(P_{12}) = \mu(P_{12}') \right).$$

В противном случае метрика μ называется сложной.

Определение 3. Пусть v – сложная метрика. Отображение $\hat{v}: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow R$, определённое равенством

$$\hat{v}(P_1, P_2) = \inf \{v(P_{12}'): P_1' = P_1, P_2' = P_2\},$$

называется минимальной метрикой для метрики v .

Замечание 1. Можно показать, что \hat{v} является простой вероятностной метрикой.

Определение 4. Сложная метрика v называется протоминимальной метрикой для простой метрики μ , если справедливо равенство $\hat{v} = \mu$.

Часто метрика бывает определена не на всём классе \mathbb{P}^2 или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а только на некоторой его части. Обозначим область определения метрики μ через $\mathbb{P}(\mu)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть μ – простая метрика, обладающая свойством: для любого распределения $P \in \mathbb{P}(\mu)$ существует распределение P_c , сосредоточенное в точке $c \in U$ такое, что $(P, P_c) \in \mathbb{P}(\mu)$ и $\mu(P, P_c) = 0$. Тогда для метрики μ не существует протоминимальной метрики.

Следствие 1. Не существует такой сложной метрики v , для которой $\hat{v} \equiv 0$.

Следствие 2. Для “инженерной” метрики $\mu(P_x, P_y) = |EX - EY|$, определённой на множестве пар распределений случайных величин с конечными математическими ожиданиями, не существует протоминимальной метрики.

Пусть μ – данная простая метрика, отображение $\varphi: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ обладает свойствами:

- маргинальные одномерные распределения двумерного распределения $\varphi(P_1, P_2)$ совпадают с P_1 и P_2 соответственно;
- для любого распределения P из \mathbb{P}^1 справедливо равенство $\varphi(P, P) = P_0$;
- для любых распределений P_1 и P_2 из \mathbb{P}^1 равенство $\varphi(P_1, P_2) = P_{12}$ влечёт за собой равенство $\varphi(P_2, P_1) = P_{21}$.

При фиксированных φ и μ образуем функционал

$$v(P_{12}) = \inf [\mu(P_1, Q_1) + \dots + \mu(Q_n, P_2) : M(P_{12})], \quad (1)$$

где $M(P_{12}) = \{(Q_1, \dots, Q_n) \in \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 : P_{12}, \varphi(P_1, Q_1), \dots, \varphi(Q_n, P_2) – согласованы\}$, P_1 и P_2 – маргинальные распределения для P_{12} .

ТЕОРЕМА 2. Функционал v , построенный по формуле (1), обладает следующими свойствами:

- $v(P_0) = 0$;
- $v(P_{12}) = v(P_{21})$ при всех $P_{12} \in \mathbb{P}^2$;
- $v(P_{12}) \leq v(P_{13}) + v(P_{32})$ для любых согласованных наборов распределений P_{12}, P_{13}, P_{32} ;
- $v(P_{12}) \geq \mu(P_1, P_2)$ при всех $P_{12} \in \mathbb{P}^2$, где P_1, P_2 – маргинальные одномерные распределения для P_{12} ;
- $\hat{v}(P_{12}) = v(\varphi(P_1, P_2)) = \mu(P_1, P_2)$ для любого распределения $P_{12} \in \mathbb{P}^2$;
- если v^* – протоминимальная метрика для μ и при всех $P_{12} \in \mathbb{P}^2$ справедливо соотношение

$$\hat{v}^*(P_{12}) = v^*(\varphi(P_1, P_2)) = \mu(P_1, P_2),$$

то для любого $P_{12} \in \mathbb{P}^2$ верно неравенство

$$v^*(P_{12}) \leq v(P_{12}). \quad (2)$$

Определение 5. Отображение φ , обладающее свойством 5), назовём отображением достижения для метрики v .

Замечание 2. Условия 1) – 3) теоремы 2 означают, что функционал v , построенный по формуле (1), является вероятностной метрикой. Из условий 4), 5) вытекает, что, если v – сложная метрика, то она – протоминимальная метрика для μ с отображением достижения φ . И, наконец, условие 6) показывает, что в случае существования для простой метрики μ протоминимальной метрики с отображением достижения φ v также является такой метрикой, причём принимающей, согласно (2), наибольшие возможные значения.

Замечание 3. Поскольку все простые метрики μ , для которых построены протоминимальные метрики, обладают свойством

$$\forall P_1, P_2 \in \mathbb{P}(\mu) \quad (\mu(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2), \quad (3)$$

а все известные простые метрики, для которых протоминимальных метрик не существует, данным свойством не обладают, возникает следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА. Для того, чтобы у простой метрики μ существовала протоминимальная метрика, необходимо и достаточно выполнение условия (3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть μ, μ' – простые вероятностные метрики. Если для μ' существует протоминимальная метрика ν' с отображением достижения φ и существует $K > 0$, для которого верно неравенство

$$\mu(P_1, P_2) \geq K \mu'(P_1, P_2) \quad (P_1, P_2 \in \mathbb{P}^1),$$

то для μ также существует протоминимальная метрика с отображением достижения φ , причём её можно построить по формуле

$$\nu(P_{12}) = \inf [\mu(P_1, Q_1) + \dots + \mu(Q_n, P_2) : N(P_{12})],$$

где $N(P_{12}) = \{(Q_1, \dots, Q_n) \in \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 : \nu'(P_{12}) \leq \mu'(P_1, Q_1) + \dots + \mu'(Q_n, P_2)\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарёв В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.

УДК 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ*

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x, t) f(t) dt, \quad x \in [0, 1]. \quad (1)$$

Будем предполагать, что при $0 \leq t \leq x \leq 1$ существуют и непрерывны производные $\frac{\partial^{j+s}}{\partial x^j \partial t^s} A(x, t)$ ($j = 0, 1, \dots, n$; $s = 0, 1$) и, кроме того, считаем,

что $\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x, t)|_{t=x} = \delta_{n-1, j}$ ($j = 0, 1, \dots, n$), где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

Оператор (1) исследовался в [1, 2], где была установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора (1) и разложений в тригонометрические ряды Фурье. Теперь мы установим, что система с.п.ф. такого оператора образует также базис Рисса в $L_2[0,1]$. При $n=1$ этот результат установлен ранее в [3].

В пространстве $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$ вектор-функций размерности 2 введем интегральный оператор

$$Nf(x) = \int_0^{1/2} N(x,t) f(t) dt, \quad x \in [0, \frac{1}{2}],$$

где $N(x,t) = B\Gamma^{-1}\tilde{N}(x,t)\Gamma$, $\tilde{N}(x,t) = (\tilde{N}_{ij}(x,t))_{i,j=1}^2$,

$$\tilde{N}_{11}(x,t) = \frac{\partial N_1}{\partial t} \left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - t \right) \varepsilon(t, x), \quad \tilde{N}_{12}(x,t) = 0,$$

$$\tilde{N}_{21}(x,t) = \frac{\partial N_1}{\partial t} \left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - t \right), \quad \tilde{N}_{22}(x,t) = \frac{\partial N_1}{\partial t} \left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + t \right) \varepsilon(x, t),$$

$N_1(x,t)$ – ядро интегрального оператора $N_1 = (E + A_{x^n})^{-1} - E$, E – единичный оператор, $A_{x^n} f(x) = \int_0^x \frac{\partial^n A(x,t)}{\partial x^n} f(t) dt$, $\varepsilon(x,t) = 1$ при $t \leq x$ и $\varepsilon(x,t) = 0$ при $t > x$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Обозначим далее через L интегродифференциальный оператор

$$Ly = By^{(n)}(x) + Ny^{(n-1)}(x), \quad x \in [0, \frac{1}{2}],$$

с граничными условиями

$$U_k(y) = P_1 y^{(k-1)}(0) + Q y^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (k = 2r-1, r = 1, \dots, \frac{n}{2}),$$

$$U_k(y) = P_2 y^{(k-1)}(0) + Q y^{(k-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (k = 2r, r = 1, \dots, \frac{n}{2}),$$

где $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (считаем, что n – четное).

ЛЕММА 1. Система с.п.ф. оператора A образует базис Рисса в $L_2[0,1]$, тогда и только тогда, когда система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса в $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$.

ЛЕММА 2. Достаточно большие по модулю собственные значения λ_m оператора L однократны.

ЛЕММА 3. Справедлива оценка

$$\left\| \sum_{m \in J} E(\lambda_m) \right\| \leq C,$$

где $E(\lambda_m) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} R_\lambda d\lambda$, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, C_m – замкнутый контур в λ -плоскости, содержащий только одно собственное значение λ_m оператора L , J – произвольный конечный набор попарно различных натуральных чисел, $C > 0$ и не зависит от J , $\|\cdot\|$ – норма оператора в $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$.

ЛЕММА 4. Если $E(\lambda_m)f = 0$ для всех собственных значений λ_m оператора L , то $f(x) = 0$ почти всюду.

ТЕОРЕМА. Система с.п.ф. оператора A образует базис Рисса в $L_2[0,1]$.

Доказательство. Пусть $E^*(\lambda_k)$ – оператор, сопряженный к $E(\lambda_k)$. Покажем, что $\sum_{k=1}^{\infty} E^*(\lambda_k)f$ безусловно сходится к $f(x)$. Из леммы 4 следует, что система $\{\psi_k(x)\}$ с.п.ф. сопряженного к L оператора полна в $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует номер m и числа α_k ($k = 1, \dots, m$), такие, что $\left\| f - \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k \right\| < \varepsilon$. Зафиксируем некоторый порядок σ членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} E^*(\lambda_k)f(x)$ и обозначим $S_{l,\sigma} = \sum_{k=1}^l E^*(\lambda_k)$. Тогда по лемме 3 при l достаточно больших имеем

$$\begin{aligned} \|f - S_{l,\sigma}f\| &\leq \left\| f - \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k - S_{l,\sigma} \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k \right) \right\| + \\ &+ \left\| S_{l,\sigma} \left(f - \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k \right) \right\| \leq \varepsilon + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} E^*(\lambda_k)f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\psi_k(x)$, где $\{\varphi_k(x)\}$ – система с.п.ф. оператора L , то система $\{\psi_k(x)\}$ образует перестановочный базис, а система $\{\psi_k(x)\psi_k\|^{-1}\}$ и биортогональна к ней, которая состоит из с.п.ф. оператора L , – базис Рисса [4, с. 374, 381]. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Хромов А. П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: Сб. статей, посвященный 70-летию П. Л. Ульянова. М.: Изд-во АФЦ, 1999. С. 255-266.

2. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Современные методы в теории краевых задач: Тез. докл. 11-й Воронежской весенней школы. Воронеж, 2000. С. 89.

3. Курдюмов В. П. О базисности Рисса корневых векторов интегральных операторов с разрывными ядрами // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 9-й Саратовской зимней школы. Саратов, 1997. С. 96.

4. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов. М., 1965.

УДК 517.948.34

Ю. В. Курышова

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ
ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
ПО НЕПОЛНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ***

Пусть числа $\{\lambda_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ являются собственными значениями краевых задач $L_i = L_i(q, M)$:

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x, t)y(t)dt = \lambda y, \quad (1)$$

$$y(0) = y^{(i-1)}(\pi) = 0. \quad (2i)$$

Здесь $x \in [0, \pi]$, $i = 1, 2$, $q(x) \in \mathbf{L}_2(0, \pi)$, $M(x, t) \in \mathbf{L}(0, \pi) \times (0, x)$ – вещественные функции. В статье исследуется задача восстановления функции q по части спектров задач L_i . Не ограничивая общности, считаем

$$\int_0^\pi q(x)dx = 0.$$

Пусть $S(x, \lambda)$ есть решение уравнения (1) с начальными условиями $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$, а $S^*(x, \lambda)$, $C^*(x, \lambda)$ – решения уравнения сопряжённого к (1) с начальными условиями $S^*(\pi, \lambda) = 0$, $S^{*'}(\pi, \lambda) = -1$ и $C^*(\pi, \lambda) = 1$, $C^{*'}(\pi, \lambda) = 0$.

Введём функции $\{\xi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ по следующим формулам:

$\xi_{2n}(x) = 1 - 2\lambda_{n1}b_{n1}^{-1}S^*(x, \lambda_{n1})S(x, \lambda_{n1})$, $\xi_{2n-1}(x) = 1 - 2\lambda_{n2}b_{n2}^{-1}C^*(x, \lambda_{n2})S(x, \lambda_{n2})$,
где числа b_{ni} определяются соотношениями $b_{n1}S^0(x, \mu_{n1}) = S^{0*}(x, \mu_{n1})$,
 $b_{n2}S^0(x, \mu_{n2}) = C^{0*}(x, \mu_{n2})$. Функции S^0, S^{0*}, C^{0*} задаются аналогично функ-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00-741.

циям S, S^*, C^* , но для уравнений с $M(x, t) \equiv 0$, а $\{\mu_{ni}\}_{n=1}^\infty$ собственные значения задач $L_i^0 = L_i(q, 0)$. Введём систему функций $\{\zeta_n^N(x)\}_{n=0}^\infty$ такую, что $\zeta_n^N(x) := \xi_n(x)$, если $n \geq N$, и $\zeta_n^N(x) := \cos nx$, если $n = \overline{0, N-1}$.

ЛЕММА. Существует натуральное число $N_0 = N_0(\ell)$ такое, что при $N \geq N_0$ система функций $\{\zeta_n^N(x)\}_{n=0}^\infty$ является базисом Riesz в $L_2[0, \pi]$.

ТЕОРЕМА. Выберем натуральное N из леммы, для неопределённости нечётное. Тогда найдётся число $\delta = \delta(L_i(q, M)) > 0$ такое, что для чисел $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^\infty$ и $\{d_k\}_{k=1}^{N-1}$, $d_0 = 0$, выбранных из условия

$$\Lambda(N) := \left(\sum_{k=1}^{N-1} |d_k|^2 + \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^\infty |\hat{\kappa}_{n1}|^2 + |\hat{\kappa}_{n2}|^2 \right)^{1/2} < \delta, \quad (3)$$

где $\hat{\kappa}_{ni} = n(\rho_{ni} - \tilde{\rho}_{ni})$, $\lambda_{ni} = \rho_{ni}^2$, в шаре $S(q, 2\delta)$ из $L_2(0, \pi)$ существует единственная функция $\tilde{q}(x)$ такая, что числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^\infty$ являются собственными значениями задач $L_i(\tilde{q}, M)$, причём $\|\tilde{q} - q\|_{L_2} < C\Lambda(N)$ (константа C зависит лишь от задач L_i) и

$$\int_0^\pi (q(x) - \tilde{q}(x)) \cos nx dx = d_n, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Схема доказательства. Рассмотрим систему функций

$$\tilde{\zeta}_n^N(x) := \begin{cases} \tilde{\xi}_n(x), & n \geq N, \\ \cos nx, & n = \overline{0, N-1}, \end{cases}$$

где функции $\{\tilde{\xi}_n(x)\}_0^\infty$ определяются равенствами

$$\tilde{\xi}_{2n}(x) = 1 - 2\tilde{\lambda}_{n1} b_{n1}^{-1} S^*(x, \tilde{\lambda}_{n1}) S(x, \tilde{\lambda}_{n1}), \quad \tilde{\xi}_{2n-1}(x) = 1 - 2\tilde{\lambda}_{n2} b_{n2}^{-1} C^*(x, \tilde{\lambda}_{n2}) S(x, \tilde{\lambda}_{n2}).$$

Существует $\delta > 0$ такое, что если $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^\infty$ и $\{d_k\}_{k=1}^{N-1}$ выбраны из условия (3), то система функций $\{\tilde{\zeta}_n^N(x)\}_0^\infty$ есть базис Riesz в $L_2[0, \pi]$. Обозначим $\{\tilde{\Psi}_n^N(x)\}_0^\infty$ биортогональный базис к $\{\tilde{\zeta}_n^N(x)\}_0^\infty$. Условимся для произвольной функции $F(x, \lambda)$ обозначать $F_{ni}(x) = F(x, \tilde{\lambda}_{ni})$.

Рассмотрим в $L_2(0, \pi)$ нелинейное интегральное уравнение

$$r(x) = f(x) + \sum_{j=2}^N \int_0^\pi \dots \int_0^\pi H_j(x, t_1, \dots, t_j) r(t_1) \dots r(t_j) dt_1 \dots dt_j, \quad (5)$$

$$\text{где } f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \tilde{\Psi}_n^N(x) - 2 \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^\infty \left(\frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S_{n1}(\pi) \tilde{\Psi}_{2n}^N(x) + \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} S'_{n2}(\pi) \tilde{\Psi}_{2n-1}^N(x) \right),$$

$$H_j(x, t_1, \dots, t_j) = -2 \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S_{n1}^*(t_1) G_{n1}(t_1, t_2) \dots G_{n1}(t_{j-1}, t_j) S_{n1}(t_j) \tilde{\Psi}_{2n}^N(x) + \right. \\ \left. + \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} C_{n2}^*(t_1) G_{n2}(t_1, t_2) \dots G_{n2}(t_{j-1}, t_j) S_{n2}(t_j) \tilde{\Psi}_{2n-1}^N(x) \right), \quad j \geq 2,$$

$r(x)$ – неизвестная функция, $G(x, t, \lambda)$ – функция, при $0 \leq t \leq x \leq \pi$ совпадающая с функцией Грина задачи Коши: $\ell y = \lambda y$, $y(0) = y'(0) = 0$, и равная нулю при $0 \leq x \leq t \leq \pi$; $G_{ni}(x, t) := G(x, t, \tilde{\lambda}_{ni})$.

Справедливы оценки $\|f(x)\|_2 < C\Lambda(N)$; $\|H_j(x, t_1, \dots, t_j)\|_2 < C_0^j$, $j \geq 2$, где $\|\cdot\|_2$ – норма в L_2 берётся по всем аргументам, а постоянные C, C_0 , зависят только от задач $L_i(q, M)$. Можно показать, что если $\Lambda < \delta$, то уравнение (5) имеет единственное решение $r(x)$ в шаре $\|r\| < 2\delta$ из $L_2[0, \pi]$, причём $\|r(x)\| < 2\|f(x)\|$. Обозначим $\tilde{q}(x) := q(x) - r(x)$. Покажем, что числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^{\infty}$ составляют часть спектров задач $L_i(\tilde{q}, M)$, $i = 1, 2$. Этой целью рассмотрим уравнение

$$\tilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \int_0^\pi G_{ni}(x, t) r(t) \tilde{y}_{ni}(t) dt. \quad (6)$$

Решим его методом последовательных приближений, получим

$$\tilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \varphi_{ni}(x), \quad (7)$$

$$\text{где } \varphi_{ni}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{j} G_{ni}(x, t_1) \dots G_{ni}(x, t_j) r(t_1) \dots r(t_j) dt_1 \dots dt_j.$$

Из равенства (5) можно получить

$$\tilde{\ell} \tilde{y}_{ni}(x) \equiv -\tilde{y}_{ni}''(x) + \tilde{q}(x) \tilde{y}_{ni}(x) + \int_0^x M(x, t) \tilde{y}_{ni}(t) dt = \tilde{\lambda}_{ni} \tilde{y}_{ni}(x), \quad (8)$$

$$\tilde{y}_{ni}(0) = 0, \tilde{y}'_{ni}(0) = 1.$$

Используя (8), получим

$$\int_0^\pi r(x) S_{n1}^*(x) \tilde{S}_{n1}(x) dx = S_{n1}(\pi) - \tilde{y}_{n1}(\pi), \quad \int_0^\pi r(x) C_{n2}^*(x) \tilde{S}_{n2}(x) dx = S'_{n2}(\pi) - \tilde{y}_{n2}(\pi). \quad (9)$$

Обозначим $\int_0^\pi r(x) dx = \theta$. Умножая тождество (5) на $\tilde{\Psi}_n^N(x)$, интегрируя его по x от 0 до π , и учитывая при этом формулы (7), получим

$$\int_0^\pi r(x) S_{n1}^*(x) \tilde{S}_{n1}(x) dx \equiv S_{n1}(\pi) - \theta, \quad \int_0^\pi r(x) C_{n2}^*(x) \tilde{S}_{n2}(x) dx \equiv S'_{n2}(\pi) - \theta. \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), имеем для $n \geq (N+1)/2$

$$\tilde{y}_{n1}(\pi) = \theta, \quad \tilde{y}'_{n2}(\pi) = \theta, \quad (11)$$

а для $n = \overline{0, N-1}$, — равенства (4).

Имеет место оценка $|\tilde{y}_{n1}(x)| < Cn^{-2}$, следовательно, из (11) при $n \rightarrow \infty$ получим $\theta = 0$, отсюда $\int_0^\pi \tilde{q}(x) dx = 0$, и $\tilde{y}_{n1}(\pi) = 0$, $\tilde{y}'_{n2}(\pi) = 0$. Таким образом, числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=\frac{N+1}{2}}^\infty$ составляют часть спектра задач \tilde{L}_i , причём имеют место равенства (4). Теорема доказана.

УДК 517.984

Д. С. Лукомский

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Рассмотрим пару $L = (l, U)$, $U = \{U_\xi\}_{\xi=\overline{1,n}}$:

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} P_k(x, \rho) y^{(k)} = 0, \quad P_k(x, \rho) = \sum_{i=k}^n \rho^{n-i} P_{ki}(x), \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$U_\xi(y) = y^{(n-\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{n-\xi} u_{k\xi}(\rho) y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi}(\rho) = \sum_{i=0}^k \rho^{k-i} \beta_{k,k+i}^{(\xi)}.$$

Здесь $P_{kk} = 0$, $k = \overline{1, n-2}$, $P_{00} = -1$, $P_{ki}(x) \in L(0, \infty)$, $P_{k,k+1}(x) \in W^1(0, \infty)$, $k = \overline{0, n-2}$, $i = \overline{k+1, n}$.

Известно, что ρ -плоскость можно разбить на сектора

$S_v = \left\{ \rho : \arg \rho \in \left(v\pi/n, (v+1)\pi/n \right) \right\}$ $v = \overline{0, 2n-1}$, в каждом из которых корни

$\{R_k\}_{k=\overline{1,n}}$ уравнения $R^n - 1 = 0$ можно занумеровать так, что

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S_v. \quad (2)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

Пусть функции $\Phi(x, \rho) = [\Phi_m(x, \rho)]_{m=1, \overline{n}}^T$ являются решениями дифференциального уравнения (1) при условиях $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1, m}$, а также $\Phi_m(x, \rho) = O(\exp(\rho R_m x))$, $x \rightarrow \infty$, $\rho \in S_v$, в каждом секторе S_v со свойством (2). Обозначим $M_{mk}(\rho) = U_k(\Phi_m)$, $k = \overline{m+1, n}$. Функции $\Phi_m(x, \rho)$ называются решениями Вейля, а функции $M_{mk}(\rho)$ – функциями Вейля. Матрица $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{k, m=1, \overline{n}}$, где $M_{mk}(\rho) = \delta_{mk}$, $k = \overline{1, m}$ называется матрицей Вейля.

Наряду с парой $L = (l, U)$ будем рассматривать пару $\tilde{L} = (\tilde{l}, \tilde{U})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Договоримся, что если некоторый символ ϕ обозначает объект, относящийся к L , то символ $\tilde{\phi}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к \tilde{L} .

Поставим задачу следующим образом: по матрице Вейля $M(\rho)$ восстановить L .

Обозначим $\Omega(x, \rho) = \text{diag}[\frac{1}{\rho} \exp(\rho R_k x)]_{k=2, \overline{n}}$, $r(\rho) = \frac{1}{\rho^{n-1}}$.

$$\gamma^\circ = \left\{ \rho : \rho \in \bigcup_{v=0}^{2n-1} \gamma_v, d(\rho, \gamma_0) \geq \alpha_0 > 0 \right\}, \quad \gamma = \gamma^\circ / |\gamma^\circ|, \quad d(\rho, \gamma_0) = \inf |\rho - \mu|, \mu \in \gamma_0;$$

где γ_v , γ_{v+1} – лучи, ограничивающие сектор S_v , γ_0 , γ , определены в [1].

Введем банахово пространство $B = L_2^{n-1}(\gamma^\circ, r(\rho)) \oplus L_\infty^{n-1}(\gamma^\circ, r(\rho))$ вектор функций $Z(\rho) = [z_j(\rho)]_{j=1, \overline{n-1}}$, $\rho \in \gamma$ с нормой

$$\|Z\|_B = \sum_{j=1}^{n-1} (\|z_j\|_{L_2(\gamma^\circ, r(\rho))} + \|z_j\|_{L_\infty(\gamma^\circ, r(\rho))});$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}(x, \rho, \mu) = & \left(\sum_{m=0}^{n-1} \tilde{g}^{*(m)}(x, \mu) \sum_{s=m}^{n-1} (-1)^s C_s^m \sum_{i=s}^{n-1} \tilde{P}_{si}^{(s-m)}(x) * \right. \\ & \left. * \sum_{t=0}^{n-i-1} \mu^{n-i-t-1} \rho^t \right)^{(j-k-l-1)}, \end{aligned}$$

$$\kappa_{vs}(x, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\tilde{g}^*(x, \mu) \tilde{N}(x, \rho, \mu))^{(v)} \psi^{(s)}(x, \mu) d\mu, \quad v+s \leq n-1,$$

$$t_{jv}(x, \rho) = - \sum_{\beta=v+1} C_\beta^\beta C_{\beta-1}^v \kappa_{\beta-v-1, j-\beta}(x, \rho) \quad j > v \Bigg\},$$

$$t_{jv}(x, \rho) = \delta_{jv}, \quad j \leq v, \quad j, v = \overline{0, n},$$

$$\varepsilon_v(x, \rho) = - \sum_{j=v+1}^n \left(t_{jv}(x, \rho) \sum_{k=j}^n C_k^j P_k(x, \rho) \frac{V^{(k-j)}(x)}{V(x)} + \right.$$

$$+ C_j^\nu P_j(x, \rho) \frac{V^{(j-\nu)}(x)}{V(x)} \Bigg), \quad \nu = \overline{0, n-1}, \quad (3)$$

где $V(x)$, $\tilde{g}^*(x, \rho)$, $\psi(x, \rho)$ определены в [1]. Кроме того, в дальнейшем будут использоваться обозначения $\tilde{\varphi}(x, \rho)$, $\tilde{N}(\rho)$, $\tilde{r}(x, \rho, \mu)$, также введенные в [1].

Обозначим через m – множество матриц $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m, k=1, n}$ таких, что

$$1) M_{mk}(\rho) = \delta_{mk}, \text{ при } m \geq k, \text{ и } M_{mk}(\rho) = O\left(\frac{1}{\rho^{k-m}}\right), |\rho| \rightarrow \infty, m < k;$$

2) при фиксированном ν функция $M_{mk}(\rho)$, является регулярной в $S_\nu \cup S_{\nu + (-1)^{n+\nu-m+1}/2}$ за исключением не более, чем счетного ограниченного множества полюсов $\Lambda_{S_\nu}^\nu$. За исключением ограниченных множеств $\Lambda_{S_\nu}^+$ и $\Lambda_{S_\nu}^-$ существуют конечные пределы $M(\rho)^{+S_\nu}$ и $M(\rho)^{-S_\nu}$ к лучам, ограничивающим объединение двух секторов;

3) при фиксированном ν функции $M_{mk}(\rho) - M_{m, m+1}(\rho)M_{m+1, k}(\rho)$, регулярны при $\rho \in \gamma_{\nu + (-1)^{n+\nu-m+1}/2} / \Lambda$, $\Lambda = \cup_{m, k} \Lambda_{mk}^\nu$ (множество Λ своё для каждой матрицы $M(\rho)$).

ТЕОРЕМА. Пусть матрица $M(\rho) \in m$ такая, что:

1) существует \tilde{L} такая, что $M(\rho) - \tilde{M}(\rho) = O(\rho^{-n-2})$, $\rho \rightarrow \infty$;

2) при $x \geq 0$ уравнение

$$\tilde{\varphi}(x, \rho) = \tilde{N}(\rho)\psi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \rho, \mu)\psi(x, \mu)d\mu, \quad \rho \in \gamma$$

имеет единственное решение в классе $\Omega^{-1}(x, \rho)\varphi(x, \rho) \in B$;

3) $\varepsilon_\nu(x, \rho) \in W_\nu$, $\nu = \overline{0, n-2}$ при каждом фиксированном ρ , где функции $\varepsilon_\nu(x, \rho)$ определяются по формулам (3).

Тогда существует единственная $L = (l, U)$ такая, что $M(\rho)$ является матрицей Вейля для L .

При выполнении этих условий дифференциальное уравнение и линейные формы $L = (l, U)$ строятся по формулам

$$P_\nu(x, \rho) = \tilde{P}(x, \rho) + \varepsilon_\nu(x, \rho), \quad \tilde{u}_{n-\nu-\zeta, \zeta}(\rho) = \sum_{j=0}^n \tilde{u}_{j\zeta}(\rho)t_{j\nu}(0, \rho),$$

$$\text{где } \tilde{u}_{i\zeta}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-i-\zeta} u_{k\zeta}(\rho)C_{n-k-\zeta}^i V^{(n-k-i-\zeta)}(0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукомский Д. С. Об обратной спектральной задаче для дифференциальных операторов с нелинейной зависимостью от спектрального параметра // Математика, механика, математическая кибернетика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 54 – 57.

УДК 517.51

С. Ф. Лукомский

О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ, БЛИЗКИХ К L^∞ *

Пусть $\{W_n(t)\}_{n=0}^\infty$ – система функций Уолша в нумерации Пэли, определенная на двоичной группе G . Кратную систему Уолша

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = W_{n^{(1)}}(t^{(1)}) \cdot W_{n^{(2)}}(t^{(2)}) \cdots W_{n^{(d)}}(t^{(d)})$$

$$(\mathbf{n} = (n^{(1)} \dots n^{(d)}), \quad \mathbf{t} = (t^{(1)} \dots t^{(d)}))$$

будем считать определенной на произведении G^d ($d \in \mathbb{N}$). Пусть далее $\Lambda \subset \mathbb{N}^d$ – некоторое семейство d -мерных векторов \mathbf{n} , определяющих частичные суммы $S_{\mathbf{n}}(f)$ кратного ряда Фурье-Уолша. Рассмотрим задачу о сходимости частичных сумм $S_{\mathbf{n}}(f)$ в пространствах, лежащих между L^p и L^∞ , в зависимости от свойств семейства Λ .

Если $n \in \mathbb{N}$ и

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \cdot 2^k \quad (\varepsilon_k = 0 \text{ или } 1)$$

– двоичное разложение числа n , то число

$$\nu(n) = \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}|$$

называют вариацией числа. Известно [1], что для констант Лебега L_n по системе Уолша-Пэли

$$\frac{1}{4} \nu(n) \leq L_n \leq \nu(n).$$

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{N}^d$ – произвольное семейство d -мерных векторов. Положим для $0 \leq s \leq d$

$$D(\Lambda, s) = \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathbf{n} \in \Lambda}} \min_{\mathbf{k}} \left(\frac{\nu(n^{(1)}) \nu(n^{(2)}) \cdots \nu(n^{(d)})}{\nu(n^{(k_1)}) \nu(n^{(k_2)}) \cdots \nu(n^{(k_s)})} \right), \quad (\mathbf{k} = (k_1, \dots k_s))$$

* Работа выполнена при частичной поддержке программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.

(при $s = 0$ произведение в знаменателе будем считать равным 1). Двоичной размерностью семейства Λ назовем число

$$\dim_2(\Lambda) \stackrel{df}{=} \min(s : D(\Lambda, s) < \infty).$$

Определим пространства, в которых будем рассматривать сходимость. Если $p > 1, \alpha \geq 1$, то обозначим через $\hat{L}_{p,\alpha}$ совокупность всех измеримых, конечных почти всюду функций $f : G^d \rightarrow R$ таких, что

1) существует непрерывная, строго возрастающая на $(0, \infty)$ функция

$$\varphi(x) > 0, \text{ такая, что } \int_1^\infty \left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{x^\alpha} \right)^p dx < \infty \quad (\varphi^{-1}(x) - \text{обратная к } \varphi);$$

2) существует постоянная $\gamma > 1$ такая, что $\int_{G^d} \gamma^{\varphi(|f|)} dt < \infty$.

Ранее [2] было доказано, что $\hat{L}_{p,\alpha}(G^d)$ являются банаховыми пространствами с нормой

$$\|f\|_{\hat{p},\alpha} = \left(\int_1^\infty \left(\frac{\|f\|_x}{x^\alpha} \right)^p dx \right)^{1/p} \approx \left(\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^p \right)^{1/p}$$

($\|\cdot\|_x$ – это норма в L_x). Кроме того, ступенчатые функции, а значит и многочлены Уолша, образуют в $\hat{L}_{p,\alpha}$ плотное множество. Отметим также, что при любом $\gamma > 1$ и любом $\varepsilon > 0$

$$L^0\left(\gamma^{|x|^{q+\varepsilon}}\right) \subset \hat{L}_{p,\alpha}(G^d) \subset L^0\left(\gamma^{|x|^q}\right) \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha} \right),$$

где $L^0(\psi)$ обозначает класс Орлича, построенный по N функции Ψ .

ТЕОРЕМА. Пусть $d \geq 1, \Lambda \subset \mathbb{N}^d, \dim_2 \Lambda = r, 1 < p < \infty, \alpha \geq 1$. Тогда

1) существует постоянная $C_{d,r} > 0$ такая, что для любой $f \in \hat{L}_{p,\alpha}$, для любого $\mathbf{n} \in \Lambda$ ($n \geq n_0$)

$$\|S_{\mathbf{n}}(f)\|_{\hat{p},\alpha+r} \leq C_{d,r} \|f\|_{\hat{p},\alpha};$$

2) для любой $f \in \hat{L}_{p,\alpha}$ $\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \|S_{\mathbf{n}}(f) - f\|_{\hat{p},\alpha+r} = 0$.

($\mathbf{n} \rightarrow \infty$ означает, что $\min_i n^{(i)} \rightarrow \infty$).

Доказательство.

1) Пусть $\limsup_{\substack{\mathbf{n} \rightarrow \infty \\ \mathbf{n} \in \Lambda}} \min_k \left(\frac{v(n^{(1)}) \dots v(n^{(d)})}{v(n^{(k_1)}) \dots v(n^{(k_r)})} \right) = M < \infty$. Тогда существует

вектор $\mathbf{n}_0 = (n_0, n_0, \dots, n_0)$ такой, что для всех $\mathbf{n} > \mathbf{n}_0$

$$\min_k \frac{v(n^{(1)}) \dots v(n^{(d)})}{v(n^{(k_1)}) \dots v(n^{(k_r)})} \leq 2M. \quad (1)$$

Пусть для определенности \min в (1) достигается при $k_1 = 1, \dots, k_r = r$. Тогда

$$v(n^{k_{r+1}})v(n^{k_{r+2}}) \dots v(n^{k_d}) \leq 2M.$$

Запишем частичную сумму $S_n(f)$ в виде

$$S_n(f) = S_{n^d}(S_{n^{d-1}}(\dots S_{n^2}(S_{n^{r-1}} \dots S_{n^1}(t) \dots)). \quad (2)$$

Так как для одномерной частичной суммы

$$\|S_m f\|_p = \|D_m * f\|_p \leq \|D_m\|_1 \cdot \|f\|_p = L_m \cdot \|f\|_p \quad (p \geq 1)$$

и

$$\|S_m(f)\|_p \leq C \cdot p \cdot \|f\|_p \quad (p \geq 2), \quad (3)$$

(причем в (3) постоянная C не зависит от p и m), то из (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|_p &\leq v(n^{r+1}) \dots v(n^d) \|S_{n^{(r)}}(S_{n^{(r-1)}} \dots S_{n^{(1)}}(f) \dots)\|_p \leq \\ &\leq 2M \cdot C^r p^r \|f\|_p \quad (p \geq 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя (4) находим, что существует постоянная $C_{p,r} > 0$, что для всех $n > n_0$

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\|S_n(f)\|_k}{k^{\alpha+r}} \right)^p \right)^{1/p} \leq C_{p,r} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\|f\|_k}{k^\alpha} \right)^p \right)^{1/p}.$$

Отсюда следует

$$\|S_n(f)\|_{\hat{p},\alpha+r} \leq 2 \cdot C_{p,r} \|f\|_{\hat{p},\alpha}. \quad (5)$$

2) Так как полиномы Уолша образуют плотное в $\hat{L}_{p,\alpha}$ множество, то из неравенства (5) обычными средствами получаем второе утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schipp F., Wade W. R., Simon P. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Akademiai kiado, 1990.
2. Лукомский С. Ф. О сходимости рядов Уолша в пространствах с интегральной метрикой // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж: Центр.-Чернозем. кн. изд-во, 2001. С. 175 – 176.

О ЦЕПЯХ МАРКОВА, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Рассматривается однородная цепь Маркова $X_\varepsilon = \{X_\varepsilon(t), t \geq 0\}$ с непрерывным временем и пространством состояний $S = \{0, 1, \dots, N\}$, инфинитезимальная матрица $Q(\varepsilon)$ которой зависит от параметра $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Для этой цепи доказана теорема о непрерывной равномерно относительно $t \in [0, \infty)$ зависимости от параметра решения системы прямых уравнений Колмогорова.

Известным результатом теории дифференциальных уравнений является теорема, согласно которой решение нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений непрерывно по параметру равномерно на любом конечном интервале времени. Однако данная теорема не может гарантировать непрерывности решения по параметру равномерно на бесконечном интервале времени в том случае, когда решение продолжимо на бесконечный интервал [1]. Поэтому вопрос о равномерной на бесконечном интервале времени непрерывности решения по параметру в случае конкретного класса систем требует специальных исследований.

В настоящей статье предполагается, что все собственные значения матрицы $Q(0)$ различны. Это предположение выполняется, например, для такого важнейшего класса цепей Маркова как процессы рождения и гибели, поскольку их инфинитезимальная матрица является матрицей Якоби [2]. Другой пример – процесс чистой гибели: его инфинитезимальная матрица является нижней треугольной матрицей, поэтому если её диагональные элементы различны, то и собственные значения различны.

Предположим, что элементы матрицы $Q(\varepsilon)$ представимы на интервале $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ рядами вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n$. Введем в рассмотрение векторы $p_i(\varepsilon, t) = (p_{in}(\varepsilon, t))_{n=0}^N$, $i = 0, 1, \dots, N$, где $p_{in}(\varepsilon, t)$ – вероятности перехода цепи X_ε из состояния i в состояние n за время t . В дальнейшем все векторы будем считать вектор-столбцами.

ТЕОРЕМА. Если все собственные значения матрицы $Q(0)$ различны, то для любого $\delta > 0$ существует такое $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0)$, что для любого $\varepsilon \in [-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}]$ $\|p_i(\varepsilon, t) - p_i(0, t)\| \leq \delta$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство. Пусть число $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что матрица $Q(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ имеет различные собственные значения $\lambda_n(\varepsilon)$, $n = 0, 1, \dots, N$; выберем такой способ их нумерации, чтобы $\lambda_0(\varepsilon) \equiv 0$. Не теряя общности, будем предполагать, что у матрицы $Q'(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$, существуют правые и левые собственные векторы $x_n(\varepsilon)$ и $y_n(\varepsilon)$, соответст-

вующие собственным значениям $\lambda_n(\varepsilon)$, $n = 1, 2, \dots, N$, такие, что справедливы соотношения [3]

$$y'_n(\varepsilon)x_n(\varepsilon) \equiv 1,$$

$$x_n(\varepsilon) = x_n(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_n^{(k)}, \quad y_n(\varepsilon) = y_n(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_n^{(k)}.$$

У цепи X_ε при $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ существует единственное стационарное распределение $\pi(\varepsilon) = (\pi_n(\varepsilon))$, $n = 0, 1, \dots, N$, поскольку нулевое собственное значение ее инфинитезимальной матрицы имеет алгебраическую кратность, равную 1 [4].

Пусть $\delta > 0$ – произвольное число. Покажем, что существует такое $\hat{t} \geq 0$, что $\|p_i(\varepsilon, t) - \pi(\varepsilon)\| \leq \delta/3$ для всех $t > \hat{t}$ и $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$. Предположим, что это не так, то есть для любого $t \geq 0$ существуют $t' > t$ и $\varepsilon' \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ такие, что $\|p_i(\varepsilon', t') - \pi(\varepsilon')\| > \delta/3$. Рассмотрим последовательности $\{t_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, $t_k \geq 0$, $t_k < t_{k+1}$, и $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$, такие, что $\|p_i(\varepsilon_k, t_k) - \pi(\varepsilon_k)\| > \delta/3$. Выделим из последовательности $\{\varepsilon_k\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_i}\}$, её предел обозначим через ε^* , $\varepsilon^* \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$. Вектор $p_i(\varepsilon, t)$ удовлетворяет уравнению

$$dp_i(\varepsilon, t)/dt = Q'(\varepsilon)p_i(\varepsilon, t)$$

(система прямых уравнений Колмогорова) и начальному условию $p_i(0) = e_i$, где e_i – вектор, i -я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Используя спектральную теорему, для вектора $p_i(\varepsilon, t)$, $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$, $t \geq 0$, можно получить следующее представление:

$$p_i(\varepsilon, t) = \sum_{n=0}^N \exp(\lambda_n(\varepsilon)t) x_n(\varepsilon) y'_n(\varepsilon) e_i,$$

где $x_0(\varepsilon)$ и $y_0(\varepsilon)$ – правый и левый собственные векторы матрицы $Q'(\varepsilon)$, соответствующие $\lambda_0(\varepsilon)$, такие, что $y'_0(\varepsilon)x_0(\varepsilon) = 1$. Положим $x_0(\varepsilon) = \pi(\varepsilon)$, $y'_0(\varepsilon) \equiv (1, 1, \dots, 1)$. Все $\lambda_n(\varepsilon)$, $n = 1, 2, \dots, N$, имеют отрицательные вещественные части [4]. Следовательно, $p_i(\varepsilon_{k_i}, t_{k_i}) \rightarrow \pi(\varepsilon^*)$ при $k_i \rightarrow \infty$. Вектор $\pi(\varepsilon)$ является решением системы $Q'_j(\varepsilon)\pi(\varepsilon) = e_j$, полученной заменой j -го уравнения, $j \in S$, в системе $Q'(\varepsilon)\pi(\varepsilon) = 0$ уравнением $\sum_{n=0}^N \pi_n(\varepsilon) = 1$. Отсюда следует, что $\pi(\varepsilon)$ непрерывно зависит от ε , $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$. Имеем $\|p_i(\varepsilon_{k_i}, t_{k_i}) - \pi(\varepsilon_{k_i})\| \leq \|p_i(\varepsilon_{k_i}, t_{k_i}) - \pi(\varepsilon^*)\| + \|\pi(\varepsilon^*) - \pi(\varepsilon_{k_i})\| \rightarrow 0$ при $k_i \rightarrow \infty$. Таким образом, приходим к противоречию.

Для всех $t \geq 0$ и $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ имеет место неравенство $\|p_i(\varepsilon, t) - p_i(0, t)\| \leq \|p_i(\varepsilon, t) - \pi(\varepsilon)\| + \|\pi(\varepsilon) - \pi(0)\| + \|\pi(0) - p_i(0, t)\|$. Следовательно, для всех $t > \hat{t}$ и $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ справедливо $\|p_i(\varepsilon, t) - p_i(0, t)\| \leq 2\delta/3 + \|\pi(\varepsilon) - \pi(0)\|$. Выберем такое $\varepsilon' \in (0, \bar{\varepsilon}]$, что $\|\pi(\varepsilon) - \pi(0)\| \leq \delta/3$, $\varepsilon \in [-\varepsilon', \varepsilon']$. Имеем $\|p_i(\varepsilon, t) - p_i(0, t)\| \leq \delta$, $t > \hat{t}$, $\varepsilon \in [-\varepsilon', \varepsilon']$. Выберем теперь такое $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon']$, что $\|p_i(\varepsilon, t) - p_i(0, t)\| \leq \delta$, $t \in [0, \hat{t}]$, $\varepsilon \in [-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}]$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.
2. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
3. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
4. Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958.

УДК 519.212

В. Н. Михайлов, С. А. Точилкина

МЕТОД РАСЧЕТА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОТ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим измеримую функцию $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ от независимых дискретных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, имеющих одинаковое распределение

$$p_k = P\{\xi_j = x_k\}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Необходимо найти закон распределения случайной величины $\eta = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. При небольшом числе случайных величин n и простых функциях $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ эта задача решается элементарно. Однако при больших n и сложных зависимостях $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ вычисления становятся трудоемкими и могут быть выполнены только на компьютере. Построим алгоритм решения поставленной задачи.

Обозначим через $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ – множество всех возможных значений случайной величины ξ_j , $j = \overline{1, n}$. Обозначим через $Z = X \times X \times \dots \times X$ – декартово произведение n множеств X . $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ – точка в пространстве Z . Пусть $z_1 = x_{i1}$, $z_2 = x_{i2}, \dots, z_n = x_{in}$, в этой точке функция f примет значение $\eta = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$. Так как $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, то [1]

$$\begin{aligned} P\{\eta = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})\} &= P\{\xi_1 = x_{i1}, \xi_2 = x_{i2}, \dots, \xi_n = x_{in}\} = \\ &= P\{\xi_1 = x_{i1}\} \cdot P\{\xi_2 = x_{i2}\} \cdots P\{\xi_n = x_{in}\} = p_{i1} \cdot p_{i2} \cdots p_{in}. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, в каждой точке $z=(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ нужно вычислить значение функции $\eta=f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ и вероятность $p_{i1} \cdot p_{i2} \cdots p_{in}$. Число точек пространства Z равно m^n , т.е. может быть очень велико, что и требует применения вычислительной машины.

Среди m^n значений функции f могут встречаться равные; обозначим через y_1, y_2, \dots, y_l – все различные значения этой функции ($y_i < y_{i+1}$). Чтобы найти закон распределения случайной величины η , надо найти $P\{\eta=y_j\}$, $j=1, l$. Эти вероятности определяются по формуле

$$P\{\eta=y_j\} = \sum_{i \in M(y_j)} p_{i1} \cdot p_{i2} \cdots p_{in}, \quad (3)$$

где $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, $M(y_j) = \{i : f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) = y_j\}$,

т.е. $M(y_j)$ – это подмножество индексов i_1, i_2, \dots, i_n таких, что в точках $z=(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ функция f принимает одно и тоже значение y_j . Таким образом, для нахождения распределения функции $\eta=f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ необходимо вычислить в каждой точке пространства Z значение f , найти по формуле (2) вероятности значений; затем найти точки, в которых функция f принимает одинаковые значения и по формуле (3) вычислить вероятность этих значений. Если проводить вычисления непосредственно по этой схеме, то потребуется $2m^n$ ячеек памяти для хранения значений функции и соответствующих вероятностей, для определения одинаковых значений f придется сортировать массив из m^n чисел. Приведем более эффективный алгоритм вычисления закона распределения функции от дискретных случайных величин.

Алгоритм. Имеется массив чисел $M1$, в котором находятся значения функции f , и массив $P1$, в котором хранятся соответствующие значения вероятностей.

Все шаги алгоритма повторяются в цикле m^n . Рассмотрим ситуацию после k циклов. В массиве $M1$ находятся в возрастающем порядке все различные значения функции f в точках, вычисленных на первых k циклах. В массиве $P1$ находятся соответствующие вероятности этих значений.

Шаг 1. Формируется очередная точка пространства Z . Вычисляется значение y' функции f в этой точке. По формуле (2) вычисляется вероятность этого значения.

Шаг 2. Методом бинарного поиска [2, с. 484] в массиве $M1$ находится элемент $M1(S)$, равный y' . Если такой элемент существует, то в массиве $P1$ к вероятности, хранящейся в $P1(S)$, прибавляется значение y' функции f , переход к шагу 1. Если элемента, равного y' , не существует, то находят два элемента, такие, что $M1(S) < y' < M1(S+1)$, тогда все элементы массива $M1$ и массива $P1$, начиная с $S+1$ элемента, смещаются на один вниз. На место элемента $M1(S+1)$ помещается значение y' , а на место элемента $P1(S+1)$ – вероятность этого значения. Переход к шагу 1.

После выполнения m циклов в массиве $M1$ в возрастающем порядке будут сформированы все различные значения случайной величины η , а в массиве $P1$ соответствующие вероятности.

В этом алгоритме длина массива $M1$ для хранения значений случайной величины η равна только числу её различных значений и эффективно находятся одинаковые значения функции от случайных величин.

По этому алгоритму составлена стандартная программа на языке ФОРТРАН, которая вычисляет распределение для любой функции $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и для заданного закона распределения случайных величин ξ_j . Приведем пример применения этой программы. Функция от случайных величин имеет следующий вид:

$$\eta = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \dots + \xi_7.$$

Распределение ξ_i взято в виде

| ξ_i | 0 | 1 | 2 |
|---------|-----|-----|-----|
| P | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

Получено следующее распределение случайной величины:

| η | P |
|--------|-------------------|
| -6.00 | 0.000200000000000 |
| -5.00 | 0.001560000000000 |
| -4.00 | 0.007316000000000 |
| -3.00 | 0.023227200000000 |
| -2.00 | 0.055958100000000 |
| -1.00 | 0.104483699999999 |
| 0.00 | 0.156233500000000 |
| 1.00 | 0.186868499999999 |
| 2.00 | 0.180721300000000 |
| 3.00 | 0.139221899999999 |
| 4.00 | 0.085485300000000 |
| 5.00 | 0.040369500000000 |
| 6.00 | 0.014405000000000 |
| 7.00 | 0.003450000000000 |
| 8.00 | 0.000500000000000 |

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961.
2. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. В 3 т. Т.3. Сортировка и поиск. М.: Мир, 1978.

В. Н. Михайлов, А. В. Харламов

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим в плоскости прямоугольной системы координат x, y , в общем случае, многосвязную область D , границы которой состоят из гладких участков L_1, L_2, \dots, L_M , представимых уравнениями в параметрическом виде

$$x = x_k(\sigma), y = y_k(\sigma), d_{k-1} \leq \sigma \leq d_k, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

В области D задана функция $z(x, y)$, которую приближенно можно представить в виде

$$z = \theta_0 q_0(x, y) + \theta_1 q_1(x, y) + \dots + \theta_m q_m(x, y), \quad (2)$$

коэффициенты $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$ не известны.

В точках (x_i, y_i) , $i = \overline{1, N}$ известны значения \tilde{z}_i функции $z(x, y)$, определенные со случайной погрешностью ε_i , т.е. $\tilde{z}_i = z(x_i, y_i) + \varepsilon_i$. По этим данным необходимо оценить коэффициенты $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$. Если зависимость (2) точная, то эти коэффициенты можно определить методом наименьших квадратов. В рассматриваемом случае приближенной зависимости оценки метода наименьших квадратов будут смещенными. Если функции q_0, q_1, \dots, q_m – ортонормированные, то с помощью несмешенного планирования [1] можно найти методом наименьших квадратов несмешенные оценки коэффициентов (2). Поэтому возникает задача построения систем ортонормированных в области D функций, которая для сложных областей не является тривиальной. Рассмотрим эту задачу.

Пусть C – множество действительных функций $g(x, y)$. Введем в C скалярное произведение

$$(f, g) = \iint_D p(x, y) f(x, y) g(x, y) dx dy, \quad (3)$$

где $p(x, y) \in C$, и $p(x, y) > 0$ в области D .

Для определения скалярного произведения необходимо вычислять интеграл по области D , что для сложных областей можно осуществить, используя следующую формулу [2, 3]:

$$(f, g) = - \sum_{k=1}^N \int_{d_{k-1}}^{d_k} \left(\int_{y_0}^{y_k(\sigma)} p(x_k(\sigma), y) f(x_k(\sigma), y) g(x_k(\sigma), y) dy \right) x'_k(\sigma) d\sigma. \quad (4)$$

Интеграл по области представлен, как сумма двукратных интегралов с известными пределами интегрирования, которые могут быть вычислены путем повторного применения известных формул численного интегрирования однократных интегралов.

Рассмотрим в C последовательность линейно независимых функций

$$f_0(x, y), f_1(x, y), \dots, f_n(x, y), \dots \quad (5)$$

Методом ортогонализации из (2) можно построить систему ортонормированных функций

$$q_n(x, y) = \sum_{k=0}^n a_{nk} f_k(x, y), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где $a_{nn} = \frac{1}{\beta_{nn}}$, $a_{nk} = -\frac{1}{\beta_{nn}} \sum_{j=k}^{n-1} \beta_{nj} a_{jk}$, $k = \overline{0, n-1}$, и коэффициенты β_{nk} находятся из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \beta_{nk} &= \frac{1}{\beta_{kk}} ((f_n, f_k) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ki} \beta_{ni}), \quad k = \overline{0, n-1}. \\ \beta_{nn} &= \sqrt{(f_n, f_n) - \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni}^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \beta_{00} = \sqrt{(f_0, f_0)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Возьмем в качестве системы (5) систему степенных функций $1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, \dots$ или

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= x^{\alpha_n} y^{\beta_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ p_n &= \left[\frac{\sqrt{1+8n}-1}{2} \right], \quad \beta_n = n - \frac{p_n(p_n+1)}{2}, \quad \alpha_n = p_n - \beta_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Для этих функций скалярные произведения (4) имеют вид

$$(f_i, f_j) = - \sum_{k=1}^M \int_{d_{k-1}}^{d_k} \left(\int_{y_0}^{y_k(\sigma)} x_k^{\alpha_i + \alpha_j}(\sigma) y^{\beta_i + \beta_j} dy \right) x'_k(\sigma) d\sigma.$$

Внутренний интеграл по y вычисляется, в результате получаем

$$(f_i, f_j) = - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\beta_i + \beta_j + 1} \int_{d_{k-1}}^{d_k} (x_k^{\alpha_i + \alpha_j}(\sigma) y_k^{\beta_i + \beta_j + 1}(\sigma)) x'_k(\sigma) d\sigma.$$

Следовательно, для степенных функций скалярные произведения являются одномерным интегралом.

Приведем пример расчета. Область D ограничена эллипсом с центром в начале координат и полуоси $a = 1.2$, $b = 0.8$ и кругом радиуса $r = 0.5$. Система линейно независимых функций имеет вид (8). Приведем несколько элементов построенной ортонормированной системы функций q_0, q_1, \dots

$$q_0 = 0.66867,$$

$$q_1 = 0.00052 + 0.97998x,$$

$$q_2 = -0.00002 + 1.51888y,$$

$$q_3 = -0.85691 + 0.00374x - 0.00004y + 1.84055x^2,$$

$$q_4 = -0.00004 - 0.00006x + 0.00010x^2 + 2.96478xy,$$

$$q_5 = -1.70626 + 0.00196x + 0.0004y + 1.52973x^2 + 0.00009xy + 5.12905y^2,$$

$$q_6 = 0.00073 - 2.1353x + 0.00006y + 0.0061x^2 - 0.0001xy - 0.0068y^2 + 2.8506x^3.$$

Пусть система функций в (2) – ортонормированная, тогда коэффициенты θ_j можно выразить через функции $z(x, y)$, $q_j(x, y)$ по формуле

$$\theta_j = (z, q_j) = \iint_D z(x, y) q_j(x, y) dx dy. \quad (9)$$

Предположим, что точки (x_i, y_i) , $i = \overline{1, N}$, проведения эксперимента расположены в узлах квадратурной формулы, которая имеет вид

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N c_i f(x_i, y_i), \quad c_i > 0, \quad \sum_{i=1}^N c_i = \iint_D dx dy = S. \quad (10)$$

Пусть эта формула будет точной для степенных функций (8) до $n = n_1$. Возьмем в качестве оценки $\hat{\theta}_j$ коэффициента θ_j формулу, следующую из (9) и (10):

$$\hat{\theta}_j = \sum_{i=1}^N c_i q_j(x_i, y_i) \tilde{z}_i. \quad (11)$$

Будем считать, что ортонормированная система функций q_0, q_1, \dots получена из системы степенных функций (8). Свойства оценки (11) определяются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. Если ε_j – независимые случайные величины, $M\varepsilon_i = 0$, $D\varepsilon_i = \sigma^2$ и $\alpha_j + \beta_j < \alpha_m + \beta_m < \alpha_{n_1} + \beta_{n_1}$, то $\hat{\theta}_j$ является несмешенной и состоятельной оценкой коэффициента θ_j и ее дисперсия $D\hat{\theta}_j$ имеет вид

$$D\hat{\theta}_j = \sigma^2 \sum_{i=1}^N c_i^2 q_j^2(x_i, y_i).$$

Доказательство. Так как $M\varepsilon_i = 0$, то $M\tilde{z}_i = z_i$, где z_i – истинное значение функции $z(x, y)$ в точке (x_i, y_i) , поэтому, используя (11), (10) и (9), получаем

$$M\hat{\theta}_j = \sum_{i=1}^N c_i q_j(x_i, y_i) M\tilde{z}_i = \sum_{i=1}^N c_i q_j(x_i, y_i) z(x_i, y_i) = \iint_D z(x, y) q_j(x, y) dx dy = \theta_j$$

т.е. оценка $\hat{\theta}_j$ является несмешенной.

Так как \tilde{y}_i , $i = \overline{1, N}$ – независимые случайные величины, то из (11) следует формула для дисперсии оценки $\hat{\theta}_j$:

$$D\hat{\theta}_j = \sum_{i=1}^N c_i^2 q_j^2(x_i, y_i) D\tilde{z}_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^N c_i^2 q_j^2(x_i, y_i).$$

Пусть $c = \max_{1 \leq i \leq N} c_i$, тогда, учитывая (10) и ортонормированность функций q_0, q_1, \dots , будем иметь

$$\sum_{i=1}^N c_i^2 q_j^2(x_i, y_i) \leq c \sum_{i=1}^N c_i q_j^2(x_i, y_i) = c \iint_D q_j^2(x, y) dx dy = c,$$

поэтому $D\hat{\theta}_j \leq \sigma^2 c$. Но $c \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, следовательно, оценка $\hat{\theta}_j$ является состоятельной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермаков С. М., Жигляевский А. А. Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987.
2. Федик И. И., Михайлов В. Н., Кожуховский В. И. Формализация вариационного метода решения некоторых краевых задач в сложных двумерных областях // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 10. С. 51 – 54.
3. Михайлов В. Н. Автоматизация вычисления интегралов по плоским областям на ЭВМ // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 109 – 112.

УДК 519.2, 681.3

В. В. Мозжилкин

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИМОНОВИЧА РЫНКА ТРУДА

Целью данной статьи является математический анализ модели рынка труда, предложенной Симоновичем [1]. Эта модель представляет собой нелинейную систему двух разностных уравнений, определяющих зависимость от времени функций $L(t)$ и $I(t)$, характеризующих соответственно действительное число сделок на рынке труда и разницу между предложением товаров и числом реально совершенных сделок на рынке товаров.

Введем следующие функции:

$L^D(t)$ – функция спроса на единицу труда за время t ;

$L^S(t)$ – функция предложения труда за время t ;

$L(t)$ – функция, характеризующая действительное число сделок на рынке труда;

$Y^D(t)$ – функция спроса на рынке товаров за время t ;

$Y^S(t)$ – функция предложения на рынке товаров за время t ;

$Y(t)$ – функция, характеризующая действительное число сделок на рынке товаров;

$I(t)$ – разница между предложением товаров и числом реально совершенных сделок на рынке товаров за время t :

$$I(t) = Y^S(t) - Y(t).$$

Следует заметить, что $I(t) \geq 0$ при $t \geq 0$.

Симонович [1] при построении модели сделал следующие предположения:

A1. Объем рынка труда не изменяется, то есть

$$L^S(t) = d \text{ для некоторых } d > 0.$$

A2. На рынке труда предлагается рабочая сила только для производства продукции, и производственная функция линейна. Следовательно, совокупный объем рынка товаров равен разнице между предложением товаров и числом совершенных сделок за время $(t-1)$:

$$Y^S(t) = I(t-1) + \delta L(t) \text{ для некоторых } \delta > 0.$$

A3. Спрос на товары представляет собой линейную функцию труда:

$$Y^D(t) = a + bL(t), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

При $\delta > 0$ производство будет рентабельным.

A4. Оптимальный уровень запасов $L_{opt}(t)$ за время t пропорционален ожидаемому спросу на товары за время t :

$$L_{opt}(t) = \beta E\{Y^D(t)\}, \quad \beta \geq 0.$$

A5. Вероятность спроса на товары фирмы равна

$$E[Y^D(t)] = a + bL(t-1).$$

A6. Продукция минус спрос при полной занятости есть положительная величина: $(\delta - b)d - a > 0$.

Введём разделительные линии $V_1 = 0$; $V_2 = 0$, где

$$\begin{aligned} V_1 &= I(t) - (\beta + 1)a - b(\beta + 1)L(t); \\ V_2 &= I(t) - (\beta + 1)a - b(\beta + 1)L(t) - (\beta + 1)a + \delta d. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда динамическая система Симоновича может быть записана в виде

$$L(t+1) = \begin{cases} 0, & \text{если } V_1 > 0; \\ [(\beta + 1)\{a + bL(t)\} - I(t)]/\delta, & \text{если } V_1 \leq 0, V_2 \geq 0; \\ d, & \text{если } V_2 \leq 0. \end{cases} \tag{2}$$

$$I(t+1) = \begin{cases} I(t) - a, & \text{если } L(t+1) = 0; \\ \max(0, [b(\beta + 1)((\delta - b)L(t) - a) + bI(t) + a\beta\delta]/\delta), & \text{если } L(t+1) < d; \\ I(t) + (\delta\delta - b)d, & \text{если } L(t+1) = d. \end{cases}$$

Симонович [1] предположил, что для

$$b(\beta + 1)/\delta > 1 \tag{3}$$

поведение системы (2) носит неупорядоченный хаотический характер. В работе [2] построен частный пример, показывающий, что при конкретном наборе значений параметров, гарантирующих по предположению Симоновича хаотическое поведение модели Симоновича, наблюдается на самом деле периодический процесс.

В данной статье приведены результаты полного математического анализа модели Симоновича методами исследования динамических систем [3]. Можно показать, что модель имеет особую точку, которая может быть неустойчивым узлом, неустойчивым неправильным узлом или неустойчивым фокусом. Но вследствие наличия в модели особых решений описываемый ею процесс остается циклическим при всевозможных значениях параметров, соответствующих рентабельному производству. Хаос отсутствует.

Решение в области $V_1 \geq 0, V_2 \geq 0$ имеет следующую структуру. Если начальные условия лежат в этой области, то на следующем шаге по времени точка $P = (L, I)$ попадает на ось $L = 0$. Затем она движется по этой оси в направлении $I = 0$ до тех пор, пока время $t \leq t^* = \text{int}(I_0 - (\beta+1)/a)$. Затем точка P движется по траектории, определяемой системой (1) для случая $V_1 \leq 0, V_2 \geq 0$.

Очевидно, что может быть лишь конечный участок траектории на плоскости (L, I) , удовлетворяющий условию $V_1 \geq 0, V_2 \geq 0$.

Решение в области $V_1 \geq 0, V_2 \geq 0$ имеет следующую структуру. Если начальные значения соответствуют рассматриваемому в данном пункте условию, то на следующем шаге по времени точка $P = (L, I)$ попадает на прямую $L = d$. Затем она движется по этой прямой в направлении возрастания I до тех пор, пока время

$$t \leq t^* = \text{int}(\{(\beta+1)(a + bd) - \delta a\} / \{(\delta - b)d - a\}).$$

Затем точка P движется по траектории, определяемой системой (1) для случая $V_1 \geq 0, V_2 \geq 0$. Может быть лишь конечный участок траектории на плоскости (L, I) находящийся в данной области.

Решение в области $V_1 \leq 0, V_2 \geq 0$ характеризуется тем, что особая точка системы (2) является неустойчивым узлом. По предположению Симоновича здесь имеет место хаотическое поведение динамической системы. Легко показать, что, так как особая точка является неустойчивым узлом, решение системы разностных уравнений (2), отражаясь от тривиальных решений, выйдет сверху или снизу от полосы, образованной прямыми $V_1 = 0, V_2 = 0$. Тогда в силу установленных выше свойств решение по прямым $L = 0$ или $L = d$ соответственно вернётся в полосу и за конечное число шагов вновь выйдет за её границы, и поэтому процесс имеет циклический характер.

Таким образом, доказано, что описываемая моделью Симоновича зависимость между разностью предложения товаров и числом реально совершенных сделок на рынке товаров от действительного числа сделок на рынке труда носит циклический характер при всех возможных значениях параметров и условии рентабельности.

При выполнении условия $b(\beta+1)/\delta > 1$, предполагаемого Симоновичем, хаотического поведения модели не отмечается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Simonowits A. Buffer stocks and naive expectation in non-Walrasian dynamic macromodel: stability, cyclicity and chaos // Scandinavian Journal of Economics. 1982. Vol. 84. P. 571–81.
2. Hommes C. H., Nusse H. E. Does unstable equilibrium imply chaos? // Scandinavian Journal of Economics. 1989. Vol. 92. P. 365–71.
3. Pierre N. V. Tu Dynamical Systems. An Introduction with Application in Economics and Biology. London: Springer-Verlag, 1994.

УДК 517.51.518

И. Д. Молоденкова

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ, ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

Данная статья является обобщением метода построения осредняющих операторов, сохраняющих заданные классы функций, изложенного в [1, 2], а именно, описан метод решения задачи построения операторов, удовлетворяющих соотношениям

$$\int_a^b k(x, t) t^{m_q} e^{z_q t} dt = (x^{m_q} e^{z_q x})^{(r)}, \quad q = \overline{1, n}, \quad r \geq 0, \quad (1)$$

где m_q – целые неотрицательные, z_q – комплексные числа, и на основании этого построено семейство операторов A_H , зависящих от параметра, удовлетворяющих соотношению

$$A_H \sigma(x) = \sigma'(x), \quad (2)$$

где $\sigma(x)$ – тригонометрический сплайн, введенный П.-Ж. Лораном [3].

1. Сначала решается задача построения операторов, удовлетворяющих соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-x) t^{m_q} e^{z_q t} dt = (x^{m_q} e^{z_q x})^{(r)}, \quad q = \overline{1, n}, \quad r \geq 0, \quad (3)$$

что позволяет перейти потом к задаче (1).

Используя идеи [1, 2], доказана лемма, следствие из неё и теорема, осуществляющая переход к задаче (1) (аналог теоремы 3.4 из [2]).

ЛЕММА. Для того чтобы выполнялось соотношение

$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-x) t^s e^{zt} dt = (x^s e^{zx})^{(r)}$, $r \geq 0$, где $k(t)$ – финитная на вещественной оси R функция, $k(t) \in L_2(R)$, необходимо и достаточно, чтобы преобразование Фурье $\hat{k}(\zeta)$ функции $k(t)$ удовлетворяло условиям

$$\hat{k}^{(l)}(-iz) = \frac{r!}{(r-l)!} (i)^l z^{r-l}, \quad l = \overline{0, r}, \quad \hat{k}^{(l)}(-iz) = 0, \quad l = \overline{r+1, s}, \quad r < s. \quad (4)$$

Следствие. Для того чтобы выполнялись соотношения (3), необходимо и достаточно, чтобы функция $\hat{k}(\zeta) - (i\zeta)^r$ в точках $-iz_1, \dots, -iz_n$ комплексной плоскости имела корни кратности $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_n + 1$.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы соотношения (3) имели место на множестве $X \in R$ для финитных по t ядер $k(x, t)$, зависящих от x как от параметра, и таких, что $k(x, t+x) = k_x(t)$, $k_x(t) \in L_2(R)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\hat{k}_x(\xi) - (i\xi)^r$ ($\hat{k}_x(\xi)$ – преобразование Фурье функции $k_x(t)$) имела в точках $-iz_1, \dots, -iz_n$ комплексной плоскости корни кратности $m_1 + 1, \dots, m_n + 1$.

Если в качестве X брать отрезок $[a, b] \in R$, для которого определено множество M функций $k(x, t)$ таких, что $k(x, t) = 0$, $t \notin [a, b]$, то соотношение (3) переходит в (1). В этом случае $k(x, t)$ представляется в виде

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(x) \varphi_i(x, t), \text{ где } \varphi_i(x, t) \text{ – финитные по } t \text{ функции, зависящие}$$

от x как от параметра, и такие, что $\varphi_i(x, t+x) = \varphi_{ix}(t)$, $\varphi_{ix}(t) \in L_2(R)$.

Функции $\varphi_i(x, t)$ определяются сдвигом функции $\varphi_i(t) = \begin{cases} 1/H, & 0 \leq t \leq H \\ 0, & t \notin [0, H] \end{cases}$

следующим образом: $\varphi_i(x, t) = \varphi(t - (i-1)H - y(x))$, где $y(x)$ – некоторая вещественная функция $\in X$ [2], $a_i(x)$ находятся из системы (4) (с учётом следствия и выбора $k(x, t)$). Система (4) имеет единственное решение, если $\hat{\Phi}_{ix}(\xi)$ (преобразования Фурье $\varphi_{ix}(t)$) образуют систему Чебышева на множестве Ω комплексной плоскости, содержащем $-iz_1, \dots, -iz_n$ [2, теорема 3.2].

2. Пользуясь изложенным методом, построен оператор с непрерывным по x и кусочно-постоянным по t ядром $k(x, t) \in M$, удовлетворяющий соотношению (2).

Пусть задано равномерное разбиение отрезка $[-\pi, \pi]$:

$$-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = \pi, \quad x_i = x_0 + iH, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad H = \frac{2\pi}{n+1}.$$

Согласно определению элемента $\sigma(x)$ (см. [3]), $k(x, t)$ будем искать в виде

$$k(x, t) = \begin{cases} k_0(x, t), & x \in [-\pi, x_1 - \frac{\delta_1}{2}] \\ k_l(x, t), & x \in [x_l + \frac{\delta_1}{2}, x_{l+1} - \frac{\delta_1}{2}], \quad l = \overline{1, n-1}, \quad \delta_1 = \frac{H}{7} \\ k_q(x, t), & x \in \Omega(x_q): \quad x_q - \frac{\delta_1}{2} \leq x \leq x_q + \frac{\delta_1}{2}, \quad q = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (5)$$

где $k_0(x,t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x) \varphi_i(x,t)$, функции $\varphi_i(x,t)$ определяются следующим

$$\text{образом: } \varphi_i(x,t) = \begin{cases} \varphi(t - (i-1)h + \pi), & x \in [-\pi, x_1 - \frac{\delta_1}{2}] \\ \varphi(t - (i-1)h - x_n - \frac{\delta_1}{2}), & x \in [x_n + \frac{\delta_1}{2}, \pi] \end{cases} h = \frac{13}{42} H;$$

$$k_l(x,t) = \sum_{i=1}^5 \alpha_i(x) \varphi_i(x,t), \quad \varphi_i(x,t) = \varphi(t - (i-1)h - x_l - \frac{\delta_1}{2}), \quad l = \overline{1, n-1}, \quad h = \frac{6H}{35};$$

$$k_q(x,t) = \sum_{i=1}^7 \alpha_i(x) \varphi_i(x,t), \quad \varphi_i(x,t) = \varphi(t - (i-1)h - x_q + \frac{\delta_1}{2}), \quad q = \overline{1, n}, \quad h = \frac{H}{49};$$

$\alpha_i(x)$ определяется из систем

$$A\alpha(x) = F(x), \quad (6)$$

$$\text{где } \alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_s(x))^T, \quad F(x) = (F_1(x), \dots, F_s(x))^T,$$

$$A - \text{матрица с элементами } a_{gj} = \frac{1}{h} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f_g(t) dt, \quad g, j = \overline{1, s}, \quad a_j = d + jh,$$

$$s = 3, \quad d = \begin{cases} -\pi, & x \in [-\pi, x_1 - \frac{\delta_1}{2}] \\ x_n + \frac{\delta_1}{2}, & x \in [x_n + \frac{\delta_1}{2}, \pi] \end{cases} h = \frac{13H}{42}, \quad f_g(x), g = \overline{1, 3} \text{ равны:}$$

$1, \sin x, \cos x, F_j(x), \quad j = \overline{1, 3}$ соответственно: $0, \cos x, -\sin x$;

$$s = 5, \quad d = x_l + \frac{\delta_1}{2}, \quad h = \frac{6H}{35}, \quad \text{если } x \in [x_l + \frac{\delta_1}{2}, x_{l+1} - \frac{\delta_1}{2}], \quad l = \overline{1, n-1}, \quad f_g(x),$$

$g = \overline{1, 5}$ принимают значения: $1, \sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x, F_j(x), \quad j = \overline{1, 5}$

соответственно равны: $0, \cos x, -\sin x, \sin x + x \cos x, \cos x - x \sin x$;

$$s = 7, \quad d = x_q - \frac{\delta_1}{2}, \quad h = \frac{H}{49}, \quad \text{если } x \in \Omega(x_q), \quad q = \overline{1, n}, \quad f_g(x), g = \overline{1, 7} \text{ равны:}$$

$1, \sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x, x_+ \sin x, x_+ \cos x, F_j(x), \quad j = \overline{1, 7}$ соответственно равны: $0, \cos x, -\sin x, \sin x + x \cos x, \cos x - x \sin x$,

$$\Theta_1(x) \sin x + x_+ \cos x, \quad \Theta_1(x) \cos x - x_+ \sin x, \quad \Theta_1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq x_q; \\ 0, & x < x_q; \end{cases}$$

$x_+ = x \Theta_1(x)$. Системы (6) однозначно разрешимы, так как для каждого из рассматриваемых в (5) отрезков преобразования Фурье функций $\varphi_i(x,t)$ образуют системы Чебышева. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Оператор $A_H \sigma = \int_{-\pi}^{\pi} k(x, t) \sigma(t) dt$ с ядром (5) удовлетворяет соотношению (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Василенко В. А., Зюзин М. В., Ковалков А. В. Сплайн-функции и цифровые фильтры. Новосибирск: Наука, 1984.
3. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.

УДК 519.4

В. А. Молчанов

О МАТРИЧНЫХ ПОЛУГРУППАХ НАД ПОЛУКОЛЬЦАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К ТЕОРИИ ФОРМАЛЬНЫХ ЯЗЫКОВ*

Пусть A – конечное множество, $W_{fin}(A)$ – полугруппа слов над алфавитом A , A^N – множество всех бесконечных вправо слов, A^{-N} – множество всех бесконечных влево слов, A^Z – множество всех бесконечных в обе стороны слов и $W(A) = W_{fin}(A) \cup A^N \cup A^{-N} \cup A^Z$ – множество всех слов над алфавитом A . Подмножества $W(A)$ называются языками (произвольных слов) над алфавитом A .

Пусть $A = (Q, A, v, I, F)$ – конечный (недетерминированный) автомат, где Q – конечное множество состояний автомата, A – конечный алфавит, $v: a \mapsto v(a)$ ($a \in A$) – отображение A в полугруппу $B(Q)$ бинарных отношений на множестве Q , I и F – соответственно множества начальных и финальных состояний автомата. Отображение $v: A \rightarrow B(Q)$ канонически расширяется до гомоморфизма $v: W_{fin}(A) \rightarrow B(Q)$ полугруппы слов $W_{fin}(A)$ на полугруппу переходов $S(A) = v(W_{fin}(A))$ автомата A .

Как показано в работе [1], такой гомоморфизм v канонически расширяется до отображения $v: W(A) \rightarrow B(Q)$, что позволяет определить распознаваемый автоматом A язык $L(A)$ по следующей формуле:

$$L(A) = \{x \in W(A) : v(x)(I \times F) \neq \emptyset\}.$$

Главный результат работы [1] показывает, что класс распознаваемых автоматами языков совпадает с классом так называемых обобщенно рациональных языков, которые определяются рациональными выражениями с помощью четырех специальных операций (конечное объединение, конечное произведение, тернарное произведение и степень).

С другой стороны, в работе [2] введено понятие языка произвольных слов $L \subset W(A)$, распознаваемого конечной полугруппой. Как известно из теории формальных языков конечных слов (см., например, [3]), распознаваемость языка $L \subset W_{fin}(A)$ конечным автоматом равносильна распознаваемости L полугруппой переходов этого автомата. Однако простые

* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

примеры показывают, что этот результат не переносится на языки произвольных слов с помощью аппарата полугрупп бинарных отношений.

С целью доказательства распознаваемости конечными полугруппами обобщенно рациональных языков в настоящей работе продолжается разработка специальной техники теории матричных полугрупп над конечными полукольцами, начатая в [4].

Пусть Q – конечное множество и K – конечное полукольцо с нулем 0 и единицей 1. Отображения вида $\mu: Q \times Q \rightarrow K$ можно рассматривать как квадратные матрицы размерности $|Q|$ с элементами $\mu_{p,q} = \mu(p, q)$ из полукольца K (здесь $p, q \in Q$). Множество всех таких матриц с операцией умножения образует полугруппу, которая обозначается символом $M_Q(K)$. Подполугруппы полугруппы $M_Q(K)$ называются матричными полугруппами над полукольцом K . В частности, если K – булево кольцо $B = \{0, 1\}$, то отображения вида $\mu: Q \times Q \rightarrow K$ можно рассматривать, с одной стороны, как квадратные матрицы размерности $|Q|$ с элементами $\mu_{p,q} = \mu(p, q)$ ($p, q \in Q$) из кольца B , а с другой стороны, как характеристические функции бинарных отношений на множестве Q . Поэтому полугруппу матриц $M_Q(B)$ можно отождествить с полугруппой $B(Q)$ бинарных отношений на множестве Q .

Каждое отображение φ множества Q в $K \setminus \{0\}$ канонически определяет гомоморфизм $\varphi: M_Q(B) \rightarrow M_Q(K)$ по формуле:

$$\varphi(\mu)_{p,q} = \varphi(p) \mu_{p,q} \varphi(q) \quad (\text{где } \mu \in M_Q(B) \text{ и } p, q \in Q).$$

Пусть $A = (Q, A, v, I, F)$ – конечный автомат и φ – отображение множества Q в $K \setminus \{0\}$, которое будем называть раскраской (точнее K -раскраской) этого автомата. Тогда композиция $v_\varphi = \varphi \circ v$ отображает множество A в полугруппу $M_Q(K)$ по формуле: $v_\varphi(a) = \varphi(v(a))$ (где $a \in A$). Алгебраическую систему $A_\varphi = (Q, A, v_\varphi, I, F)$ назовем раскрашенным автоматом. Ясно, что в этом случае отображение $v_\varphi: A \rightarrow M_Q(K)$ также канонически расширяется до гомоморфизма $v_\varphi: W_{fin}(A) \rightarrow M_Q(K)$ и отображения $v_\varphi: W(A) \rightarrow M_Q(K)$, что позволяет определить распознаваемый автоматом A_φ язык $L(A_\varphi)$ по следующей формуле:

$$L(A_\varphi) = \{x \in W(A) : v_\varphi(x)(I \times F) \neq \{0\}\}.$$

В работе [4] рассмотрен важный для нашей теории пример полукольца – полукольцо $F(L)$ над полурешеткой L . Для доказательства основного результата настоящей статьи приведем несколько интересных свойств таких полукольец над полурешетками. По построению полукольцо состоит из всех полуидеалов упорядоченного множества L и упорядочено отношением теоретико-множественного включения. Элемент x упорядоченного кольца $F(L)$ назовем *sum-неразложимым* (соответственно *prod-неразложимым*), если для любых $y, z \in F(L)$ выполняется условие

$$x \leq y + z \Rightarrow x \leq y \vee x \leq z \quad (\text{соответственно } x \leq y \times z \Rightarrow x \leq y \vee x \leq z).$$

ЛЕММА 1. Пусть $L = (L, \vee, 0_L)$ – верхняя полурешетка с нейтральным элементом 0_L и $F(L)$ – полукольцо над L . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) полукольцо $F(L)$ не имеет делителей нуля, т.е. для любых $x, y \in F(L)$ условие $xy = 0$ влечет, что либо $x = 0$, либо $y = 0$;
- 2) $1 \leq x$ для любого ненулевого элемента $x \in F(L)$;
- 3) $x + y \leq xy$ для любых ненулевых элементов $x, y \in F(L)$;
- 4) любой *pro*-неразложимый элемент полукольца $F(L)$ является *sum*-неразложимым;
- 5) отображение $\tau : F(L) \rightarrow \mathbf{B}$, определяемое по формуле: $\tau(0) = 0$ и $\tau(x) = 1$ для ненулевых $x \in F(L)$, является ретрактом полукольца $F(L)$ на кольцо \mathbf{B} .

Доказательство. Для любых $x, y \in F(L)$ в силу [4, теорема 1] условия $xy = 0$, $x \neq 0$ влечут $y = xy + y = xy = 0$. Если элемент $x \in F(L)$ удовлетворяет $x \neq 0$, то в силу [4, теорема 1] $1+x \cdot 1 = x \cdot 1 = x$ и $1 \leq x$. Если элементы $x, y \in F(L)$ удовлетворяют $x, y \neq 0$, то в силу [4, теорема 1] $(x+y)+xy = x+(y+xy) = x+xy = xy$ и $x+y \leq xy$. Пусть $x \neq 0$ является *pro*-неразложимым элементом полукольца $F(L)$ и $x \leq y+z$ для некоторых ненулевых элементов $y, z \in F(L)$. Тогда в силу [4, теорема 1]

$$x + yz \leq (y + z) + yz = y + (z + yz) = y + yz = yz, \text{ т.е. } x \leq yz.$$

Тогда либо $x \leq y$, либо $x \leq z$, т.е. x является *sum*-неразложимым элементом полукольца $F(L)$. Из 1) следует, что определённое в 5) отображение $\tau : F(L) \rightarrow \mathbf{B}$ является ретрактом полукольца $F(L)$ на булево кольцо \mathbf{B} .

ЛЕММА 2. Пусть L – конечная верхняя полурешетка с нейтральным элементом и $F(L)$ – полукольцо над L . Тогда для любого ненулевого элемента $x \in F(L)$ эквивалентны следующие утверждения:

- 1) x является *sum*-неразложимым;
- 2) x удовлетворяет равенству $x^2 = x$;
- 3) $x = a^\Delta$ для некоторого элемента $a \in L$ (где $a^\Delta = \{l \in L : l \leq a\}$).

Отсюда следует также, что произведение *sum*-неразложимых элементов полукольца $F(L)$ будет *sum*-неразложимым.

Доказательство. Если x является ненулевым *sum*-неразложимым элементом полукольца $F(L)$, то равенство $x = \Sigma\{a^\Delta : a \in x\}$ влечет $x \leq a^\Delta$ для некоторого элемента $a \in x$. Отсюда следует, что $x = a^\Delta$. С другой стороны, если $x = a^\Delta$ для некоторого элемента $a \in L$ и элементы $x, y \in F(L)$ удовлетворяют $x \leq y+z$, то $a \in y \cup z$. Следовательно, либо $a \in y$ и $x \subset y$, либо $a \in z$ и $x \subset z$.

Пусть теперь ненулевой элемент $x \in F(L)$ удовлетворяет равенству $x^2 = x$. Отсюда следует, что $x^n = x$ для $n = |L|$. Легко видеть, что существует такой элемент $a = \sup x$, что $a \in nx$. Так как в силу леммы 1

$nx \leq x^n = x$, то $a \in x$ и $x = a^\Delta$. Обратно, для любого $a \in L$ и $x = a^\Delta$ выполняется равенство $x^2 = x$.

Если x, y являются ненулевыми *sum*-неразложимыми элементами полукольца $F(L)$, то $x = a^\Delta$, $y = b^\Delta$ для некоторых элементов $a, b \in L$. Легко видеть, что $x y = a^\Delta b^\Delta = (a \vee b)^\Delta$. Следовательно, произведение $x y$ является *sum*-неразложимым элементом полукольца $F(L)$.

С помощью полученных лемм доказывается следующий основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = (Q, A, \nu, I, F)$ – конечный автомат, $F(L)$ – полукольцо над конечной верхней полурешеткой L и φ – некоторая $F(L)$ -раскраска автомата A . Тогда выполняется равенство $L(A) = L(A_\varphi)$.

Приведенные в статье результаты позволяют доказать распознаваемость обобщенно рациональных языков конечными полугруппами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Molchanov V.A. Nonstandard approach to general rational languages // Contributions to General Algebra 13, Proceedings of the Dresden Conference 2000 (AAA60) and the Summer School 1999, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 2001. P. 233 – 244.
2. Molchanov V.A. Nonstandard approach to algebraic theory of words on finite automata and semigroups // Summaries of talks, International Conference on geometric and combinatorial methods in groups and semigroups “ICGS2000”, Lincoln, Nebraska, USA, 2000. P. 32.
3. Perrin D., Pin J.E. Semigroups and automata on infinite words, In book: Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, 466 (1993). P. 1 – 32.
4. Молчанов В. А. О полукольцах над полурешетками и их приложениях к теории формальных языков // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Вып. 2. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 84 – 86.

УДК 517.11

Т. М. Отрыванкина

РЕШЁТКА ПСЕВДОМНОГООБРАЗИЙ КОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ*

Мы исследуем решётку всех псевдомногообразий конечных (полугрупповых) алгебраических автоматов L с помощью методов нестандартного анализа, разработанных в [1, 2].

Пусть Ω – алгебраический тип, состоящий из символов алгебраических операций конечной арности. Под *конечным алгебраическим автоматом* (сокращенно КАА) мы понимаем конечный полугрупповой алгебраический автомат без выходов, т.е. двухосновную систему $A = (\Gamma, S, \circ)$, где Γ –

* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

конечная полугруппа входных сигналов, S – конечная Ω -алгебра состояний автомата и бинарная операция $\circ: S \times \Gamma \rightarrow S$ для любого n -местного функционального символа $f \in \Omega$ и любых $s, s_1, \dots, s_n \in S, \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1) f_S(s_1, \dots, s_n) \circ \gamma = f_S(s_1 \circ \gamma, \dots, s_n \circ \gamma), \quad 2) s \circ (\gamma_1 \gamma_2) = (s \circ \gamma_1) \circ \gamma_2.$$

Для описания классов КАА вводится нестандартный язык УИП L над алфавитом, состоящим из счетных множеств X, Z . Элементы расширений $*X, *Z$ называются *нестандартными переменными языка L* . *Нестандартными термами языка L* являются элементы нестандартных расширений $*W_1$ и $*W_2$, где $W_1 = W(X)$ – полугруппа слов над X и $W_2 = W_{\Omega'}(Z) = \Omega'$ -алгебра Ω' -слов над алфавитом Z для сигнатуры $\Omega' = \Omega \cup W_1$. Формулы языка L определяются по индукции обычным путем. Интерпретация L в КАА $A = (\Gamma, S, \circ)$ определяется с помощью отображений $\theta_1: X \rightarrow \Gamma$ и $\theta_2: Z \rightarrow S$, которые канонически расширяются до гомоморфизмов $\theta_1: *W_1 \rightarrow *G, \theta_2: *W_2 \rightarrow *S$.

Класс конечных алгебраических автоматов A называется *нестандартным многообразием*, если он аксиоматизируется классом нестандартных тождеств. Можно показать, что структурная характеристика нестандартных многообразий конечных алгебраических автоматов описывается следующей модификацией известной теоремы Биркгофа.

ТЕОРЕМА 1. Класс конечных алгебраических автоматов A является нестандартным многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно формирования подсистем, конечных прямых произведений и гомоморфных образов, т.е. A является псевдомногообразием.

Переходя к описанию решётки всех псевдомногообразий конечных (полугрупповых) алгебраических автоматов, напомним, что согласно [2] бинарное отношение ε на $*A$ называется *инвариантной нестандартной конгруэнцией*, если (i) для любых $x, y \in *A$ условие $x \equiv y$ (ε) влечет существование $L \subset A$, такого, что $\varepsilon (*L) \subset *L$ и $x \in *L, y \notin *L$, (ii) оно устойчиво относительно всех внутренних трансляций и стандартных эндоморфизмов $*A$, (iii) эквивалентность ε имеет гиперконечный индекс.

Введем обозначение $INCon^*W$ для множества пар всех инвариантных нестандартных конгруэнций $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_i \subseteq *W_i \times *W_i$ ($i=1, 2$) и $W = (W_1, W_2)$. Это множество, упорядоченное по включению компонент упорядоченных пар, является полной решёткой.

Установим соответствие между псевдомногообразиями КАА и парами инвариантных нестандартных конгруэнций на $*W$.

ТЕОРЕМА 2. Упорядоченные множества L и $INCon^*W$ являются дуально изоморфными полными решётками.

Доказательство. Рассмотрим взаимно обратные отображения E и K , которые определим следующим образом:

$$E(M) = \cap \{ \varepsilon(A, \theta) : A \in M \wedge \theta = (\theta_1, \theta_2), \text{ где } \theta_1: X \rightarrow \Gamma, \theta_2: Z \rightarrow S \},$$

$K(\varepsilon) = \{A: A \cong W/\sigma \text{ для некоторой } \sigma \in ConW \text{ такой, что } \varepsilon \subset^* \sigma\}$
(здесь $M \in L$ и $\varepsilon \in INCon^*W$).

Сначала убедимся в корректном определении E . Пусть $M \in L$, т.е. M – некоторое псевдомногообразие конечных автоматов. Так как основные множества автомата $A \in M$ конечны, то отношение $E(M)$ является нестандартной конгруэнцией на $*W$. Более того, если $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \text{End}W$, автомат $A \in M$ и $\theta_1 : X \rightarrow \Gamma$, $\theta_2 : Z \rightarrow S$, то канонические гомоморфизмы $\theta_1 : W_1 \rightarrow \Gamma$, $\theta_2 : W_2 \rightarrow S$ и композиции $\xi_1 = \theta_1 \circ \varphi_1$, $\xi_2 = \theta_2 \circ \varphi_2$ удовлетворяют равенствам

$$\ker \xi_1 = \varphi_1^{-1}(\ker \theta_1), \quad \ker \xi_2 = \varphi_2^{-1}(\ker \theta_2).$$

Тогда по принципу переноса

$$\varepsilon(A, \xi) = *(\ker \xi) = *(\varphi^2(\ker \theta)) = * \varphi^2(\varepsilon(A, \theta)),$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Отсюда

$$\begin{aligned} E(M) &= \cap \{\varepsilon(A, \theta) : A \in M \wedge \theta_1 : X \rightarrow \Gamma, \theta_2 : Z \rightarrow S\} \subset \\ &\subset \cap \{\varepsilon(A, \xi) : A \in M \wedge \theta_1 : X \rightarrow \Gamma, \theta_2 : Z \rightarrow S \wedge \xi = \theta \circ \varphi\} = \\ &= \cap \{* \varphi^2(\varepsilon(A, \theta)) : A \in M \wedge \theta_1 : X \rightarrow \Gamma, \theta_2 : Z \rightarrow S\} = \\ &= * \varphi^2(\cap \{\varepsilon(A, \theta) : A \in M \wedge \theta_1 : X \rightarrow \Gamma, \theta_2 : Z \rightarrow S\}) = * \varphi^2(E(M)). \end{aligned}$$

Ясно, что $* \varphi^2(E(M)) \subset E(M)$. Следовательно, $E(M)$ – инвариантная нестандартная конгруэнция на нестандартном расширении $*W$. Таким образом, $E(M) \in INCon *W$.

Теперь мы убедимся в корректности определения K . Пусть $\varepsilon \in INCon *W$. Если $\sigma \in ConW$ и $\varepsilon \subset^* \sigma$, то σ является конгруэнцией гиперконечного индекса на $*W$ и, по принципу переноса, $\sigma \in Con_{fin}W$. Таким образом, множество $F = \{\sigma \in ConW : \varepsilon \subset^* \sigma\}$ представляет собой направленное семейство конгруэнций конечного индекса на W . Можно проверить, что $K(\varepsilon)$ является псевдомногообразием конечных автоматов. Таким образом, $K(\varepsilon) \in L$.

Наконец убедимся, что E и K – взаимно обратные отображения. Любое псевдомногообразие $M \in L$ удовлетворяет $M = K(E(M))$. Пусть теперь $\varepsilon \in INCon *W$. По определению E и K

$$E(K(\varepsilon)) = \cap \{\varepsilon(A, \theta) : A \in K(\varepsilon) \wedge \theta_1 : X \rightarrow \Gamma, \theta_2 : Z \rightarrow S\}.$$

Если $A \in K(\varepsilon)$, то, по определению $K(\varepsilon)$, найдется $\sigma \in ConW$ такая, что $\varepsilon \subset^* \sigma$ и $A \cong W/\sigma$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) : W \rightarrow A$ – канонический гомоморфизм. Рассмотрим отображения $\theta_1 : X \rightarrow \Gamma$, $\theta_2 : Z \rightarrow S$, определяющие интерпретацию языка L в A , и расширения $\theta_1 : W_1 \rightarrow \Gamma$, $\theta_2 : W_2 \rightarrow S$. Тогда существует эндоморфизм $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, такой, что $\theta_1 = \lambda_1 \circ \varphi_1$, $\theta_2 = \lambda_2 \circ \varphi_2$. Отсюда

$$\ker \theta = \varphi^2(\ker \lambda) = \varphi^2(\sigma)$$

и, по определению $\varepsilon(A, \theta)$,

$$\varepsilon(A, \theta) = {}^*(\ker\theta) = {}^*\varphi^{-1}({}^*\sigma).$$

Так как ε – инвариантная конгруэнция, мы заключаем, что

$$\varepsilon \subset {}^*\varphi^{-1}(\varepsilon) \subset {}^*\varphi^{-1}({}^*\sigma) = \varepsilon(A, \theta).$$

Следовательно, $\varepsilon \subset E(K(\varepsilon))$.

С другой стороны, пусть $t_1, t_2 \in {}^*W$ таковы, что $t_1 \equiv t_2 (\varepsilon)$. Тогда для нормальной конгруэнции ε существует $L \in T_\varepsilon$ такое, что $t_1 \in {}^*L$ и $t_2 \notin {}^*L$. Отсюда, $t_1 \equiv t_2 (*\sigma_L)$ для синтаксической конгруэнции σ_L [2] и автомат $A \cong W/\sigma_L$ принадлежит $K(\varepsilon)$, так как по [2], $\varepsilon \subset {}^*\sigma_L$. Таким образом, $(t_1, t_2) \notin E(K(\varepsilon))$. Мы заключаем, что $\varepsilon = E(K(\varepsilon))$. Ясно, что E и K являются функциями, удовлетворяющими условиям:

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow E(M_1) \supset E(M_2), \varepsilon_1 \subset \varepsilon_2 \Rightarrow K(\varepsilon_1) \supset K(\varepsilon_2).$$

На основании этого утверждаем, что L и $INCon^*W$ являются дуально изоморфными полными решётками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Molchanov V. A. Nonstandard characterization of pseudovarieties // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33. P. 533 – 547.
2. Molchanov V. A. Nonstandard congruences and lattices of pseudovarieties // Semigroups, automata and languages. (J. Almeida, Ed.) World Scientific, Singapore-New Jersey-London, 1996. P. 183 – 193.
3. Otryvankina T. M. Lattice of pseudovarieties of finite algebraic automata // Summaries of talks, International Conference “Colloquium on semigroups”. Szeged, 2000. P. 20 – 21.

УДК 519.8

М. В. Пасечник

УСЛОВИЯ НЕПУСТОТЫ C_α -ЯДРА В АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГРАХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Как известно [1], в игре n -лиц её C_α -ядро определяется как множество исходов игры, допустимых для всех коалиций. Цель данной статьи – нахождение условий непустоты C_α -ядра в антагонистических играх с упорядоченными исходами. Антагонистическая игра с упорядоченными исходами задаётся в виде

$$G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle, \quad (1)$$

где X – множество стратегий игрока 1, Y – множество стратегий игрока 2, A – множество исходов, $F: X \times Y \rightarrow A$ – функция реализации, ω – отношение порядка, характеризующее предпочтения игрока 1, предпочт-

тения игрока 2 выражаются обратным бинарным отношением ω^{-1} . Считаем, что $|X| \geq 2$, $|Y| \geq 2$. Так как в антагонистической игре имеется всего 3 коалиции: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$ и любой исход допустим для коалиции $\{1,2\}$, то в антагонистической игре исход принадлежит C_α -ядру тогда и только тогда, когда он допустим для обоих игроков. Если не накладывать никаких ограничений на компоненты игры G вида (1), ее C_α -ядро может быть пустым.

1. Достаточные условия непустоты C_α -ядра в антагонистических играх с упорядоченными исходами.

ТЕОРЕМА 1. Если в игре $G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle$ все цепи упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ конечны, то её C_α -ядро непусто.

Доказательство. Рассмотрим 2 подмножества множества исходов игры $U^*(1)$ и $U^*(2)$, которые определяются следующим образом: $U^*(1) = \{\alpha \in A : (\exists x \in X)(\forall y \in Y) F(x, y) >^\omega \alpha\}$ – множество исходов недопустимых для игрока 1; $U^*(2) = \{\alpha \in A : (\exists y \in Y)(\forall x \in X) F(x, y) <^\omega \alpha\}$ – множество исходов недопустимых для игрока 2. Тогда $(U^*(1))'$ есть множество исходов, допустимых для игрока 1, $(U^*(2))'$ есть множество исходов, допустимых для игрока 2 и $C_\alpha = (U^*(1))' \cap (U^*(2))'$.

Докажем, что в предположениях теоремы 1 $C_\alpha = \emptyset$.

1 случай. $U^*(1) \neq \emptyset$ и $U^*(2) \neq \emptyset$. Так как в упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ все цепи конечны, то в нём выполнено как условие обрыва возрастающих цепей, так и условие обрыва убывающих цепей, поэтому каждое непустое подмножество имеет как максимальный, так и минимальный элементы. Пусть a^* – максимальный элемент множества $U^*(1)$, b^* – минимальный элемент множества $U^*(2)$. Так как $a^* \in U^*(1)$, то выполняется

$$(\exists x_1 \in X)(\forall y \in Y) F(x_1, y) >^\omega a^*. \quad (2)$$

Так как $b^* \in U^*(2)$, то выполняется

$$(\exists y_1 \in Y)(\forall x \in X) F(x, y_1) <^\omega b^*. \quad (3)$$

Полагая в (2) $y = y_1$, и в (3) $x = x_1$, получаем $a^* <^\omega F(x_1, y_1) <^\omega b^*$. Так как $F(x_1, y_1) >^\omega a^*$ и a^* – максимальный элемент множества $U^*(1)$, то $F(x_1, y_1) \in (U^*(1))'$. Так как $F(x_1, y_1) <^\omega b^*$ и b^* – минимальный элемент множества $U^*(2)$, то $F(x_1, y_1) \in (U^*(2))'$. Следовательно, $F(x_1, y_1) \in (U^*(1))' \cap (U^*(2))' = C_\alpha$, откуда $C_\alpha \neq \emptyset$.

2 случай. $U^*(1) \neq \emptyset$ и $U^*(2) = \emptyset$. Тогда для игрока 2 все исходы игры допустимы, поэтому $C_\alpha = (U^*(1))'$. Так как $U^*(1) \neq \emptyset$, то существует максимальный элемент a' множества $U^*(1)$. В виду того, что $a' \in U^*(1)$, имеем

$(\exists x_2 \in X)(\forall y \in Y) F(x_2, y) >^\omega a'$. Фиксируя произвольно $y' \in Y$, получаем $F(x_2, y') >^\omega a'$. Следовательно, $F(x_2, y') \in (U^*(1))' = C_\alpha$. Откуда $C_\alpha \neq \emptyset$.

3 случай. $U^*(1) = \emptyset$ и $U^*(2) = \emptyset$. В этом случае все исходы являются допустимыми для обоих игроков, так как $C_\alpha = (U^*(1))' \cap (U^*(2))' = A \cap A = A \neq \emptyset$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Игра $G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle$, в которой множества стратегий игроков конечны, имеет непустое C_α -ядро.

ЛЕММА. Пусть $G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle$ игра с упорядоченными исходами, $\bar{G} = \langle X, Y, \bar{A}, \bar{\omega}, \bar{F} \rangle$ – расширение игры G . Тогда условие $C_\alpha(G) \neq \emptyset$ влечёт $C_\alpha(\bar{G}) \neq \emptyset$.

Доказательство леммы. Если $C_\alpha(G) \neq \emptyset$, то существует исход $a \in A$, допустимый для обоих игроков в игре G . Пусть $\varphi: A \rightarrow \bar{A}$ – изоморфное вложение упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в упорядоченное множество $\langle \bar{A}, \bar{\omega} \rangle$. Покажем, что исход $\varphi(a)$ является допустимым исходом для обоих игроков в игре \bar{G} .

Предположим, что $\varphi(a)$ – недопустим для игрока 1, т.е.

$$(\exists x \in X)(\forall y \in Y) \bar{F}(x, y) >^{\bar{\omega}} \varphi(a). \quad (4)$$

Учитывая, что $\bar{F} = \varphi \circ F$ и что φ – изоморфное вложение, получаем из (4)

$$(\exists x \in X)(\forall y \in Y) F(x, y) >^\omega a. \quad (5)$$

Соотношение (5) означает, что исход a недопустим для игрока 1 в игре G в противоречие с предположением. Таким образом, исход $\varphi(a)$ допустим для игрока 1 в игре \bar{G} . Двойственno получим, что исход $\varphi(a)$ допустим для игрока 2 в игре \bar{G} . Следовательно, $C_\alpha(\bar{G}) \neq \emptyset$. Лемма доказана.

Доказательство. Положим $G^0 = \langle X, Y, A^0, \omega^0, F \rangle$, где $A^0 = pr_2 F$ – множество значений функции F , ω^0 – индуцированное отношение порядка на A^0 . В игре G^0 множество исходов конечно, следовательно в упорядоченном множестве $\langle A^0, \omega^0 \rangle$ все цепи конечны. По теореме 1 выполняется $C_\alpha(G^0) \neq \emptyset$. Так как игра G является очевидно расширением игры G^0 , получаем по лемме $C_\alpha(G) \neq \emptyset$. Теорема доказана.

2. Необходимые и достаточные условия непустоты C_α -ядра в играх с функциями выигрыша. Антагонистическая игра с функциями выигрыша рассматривается как игра с упорядоченными исходами вида

$$G = \langle X, Y, R, \leq, F \rangle, \quad (6)$$

где R – множество действительных чисел, упорядоченное естественным порядком \leq , F – функция выигрыша. Положим

$$v_1 = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y), \quad v_2 = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y).$$

ТЕОРЕМА 3. Если в игре вида (6) выполняется $v_1 < v_2$, то её C_α -ядро непусто.

Доказательство основано на том, что всякий исход a , удовлетворяющий условию $v_1 < a < v_2$, является допустимым для обоих игроков.

Определение. В игре, имеющей цену v , стратегию x_0 игрока 1 будем называть его критической стратегией, если $(\forall y \in Y) F(x_0, y) \geq v$. Двойственно определяется критическая стратегия игрока 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть игра G вида (6) имеет цену. Тогда:

- 1) если ни один игрок не имеет критической стратегии, то $v \in C_\alpha(G)$, следовательно, $C_\alpha \neq \emptyset$;
- 2) если критическая стратегия существует только у одного игрока, то $C_\alpha = \emptyset$.

Следствие. В игре G вида (6) C_α -ядро пусто, тогда и только тогда, когда игра имеет цену и у одного игрока существует критическая стратегия. Отметим, что в играх, в которых множество стратегий игроков и функция выигрыша обладают «хорошой» структурой, C_α -ядро непусто, в частности справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Игра $G = \langle X, Y, R, \leq, F \rangle$, в которой множество стратегий игроков – компактные метрические пространства и функция выигрыша непрерывна, имеет непустое C_α -ядро.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мулен Э. Теория игр. М.: Мир, 1985.

УДК 517.51

А. М. Родин

СВОЙСТВА M -ВАРИАЦИОННЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Данная статья посвящена обобщению результатов А. П. Терехина, приведённых в статье [1]. Здесь формулируются свойства обобщённых M -вариационных модулей непрерывности, где M является N -функцией, то есть $M(u)$ допускает представление

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt,$$

где $p(t)$ неотрицательная, непрерывная справа, неубывающая при $u \geq 0$ функция, причём $p(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = +\infty$.

Для рассматриваемых функций $M(u)$ под классом Орлича $L_M[a, b]$ будем понимать множество таких вещественных определённых на отрезке $[a, b]$ функций $u(t)$, для которых $\int_a^b M[u(t)] dt < +\infty$. Соответственно пространством Орлича назовём структуру [2, с. 83]

$$L_M^*[a, b] = \left\{ u(t) : \left| \int_a^b u(t)v(t) dt \right| < +\infty, \forall v(t) \in L_N[a, b] \right\},$$

где $N(v) = \max_{u \geq 0} |u|v - M(u)$ – дополнительная N -функция к функции $M(u)$.

В пространстве Орлича нам будет удобно использовать норму Люксембурга

$$\|u\|_{(L_M^*[a, b])} = \inf \left\{ k > 0 : \int_a^b M\left(\frac{u(t)}{k}\right) dt \leq 1 \right\}.$$

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только 2π -периодические функции $x(t)$.

Обозначим через V_M пространство функций ограниченной M -вариации, для которых M -вариация $V_M(x) = \sup_{\xi} \kappa_{\xi}^M(x) < +\infty$, где верхняя грань берется по всем $\xi = \{t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = t_0 + 2\pi\}$ разбиениям периода от величин $\kappa_{\xi}^M(x) = \sum_{i=1}^m M[|x(t_i) - x(t_{i-1})|]$, называемых M -вариационными суммами по разбиениям ξ от функции $x(t)$. Используя равенство

$$\omega_{M,1}(\delta, x) = \inf \left\{ k > 0 : \sup_{|\xi| \leq \delta} \kappa_{\xi}^M\left(\frac{x}{k}\right) \leq 1 \right\},$$

где $|\xi| = \max_{1 \leq i \leq m} (t_i - t_{i-1})$ – диаметр разбиения ξ , определим M -вариационный модуль непрерывности первого порядка; и для $r \in N$ построим модуль непрерывности порядка r

$$\omega_{M,r}(\delta, x) = \sup_{0 < h \leq \delta} \omega_{M,1}(h, \Delta_h^{r-1} x),$$

где $\Delta_h^r x(t) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} C_r^i x(t + ih)$ – разности порядка r функции $x(t)$ с шагом h . В пространстве V_M введём норму

$$\|x\|_{V_M} = \max(\omega_{M,1}(\delta, x), A(x, 0, 2\pi)),$$

при этом величина $A(x, a, b)$ определяется следующим выражением:

$$A(x, a, b) = \inf \left\{ k > 0 : \sup_{t \in [a, b]} M\left(\frac{x(t)}{k}\right) \leq 1 \right\}.$$

Под целыми модулями непрерывности для $r \in N$ в пространстве X (L_M^* или V_M) будем понимать величины

$$\omega_r(\delta, x)_X = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| \Delta_h^r x \right\|_X.$$

Говорят, что функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию, если существует такая константа $C > 0$, что выполняется неравенство

$$M(uv) \leq CM(u)M(v)$$

для всех $u, v \in [0, +\infty)$.

Первая теорема устанавливает важное соотношение между целыми модулями непрерывности в пространстве V_M и M -вариационными модулями непрерывности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r \in N$, $\delta > 0$, функция $x(t) \in V_M$. Тогда

$$\omega_r(\delta, x)_{V_M} \leq 2\omega_{M,r}(\delta, x).$$

Далее будем предполагать, что функция $M(u)$ удовлетворяет Δ' -условию с константой $C > 0$ при $u \geq 0$.

Следующие две теоремы характеризуют связь между M -вариационными модулями непрерывности и модулями непрерывности целого порядка в пространствах Орлица.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольных чисел $r \in N$, $\delta > 0$ и функции $x(t) \in L_M^*[0, 2\pi]$ такой, что $x^{(r-1)}(t)$ является абсолютно непрерывной, а $x^{(r)}(t) \in L_M^*[0, 2\pi]$, справедливо неравенство

$$\omega_{M,r}(\delta, x) \leq \max(C, 1) \delta^{r-1} N^{-1}(\delta) \|x^{(r)}\|_{(L_M^*)}.$$

Доказательство теоремы 2 проводится сначала при $r=1$ путём оценки M -вариационной суммы с использованием представления $x(t_i) - x(t_{i-1})$ через интеграл, интегрального неравенства Йенсена и неравенства $v \leq M^{-1}(v)N^{-1}(v) \leq 2v$, где $v > 0$. Затем применяем собственно Δ' -условие и распространяем теорему на произвольное $r \in N$.

ТЕОРЕМА 3. Для произвольной функции $x(t) \in V_M$, чисел $r \in N$ и $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\omega_r(\delta, x)_{L_M^*} \leq \frac{2\max(C, 1)}{M^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right)} \omega_{M,r}(\delta, x).$$

При доказательстве теоремы 3 используется оценка целого модуля непрерывности в пространстве L_M^* через M -вариацию на отрезке, супераддитивность последней величины и Δ' -условие.

В заключение сформулируем свойство.

ТЕОРЕМА 4. Пусть даны числа $r, n \in N$ и $\delta > 0$, тогда для функций $x(t) \in V_M$ справедливо неравенство

$$\omega_{M,r}(n\delta, x) \leq \frac{\max(C, 1)n^r}{M^{-1}(n)} \omega_{M,r}(\delta, x).$$

Это неравенство является аналогом соответствующего свойства классических модулей непрерывности в банаховых пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терехин А. П. Приближение функций ограниченной p -вариации // Известия вузов. Сер. Математика. 1965. Вып. 2. С. 171 – 187.
2. Красносельский М. А., Рутиский Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Наука, 1958. С. 11 – 112.
3. Orlicz W., Musielak J. On generalized variations // Studia Mathematica. 1959. Vol. 18. P. 11 – 41.

УДК 519.4

В. В. Розен

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ВИДЕ СУММ ВЕСОВ МАЖОРАНТНО СТАБИЛЬНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ*

Дано описание изотонных отображений произвольного конечного упорядоченного множества в пространство R . Указана специализация общей конструкции для случая строго изотонного отображения и для случая нумерации (линейного доупорядочения). Основную роль в предлагаемой конструкции играет понятие мажорантно стабильного подмножества, то есть такого подмножества упорядоченного множества, которое вместе с любым своим элементом содержит также больший элемент.

1. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – конечное (частично) упорядоченное множество и B_1, \dots, B_m – перечень его непустых мажорантно стабильных подмножеств. Присвоим каждому подмножеству B_j неотрицательный вес λ_j ($j = \overline{1, m}$). Определим отображение $\varphi: A \rightarrow R$, полагая

$$\varphi(a) = \sum_{a \in B_j} \lambda_j. \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00053.

Отображение φ является изотонным. В самом деле, условие $a_1 \leq^\omega a_2$ влечёт $\{B_j : a_1 \in B_j\} \subseteq \{B_j : a_2 \in B_j\}$; учитывая, что все λ_j неотрицательны, получаем отсюда $\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$, то есть φ изотонно. В случае, когда все веса λ_j положительны, отображение φ будет строго изотонным. Оказывается, что любое изотонное (строго изотонное) отображение $\varphi : A \rightarrow R$ может быть получено указанным способом, то есть суммированием неотрицательных (положительных) весов мажорантно стабильных подмножеств. Для доказательства этого утверждения введем следующие обозначения: $C(\omega)$ – множество всех изотонных отображений из $\langle A, \omega \rangle$ в R , $C^*(\omega)$ – множество всех строго изотонных отображений из $\langle A, \omega \rangle$ в R , $C_+(\omega)$ – множество всех неотрицательных изотонных отображений из $\langle A, \omega \rangle$ в R . Рассмотрим вначале случай $\varphi \in C_+(\omega)$. Пусть $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r$ – расположенные по возрастанию значения функции φ . Положим $B_{j_k} = \{a \in A : \varphi(a) \geq \alpha_k\}$ ($k = \overline{1, r}$). Ввиду изотонности функции φ , каждое B_{j_k} будет мажорантно стабильным подмножеством в $\langle A, \omega \rangle$. Далее, легко проверить справедливость равенства:

$$\varphi = \alpha_1 \chi_{B_{j_1}} + (\alpha_2 - \alpha_1) \chi_{B_{j_2}} + \dots + (\alpha_r - \alpha_{r-1}) \chi_{B_{j_r}}, \quad (2)$$

где $\chi_{B_{j_k}}$ – характеристическая функция подмножества B_{j_k} ($k = \overline{1, r}$). Равенство (2) дает искомое представление отображения φ (коэффициент при $\chi_{B_{j_k}}$ есть вес подмножества B_{j_k} , веса остальных мажорантно стабильных подмножеств полагаем равными нулю). Далее, представление произвольного отображения $\varphi \in C(\omega)$ имеет вид

$$\varphi = \sum_{j=0}^m \lambda_j \chi_{B_j}, \quad (3)$$

где $\lambda_j \geq 0$ и $(B_j)_{j=\overline{0, m}}$ – семейство всех мажорантно стабильных в $\langle A, \omega \rangle$ подмножеств, включая пустое. По определению полагаем $\chi_0 = -1$. Получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – конечное упорядоченное множество. Для того чтобы отображение $\varphi : A \rightarrow R$ было изотонным, необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде (3) с неотрицательными весовыми коэффициентами λ_j ($j = \overline{0, m}$).

В качестве следствия теоремы 1 установим представимость произвольного строго изотонного отображения $\varphi \in C^*(\omega)$ в виде суммы положительных весов мажорантно стабильных подмножеств. Положим $\varphi_0 = \chi_{B_0} + \chi_{B_1} + \dots + \chi_{B_m}$. Ясно, что при достаточно малом $\delta > 0$ отображение $\varphi - \delta \varphi_0$ будет оставаться строго изотонным; по теореме 1 оно может

быть представлено в виде $\varphi - \delta\varphi_0 = \mu_0\chi_{B_0} + \mu_1\chi_{B_1} + \dots + \mu_m\chi_{B_m}$, где $\mu_0, \dots, \mu_m \geq 0$, отсюда $\varphi = (\mu_0 + \delta)\chi_{B_0} + (\mu_1 + \delta)\chi_{B_1} + \dots + (\mu_m + \delta)\chi_{B_m}$ – искомое представление отображения φ . Получаем

Следствие. Для того чтобы отображение $\varphi: A \rightarrow R$ было строго изотонным отображением конечного упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в R , необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде (3) с положительными весовыми коэффициентами λ_j ($j = \overline{0, m}$).

2. Взаимно однозначное изотонное отображение n -элементного упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в $\{1, \dots, n\}$ называется его *нумерацией*. Нумерации упорядоченного множества могут быть отождествлены с его линейными доупорядочениями [1]. Определим построение линейного доупорядочения упорядоченного множества с помощью *процедуры последовательного удаления минимальных элементов*. Рассмотрим последовательность элементов a_1, \dots, a_n множества A , построенную по следующему принципу. Элемент a_1 является минимальным элементом подмножества $A_1 = A$; элемент a_2 – минимальным элементом подмножества $A_2 = A_1 \setminus \{a_1\}$; элемент a_3 – минимальным элементом подмножества $A_3 = A_2 \setminus \{a_2\}$ и т.д.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Упорядочение $a_1 <^{\bar{\omega}} a_2 <^{\bar{\omega}} \dots <^{\bar{\omega}} a_n$ является линейным доупорядочением упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$.

Действительно, при реализации процедуры удаления минимальных элементов ни один из оставшихся элементов не может быть меньше удаляемого элемента, поэтому условие $a_i <^{\omega} a_j$ влечет $a_i <^{\bar{\omega}} a_j$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Всякое линейное доупорядочение может быть получено в результате процедуры удаления минимальных элементов.

Пусть $\bar{\omega}$ – некоторое линейное доупорядочение упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ и $a_1 <^{\bar{\omega}} a_2 <^{\bar{\omega}} \dots <^{\bar{\omega}} a_n$. Тогда a_1 – минимальный элемент подмножества A , a_2 – минимальный элемент подмножества $A \setminus \{a_1\}$; и т.д.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Подмножества, получающиеся в результате процедуры удаления минимальных элементов, являются мажорантно стабильными.

Действительно, при удалении у мажорантно стабильного подмножества минимального элемента оно остается мажорантно стабильным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Любое мажорантно стабильное подмножество упорядоченного множества может быть получено из A в результате процедуры удаления минимальных элементов.

Доказательство. Пусть подмножество B является мажорантно стабильным в упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$, причем $B \neq A$. Покажем, что в этом случае найдется такой элемент $a^0 \in A \setminus B$, что

α) a^0 минимален в $B \cup \{a^0\}$,

β) подмножество $B \cup \{a^0\}$ мажорантно стабильно.

Действительно, пусть a^0 – максимальный элемент в непустом множестве $A \setminus B$. Тогда ни для какого элемента $b \in B$ не может выполняться $b <^\omega a^0$ (в этом случае в силу мажорантной стабильности подмножества B будет $a^0 \in B$ в противоречие с условием $a^0 \in A \setminus B$), что даёт α). Проверим β). Пусть $c \in B \cup \{a^0\}$ и $d >^\omega c$. Если $c \in B$, то ввиду мажорантной стабильности подмножества B имеем $d \in B$, тем более, $d \in B \cup \{a^0\}$. Пусть теперь $c = a^0$. Предположим, что $d \notin B$. Тогда $d \in A \setminus B$ и выполняется $d >^\omega a^0$, что противоречит условию максимальности элемента $a^0 \in A \setminus B$.

Утверждения α) и β) доказаны. По индукции получаем, что найдется такая последовательность a^0, a^1, \dots, a^t элементов A , для которой при любом $s = \overline{0, t}$ выполнены условия:

α') a^s – минимальный элемент в $B \cup \{a^0, \dots, a^s\}$;

β') $B \cup \{a^0, \dots, a^s\}$ мажорантно стабильно;

γ') $B \cup \{a^0, \dots, a^t\} = A$.

Тогда подмножество B получается из A в результате процедуры последовательного удаления элементов a^t, \dots, a^0 , что доказывает утверждение 4.

Ввиду утверждений 3 и 4 процедура последовательного удаления минимальных элементов взаимно однозначно соответствует выделению максимальной цепи в полной решетке $\langle M(\omega), \subseteq \rangle$ мажорантно стабильных подмножеств упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$; с учетом утверждений 1 и 2, получаем следующий окончательный результат.

ТЕОРЕМА 2. Существует взаимно однозначное соответствие между линейными доупорядочениями упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ и максимальными цепями в полной решётке его мажорантно стабильных подмножеств.

Возвращаясь к теореме 1, получаем, что если каждому мажорантно стабильному подмножеству, входящему в некоторую максимальную цепь в $\langle M(\omega), \subseteq \rangle$, присвоить вес равный 1, а всем остальным – вес равный 0, то функция φ , определенная формулой (1), будет нумерацией и обратно – любая нумерация представима в таком виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розен В. В. Цель – оптимальность – решение. М.: Радио и связь, 1982.

**О КРАТНОЙ НЕПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ПУЧКОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ***

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y, \lambda) = y^{(n)}(x) + \lambda p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + \lambda^n p_n y(x),$$

где $p_j \in \mathbf{C}$, и двухточечными краевыми условиями

$$\sum_{s+k \leq n-1} \lambda^s (\alpha_{jsk} y^{(k)}(0) + \beta_{jsk} y^{(k)}(1)) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где $\alpha_{jsk}, \beta_{jsk} \in \mathbf{C}$.

Пусть корни ω_j , $j = \overline{1, n}$, характеристического уравнения $\omega^n + p_1 \omega^{n-1} + \dots + p_n = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, выходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что $0 < \omega_1 < \dots < \omega_n$. Пусть собственные значения (с.з.) пучка $L(\lambda)$ являются простыми и образуют счётное множество. Обозначим через Λ множество ненулевых с.з. Пусть, кроме того, функция

$$y(x, \lambda) = a_1 e^{\lambda \omega_1 x} + a_2 e^{\lambda \omega_2 x} + \dots + a_n e^{\lambda \omega_n x}, \quad a_j \in \mathbf{C}, \quad (1)$$

является порождающей для собственных функций пучка $L(\lambda)$, соответствующих с.з. из множества Λ .

Рассмотрим системы функций

$$Y_\Lambda = \{y(x, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}, \quad Y_C = \{y(x, \lambda) \mid \lambda \in \mathbf{C}\}.$$

ТЕОРЕМА. Система Y_C не является n -кратной полной ни в каком пространстве $L_2[0, \sigma]$ при $\sigma > 0$ и имеет бесконечный дефект.

Доказательство. Обозначим

$$\hat{y}(x, \lambda) = (y(x, \lambda), \lambda y(x, \lambda), \dots, \lambda^{n-1} y(x, \lambda)), \quad \hat{f}(x) = (\overline{f_0(x)}, \overline{f_1(x)}, \dots, \overline{f_{n-1}(x)}),$$

$f_j \in L_2[0, \sigma]$ и предположим $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ $\hat{y}(x, \lambda) \perp \hat{f}(x)$ в $L_2^n[0, \sigma]$, то есть

$$0 = \int_0^\sigma y(x, \lambda) f_0(x) dx + \lambda \int_0^\sigma y(x, \lambda) f_1(x) dx + \dots + \lambda^{n-1} \int_0^\sigma y(x, \lambda) f_{n-1}(x) dx. \quad (2)$$

Пронтегрируем k -е слагаемое ($k = \overline{1, n-1}$) справа по частям $n-k$ раз. Используя обозначения

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

$$(g)_1(x) := \int_0^x g(\xi) d\xi, \quad (g)_j(x) := \int_0^x (g)_{j-1}(\xi) d\xi = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{j-1}}{(j-1)!} g(\xi) d\xi, \quad j = \overline{2, n-1},$$

и накладывая на функции f_0, f_1, \dots, f_{n-2} условия

$$(f_{k-1})_j(\sigma) = 0, \quad j = \overline{1, n-k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (3)$$

получим из (2)

$$0 = \sum_{0}^{\sigma} \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} (-1)^{n-k} y^{(n-k)}(x, \lambda) (f_{k-1})_{n-k}(x) dx. \quad (4)$$

Учитывая (1) и обозначая

$$F_s(x) := \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \omega_s^j (f_{n-1-j})_j(x), \quad s = \overline{1, n}, \quad (5)$$

запишем соотношение (4) в виде

$$0 = \lambda^{n-1} \sum_{s=1}^n \int a_s F_s(x) e^{\lambda \omega_s x} dx = \lambda^{n-1} \sum_{s=1}^n \int_0^{\sigma \omega_s} \frac{a_s}{\omega_s} F_s \left(\frac{x}{\omega_s} \right) e^{\lambda x} dx, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Отсюда получим

$$0 = \int_0^{\sigma \omega_n} F(x) e^{\lambda x} dx, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (7)$$

где

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{s=1}^n \frac{a_s}{\omega_s} F_s \left(\frac{x}{\omega_s} \right), & x \in [0, \sigma \omega_1], \\ \sum_{s=2}^n \frac{a_s}{\omega_s} F_s \left(\frac{x}{\omega_s} \right), & x \in (\sigma \omega_1, \sigma \omega_2], \\ \dots \\ \frac{a_n}{\omega_n} F_n \left(\frac{x}{\omega_n} \right), & x \in (\sigma \omega_{n-1}, \sigma \omega_n]. \end{cases}$$

Из (7) следует, что $F(x) = 0$ для почти всех $x \in [0, \sigma \omega_n]$ или, более подробно,

$$\frac{a_1}{\omega_1} F_1 \left(\frac{x}{\omega_1} \right) + \frac{a_2}{\omega_2} F_2 \left(\frac{x}{\omega_2} \right) + \dots + \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1} \left(\frac{x}{\omega_{n-1}} \right) + \frac{a_n}{\omega_n} F_n \left(\frac{x}{\omega_n} \right) = 0, \quad x \in [0, \sigma \omega_1],$$

$$\frac{a_2}{\omega_2} F_2 \left(\frac{x}{\omega_2} \right) + \dots + \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1} \left(\frac{x}{\omega_{n-1}} \right) + \frac{a_n}{\omega_n} F_n \left(\frac{x}{\omega_n} \right) = 0, \quad x \in (\sigma \omega_1, \sigma \omega_2],$$

.....

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) + \frac{a_n}{\omega_n} F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right) &= 0, \quad x \in (\sigma\omega_{n-2}, \sigma\omega_{n-1}], \\ \frac{a_n}{\omega_n} F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right) &= 0, \quad x \in (\sigma\omega_{n-1}, \sigma\omega_n]. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{n-1}(x) \in C^{n-1}[0, \sigma]$ – произвольные функции такие, что $h_j(\sigma) = h'_j(\sigma) = \dots = h_j^{(n-1)}(\sigma) = 0$, $j = \overline{1, n-1}$, а функция $h_n(x) \in C^{n-1}[0, \sigma]$ и $h_n(\sigma) = h'_n(\sigma) = \dots = h_n^{(n-1)}(\sigma) = 0$, где

Очевидно, функций $h_j(x)$, удовлетворяющих указанным свойствам, бесконечно много.

Положим

$$F_j(x) = \frac{\omega_j}{a_j} h_j(x), \quad x \in [0, \sigma], \quad j = \overline{1, n}.$$

По построению эти функции удовлетворяют соотношениям (8). Учитывая формулы (5), для нахождения функций $(f_0)_{n-1}, (f_1)_{n-2}, \dots, f_{n-1}$ таких, что для функций f_0, f_1, \dots, f_{n-1} выполняется соотношение (2), нужно решить следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{n-1}(x) - \omega_1(f_{n-2})_1(x) + \dots + (-1)^{n-1} \omega_1^{n-1}(f_0)_{n-1}(x) = \frac{\omega_1}{a_1} h_1(x), \\ \dots \\ f_{n-1}(x) - \omega_n(f_{n-2})_1(x) + \dots + (-1)^{n-1} \omega_n^{n-1}(f_0)_{n-1}(x) = \frac{\omega_n}{a_n} h_n(x). \end{array} \right. \quad (9)$$

При фиксированном $x \in [0, \sigma]$ (9) является системой линейных алгебраических уравнений с определителем Вандермонда от попарно различных чисел $(-\omega_1), (-\omega_2), \dots, (-\omega_n)$, который не зависит от x и отличен от нуля.

Из (9) получим

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x) &= \alpha_{n-11}h_1(x) + \dots + \alpha_{n-1n}h_n(x), \\ (f_{n-2})_1(x) &= \alpha_{n-21}h_1(x) + \dots + \alpha_{n-2n}h_n(x), \end{aligned} \quad (10)$$

.....

$$(f_0)_{n-1}(x) = \alpha_{01}h_1(x) + \dots + \alpha_{0n}h_n(x),$$

где α_{jk} – числовые коэффициенты, определяемые однозначно из системы (9).

Дифференцируя 2-е соотношение в (10) 1 раз, 3-е соотношение 2 раза, ..., последнее соотношение $n-1$ раз, получим

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x) &= \alpha_{n-11}h_1(x) + \dots + \alpha_{n-1n}h_n(x), \\ f_{n-2}(x) &= \alpha_{n-21}h'_1(x) + \dots + \alpha_{n-2n}h'_n(x), \end{aligned}$$

.....

$$f_0(x) = \alpha_{01}h_1^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_{0n}h_n^{(n-1)}(x).$$

По построению множество $\{\hat{f}(x) = (\overline{f_0(x)}, \overline{f_1(x)}, \dots, \overline{f_{n-1}(x)})\}$ удовлетворяет соотношению (2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ и образует бесконечномерное подпространство в $L_2^n[0, \sigma]$. Тем самым теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Каково бы ни было множество $\Lambda \subset \mathbb{C}$, система Y_Λ не является n -кратно полной ни в каком пространстве $L_2[0, \sigma]$ при $\sigma > 0$ и имеет бесконечный дефект.

УДК 517.51

С. П. Сидоров

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ*

Пусть $X = [0, 1]$ и $C^k(X), k \geq 0$, – пространство действительнозначных и k -раз непрерывно дифференцируемых функций на X . Обозначим D^i оператор дифференцирования i -го порядка; $\|\cdot\|$ будет означать равномерную норму в $C(X) = C^0(X)$, $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Обозначим

$e_i(x) = x^i, i = 1, 2, \dots$ Пусть $\sigma = (\sigma_i)_{i \geq 0}$ – последовательность с элементами $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$ и h, k – два целых числа таких, что $0 \leq h \leq k$ и $\sigma_h \cdot \sigma_k \neq 0$. Обозначим $C_{h,k}(\sigma) = \{f \in C^k(X) : \sigma_i \cdot D^i f \geq 0, i = h, \dots, k\}$. Пусть

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120, и частичной поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96123.

$\Gamma = \{i : h \leq i < k, \sigma_i \neq 0, \sigma_{i+1} = 0, \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\}$. Если $\Gamma = \emptyset$, то мы, следуя [1], будем называть $C_{h,k}(\sigma)$ конусом I типа, в противном случае – конусом II типа. В работе [1] получены следующие обобщения теоремы П. П. Коровкина [2]:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $C_{h,k}(\sigma)$ – конус I или II типа и пусть $L_n : C^k(X) \rightarrow C^k(X)$ есть последовательность линейных операторов таких, что

$$L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma). \quad (1)$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^k L_n e_j - D^k e_j\| = 0, j = h, \dots, k+2$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^k L_n f - D^k f\| = 0$ для всех $f \in C^k(X)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $C_{h,k}(\sigma)$ – конус II типа и $r \in \Gamma$. Пусть $L_n : C^k(X) \rightarrow C^r(X)$ есть последовательность линейных операторов таких, что

$$L_n(C_{h,k}(\sigma)) \subset C_{r,r}(\sigma). \quad (2)$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^r L_n e_j - D^r e_j\| = 0, j = h, \dots, k$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^r L_n f - D^r f\| = 0$ для всех $f \in C^k(X)$.

Напомним, что оператор L , определённый в $C(X)$, пространство образов которого имеет размерность $n+1$, $\dim \{Lf : f \in C(X)\} = n+1$, называется оператором конечного ранга $n+1$.

В работе [3], обобщая результат П. П. Коровкина [4], было показано, что порядок приближения производными линейных операторов конечного ранга $n+1$, обладающих свойством формосохранения (1), не может быть выше, чем n^{-2} , уже на системе из трёх функций e_k, e_{k+1}, e_{k+2} .

Цель настоящей статьи – установить аналогичный результат для линейных конечномерных операторов, обладающих свойством формосохранения (2).

ТЕОРЕМА. Пусть $C_{r,r+2}(\sigma)$ – конус II типа и $r \in \Gamma$. Пусть $L_n : C^{r+2}(X) \rightarrow C^r(X)$ есть линейный оператор конечного ранга $n+1$ такой, что $D^r L_n e_r = D^r e_r$ и

$$L_n(C_{r,r+2}(\sigma)) \subset C_{r,r}(\sigma). \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r+1)!} \cdot (1 + \frac{1}{2(n+1)}) \cdot \|D^r L_n e_{r+1} - D^r e_{r+1}\| + \frac{1}{(r+2)!} \cdot \|D^r L_n e_{r+2} - D^r L_n e_{r+2}\| \geq \\ \geq \frac{1}{8(n+1)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Без потери общности считаем $\sigma_r = \sigma_{r+2} = 1$. Так как L_n – линейный оператор конечного ранга $n+1$, то существует система функций $\{u_j\}_{j=0}^n$, порождающая линейное пространство $\{L_n f : f \in C^{r+2}(X)\}$. Рассмотрим матрицу $A = (D^r u_j(z_i))_{j=0, i=0}^{n, n+1}$, где $z_i = \frac{i}{n+1}, i = 0, \dots, n+1$. Ранг матрицы A не равен нулю. Действительно,

если $\text{rank } A = 0$, то $D^r L_n f(z_k) = \sum_{i=0}^n a_i(f) \cdot D^r u_i(z_k) = 0$ для всех $f \in C^{r+2}(X)$, что противоречит условию $D^r L_n e_r = D^r e_r$.

Возьмём ненулевой вектор $\delta = (\delta_i)_{i=0}^n$, ортогональный всем строкам матрицы A :

$$\sum_{i=0}^{n+1} |\delta_i| = 1, \quad \sum_{i=0}^{n+1} \delta_i D^r u_j(z_i) = 0, \quad j = 0, \dots, n.$$

Определим непрерывную функцию $h \in C^{r+2}(X)$ так, чтобы

$$\text{а) } D^{r+2} h(z_i) = \text{sgn } \delta_i, \quad i = 0, \dots, n+1; \quad \text{б) } D^i h(0) = 0, \quad i = 0, \dots, r-1;$$

$$\text{в) } \|D^{r+1} h\| \leq 4(n+1); \quad \text{г) } \|D^{r+2} h\| \leq 8(n+1)^2.$$

Такая функция существует [5, с. 82 – 96]. Так как функция $D^r L_n h$ принадлежит линейному пространству, порождённому системой функций $\{D^r u_j\}$, мы получаем $\sum_{i=0}^{n+1} \delta_i D^r L_n h(z_i) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^{n+1} |\delta_i| = \sum_{i=0}^{n+1} \delta_i D^r h(z_i) = \sum_{i=0}^{n+1} \delta_i (D^r h(z_i) - D^r L_n h(z_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n+1} |\delta_i| \cdot \|D^r L_n h(z_i) - D^r h(z_i)\| \leq \|D^r L_n h - D^r h\|. \end{aligned} \quad (5)$$

Возьмём $x \in X$ и определим две функции $p_{j,x}, j = 1, 2$, так, чтобы

$$\text{а) } p_{j,x} \in C^{r+2}(X); \quad \text{б) } D^{r+2} p_{j,x} = \|D^{r+2} h\|; \quad \text{в) } D^{r+1} p_{j,x}(x) = (-1)^{j+1} D^{r+1} h(x);$$

$$\text{г) } D^r p_{j,x}(x) = 0; \quad \text{д) } D^i p_{j,x}(0) = 0, \quad i = 0, \dots, r-1.$$

Тогда

$$p_{j,x} + (-1)^j (h - \frac{1}{r!} e_r \cdot D^r h(x)) \in C_{r,r+2}(\sigma), \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Заметим также, что $D^r p_{1,x}(t) = D^{r+1}h(x) \cdot (t-x) + \frac{1}{2} \|D^{r+2}h\| \cdot (t-x)^2$, и $D^r p_{2,x}(t) = -D^{r+1}h(x) \cdot (t-x) + \frac{1}{2} \|D^{r+2}h\| \cdot (t-x)^2$. Теперь, учитывая (3), (6), получаем

$$L_n(p_{j,x} + (-1)^j(h - D^r h(x) \cdot \frac{1}{r!} e_r)) \in C_{r,r}(\sigma), \quad j = 1, 2.$$

Значит,

$$\begin{aligned} D^r L_n(h - D^r h(x) \cdot \frac{1}{r!} e_r)(x) &\leq D^r L_n p_{1,x}, \\ -D^r L_n(h - D^r h(x) \cdot \frac{1}{r!} e_r)(x) &\leq D^r L_n p_{2,x} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |D^r L_n h(x) - D^r h(x)| &= \left| D^r L_n(h - D^r h(x) \frac{1}{r!} e_r) \right| \leq \\ &\leq \max \left\{ |D^r L_n p_{1,x}(x)|, |D^r L_n p_{2,x}(x)| \right\} = \\ &= \frac{1}{(r+1)!} |D^{r+1}h(x)| \cdot |D^r L_n e_{r+1} - D^r e_{r+1}| + \\ &+ \frac{1}{(r+1)!} \|D^{r+2}h\| \cdot |D^r L_n e_{r+1} - D^r e_{r+1}| + \frac{1}{2(r+2)!} \|D^{r+2}h\| \cdot |D^r L_n e_{r+2} - D^r e_{r+2}|. \end{aligned}$$

Так как $\|D^{r+1}h\| \leq 4(n+1)$, $\|D^{r+2}h\| \leq 8(n+1)^2$, то с учетом (5) мы получаем (4). \square

Отметим, что линейный оператор конечного ранга $n+1$, обладающий свойством (3), для которого оценка (4) является точной, существует (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Munoz-Delgado F. J., Ramirez-Gonzalez V., Cardenas-Morales D. Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144 – 159.
2. Коровкин П. П. Сходимость линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90. С. 961 – 964.
3. Sidorov S. P. On the order of approximation by linear shape-preserving operators of finite rank // East J. on Approx. 2001. Vol. 7. № 1. P. 1 – 8.
4. Коровкин П. П. Порядок приближения функций линейными положительными операторами // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1158 – 1161.
5. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближений. М.: Наука, 1984.

УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭВОЛЮЦИОННЫХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ*

1. Изучение спектральных характеристик и, в частности, спектра случайных самосопряженных операторов представляет собой мало исследованный раздел теории операторов. Возникающие здесь задачи интересны и для математиков, и для физиков-теоретиков.

В статье рассматриваются уравнения типа эволюционных со случайными самосопряженными операторами, имеющими дискретный спектр. Для таких уравнений выписываются в явном виде решения, исследуются их свойства.

2. Пусть $(\Omega; F; P)$ – фиксированное вероятностное пространство, $A(\omega)$ – линейный самосопряженный оператор, действующий в сепарablem гильбертовом пространстве H . Оператор $A(\omega)$ будем называть вполне самосопряженным, если для любого $\omega \in \Omega$ $A(\omega)$, определенный на плотном линеале $D(A(\omega))$, является самосопряженным. Будем предполагать, что при каждом фиксированном ω $A(\omega)$ имеет дискретный спектр $\lambda_k = \lambda_k(\omega)$, соответствующие случайные ортонормированные элементы будем обозначать $e_k = e_k(\omega)$, $k = 1, 2, \dots$

Пример. В гильбертовом пространстве $L^2(0, T)$ ($T > 0$) рассмотрим случайный вполне самосопряженный оператор

$$A(\omega)f(x) = \int_0^T e^{-\alpha(\omega)|x-t|} f(t) dt, \quad f \in L^2(0, T), \quad (1)$$

где $\alpha = \alpha(\omega)$ – вещественная положительная случайная величина.

ТЕОРЕМА 1. При любом $\omega \in \Omega$ $A(\omega)$ является оператором Гильберта-Шмидта, его собственные значения определяются равенством $\lambda_k = \frac{-2}{\alpha(y_k^2 + 1)}$, где y_k – решения уравнения $tg(y\alpha T) = \frac{2y}{(y^2 - 1)}$ $k = 1, 2, \dots$;

$$e_k(x, \omega) = e_k(x) = c_k(y_k \cos(y_k x) + \sin(y_k x)),$$

$$c_k = \frac{2y_k}{\sqrt{y_k(2y_k^3 T + y_k^2 \sin(2y_k T) + 2y_k(T - \cos(2y_k T) + 1) - \sin(2y_k T))}}.$$

Причем при больших k $y_k = \frac{\pi k}{T\alpha}$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00428.

Доказательство. Дважды дифференцируя уравнение

$$\int_0^T e^{-\alpha(\omega)|x-t|} g(t) dt = \lambda g(t), \quad (2)$$

переходим к дифференциальному уравнению $g'' - \rho^2 g = 0$, где

$\rho = \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda - 2\alpha}{\lambda}}$. Запишем общее решение этого уравнения

$g(x) = c_1 e^{\rho x} + c_2 e^{-\rho x}$. Так как собственный элемент определяется с точностью до постоянного множителя, то можно считать $c_2 = 1$. Подставляя это представление в (2), получим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\rho + \alpha}{\rho - \alpha} \\ \frac{\rho - \alpha}{\rho + \alpha} = e^{\rho T} \end{cases}.$$

Второе уравнение системы имеет бесконечное множество решений, если только $\rho = iy$. Преобразуем $\frac{iy - \alpha}{iy + \alpha} = e^{iyT}$ к виду $tg(y\alpha T) = \frac{2y}{(y^2 - 1)}$.

Заметим, что если y удовлетворяет уравнению, то $-y$ также будет ему удовлетворять, следовательно, можем занумеровать решения так, чтобы $y_k = -y_{-k}$. При таком выборе собственные элементы g_k и g_{-k} будут соответствовать одному собственному значению $\lambda_k = \frac{-2}{\alpha(y_k^2 + 1)}$. Взяв в качестве

всего собственного элемента $e_k(x, \omega) = g_k(x) + g_{-k}(x)$, получим требуемое утверждение.

3. Обозначим через \mathbf{P} замыкание оператора дифференцирования n -го порядка в пространстве $L^2(\mathbb{R})$

$$\mathbf{P}f = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)},$$

определенное на множестве $D(\mathbf{P})$ функций f n раз дифференцируемых на \mathbb{R} ; $f^{(n-1)}$ – абсолютно непрерывные функции; $f^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$, $k = \overline{0, n}$ и $f(0) = 0$.

Если многочлен $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k (2\pi i t)^k$ вещественный, то оператор \mathbf{P} симметрический с индексами дефекта (1,1). Элемент дефектного подпространства оператора \mathbf{P} $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ определяется [1]

$$\Psi(t, \lambda) = \overline{\Phi}[(P(t) - \lambda)^{-1}],$$

где Φ – преобразование Фурье, $\bar{\Phi}$ – обратное преобразование Фурье в пространстве $L^2(R)$.

Рассмотрим следующую задачу: найти случайный элемент на сепарабельном гильбертовом пространстве H $f(t, x) = f(t, x, \omega)$, удовлетворяющий операторному уравнению

$$\mathbf{P}^* f(t, x) = A(\omega) f(t, x), \quad f(t_0, x) = f_0(x), \quad (3)$$

\mathbf{P}^* сопряженный оператор, $A(\omega)$ – случайный оператор с дискретным спектром $\{\lambda_k\}$, т.е. верно представление

$$A(\omega) f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (f, e_k) e_k(x), \quad f \in D(A(\omega)).$$

ТЕОРЕМА 2. Если все λ_k не принадлежат существенной области значений многочлена $P(t)$ и при любом k $\Psi(t_0, \lambda_k) \neq 0$, то задача (3) имеет единственное решение, задаваемое рядом

$$f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f_0, e_k)}{\Psi(t_0, \lambda_k)} \Psi(t, \lambda_k) e_k(x, \lambda_k).$$

Доказательство. При доказательстве нам потребуется важное свойство точек регулярного типа симметричного оператора [2]: всякая регулярная точка λ симметричного оператора B является собственным числом сопряженного оператора B^* , соответствующим собственным элементом будет элемент φ_λ дефектного подпространства \mathbb{N}_λ , $\varphi_\lambda \in \mathbb{N}_\lambda$, то есть

$$B^* \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda.$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{P}^*(a_k \Psi(t, \lambda_k) e_k(x)) = a_k \mathbf{P}^*(\Psi(t, \lambda_k)) e_k(x) = a_k \lambda_k \Psi(t, \lambda_k) e_k(x).$$

С другой стороны

$$A(\omega)(a_k \Psi(t, \lambda_k) e_k(x)) = a_k \lambda_k \Psi(t, \lambda_k) e_k(x).$$

Суммируя полученные равенства по k , получим

$$\mathbf{P}^* \left(\sum_k a_k \Psi(t, \lambda_k) e_k(x) \right) = A(\omega) \left(\sum_k a_k \Psi(t, \lambda_k) e_k(x) \right),$$

а из условия $f(t_0, x) = f_0(x)$ найдем $f(t_0, x) = \sum_k a_k \Psi(t_0, \lambda_k) e_k(x)$. С другой стороны $f(t_0, x) = \sum_k (f_0, e_k) e_k(x)$. Таким образом, получим

$$a_k = \frac{f(t_0, x)}{\Psi(t_0, \lambda_k)}. \text{ Теорема доказана.}$$

Для эволюционного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A(\omega) f \quad t \geq 0, \quad f(0, x) = f_0(x), \quad (4)$$

где $A(\omega)$ – интегральный оператор из примера, имеем [3]

$$P(t) = 2\pi i t; \lambda_k = \frac{-4}{\alpha(y_k^2 + 1)}; \Psi(t, \lambda_k) = 1_+(t) \exp\left\{\frac{-4t}{\alpha(y_k^2 + 1)}\right\} e_k(x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров Е. Л. Спектральные функции самосопряженных и симметрических операторов умножения в пространствах $L^2(X, \mu)$ // Матем. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 6. С. 803 – 810.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1996.
3. Александров Е. Л. О методе разделения переменных решения операторных уравнений // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 10 – 12.

УДК 519.872

И. Е. Тананко

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ

Некоторые типы сетей массового обслуживания с управлением потоками и маршрутизацией имеют стационарное распределение вероятностей состояний в мультиплексивной форме. Примерами таких сетей являются сети обслуживания с блокировками [1], с интенсивностями обслуживания и маршрутизацией, зависящими от состояния сетей [2], сети, удовлетворяющие требованию квази обратимости систем массового обслуживания [3]. Целью данной статьи является исследование стационарного распределения вероятностей состояний открытых и замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с маршрутными матрицами, зависящими от состояния сетей.

Рассматривается открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания Γ [4], образованная L системами обслуживания C_i , $i=1, 2, \dots, L$, типа $M|M|1$ с интенсивностями обслуживания μ_i . Из источника C_0 в сеть поступает пуассоновский поток требований одного класса с интенсивностью λ_0 . Состояние сети обслуживания определяется вектором $n = (n_i)$, где n_i – число требований, находящихся в системе C_i , E – множество состояний сети обслуживания. Считается, что каждому состоянию n в процессе эволюции сети соответствует маршрутная матрица $\Theta(n) = (\theta_{ij}(n))$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, L$, элементы θ_{0i} , $i = 1, 2, \dots, L$, которой не зависят от состояния сети n . Вводятся обозначения: $\lambda(n) = (\lambda_i(n_i))$, $n_i = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_i(n_i)$ – интенсивность поступления требований в систему C_i при условии, что в C_i

находится n_i требований; $\omega_i(n_i) = (\omega_i(n_i))$, $n_i = 0, 1, 2, \dots$, $\omega_i(n_i)$ – относительная интенсивность потока требований в систему C_i при условии, что в C_i находится n_i требований; ω_0 – относительная интенсивность потока требований из источника C_0 в сеть обслуживания; $P(n)$ – стационарная вероятность пребывания сети обслуживания в состоянии n ; $P_i(n_i)$ – стационарная вероятность пребывания системы C_i в состоянии n_i .

ТЕОРЕМА 1. Если для открытой сети массового обслуживания Γ с управлением маршрутизацией выполнены условия

$$\sum_{n_i=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{n_i} \left(\frac{\lambda_i(m)}{\mu_i} \right) < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, L,$$

то стационарный режим в сети существует, каждая система C_i функционирует как независимая в вероятностном смысле система массового обслуживания, и стационарные вероятности состояний сети обслуживания определяются выражениями

$$P(n) = \prod_{i=1}^L P_i(n_i), \quad n \in E,$$

где

$$P_i(n_i) = \left[1 + \sum_{n_i=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{n_i} \left(\frac{\lambda_i(m)}{\mu_i} \right) \right]^{-1} \prod_{m=1}^{n_i} \left(\frac{\lambda_i(m)}{\mu_i} \right),$$

$$\lambda_i(n_i) = \lambda_0 \omega_i(n_i) / \omega_0, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad n_i = 1, 2, \dots.$$

Элементы $\omega_i(n_i)$ определяются решением системы уравнений

$$\omega_i(n_i) = \omega_0 \theta_{0i} + \sum_{j=1}^L \omega_j(n_j + 1) \theta_{ji} (n - 1_i + 1_j), \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad n \in E, \quad (1)$$

с условием нормировки

$$\omega_0 + \sum_{i=1}^L \sum_{n_i=1}^{\infty} \omega_i(n_i) = 1, \quad (2)$$

где 1_i – вектор, i -я компонента которого равна 1, а остальные равны 0.

Доказательство. Анализируя допустимые переходы между состояниями сети обслуживания Γ , находящейся в стационарном режиме функционирования, получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\lambda_0 + \sum_{j=1}^L \mu_j \gamma(n_j) \right] P(n) &= \lambda_0 \sum_{j=1}^L P(n - 1_j) \theta_{0j} + \sum_{j=1}^L P(n + 1_j) \theta_{j0} \mu_j + \\ &+ \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L P(n - 1_j + 1_i) \mu_i \theta_{ij} (n - 1_j + 1_i) \gamma(n_j), \quad n \in E, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\gamma(n_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } n_i > 0, \\ 0, & \text{если } n_i = 0. \end{cases}$$

Пусть $P(n)$ – функция L неизвестных параметров

$$P(n) = \prod_{i=1}^L Q(n_i). \quad (4)$$

Аналогично работе [5], показывается, что подстановка (4) обращает систему уравнений (3) в тождество, если $Q(n_i)$ имеет вид

$$Q(n_i) = \prod_{m=1}^{n_i} \left(\frac{\lambda_i(m)}{\mu_i} \right).$$

Теорема 1 обобщает результаты, полученные в работах [1, 5]. Видно, что если маршрутная матрица $\Theta = (\theta_{ij})$ не зависит от состояния n , и, следовательно, $\lambda_i = \lambda_i(n_i)$, $\forall n \in E$, система уравнений (1) и условие (2) принимают соответственно вид $\omega\Theta = \omega$ и $\sum \omega_i = 1$, которые имеют место для сетей массового обслуживания без управления.

Следствие. Для замкнутой сети массового обслуживания с управлением маршрутизацией, содержащей N требований одного класса, система уравнений (1) и условие (2) принимают соответственно вид

$$\omega_i(n_i) = \sum_{j=1}^L \omega_j(n_j + 1) \theta_{ji}(n - 1_i + 1_j), \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad n \in S(N, L), \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^L \sum_{n_i=0}^N \omega_i(n_i) = 1, \quad (6)$$

где $S(N, L)$ – множество состояний данной сети обслуживания.

ТЕОРЕМА 2. Стационарное распределение вероятностей состояний замкнутой сети массового обслуживания с управлением маршрутизацией определяется выражениями

$$P(n) = \frac{1}{G(N, L)} \prod_{i=1}^L \prod_{m=0}^{n_i} \left(\frac{\omega_i(m)}{\mu_i} \right), \quad n \in S(N, L),$$

где $G(N, L)$ – нормализующая константа, $\omega_i(n_i)$ определяются решением системы уравнений (5) с условием (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маликовский Ю. В., Якубович О. В. Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками I. Модели с одним типом заявок // Автоматика и телемеханика. 1998. № 1. С. 92 – 106.
2. Henderson W., Northcote B. S., Taylor P. G. State-dependent signalling in queueing network // Adv. Appl. Prob. 1994. Vol. 26. P. 436 – 455.
3. Boucherie R. J. Norton's equivalent for queueing networks comprised of quasi-reversible components linked by state-dependent routing // Performance Evaluation. 1998. Vol. 32. P. 83 – 99.

4. Митрофанов Ю. И. Основы теории сетей массового обслуживания. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993.
 5. Jackson J. R. Networks of waiting lines // Oper. Res. 1957. Vol. 5. P. 518 – 521.

УДК 517.51

П. А. Терехин

**НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА
ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА***

Общий подход к получению прямых и обратных теорем теории приближений, основанный на изучении одно- и многопараметрических групп операторов, разработан в статьях Н. П. Купцова [1] и А. П. Терехина [2, 3]. В то же время современные задачи приближения на действительных и комплексных многообразиях требуют рассмотрения представлений более общих групп (чем группы $(R, +)$ и $(R^n, +)$), действующих на многообразиях. Возникает задача распространения результатов работ [1–3] на случай представления T_g группы Ли G в банаховом пространстве E .

Предположим, что представление T_g удовлетворяет условиям:

- (1) $T_g f \rightarrow f$ при $g \rightarrow e$ для любого $f \in E$ (здесь e – единица группы G),
- (2) $\|T_g f\| = \|f\|$ для всех $g \in G$ и $f \in E$.

Теперь, следуя [2], определим аппарат приближения: аналоги классов Бернштейна целых функций (экспоненциального типа) конечной степени $\leq \sigma$.

Пусть X – алгебра Ли группы G , $|\cdot|$ – некоторая норма в X , $\exp : X \rightarrow G$ – экспоненциальное отображение.

Определение 1. Скажем, что вектор $f \in E$ принадлежит классу B_σ , если f является аналитическим вектором относительно представления T_g и целая вектор-функция $F(z), z = x + iy \in X + iX$, являющаяся продолжением функции $F(x) = T_{\exp(x)} f, x \in X$, имеет степень $\leq \sigma$:

$$\|F(z)\| \leq C e^{\sigma|y|}.$$

Пусть $Ad : G \rightarrow GL(X)$ – присоединенное представление группы G . Всюду в дальнейшем предполагается выполненным следующее

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-01-00123, программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123, и программы INTAS, грант № 99-00089.

ОСНОВНОЕ ТРЕБОВАНИЕ. Присоединенное представление группы Ли G равномерно ограничено:

$$|Ad(g)x| \leq const |x| \text{ для всех } g \in G \text{ и } x \in X.$$

Без ограничения общности полагаем $const = 1$, поскольку можно перейти к новой норме $|x|_1 = \sup_{g \in G} |Ad(g)x|$.

Такому основному требованию удовлетворяют, например, компактные группы Ли, абелевы группы Ли, а также их прямые произведения.

Пусть $D(x)$ – дифференциал представления T_g :

$$D(x)f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{\exp(tx)}f - f}{t}.$$

Пусть, далее, $E^r = \{f \in E : \exists D^{r_1}(x_1) \dots D^{r_k}(x_k)f, r_1 + \dots + r_k \leq r\}$ – множество всех « r -дифференцируемых» векторов и $E^\infty = \bigcap_{r \in N} E^r$ – пространство Гординга представления T_g .

ТЕОРЕМА 1 (неравенство Бернштейна). Пусть $k, r_1, \dots, r_k \in N$, $x_1, \dots, x_k \in X$.

Тогда для любого вектора $f \in B_\sigma$ справедливо неравенство

$$\left\| D^{r_1}(x_1) \dots D^{r_k}(x_k)f \right\| \leq \sigma^{r_1 + \dots + r_k} |x_1|^{r_1} \dots |x_k|^{r_k} \|f\|. \quad (*)$$

ТЕОРЕМА 2 (обращение неравенства Бернштейна). Если для всех $k, r_1, \dots, r_k \in N, x_1, \dots, x_k \in X$ вектор $f \in E^\infty$ удовлетворяет неравенству Бернштейна (*), то $f \in B_\sigma$.

ТЕОРЕМА 3. B_σ – замкнутое подпространство, инвариантное относительно операторов T_g и $D(x)$.

Схема доказательства. Сначала заметим, что пространство B_σ инвариантно относительно оператора T_g . Пусть $f \in B_\sigma$. Тогда $T_g f$ – аналитический вектор и вектор-функция $F_g(x) = T_{\exp(x)} T_g f$ допускает представление

$$F_g(x) = T_g T_{g^{-1} \exp(x) g} f = T_g T_{\exp(Ad(g^{-1})x)} f = T_g F(Ad(g^{-1})x),$$

где $F(x) = T_{\exp(x)} f$ – вектор-функция из определения 1. Здесь учли, что $g_t = g^{-1} \exp(tx) g$ – однопараметрическая группа с касательным вектором $Ad(g^{-1})x$. Таким образом, $F_g(z) = T_g F(Ad(g^{-1})z)$, $z = x + iy \in X + iX$ – продолжение функции $F_g(x)$ до целой функции на комплексном пространстве $X + iX$. Отсюда находим

$$\|F_g(z)\| = \|T_g F(Ad(g^{-1})z)\| = \|F(Ad(g^{-1})z)\| \leq C e^{\sigma |Ad(g^{-1})z|} = C e^{\sigma |y|}$$

(применили основное требование с $const = 1$). Следовательно, $T_g f \in B_\sigma$.

Теперь рассмотрим два высказывания:

$$\begin{aligned} P_1(k) : \forall x_1, \dots, x_k \in X \quad \forall f \in B_\sigma \quad \|D(x_1) \dots D(x_k) f\| \leq \sigma^k |x_1| \dots |x_k| \|f\|, \\ P_2(k) : f_n \in B_\sigma \wedge f_n \rightarrow f \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists D(x_1) \dots D(x_k) f \wedge D(x_1) \dots D(x_k) f_n \rightarrow D(x_1) \dots D(x_k) f. \end{aligned}$$

Высказывание $P(k) = P_1(k) \wedge P_2(k)$ доказывается по индукции. База индукции основана на результатах работы [2]: аналоге неравенства Бернштейна для инфинитезимального оператора однопараметрической группы. Далее, доказываются импликации $P_1(k) \wedge P_2(k) \Rightarrow P_1(k+1)$ и $P_1(k+1) \wedge P_2(k) \Rightarrow P_2(k+1)$. Этим установлена теорема 1. В предположениях теоремы 2 сходится ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{D^r(x)}{r!} f,$$

с необходимостью представляющий вектор-функцию $F(x) = T_{\exp(x)} f$. Полагая $z = x_0 + ix_1$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \|D^r(z)f\| &= \left\| \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r=0,1} i^\nu D(x_{\varepsilon_1}) \dots D(x_{\varepsilon_r}) f \right\| \leq \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r=0,1} \|D(x_{\varepsilon_1}) \dots D(x_{\varepsilon_r}) f\| \leq \\ &\leq \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r=0,1} \sigma^r |x_0|^{r-\nu} |x_1|^\nu \|f\| = \sigma^r (|x_0| + |x_1|)^r \|f\| = \sigma^r |z|^r \|f\|, \end{aligned}$$

где ν – количество единиц в последовательности $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$. Следовательно,

для целой вектор-функции $F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{D^r(z)}{r!} f$ справедлива оценка

$$\|F(z)\| \leq \|f\| e^{\sigma|z|}.$$

Поскольку $\|F(x)\| = \|f\|$, то $f \in B_\sigma$, что доказывает теорему 2. Что касается теоремы 3, то замкнутость пространства B_σ следует из высказывания $P_2(k)$ и обращения неравенства Бернштейна. Инвариантность пространства B_σ относительно оператора $D(x)$ следует из уже доказанной инвариантности относительно операторов T_g и замкнутости этого пространства.

В заключение следует отметить, что приведённые результаты могут быть обобщены на случай локальных групп Ли. На этом пути можно освободиться от основного предположения, которое необходимо в рассматриваемом глобальном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Купцов Н. П. Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23. Вып. 4. С.117 – 178.

2. Терехин А. П. Ограниченная группа операторов и приближение // Дифф. ур-ния и выч. матем. 1975. Вып. 2. С. 3 – 28.

3. Терехин А. П. Полугруппы операторов и смешанные свойства элементов банахова пространства // Матем. заметки. 1974. Т. 16. № 1. С. 107 – 115.

УДК 517.977

Н. Ю. Трошина

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Рассмотрим следующую дискретную задачу оптимального управления:

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

$$x(T) = x_T, \quad (3)$$

$$I(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} [x^*(t)Mx(t) + u^2(t)] \rightarrow \min. \quad (4)$$

Здесь T – фиксированный момент времени, $x(t) \in E^n (t = 0, \dots, T)$, $u(t) \in E^1 (t = 0, \dots, T-1)$, A, M – заданные матрицы размерности $n \times n$, причем, M – положительно определённая, b, x_0, x_T – заданные n -векторы; $x = \{x(0), \dots, x(T)\}$ – дискретная траектория, $u = \{u(0), \dots, u(T-1)\}$ – дискретное управление, знак * означает транспонирование.

Для рассматриваемой задачи справедлив принцип максимума Понtryгина:

ТЕОРЕМА 1. Если (x, u) – решение задачи (1) – (4) (т.е. оптимальная пара), то существуют векторы $\psi(t) \in E^n (t = 0, \dots, T)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) + Mx(t),$$

и при этом оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = -b^* \psi(t+1), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Доказательство можно найти в [1].

Таким образом, краевая задача принципа максимума имеет вид

$$x(t+1) = Ax(t) - bb^* \psi(t+1), \quad (5)$$

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) + Mx(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (6)$$

$$x(0) = x_0, \quad (7)$$

$$x(T) = x_T. \quad (8)$$

Предположим, что матрица A неособенная, и найдём решение этой краевой задачи. Сначала покажем, что при всех $t = 0, \dots, T-1$ решение дискретной системы (5), (6) можно выразить через $x(T), \psi(T)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $(x(t), \psi(t))$ ($t=0, \dots, T-1$) – решение дискретной системы (5), (6), то выполняются следующие соотношения:

$$x(t) = A_t x(T) + B_t \psi(T), t = 0, \dots, T-1, \quad (9)$$

$$\psi(t) = C_t x(T) + D_t \psi(T), t = 0, \dots, T-1, \quad (10)$$

где коэффициенты A_t, B_t, C_t, D_t определяются из рекуррентных формул

$$A_{T-1} = A^{-1}, \quad B_{T-1} = A^{-1}bb^*, \quad (11)$$

$$C_{T-1} = MA_{T-1}, \quad D_{T-1} = A^* + MB_{T-1}, \quad (12)$$

$$A_t = A^{-1}(A_{t+1} + bb^*C_{t+1}), \quad B_t = A^{-1}(B_{t+1} + bb^*D_{t+1}), \quad t=0, \dots, T-2, \quad (13)$$

$$C_t = A^*C_{t+1} + MA_{t+1}, \quad D_t = A^*D_{t+1} + MB_{t+1}, \quad t=0, \dots, T-2. \quad (14)$$

Доказательство. Из уравнения (5) при $t = T-1$ найдем

$$x(T-1) = A^{-1}x(T) + A^{-1}bb^*\psi(T).$$

Отсюда получим

$$x(T-1) = A_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(T),$$

где A_{T-1}, B_{T-1} те же, что и в (11), то есть соотношение (9) верно при $t = T-1$.

Используя найденное значение $x(T-1)$, из (6) при $t = T-1$ определим $\psi(T-1)$:

$$\psi(T-1) = A^*\psi(T) + M[A_{T-1}x(T) + D_{T-1}\psi(T)].$$

Согласно (12), будем иметь

$$\psi(T-1) = C_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(T),$$

то есть (10) верно для $t = T-1$.

Найденные значения $x(T-1), \psi(T-1)$ подставим в (5) и найдём $x(T-2)$:

$$x(T-2) = A^{-1}[A_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(T) + bb^*(C_{T-1}x(T) + D_{T-1}\psi(T))].$$

Преобразуя полученный результат и используя формулы (13) для $t = T-2$, получим

$$x(T-2) = A_{T-2}x(T) + B_{T-2}\psi(T),$$

то есть соотношение (9) выполняется при $t = T-2$.

Аналогично можно показать, что соотношение (10) выполняется для $t = T-2$.

Предположим, что утверждение теоремы верно для некоторого момента времени t ($0 < t < T-2$), и покажем, что оно верно для момента $t-1$.

Из (5) имеем

$$x(t-1) = A^{-1}[x(t) + bb^*\psi(t)].$$

Подставляя сюда значения $(x(t), \psi(t))$ из (9) и (10), получим

$x(t-1) = A^{-1}[A_t x(T) + B_t \psi(T) + bb^* C_t x(T) + bb^* D_t \psi(T)] = A_{t-1} x(T) + B_{t-1} \psi(T)$,
где

$$A_{t-1} = A^{-1}(A_t + bb^* C_t), \quad B_{t-1} = A^{-1}(B_t + bb^* D_t).$$

Следовательно, соотношение (9) верно для момента $t-1$. Аналогично для $\psi(t-1)$ из (6), учитывая (9), (10), будем иметь

$$\begin{aligned} \psi(t-1) &= A^* \psi(t) + Mx(t) = A^*[C_t x(T) + D_t \psi(T)] + M[A_t x(T) + B_t \psi(T)] = \\ &= C_{t-1} x(T) + D_{t-1} \psi(T), \end{aligned}$$

где $C_{t-1} = A^* C_t + M A_t$, $D_{t-1} = A^* D_t + M B_t$.

Теорема доказана.

Запишем соотношение (9) для $t=0$:

$$x(0) = A_0 x(T) + B_0 \psi(T). \quad (15)$$

Предположим теперь, что матрица B_0 невырожденная. Тогда значение $\psi(T)$ можно выразить через значения траектории на концах, а затем найти зависимость решения $(x(t), \psi(t))$ системы (5) – (6) в любой момент времени от x_0, x_T . Тем самым краевая задача принципа максимума будет полностью решена. Следующая теорема дает алгоритм её решения.

ТЕОРЕМА 3. Если $(x(t), \psi(t))$ ($t=0, \dots, T-1$) – решение краевой задачи (5) – (8), то выполняются следующие соотношения:

$$x(t) = B_t B_0^{-1} x_0 + (A_t - B_t B_0^{-1} A_0) x_T, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (16)$$

$$\psi(t) = D_t B_0^{-1} x_0 + (C_t - D_t B_0^{-1} A) x_T, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (17)$$

$$\psi(T) = B_0^{-1} (x_0 - A_0 x_T), \quad (18)$$

где коэффициенты A_t, B_t, C_t, D_t определяются из рекуррентных формул (11) – (14).

Доказательство. Очевидно, что соотношение (18) непосредственно следует из (15) и краевых условий (7), (8). Далее, равенство (16) легко получить, если подставить (18) в (9):

$$x(t) = A_t x_T + B_t B_0^{-1} (x_0 - A_0 x_T) = B_t B_0^{-1} x_0 + (A_t - B_t B_0^{-1} A_0) x_T, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Аналогично (17) можно получить из (10) и (18):

$$\psi(t) = C_t x_T + D_t B_0^{-1} (x_0 - A_0 x_T) = D_t B_0^{-1} x_0 + (C_t - D_t B_0^{-1} A) x_T, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трошина Н. Ю. Принцип максимума и задача синтеза для линейных дискретных систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1997. 144 с.

**ПОЧТИ ВСЮДУ СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ПО СИСТЕМАМ,
ОБРАЗОВАННЫМ ИЗ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ
В $S(0, 1)$**

Рассматриваются функциональные системы вида

$$\{\psi_{n,k}(t)\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad (1)$$

где $\psi(t) \geq 0$, $t \in (0, 1)$, $\psi \in C(0, 1)$, $\psi(t) = 0$, $t \notin (0, 1)$, $\|\psi\|_\infty \neq 0$, в пространстве $S(0, 1)$ почти всюду конечных измеримых функций.

П. Л. Ульянов [1] исследовал систему Фабера-Шаудера в классах $\varphi(L)$ и сформулировал следующую задачу. Для каких других функциональных систем возможно представление в виде ряда элементов классов $\varphi(L)$? В статье рассматривается эта задача П. Л. Ульянова [1, 2].

Исследуется, является ли данная система функций системой представления в пространстве $S(0, 1)$ в смысле сходимости почти всюду? Полученные результаты рассматриваются в пространстве $S(0, 1)$, а в работе [3] рассматриваются более общие системы, но в пространствах L^p , $0 < p < \infty$. В работе [4] получены результаты для подсистем системы Фабера-Шаудера в пространствах E_φ , а в [5] для подсистем системы Фабера-Шаудера в смысле сходимости почти всюду. Подсистемы системы Фабера-Шаудера в смысле сходимости по φ -расстоянию рассмотрены в [6]. Заметим, что система Фабера-Шаудера без первых двух элементов является частным случаем системы (1) для исследуемых нами вопросов.

Приведём понятия и утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Следуя А. А. Талаляну [7], дадим

Определение 1. Система элементов $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ F -пространства $E(E, \|\cdot\|)$, где множество E вещественное [8, с. 36, 81], называется системой представления (с. п.) в пространстве E , если для произвольного элемента $f \in E$

существует ряд $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| = 0,$$

где $\{c_k\}$ – последовательность действительных чисел.

Определение 2. Система элементов $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ F -пространства $E(E, \|\cdot\|)$, где множество E вещественное, называется системой представления (с. п.) в пространстве E в смысле сходимости почти всюду (п. в.), если для про-

извольного элемента $f \in E$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$, где $\{c_k\}$ – последовательность действительных чисел, который сходится п. в. к f .

Пусть Φ совокупность чётных, конечных, неубывающих на полуправой $[0, \infty)$ функций таких, что для функции φ выполнены условия

$$\varphi(t) \in \Phi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) > 0, \quad t > 0, \quad \varphi(t) \in C[0, \infty). \quad (2)$$

Через $\varphi(L)$ будем обозначать множество всех тех измеримых функций $f(x)$ на $(0, 1)$, для которых

$$\int_0^1 \varphi(f(t)) dt < \infty$$

(см. [1], [9, с. 1 – 5]).

Если f и g принадлежат классу $\varphi(L)$, то величину $\rho_{\varphi}(f, g) = \int_0^1 \varphi(f - g) dt$ условно назовём φ -расстоянием. Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ из класса $\varphi(L)$ называется сходящейся по φ -расстоянию к функции $f \in \varphi(L)$, если $(f - f_n) \in \varphi(L)$ для $n \geq n_0$ при некотором $n_0 \in N$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\varphi}(f - f_n) = 0.$$

Класс $\varphi(L)$ в общем случае не является линейным. Если класс $\varphi(L)$ пополнить по линейности, то получим множество $\varphi^*(L)$, в котором можно ввести квазинорму (φ -норму) элементов с помощью функционала

$$\|f\|_{\varphi} = \inf \left\{ u > 0 : \int_0^1 \varphi\left(\frac{f(t)}{u}\right) dt < u \right\}, \quad f \in \varphi^*(L), \quad (3)$$

так, что $\varphi^*(L)$ станет F -пространством. В этом случае из сходимости по φ -норме следует сходимость по φ -расстоянию для элементов из класса $\varphi(L)$ (см. [9]).

Через E_{φ} обозначим замыкание в $\varphi^*(L)$ множества ограниченных ступенчатых функций.

Пространство E_{φ} является сепарабельным F -пространством (см. [9]).

ТЕОРЕМА 1. Подсистема $\{\psi_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ системы

$$\{\psi_{n,k}(t)\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

где $\psi(t) \geq 0$, $t \in (0, 1)$, $\psi \in C(0, 1)$, $\psi(t) = 0$, $t \notin (0, 1)$, $0 \neq \|\psi\|_{\infty} < \infty$, является системой представления в E_{φ} тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m > N :$$

$$mes \left\{ t : \sum_{i=N}^m \psi_{n_i}(t) \neq 0 \right\} > 1 - \varepsilon.$$

Из доказательства теоремы 1 и того, что $S(0,1) = \sum_{\varphi \in \Phi} E_\varphi$, следует

ТЕОРЕМА 2. Подсистема $\{\psi_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ системы

$$\{\psi_{n,k}(t)\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

где $\psi(t) \geq 0$, $t \in (0,1)$, $\psi \in C(0,1)$, $\psi(t) = 0$, $t \notin (0,1)$, $0 \neq \|\psi\|_\infty < \infty$, является системой представления в $S(0,1)$ в смысле сходимости почти всюду тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m > N : \quad mes \left\{ t : \sum_{i=N}^m \psi_{n_i}(t) \neq 0 \right\} > 1 - \varepsilon.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ульянов П. Л. Представление функций рядами и классы $\Phi(L)$ // Успехи матем. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 3 – 52.
2. Ульянов П. Л. Замечания о сходимости в среднем // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 6. С. 807 – 816.
3. Filippov V., Oswald P. Representation in L^p by series of translates and dilates of one function // J. appr. Theory. 1995. Vol. 82. № 1. P. 15 – 29.
4. Филиппов В. И. О подсистемах системы Фабера-Шаудера в пространствах E_φ // Изв. вузов. Сер. Математика. 1991. № 2. С. 78 – 85.
5. Zink R. On a theorem of Goffman concerning Schauder series // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 21. № 3. P. 523 – 529.
6. Кротов В. Г. Представление измеримых функций по системе Фабера-Шаудера и универсальные ряды // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1977. Т. 41. № 1. С. 215–229.
7. Талалян А. А. Об аппроксимационных свойствах некоторых неполных систем // Матем. сб. 1981. Т. 115(157). № 4. С. 499 – 541.
8. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
9. Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces // Lecture Notes in Math. № 1034. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1983.

УДК 514.112.4; 511.216

В. Е. Фирстов

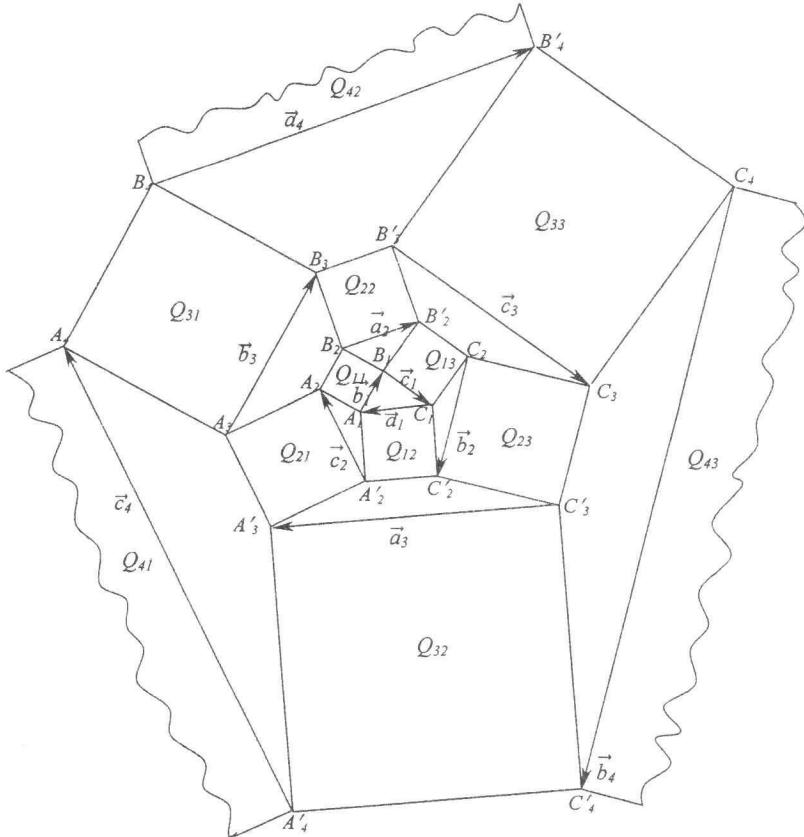
ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА, РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ

В статье, исходя из обобщения построений при доказательстве теоремы Пифагора, устанавливается связь между линейными рекуррентными уравнениями и алгебраическими кривыми.

1. Пусть на сторонах $\Delta A_1B_1C_1$ строятся квадраты $Q_{11}; Q_{12}; Q_{13}$, подобно тому, как это делал Евклид при доказательстве теоремы Пифагора, и далее реализуется цепочка построений квадратов по схеме

$\Delta A_1B_1C_1 \rightarrow (Q_{11}; Q_{12}; Q_{13}) \rightarrow (Q_{21}; Q_{22}; Q_{23}) \rightarrow \dots \rightarrow (Q_{ki}; Q_{k2}; Q_{k3}) \rightarrow \dots$ (1)

так, как показано на рисунке. Сеть квадратов (1) назовем обобщёнными пифагоровыми построениями (ОПП), в которых выделяются шесть серий квадратов: серии $Q_{11}; Q_{31}; \dots; Q_{2j-1,1}$ назовем нечётными, а серии $Q_{21}; Q_{41}; \dots; Q_{2j,1}$ – чётными, где первый индекс определяет шаг ОПП, а второй индекс $l=1; 2; 3$ указывает место квадрата в этом шаге (см. рисунок).



В результате доказываются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1 (обобщённая теорема Пифагора). Если $\Delta A_1B_1C_1$ – прямоугольный ($\angle A = 90^\circ$), то при ОПП выполняются соотношения

$$S(Q_{kl}) + S(Q_{k2}) = S(Q_{k3}), \quad (2)$$

где $k = 2j - 1, j \in N$, $S(Q_{kl})$ – площадь квадрата Q_{kl} .

ТЕОРЕМА 2. При ОПП соответствующие стороны квадратов одноимённых нечётных и чётных серий образуют рекуррентные последовательности, описываемые уравнениями

$$\overrightarrow{u_{2n+3}} = 5\overrightarrow{u_{2n+1}} - \overrightarrow{u_{2n-1}}, \quad \overrightarrow{v_{2(n+2)}} = 5\overrightarrow{v_{2(n+1)}} - \overrightarrow{v_{2n}}, \quad (3)$$

причём, векторы в уравнениях (3) – сонаправленные;

$$\overrightarrow{u_{2n-1}} \in \{\overrightarrow{a_{2n-1}}; \overrightarrow{b_{2n-1}}; \overrightarrow{c_{2n-1}}\}; \quad \overrightarrow{v_{2n}} \in \{\overrightarrow{a_{2n}}; \overrightarrow{b_{2n}}; \overrightarrow{c_{2n}}\}, \quad \overrightarrow{u_3} = 4\overrightarrow{u_1}, \quad \overrightarrow{v_4} = 5\overrightarrow{v_2}.$$

ТЕОРЕМА 3. При ОПП одноимённые вершины квадратов соответствующих серий (например, $A_1; A_3; \dots; A_{2j-1}$) располагаются по ветвям соответствующих гипербол.

Например, вершины $A_1; A_3; \dots; A_{2j-1}$ в базисе $(\overrightarrow{A_1 A_2}; \overrightarrow{A_2 A_3})$ лежат на гиперболе $x^2 + 3xy - 3y^2 + x - 2y = 0$.

2. Рассмотрим рекуррентное уравнение k -го порядка

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n, \quad (4)$$

с числовыми коэффициентами $a_1; \dots; a_k$. Пусть $\{\alpha_{n1}\}; \dots; \{\alpha_{nk}\}$ – семейство последовательностей, порождённых уравнением (4) с помощью векторов $\overrightarrow{\alpha_1}(\alpha_{11}; \dots; \alpha_{k1}); \dots; \overrightarrow{\alpha_k}(\alpha_{1k}; \dots; \alpha_{kk})$ из пространства решений W_k уравнения (4) в базисе $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \dots; \overrightarrow{e_k})$. В пространстве W_k определим вектор-функцию

$$\overrightarrow{r_n} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\alpha_{ij} \overrightarrow{e_j}) \quad (5)$$

и исследуем её координаты $(x_{n1}; \dots; x_{nk})$ в зависимости от выбранных векторов $\overrightarrow{\alpha_1}; \dots; \overrightarrow{\alpha_k}$ и дискриминанта D характеристического уравнения для (4).

Если $D \neq 0$, то члены выбранных последовательностей определяются выражением [1]:

$$\overrightarrow{\alpha_n} = A \overrightarrow{z_n}, \quad (6)$$

где $\overrightarrow{\alpha_n}(\alpha_{n1}; \dots; \alpha_{nk}); \overrightarrow{z_n}(z_1^{n-1}; \dots; z_k^{n-1}); z_l, l = \overline{1; k}$ – корни характеристического уравнения для (4); $A: C^k \rightarrow W_k$ – линейный оператор с матричными элементами $A_{lj}, 1 \leq l; j \leq k$, определяемыми значениями $\alpha_{n1}; \dots; \alpha_{nk}, 1 \leq n \leq k$.

Пусть оператор A – невырожденный и $a_1 + a_2 + \dots + a_k \neq 1$. Тогда для координат $\overrightarrow{r_n}$ имеем следующее выражение:

$$x_{nj} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} = \sum_{l=1}^k \frac{A_{lj}(z_l^{n-1} - 1)}{z_l - 1}, \quad j = \overline{1; k}. \quad (7)$$

После обращения (7) и последующих преобразований получаем следующее уравнение алгебраической кривой k -го порядка [2]:

$$\prod_{l=1}^k [(z_l - 1) \sum_{j=1}^k (X_j \Delta_{lj})] = 1, \quad (8)$$

где $X_j = [(-1)^{k+1} a_k]^{-\frac{n}{k}} \cdot \frac{x_{nj} + t_j}{\Delta}$; Δ – определитель матрицы оператора A ,

Δ_{lj} – соответствующие алгебраические дополнения для A_{lj} , t_j определяются из системы

$$(z_l - 1) \sum_{j=1}^k (t_j \Delta_{lj}) = \Delta, \quad 1 \leq l \leq k.$$

Не вдаваясь в подробности [2], отметим, что случай $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$ снижает порядок алгебраической кривой (8) на 1. Случай, когда оператор A – вырожденный ранга $0 \leq s < k$, если применить известную теорему о структуре вырожденного линейного оператора [3], приводит к алгебраической кривой типа (8), но порядка s .

Анализируя уравнение (8), можно видеть, что для уравнения (4) с рациональными коэффициентами при значениях $k | n$ получаются рациональные решения и таким образом открывается возможность отыскания диофантовых решений алгебраических уравнений определённого класса с помощью рекуррентных последовательностей.

Случай, когда $D=0$, в принципе, рассматривается аналогично, но несколько иначе, так как представление (6) будет иным (см. [2]).

В заключение отметим, что алгебраические образы рекуррентных уравнений (4) при $k=2$ – это конические сечения (в зависимости от дискриминанта D), включая вырожденные случаи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. М.: Наука, 1983.
2. Фирстов В. Е. Рекуррентные последовательности и их пространственные алгебраические образы. Саратов, 2000. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 10.05.00. № 1352-В00.
3. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.

УДК 517.984

B. A. Халова

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим оператор вида

$$Af(x) = A_0 f(x) + \sum_{k=1}^m g_k(x)(f, v_k), \quad x \in [0,1], \quad (1)$$

где $A_0 f = \alpha_1 \int_0^x (x-t)f(t)dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} (1-x-t)f(t)dt$, $(f, v_k) = \int_0^1 f(t)v_k(t)dt$,

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

$g_k(x) \in C^2[0,1]$, $v_k(x) \in C^2[0,1]$, последовательности $\{g_k(x)\}_1^m$, $\{v_k(t)\}_1^m$ линейно независимы, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$.

В настоящей статье получена явная формула резольвенты оператора вида (1), которая может быть использована при изучении спектральных разложений таких операторов.

Обозначим $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ и $R_\lambda^0 = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$ соответственно резольвенты Фредгольма оператора A и оператора A_0 .

Рассмотрим следующую краевую задачу в пространстве вектор-функций:

$$z^{(n)}(x) - \lambda Dz(x) = BF(x), \quad (2)$$

$$U_j(z) = Pz^{(j)}(0) + Qz^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \quad (3)$$

$$\text{где } D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 & d_1 \\ d_2 & -d_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} d_2 & d_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d_2 & d_1 \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad d_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T, \quad z_1(x) = z_2(1-x), \\ F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T, \quad F_1(x) = f(x), \quad F_2(x) = f(1-x).$$

$$\text{Обозначим } U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad U_{ij} = U_i(V_j), \quad \{V_j(x, \lambda)\}_{j=1}^2 \text{ – фундамен-}$$

тальная система решений однородного матричного уравнения (2),
 $U(g) = \begin{pmatrix} U_1(g) \\ U_2(g) \end{pmatrix}$. Аналогично рассуждениям работы [1] получаем

ЛЕММА. Если λ таково, что U^{-1} существует, то краевая задача (2) – (3) разрешима и ее решение имеет вид

$$z(x, \lambda) = -(V_1(x, \lambda)V_2(x, \lambda))U^{-1} \int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda))BF(t)dt + \int_0^1 g(x, t, \lambda)BF(t)dt, \quad (4)$$

где $\int_0^1 g(x, t, \lambda)BF(t)dt$ – некоторое частное решение уравнения (2), а $U_x(\cdot)$

означает, что краевые условия (3) применяются по переменной x .

ТЕОРЕМА 1. Если λ таково, что U^{-1} существует, то R_λ^0 существует, и имеет место формула $R_\lambda^0 f(x) = z_1(x, \lambda) + z_2(x, \lambda)$, где $z_1(x, \lambda), z_2(x, \lambda)$ – компоненты решения (4).

Пусть оператор (1) обратим. Тогда [2] отличен от нуля определитель $\Delta = \det \|\gamma_{\mu k}\|_{\mu, k=1}^m$, где $\gamma_{\mu k} = D^{i_\mu} T g_k(0)$, $\mu = \overline{1, s}$, $0 \leq i_1 < i_2 \leq 1$, $k = \overline{1, m}$, $\gamma_{\mu k} = \beta \delta_{k, j_\mu} + (D^2 T g_k, v_{j_\mu})$, $\mu = \overline{s+1, m}$, $1 \leq j_{s+1} < \dots < j_m \leq m$, $k = \overline{1, m}$, s – фиксированное целое число, такое, что $0 \leq s \leq 2$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Обозначим $Sf(x) = f(1-x)$, $T = \alpha_1 E - \alpha_2 S$, $D = \frac{d}{dx}$, $N_{\lambda,i}^0 = D^i T R_\lambda^0$,

$N_{\lambda,i} = D^i T R_\lambda$, $\tilde{g}_k(x) = D^2 T g_k(x)$, Δ_{ij} – алгебраические дополнения элементов определителя Δ ,

$$\Omega(\lambda) = \det \left\| \omega_{p\mu} \right\|_{p,\mu=1}^m, \quad \omega_{p\mu} = \delta_{p\mu} - \frac{1}{\beta \cdot \Delta} \sum_{k=1}^m N_{\lambda,i_p}^0 \tilde{g}_k(0) \Delta_{\mu k}, \quad p = \overline{1,s}, \quad \mu = \overline{1,m},$$

$$\omega_{p\mu} = \delta_{p\mu} - \frac{1}{\beta \cdot \Delta} \sum_{k=1}^m \left(N_{\lambda,2}^0 \tilde{g}_k, v_{j_p} \right) \Delta_{\mu k}, \quad p = \overline{s+1,m}, \quad \mu = \overline{1,m}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $\Omega(\lambda) \neq 0$, то R_λ существует и имеет место формула

$$R_\lambda f(x) = R_\lambda^0 f(x) + \frac{1}{\beta \cdot \Delta \cdot \Omega(\lambda)} \sum_{\mu,k=1}^m R_\lambda^0 \tilde{g}_k(x) \Delta_{\mu k} \times \\ \times \left\{ \sum_{p=1}^s N_{\lambda,i_p}^0 f(0) \Omega_{p\mu}(\lambda) + \sum_{p=s+1}^m \left(N_{\lambda,2}^0 f, v_{j_p} \right) \Omega_{p\mu}(\lambda) \right\}, \quad (5)$$

$\Omega_{p\mu}(\lambda)$ – алгебраические дополнения элементов определителя $\Omega(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $y = R_\lambda f$. Тогда $y(x) - \lambda A y(x) = Af(x)$. Отсюда

$$D^2 T y(x) - \beta \psi(x, \lambda) = \sum_{k=1}^m (\psi, v_k) D^2 T g_k(x), \quad (6)$$

$$D^i T y(0) = \sum_{k=1}^m (\psi, v_k) D^i T g_k(0), \quad i = 0, 1, \quad (7)$$

где

$$\psi(x, \lambda) = \lambda y(x) + f(x). \quad (8)$$

Умножая (6) скалярно на v_j , $j = \overline{1,m}$, получим

$$(D^2 T y, v_j) = \beta(\psi, v_j) + \sum_{k=1}^m (\psi, v_k) (D^2 T g_k, v_j), \quad j = \overline{1,m}. \quad (9)$$

Возьмем i_μ , $\mu = \overline{1,s}$ соотношения из (7) и добавим к ним j_μ , $\mu = \overline{s+1,m}$ соотношения из (9). Определитель этой системы есть $\Delta \neq 0$. Поэтому по формулам Крамера

$$(\psi, v_k) = \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{\mu=1}^s \Delta_{\mu k} D^{i_\mu} T y(0) + \sum_{\mu=s+1}^m \Delta_{\mu k} (D^2 T y, v_{j_\mu}) \right], \quad k = \overline{1,m}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (6) и учитывая (8), получим

$$D^2 Ty(x) - \beta \lambda y(x) =$$

$$= \beta f(x) + \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^m \tilde{g}_k(x) \left[\sum_{\mu=1}^s \Delta_{\mu k} D^{i_\mu} Ty(0) + \sum_{\mu=s+1}^m \Delta_{\mu k} (D^2 Ty, v_{j_\mu}) \right].$$

Применяя к обеим частям R_λ^0 , и учитывая, что $\beta \neq 0$ и $y(x) = R_\lambda f(x)$, получим

$$\begin{aligned} R_\lambda f(x) &= R_\lambda^0 f(x) + \frac{1}{\beta \cdot \Delta} \sum_{k=1}^m R_\lambda^0 \tilde{g}_k(x) \times \\ &\times \left[\sum_{\mu=1}^s \Delta_{\mu k} N_{\lambda, i_\mu} f(0) + \sum_{\mu=s+1}^m \Delta_{\mu k} (N_{\lambda, 2} f, v_{j_\mu}) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) имеем

$$\begin{aligned} N_{\lambda, i_p} f(0) &= N_{\lambda, i_p}^0 f(0) + \frac{1}{\beta \cdot \Delta} \sum_{k=1}^m N_{\lambda, i_p}^0 \tilde{g}_k(0) \times \\ &\times \left[\sum_{\mu=1}^s \Delta_{\mu k} N_{\lambda, i_\mu} f(0) + \sum_{\mu=s+1}^m \Delta_{\mu k} (N_{\lambda, 2} f, v_{j_\mu}) \right], \quad p = \overline{1, s}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (N_{\lambda, 2} f, v_{j_p}) &= (N_{\lambda, 2}^0 f, v_{j_p}) + \frac{1}{\beta \cdot \Delta} \sum_{k=1}^m (N_{\lambda, 2}^0 \tilde{g}_k, v_{j_p}) \times \\ &\times \left[\sum_{\mu=1}^s \Delta_{\mu k} N_{\lambda, i_\mu} f(0) + \sum_{\mu=s+1}^m \Delta_{\mu k} (N_{\lambda, 2} f, v_{j_\mu}) \right], \quad p = \overline{s+1, m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Определитель системы (12) – (13) есть $\Omega(\lambda)$. Найдя отсюда $N_{\lambda, i_\mu} f(0)$, $\mu = \overline{1, s}$ и $(N_{\lambda, 2} f, v_{j_\mu})$, $\mu = \overline{s+1, m}$ по формулам Крамера и подставив их в (11), придем к (5). Обратно. Пусть $\Omega(\lambda) \neq 0$. Тогда непосредственной проверкой получаем, что правая часть (5) есть R_λ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости интегральных операторов с переменным пределом интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции. 2001. Т. 2. № 1. С. 60 – 72.
2. Халова В. А. Задача обращения одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 125 – 127.

**ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
В МЕТОДЕ ТИХОНОВА***

В данной статье получены условия согласования параметра регуляризации с погрешностью исходных данных, необходимые и достаточные для сходимости приближенных решений к точному в методе регуляризации А. Н. Тихонова для трёх классов уравнений первого рода.

Пусть мы имеем уравнение первого рода

$$Au = f, \quad (1)$$

где $A \in (C^{(l)}[a,b] \rightarrow L_2[a,b])$, A^{-1} существует, но неограничен, а правая часть задана её δ -приближением $f_\delta(x)$ в $L_2[a,b]$.

Рассмотрим метод регуляризации Тихонова l -го порядка гладкости [1]. Обозначим через $R_{\alpha,p}$, $p=0,1,\dots,l$ регуляризирующие семейства операторов, обеспечивающих равномерную сходимость к $u^{(p)}(x)$, и рассмотрим величины

$$\Delta(\delta, R_{\alpha,p}, u) = \sup \left\{ \left\| R_{\alpha,p} f_\delta - u^{(p)} \right\|_{C[a,b]} : \|f_\delta - Au\|_{L_2} \leq \delta \right\}, \quad p = 0, \dots, l.$$

Далее рассмотрим три типа уравнения (1):

а) с оператором вложения из $C^{(l)}[-\pi, \pi]$ в $L_2[-\pi, \pi]$ при дополнительном условии: $u(-\pi) = u(\pi)$ [2];

б) с интегральным оператором, ядро которого есть функция Грина обыкновенного линейного дифференциального оператора порядка m общего вида [3];

в) с интегральным оператором, ядро которого терпит разрыв на линии $t = x$ при дополнительных условиях, приведенных в [4].

В последнем случае считаем $l = 0$; в случаях б) и в) считаем $[a,b] = [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы $\Delta(\delta, R_{\alpha,p}, u) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, необходимо и достаточно так согласовать α с δ , чтобы $\delta(\alpha(\delta))^{-\gamma_p} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, где $\gamma_p = (2p+1)[4(l+1)]^{-1}$ в случае а); $\gamma_p = [2(m+p)+1][4(m+l+1)]^{-1}$ в случае б); $\gamma_p = \frac{3}{8}$ в случае в); $p = 0, 1, \dots, l$ в случаях а) и б) и $p = 0$ в случае в).

Приведём схему доказательства.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00237 и программы “Ведущие научные школы”, проект № 00-15-96123.

Известно [5], что необходимым и достаточным условием сходимости $\Delta(\delta, R_{\alpha,p}, u) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ является такое согласование α с δ , при котором $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\|R_{\alpha,p}\|_{L_2 \rightarrow C} \delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Для метода регуляризации Тихонова справедливы следующие представления [3]:

$$\|R_{\alpha,p}\|_{L_2 \rightarrow C} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \sup_{a \leq x \leq b} \left(\int_a^b K_\alpha(x, \xi) \frac{\partial^p}{\partial x^p} g(x, \xi, \alpha) d\xi \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $K_\alpha(x, \xi)$ – ядро оператора $R_{\alpha,0}A$, $g(x, \xi, \alpha)$ определена в [3].

На основании этого представления для указанных типов уравнений получены двусторонние оценки, асимптотические при $\alpha \rightarrow 0$:

$$C_1 \alpha^{-\gamma_p} \leq \|R_{\alpha,p}\|_{L_2 \rightarrow C} \leq C_2 \alpha^{-\gamma_p},$$

γ_p – приведены в теореме.

Из указанных оценок вытекает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49 – 52.
2. Хромова Г. В. О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1993. № 1. С. 13 – 18.
3. Хромова Г. В. Об оценке погрешности метода регуляризации Тихонова для интегральных уравнений с ядром Грина // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1992. № 4. С. 22 – 27.
4. Хромова Г. В. О методе регуляризации Тихонова для интегрального уравнения с разрывным ядром // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тезисы докл. конф. Москва. 1998. М: Изд-во МГУ. С. 87.
5. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

УДК 517.5

В. И. Шевцов

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Системы экспонент изучались многими математиками. Фундаментальные исследования последовательностей полиномов из экспонент проведены А. Ф. Леонтьевым [1, 2].

Пусть $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ – целая функция порядка ρ , $0 < \rho < 1$. Обозначим через C_ρ класс бесконечно дифференцируемых на отрезке $[-1;1]$ функций таких, что

$$\forall f \in C_\rho \quad \exists m_n \quad \forall n \geq 0 \quad |f^{(n)}(x)| \leq A_f^{n+1} m_n, \quad x \in [-1;1],$$

где A_f – некоторая постоянная, которая зависит только от функции $f(x)$, $\{m_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел такая, что выполнено условие

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln m_n}{n \ln n} < \frac{1}{\rho}.$$

Обозначим нули функции $L(\lambda)$ через $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, расположив их в порядке неубывания их модулей. Будем предполагать, что все нули функции $L(\lambda)$ простые. Рассмотрим систему экспонент

$$e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}, \dots, e^{\lambda_k z}, \dots \quad (1)$$

В данной статье рассматривается задача о построении функции $F(x) \in C_\rho$ такой, что $F(x) \neq 0$ и выполнено следующее условие:

$$\int_{-1}^1 F(x) e^{\lambda_k x} dx = 0, \quad \forall k \in N. \quad (2)$$

Для построения такой функции положим

$$L_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^n. \quad (3)$$

Функция $L_1(\lambda)$ – целая порядка не выше ρ .

Рассмотрим интерполирующую функцию

$$\omega_{L_1}(\mu, f, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) f^{(n)}(x), \quad x \in [-1;1], \quad (4)$$

где $a_n(\mu)$ – тейлоровские коэффициенты функции

$$\frac{L_1(\mu) - L_1(t)}{\mu - t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) t^n.$$

Свойства интерполирующей функции (4) подробно изучены в [3, 4]. Отметим некоторые из этих свойств, которые необходимы в дальнейшем.

1. Если $f \in C_\rho$, то $\omega_{L_1}(\mu, f, x)$ является целой функцией комплексного переменного μ , $\forall x \in [-1;1]$.

2. Если $f \in C_\rho$, тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \omega_{L_1}(\mu, f, 0) e^{\mu x} + e^{\mu x} \int_0^x M_{L_1}[f(t)] e^{-\mu t} dt = \\ = \omega_{L_1}(\mu, f, x) + L_1(\mu) e^{\mu x} \int_0^x f(t) e^{-\mu t} dt, \end{aligned} \quad (5)$$

$x \in [-1;1]$, где

$$M_{L_1}[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} d_n f^{(n)}(x). \quad (6)$$

Перейдем к построению функции $F(x) \in C_p$ такой, что выполнено (2). Положим $A_n = (n+1)^{(n+1)\alpha}$, $1 < \alpha < \frac{1}{p}$. Ясно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{A_{n+1}} < \infty.$$

Поэтому существует неотрицательная чётная бесконечно дифференцируемая на отрезке $[-1;1]$ функция такая, что

$$1) \Phi(\phi) > 0, \Phi^{(n)}(\pm 1) = 0 (n=0,1,2,\dots);$$

$$2) |\Phi^{(n)}(x)| \leq B_\Phi^{n+1} A_n, \quad x \in [-1;1],$$

где B_Φ – некоторая постоянная, которая зависит только от функции $\Phi(x)$ [5, с.105].

Положим, далее,

$$F(x) = M_{L_1}[\Phi(x)]. \quad (7)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА. Функция $F(x)$, определяемая равенством (7), принадлежит классу C_p и выполнено следующее условие:

$$\int_{-1}^1 F(x) e^{\lambda_k x} dx = 0, \quad \forall k \in N.$$

Доказательство. Так как функция $\Phi(x)$ принадлежит классу C_p , то функция $F(x)$ также принадлежит этому классу [3]. Покажем, что $F(x)$ тождественно не равна нулю. Предположим противное, т.е. $F(x) \equiv 0$, $x \in [-1;1]$. Тогда функция $\Phi(x)$ на отрезке $[-1;1]$ должна удовлетворять следующему уравнению бесконечного порядка: $M_{L_1}[\Phi(x)] = 0$. В статье [6] показано, что класс функций, удовлетворяющих такому уравнению, является квазианалитическим. Поскольку $\Phi^{(n)}(\pm 1) = 0, (n=0,1,2,\dots)$, то $\Phi(x) \equiv 0$ и мы приходим к противоречию.

Докажем, что выполнено (2). Для этого воспользуемся свойством 2 интерполирующей функции $\omega_{L_1}(\mu, f, x)$. Положим в равенстве (5) $x = 1, f(t) = F(t)$.

$$\begin{aligned} \omega_{L_1}(\mu, F, 0) e^\mu + e^\mu \int_0^1 F(t) e^{-\mu t} dt &= \\ &= L_1(\mu) e^\mu \int_0^1 F(t) e^{-\mu t} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь мы учли, что $\omega_{L_1}(\mu, \Phi, 1) = 0$, так как $\Phi^{(n)}(\pm 1) = 0$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Из (8) находим при $\mu = -\lambda_n$

$$\omega_{L_1}(-\lambda_n, \Phi, 0) = \int_0^1 F(t) e^{\lambda_n t} dt. \quad (9)$$

Положим в равенстве (5) $x = -1$, $f(t) = \Phi(t)$, $\mu = -\lambda_n$ получим

$$\omega_{L_1}(-\lambda_n, \Phi, 0) = \int_0^{-1} F(t) e^{\lambda_n t} dt, \quad (10)$$

так как $\Phi^{(n)}(-1) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Из (9) и (10) следует, что $\int_{-1}^1 F(t) e^{\lambda_n t} dt = 0$, $\forall n \in N$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А. Ф. Последовательность полиномов из экспонент. М., 1980.
2. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М., 1976.
3. Шевцов В. И. Об аппроксимации решений уравнения бесконечного порядка посредством элементарных решений. Саратов, 2000. 9 с. Деп. в ВИНИТИ. 06.06.00. № 1614-В00.
4. Шевцов В. И. Уравнения бесконечного порядка в одном квазианалитическом классе функций // Математика, механика и математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 72 – 75.
5. Мандельбройт С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., 1955.
6. Шевцов В. И. Об одном квазианалитическом классе функций. Саратов, 2000. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 20.04.00. № 1103-В00.

УДК 517.984

В. А. Юрко

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА*

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + \left(\frac{v_0}{(x-a)^2} + q(x) \right) y = \lambda y, \quad 0 < x < T, \quad a \in (0, T). \quad (1)$$

Пусть $v_0 = v^2 - 1/4$, $\operatorname{Re} v > 0$, $v \notin \mathbb{N}$, $q(x)|x-a|^{\min(0, 1-2\operatorname{Re} v)} \in L(0, T)$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

В статье исследуется несамосопряженная краевая задача l для дифференциального уравнения (1) с граничными условиями

$$y(0) = y(T) = 0$$

и с условием склейки решений в окрестности особой точки, задаваемым матрицей перехода $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$ (см. ниже).

Пусть $s_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$, $x \in [0, a) \cup (a, T]$ – решения уравнения (1) при условии $s_j(x, \lambda) = O((x-a)^{\mu_j})$ $x \rightarrow a$, $\mu_j = (-1)^j v + 1/2$ (см. [1]). Пусть задана матрица $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, $\det A \neq 0$, $a_{12} = 0$. Обозначим

$$\sigma_j(x, \lambda) = \begin{cases} s_j(x, \lambda), & x < a, \\ \sum_{k=1}^2 a_{kj} s_k(x, \lambda), & x > a. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $\{\sigma_j(x, \lambda)\}_{j=1,2}$ используется для склейки решений уравнения (1) в окрестности особой точки. Предположим, что $a_{11} \exp(2\pi i v) - a_{22} \neq 0$. (2)

Условие (2) будем называть условием регулярности склейки. Пусть $\lambda = \rho^2$, $\xi_k = a_{11} \exp(k\pi i v) - a_{22} \exp(-k\pi i v)$,

$$\varphi_j(x, \lambda) = (-1)^{j-1} (\sigma_2^{(2-j)}(0, \lambda) \sigma_1(x, \lambda) - \sigma_1^{(2-j)}(0, \lambda) \sigma_2(x, \lambda)), \quad j = 1, 2,$$

$$\Delta(\lambda) = \varphi_2(T, \lambda).$$

ТЕОРЕМА 1. (1) Нули $\{\lambda_n\}$ целой функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи l .

(2) При $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\Delta(\lambda) = (4i\rho \sin \pi v)^{-1} (i\xi_1 \exp(-i\rho T)[1] - i\xi_1 \exp(i\rho T)[1] + \xi_2 \exp(i\rho(T-2a)) + \xi_0 \exp(-i\rho(T-2a))), \quad [1] := 1 + O(\rho^{-1}).$$

(3) Существует $h > 0$ такое, что все собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ задачи l лежат в полосе $|\operatorname{Im} \rho| < h$.

(4) Число N_ξ собственных значений в прямоугольнике $\Pi_\xi := \{\rho : |\operatorname{Im} \rho| < h, \operatorname{Re} \rho \in [\xi, \xi + 1]\}$ ограничено по ξ .

(5) Обозначим $G_\delta = \{\rho : |\rho - \rho_n| \geq \delta$ при всех $n\}$. Тогда

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\rho|^{-1} \exp(|\operatorname{Im} \rho|T), \quad \rho \in G_\delta.$$

2. Пусть $B_{\alpha, p} = \{f(x) : f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p(0, T)\}$ – банахово пространство с нормой $\|f\|_{\alpha, p} = \|f(x)(x-a)^{-\alpha}\|_{L_p(0, T)}$. Положим $\omega = -\operatorname{Re} v + 1/2$.

ТЕОРЕМА 2. Система собственных и присоединенных функций краевой задачи l полна в $B_{\alpha, p}$ при $1 \leq p < \infty$, $\alpha < \omega + 1/p$.

Замечание. Приведем контрпример, показывающий существенность условия регулярности склейки (2). Рассмотрим задачу l при

$$v_0 = 0, \quad q(x) \equiv 0, \quad T = \pi, \quad a = 3\pi/4, \quad a_{11} = -a_{22} = 1, \quad a_{21} = a_{12} = 0,$$

т.е. краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} -y'' &= \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \\ y(0) &= y(\pi) = 0, \quad y^{(m)}(a+0) = (-1)^m y^{(m)}(a-0), m = 0, 1, a = 3\pi/4. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для этой задачи условие (2) не выполняется, и

$$\Delta(\lambda) = \rho^{-1} \sin \rho(2a - T).$$

Собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ задачи (3) суть $\rho_n = 2n$, $n \geq 1$, а собственные функции имеют вид

$$y_n(x) = \begin{cases} \sin 2nx & x \leq 3\pi/4, \\ (-1)^{n-1} \sin 2nx, & x > 3\pi/4. \end{cases}$$

Система функций $\{y_n(x)\}_{n \geq 1}$ неполна в $B_{\alpha, p}$ при $1 \leq p < \infty$, $\alpha < 1 + 1/p$.

3. Рассмотрим обратную задачу. Обозначим $\delta(\lambda) = \varphi_1(T, \lambda)$. Функцию $M(\lambda) = -\delta(\lambda)/\Delta(\lambda)$ будем называть функцией Вейля задачи l .

ТЕОРЕМА 3. Задание функции Вейля $M(\lambda)$ однозначно определяет краевую задачу l .

В случае простого спектра рассмотрим множество $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ ($\alpha_n := \text{Res } M(\lambda_n)$), которое называется спектральными данными задачи l .

ТЕОРЕМА 4. Задание спектральных данных однозначно определяет краевую задачу l .

Метод доказательства теорем 3, 4 является конструктивным и даёт процедуру решения обратной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yurko V. A. Inverse problems for differential equations with singularities lying inside the interval // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2000. Vol. 8. №.1. P. 89 – 103.

УДК 518:517.944

Н. Ю. Агафонова

РАСЧЁТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В СОСТАВНЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим в цилиндрической системе координат x, R, ϕ тело вращения Q , состоящее из M подобластей, которые образуются вращением

вокруг оси x плоской области $D = \bigcup_{i=1}^M D_i$. Пусть границу Γ области D

можно разбить на гладкие участки L_1, \dots, L_N таким образом, что $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N L_i$.

Воспользуемся P -формой задания областей [1]. Введем параметр σ , такой, что $d_i \leq \sigma \leq d_{i+1}$ на участке L_i , $0 \leq i \leq N-1$. В этом случае граница Γ области D однозначно отобразится на отрезок $[d_0, d_N]$ числовой оси σ .

При этом $x = x_i(\sigma)$, $R = R_i(\sigma)$; $d_i \leq \sigma \leq d_{i+1}$, $i = \overline{0, N-1}$. Пусть каждая из подобластей тела характеризуется своим постоянным коэффициентом теплопроводности λ_i . Стационарное температурное поле в каждой из подобластей описывается уравнением Лапласа, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta T_i = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_i}{\partial R} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \phi^2} = 0, \quad i = \overline{1, M}. \quad (1)$$

Будем полагать, что на внешних границах тела задано одно из условий I, II или III рода, которые в обобщенном виде можно записать так:

$$\omega(x, R) \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{i0}} + \alpha(x, R) T_i = f(x, R, \phi). \quad (2)$$

Здесь $\alpha(x, R), f(x, R, \phi)$ – известные функции, $\omega(x, R)$ – известная кусочно-постоянная функция, определяющая тип граничных условий. Если $\omega = 0$ и $\alpha = 1$, то имеем граничные условия I рода; если $\omega = 1$ и $\alpha = 0$, то имеем граничные условия II рода; и при $\omega = 1$ и $\alpha > 0$ имеем граничные условия III рода. Функции ω и α не зависят от переменной ϕ .

На внутренних границах между подобластями тела заданы условия идеального теплового контакта

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} = \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial n_{ij}}, \quad T_i = T_j. \quad (3)$$

Решим поставленную таким образом задачу теплопроводности.

Представим искомую функцию рядом Фурье

$$T(x, R, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k^c(x, R) \cos k\phi + T_k^s(x, R) \sin k\phi, \quad (4)$$

где коэффициенты $T_k^c(x, R)$ и $T_k^s(x, R)$ – неизвестные функции указанных аргументов. Функция $f(x, R, \phi)$ представляется аналогичным рядом с коэффициентами $f_k^c(x, R), f_k^s(x, R)$ соответственно.

В работе [2] было доказано, что с использованием условий идеального теплового контакта решение уравнения (1) может быть представлено в виде интегрального уравнения, которое с использованием представления функций рядами Фурье для поставленной задачи преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^M \lambda_i p_i(\sigma_0) \omega(\sigma_0) \Phi_k(\sigma_0) + \int_{d_0}^{d_N} [\alpha \Lambda_k - \omega(\lambda_i - \lambda_j) \Psi_k] \Phi_k R(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma = \\ & = \sum_{i=1}^M \lambda_i p_i(\sigma_0) (\omega(\sigma_0) - 1) f_{ck}(\sigma_0) + \\ & + \int_{d_0}^{d_N} [\omega \Lambda_k + (1 - \omega) \lambda_i \Psi_k] f_{ck}(\sigma) R(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (5)$$

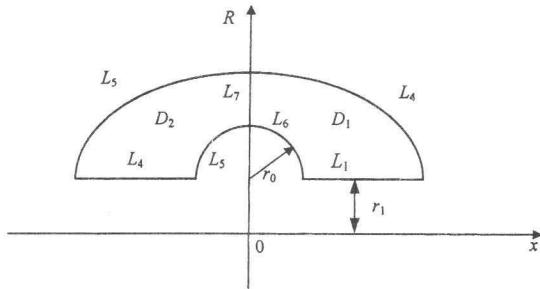
где (x_0, y_0, z_0) – точка на границе области, $\Psi_k(\sigma)$, Λ_k – известные функции, получающиеся с использованием разложения (4), а $\Phi_k = -\lambda_i \frac{\partial T_k^c}{\partial n_{i0}}$, если $\omega = 0$; $\Phi_k = T_k^c$, если $\omega = 1$. Для функций T_k^s имеем аналогичное уравнение.

Уравнения (5) решаются численно путем сведения интегральных уравнений к СЛАУ. Для этого на каждом из участков искомая функция представляется интерполяционным многочленом Лагранжа с тремя равноотстоящими узлами. В результате решения этой системы получаются значения искомой функции в узловых точках. Решение в других точках может быть получено путем интерполяции.

В качестве примера приведём решение краевой задачи (1) – (3) в области (см. рисунок), границы которой состоят из отрезков прямых и дуг. На участках L_1, L_6 поставлены условия II рода, на L_2, L_5 – III рода, L_3, L_5 – I рода.

Краевое условие (2) определялось функцией
 $f(x, R, \varphi) = 100 + 10(\varphi - \pi)^2$.

Количество членов ряда (4) определялось из условия $\max T_k \leq \varepsilon, \varepsilon = 10^{-3}$. Результаты расчетов $T(\sigma, \varphi)$ представлены в таблице.



Температура на участке L_1

| Точки разбиения | $\varphi = 0$ | $\varphi = \pi/4$ | $\varphi = \pi/2$ |
|-----------------|---------------|-------------------|-------------------|
| σ_1 | 184,2541 | 159,2003 | 128,3908 |
| σ_2 | 184,0471 | 159,3812 | 128,6763 |
| σ_3 | 184,2074 | 160,183 | 129,6435 |
| σ_4 | 184,9413 | 161,801 | 131,4645 |
| σ_5 | 186,6429 | 164,5401 | 134,3919 |
| σ_6 | 189,9596 | 168,8682 | 138,7773 |
| σ_7 | 195,8631 | 175,4501 | 145,062 |
| σ_8 | 205,709 | 185,1309 | 153,7141 |
| σ_9 | 218,6123 | 196,5503 | 163,249 |

Таким образом, описанный метод позволяет определить тепловое поле в составном теле вращения. При этом необходимо решить несколько параллельных плоских задач, а затем по (4) получить решение в трёхмерной области. Выбирая шаг по φ , можно полностью определить тепловое поле на поверхности тела и внутри него.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н. Температурные поля и термона-пржения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.

2. Агафонова Н. Ю., Михайлов В. Н. Интегральные представления решения уравнения Лапласа в составных трехмерных областях // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 7 – 9.

**НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ОРТОТРОПНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

Колебания систем с переменными характеристиками представляют большую и сложную проблему. Поведение таких систем зависит от величин частот собственных колебаний. Теоретические основы их расчёта разработаны [1 – 5] и сводятся к отысканию собственных значений дифференциальных уравнений. Математические модели, основанные на классической теории оболочек, не позволяют получить аналитических зависимостей для расчёта собственных частот.

Для неосесимметричных оболочечных колебаний, как наиболее вероятных по сравнению с осесимметричными и изгибными балочными колебаниями, предлагаются упрощенные математические модели, позволяющие вычислять собственные частоты рассматриваемых систем.

Рассмотрим колебания тонкой цилиндрической оболочки из анизотропного материала с переменной толщиной $\delta(x)$ вдоль оси оболочки x . Используем энергетический метод в форме, представленной в работах [6, 3]. Сделаем следующие допущения: справедливы закон Гука, гипотезы Кирхгофа-Лява и гипотезы отсутствия сдвигов в срединной поверхности и нерастяжимости в окружном направлении; диссипации энергии нет.

Энергию оболочки представим в виде

$$U = \int_0^l \Gamma dx, \quad \Gamma = \frac{1}{2} \oint [m_\phi \chi_\phi + \sigma_x \delta_x \varepsilon_x + \rho \delta (\ddot{w}w + \ddot{v}v + \ddot{u}u)] R d\phi. \quad (1)$$

В (1) потенциальная энергия деформации представлена энергией изгиба и депланаций поперечных сечений, работа внешних сил – силами инерции на радиальных w , окружных v , и продольных u перемещениях. Точками обозначены производные по времени t . Штрихами будем обозначать производные по осевой координате x .

Зададим радиальные перемещения m -го тона колебаний в виде

$$w(x, \phi, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \psi_n(x) \cos n\phi \cdot \sin \omega t, \quad (2)$$

где ω – частота собственных колебаний. Все усилия и перемещения выражим через радиальные перемещения w [6]. В результате из (1) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{2} \sum_n \left\{ \frac{\hat{E}_\phi}{R^4} (n^2 - 1)^2 \delta^3(x) \psi_n^2(x) + \frac{E_x R^2}{n^4} \delta(x) [\psi_n''(x)]^2 - \omega^2 \rho \delta(x) \times \right. \\ & \left. \times \left[\psi_n^2(x) \frac{n^2 + 1}{n^2} + \frac{R^2}{n^4} [\psi_n'(x)]^2 \right] \right\} \pi R \cos^2 \omega t, \\ \hat{E}_\phi = & \frac{E_\phi}{12(1 - \mu_x \mu_\phi)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из уравнения Эйлера-Лагранжа вариационной задачи на одном периоде колебания

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi_n(x)} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi_n'(x)} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi_n''(x)} \right) = 0$$

с учетом (3) получим дифференциальные уравнения задачи

$$\begin{aligned} \psi_n^{IV}(x) + 2 \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \psi_n''(x) + \left(\frac{\delta''(x)}{\delta(x)} + \frac{\omega_n^2 \rho}{E_x} \right) \psi_n''(x) + \frac{\delta'(x)}{\delta(x)} \cdot \frac{\omega_n^2 \rho}{E_x} \psi_n'(x) + \\ + \left(\frac{n^4 (n^2 - 1)^2 \hat{E}_\phi \delta^3(x)}{E_x R^6 \delta(x)} - \omega_n^2 \frac{n^2 (n^2 + 1) \rho}{E_x R^2} \right) \psi_n(x) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из этой математической модели собственных колебаний как частные случаи следуют известные уравнения для ортотропных и изотропных оболочек с постоянной толщиной [2, 3, 5, 6].

Для расчёта собственных частот предлагаем модель задачи, вытекающую из закона сохранения механической энергии за один период, что соответствует ситуации $\Gamma_n=0$ в (1)

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^l \frac{\hat{E}_\phi(x)}{R^4} (n^2 - 1)^2 \delta^3(x) \psi_n^2(x) dx + \int_0^l \frac{E_x R^2}{n^4} \delta(x) [\psi_n''(x)]^2 dx}{\int_0^l \rho \cdot \left[\delta(x) \psi_n^2(x) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{R^2}{n^4} \delta(x) [\psi_n'(x)]^2 \right] dx}. \quad (5)$$

В качестве функций $\psi_n(x)$ можно использовать фундаментальные балочные функции [2], соответствующие граничным условиям.

Для ситуации

$$\delta(x) = \delta \cdot e^{cx} \quad (6)$$

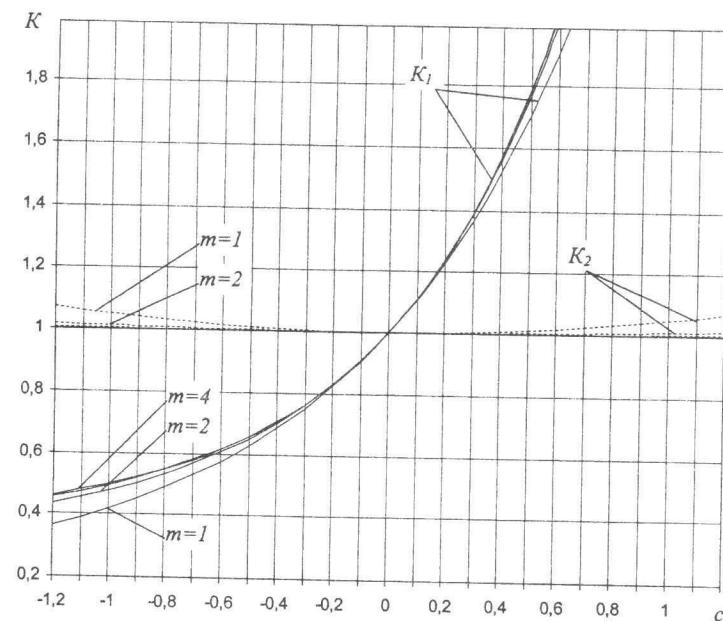
из формулы (5) получим

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho R^2} \left(\frac{\left(\alpha \frac{R}{l}\right)^4 + \frac{n^4(n^2-1)^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \cdot K_1}{\left(\alpha \frac{R}{l}\right)^2 \cdot K_2 + n^2(n^2+1)} \right), \quad (7)$$

$$K_1 = \left(e^{2c} + e^c + 1 \right) \cdot \frac{c^2 + 4a^2}{3(9c^2 + 4\alpha^2)}, \quad K_2 = 1 + \frac{c^2}{2\alpha^2},$$

где α – параметр, учитывающий граничные условия и номер тона колебаний [6]. Для шарнирного опирания краев оболочки $\alpha = m\pi$ ($m=1, 2\dots$).

Зависимость коэффициентов неоднородности K_1 и K_2 от показателя изменения толщины c приведена на рисунке.



Расчёты минимальных собственных частот для гладких изотропных оболочек в ситуации (6) при шарнирном опирании краёв методом вариации произвольных постоянных при трёх приближениях по первой и второй модели практически совпадают. Объём расчётов по первой модели во много раз превышает объём вычислений по второй модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965.
2. Власов В. З. Избранные труды: В 3 т. Т.1. М.: Изд. АН СССР, 1962.

3. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966.
 4. Крысько В. А., Кучемако А. Н. Устойчивость и колебания неоднородных оболочек. Саратов, 1999.
 5. Флюгге Г. Статика и динамика оболочек. М.: Госстройиздат, 1961.
 6. Антоненко Э. В. Частоты свободных колебаний гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек с упруго закрепленными краями // Прикладная механика. 1989. Т. 25. № 8. С. 122 – 126.

УДК 539.3

В. Л. Березин, Ю. П. Гуляев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ ЖЁСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Контактные задачи в упругих средах с локальными тонкостенными включениями относятся к классу наиболее сложных задач теории упругости. Основные математические подходы к решению подобных задач изложены в монографии [1].

В данной статье предлагается простой подход к решению сложной контактной задачи взаимодействия неоднородного упругого массива с абсолютно жесткими элементами, находящимися как на поверхности массива, так и внутри него. На практике такая задача возникает при изучении напряженно деформированного состояния (НДС) в рулоне сена при перемещении его с помощью захватного механизма погрузчика.

Сформулируем эту задачу. Имеется рулон сена длиной L_r , радиуса R_r со средним удельным весом γ_r , который поставлен на торец. В него внедрены зубья захватного механизма в торец и в боковую поверхность (см. рисунок). При подъеме рулона манипулятором погрузчика на поверхности контакта рулона с зубьями и несущими элементами захватного механизма возникают напряжения под действием веса рулона.

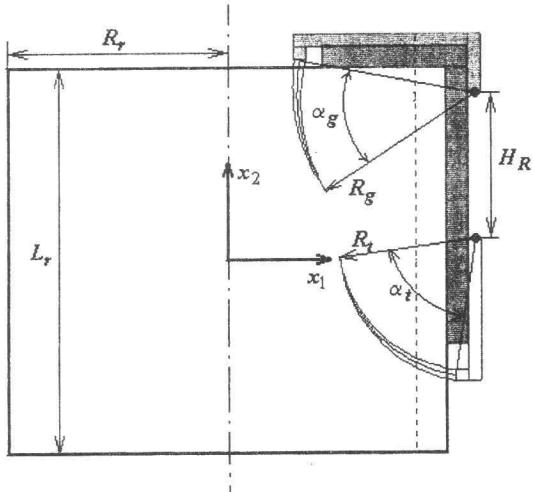


Схема захвата рулона

Захватный механизм конструктивно состоит из следующих частей: ГТ-образной базы, ГТ-образного захвата и Т-образного захвата. В зависимости от способа захвата и выполняемых операций по перемещению рулона элементы захватного механизма могут вступать в силовой контакт с рулоном сена.

Будем предполагать, что при подъёме рулона захватом, перемещения точек контактных поверхностей соответствуют жёстким смещениям точек контактных поверхностей захватного устройства. Тогда, относительно неподвижной системы координат, связанной с поверхностью земли, смещения точек вертикальной плоскости захвата примут вид

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_1(1 - \cos(\omega)) - x_2 \sin(\omega) + u_{01}, \\ u_2 &= x_1 \sin(\omega) - x_2(1 - \cos(\omega)) + u_{02}, \\ u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_{01} , u_{02} – горизонтальное и вертикальное смещения точки полюса (центра рулона), ω – угол поворота захватного устройства вокруг оси, проходящей через полюс.

Силы, действующие на поверхность контакта рулона с элементами захватного устройства, будем определять их плотностью распределения по соответствующей поверхности контакта. Будем предполагать, что на каждой поверхности контакта действуют нормальные и касательные напряжения, которые возникают за счёт сухого трения стали о сено. Вектор нормальных напряжений обозначим $\bar{P}_{nI} = -\sigma_{nI}\bar{n}$, где σ_{nI} – величина нормального напряжения, \bar{n} – внешняя нормаль к контактной поверхности, I – номер контактной поверхности. Вектор касательных напряжений обозначим $\bar{S}_{nI} = \mu\sigma_{nI}\bar{\tau}$, где μ – коэффициент сухого трения, $\bar{\tau}$ – единичный касательный вектор, взятый в направлении, противоположном соответствующего касательного перемещения. Введём также следующие обозначения:

$$\bar{P}_I = \int_{\Sigma_I} \sigma_{nI} \bar{n} d\sigma, \quad \bar{S}_I = \mu \int_{\Sigma_I} \sigma_{nI} \bar{\tau} d\sigma, \quad (2)$$

где \bar{P}_I , \bar{S}_I – соответственно главные векторы нормальных и касательных напряжений на контактной поверхности.

В первом приближении связь между контактными напряжениями и контактными нормальными перемещениями зададим законом Гука для одноосного напряжённого состояния

$$\sigma_{nI} = \frac{E(x_1, x_2, x_3)u_{nI}}{k_I l_I}, \quad (3)$$

где E – модуль Юнга материала рулона, u_{nI} – нормальные контактные перемещения, l_I – характерный линейный размер жёсткого элемента, кон-

тактирующего с рулоном, k_I – масштабный параметр, характеризующий размер контактного пятна.

Предположим, что захватный механизм повернут на угол α относительно направления действия силы тяжести. Тогда необходимые условия равновесия рулона запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^{MI} N_{pI} (\bar{P}_{1,I} + \bar{S}_{1,I}) &= P_r \sin(\alpha + \omega), \\ \sum_{I=1}^{MI} N_{pI} (\bar{P}_{2,I} + \bar{S}_{2,I}) &= P_r \cos(\alpha + \omega), \\ \sum_{I=1}^{MI} N_{pI} \bar{M}_I &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $N_p = (2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1)$ – вектор, задающий количество контактных поверхностей типа $I = \overline{1, MI}$, $P_r = \pi R_r^2 L_r \gamma_r g$ – вес рулона.

Система уравнений (4) является нелинейной относительно параметров u_{01} , u_{02} и ω . Решив её, находим перемещения точек контактных поверхностей по формулам (1), а далее по формулам (3) определяются контактные напряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

УДК 531.38

В. Г. Бирюков, Ю. Н. Челноков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОЙ КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРА АБСОЛЮТНОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ИНФОРМАЦИИ О НАПРАВЛЕНИИ МЕСТНОЙ ВЕРТИКАЛИ*

1. Постановка задачи. Определение вектора угловой скорости космического аппарата (КА) возможно с помощью как минимум трёх датчиков угловой скорости, оси чувствительности которых не лежат в одной плоскости. В классическом случае измерительные оси датчиков угловой скорости ортогональны, но часто используют больше трёх датчиков угловой скорости с различным пространственным расположением осей, что

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-00192, и научной программы "Университеты России - фундаментальные исследования", проект № 015.04.01.50.

даёт возможность резервирования и диагностики неисправностей датчиков угловой скорости.

Рассмотрим задачу определения вектора абсолютной угловой скорости КА в случае, когда из-за отказа датчиков угловой скорости остаются исправными лишь два из них, и когда имеется информация о направлении местной (геоцентрической) вертикали.

Введём в рассмотрение следующие системы координат: ξ – инерциальную, X – жёстко связанную с КА, Z – орбитальную системы координат. Начало орбитальной системы координат Z совпадает с центром масс КА (началом системы координат X), а оси вводятся следующим образом: Z_3 – направляется вдоль радиуса-вектора центра масс КА, Z_1 – вдоль вектора момента орбитальной скорости КА, а Z_2 дополняет первые две оси до правой тройки.

Взаимное угловое положение введенных систем координат будем задавать с помощью нормированных кватернионов ориентации $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}^{\text{op}}$, $\bar{\mu}$ в соответствии со следующей схемой поворотов

$$\xi \xrightarrow{\bar{\lambda}^{\text{op}}, \bar{\omega}^{\text{op}}} Z \xrightarrow{\bar{\mu}} X \sim \xi \xrightarrow{\bar{\lambda}, \bar{\omega}} X.$$

Здесь $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}^{\text{op}}$ – кватернионы поворотов, характеризующие ориентации КА и орбитального трёхгранника в инерциальной системе координат, $\bar{\omega}$ – абсолютная угловая скорость КА, $\bar{\omega}^{\text{op}}$ – абсолютная угловая скорость орбитальной системы координат, $\bar{\mu}$ – кватернион, характеризующий ориентацию связанной системы координат относительно орбитальной.

Для кватерниона $\bar{\mu}$ справедливо соотношение

$$\bar{\mu} = \tilde{\bar{\lambda}}^{\text{op}} \circ \bar{\lambda}, \quad (1)$$

где волна означает сопряженный кватернион, а символ \circ – кватернионное произведение.

Для кватерниона $\bar{\lambda}^{\text{op}}$ можно записать следующее соотношение:

$$\bar{\lambda}^{\text{op}} = \bar{\lambda}^{\text{op}}(t_0) \circ \left(\cos \frac{\varphi^* - \varphi_0^*}{2} + \bar{i}_1 \sin \frac{\varphi^* - \varphi_0^*}{2} \right), \quad (2)$$

где φ^* – истинная аномалия, φ_0^* – начальное значение φ^* в момент времени t_0 , $\bar{\lambda}^{\text{op}}(t_0)$ – кватернион начальной ориентации орбитальной системы координат.

Угловое движение связанного трёхгранника описывается кватернионным кинематическим дифференциальным уравнением [1]

$$2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}_x, \quad (3)$$

где точка означает дифференцирование по времени, причём производная вычисляется в предположении неизменности ортов $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ гиперкомплекс-

ногого пространства, а запись вида \bar{a}_η означает, что вектор \bar{a} задан своими компонентами в базисе $\eta(\eta = \xi, X, Z)$.

Введём в рассмотрение единичный вектор \bar{k} , направленный вдоль геоцентрической вертикали. Отображения вектора \bar{k} на оси связанный и орбитальной систем координат определяются кватернионами $\bar{k}_x = k_1 \bar{i}_1 + k_2 \bar{i}_2 + k_3 \bar{i}_3$ и $\bar{k}_z = \bar{i}_3$. Эти отображения связаны равенством

$$\bar{\mu} \circ \bar{k}_x = \bar{i}_3 \circ \bar{\mu}. \quad (4)$$

С математической точки зрения задача заключается в нахождении неизвестной компоненты вектора $\bar{\omega}_x$ по двум другим известным компонентам этого вектора и известному вектору \bar{k}_x .

2. Метод решения задачи. Будем искать неизвестную компоненту вектора $\bar{\omega}_x$ на основе соотношений (1), (2), (4) и приближённого решения дифференциального уравнения (3), записанного в следующем виде [2]:

$$\bar{\lambda}(t_n) = \bar{\lambda}(t_{n-1}) \circ \left(\cos \frac{|\bar{\omega}|}{2} h + \frac{\bar{\omega}_x}{|\bar{\omega}|} \sin \frac{|\bar{\omega}|}{2} h \right), \quad (5)$$

где $|\bar{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ – модуль вектора $\bar{\omega}$ угловой скорости КА, $\bar{\lambda}(t_n), \bar{\lambda}(t_{n-1})$ – значения кватерниона ориентации $\bar{\lambda}$ в моменты времени t_n и t_{n-1} соответственно, $h = t_n - t_{n-1}$ – шаг интегрирования.

Раскладывая в соотношении (5) тригонометрические функции в ряды Тейлора и отбрасывая слагаемые выше второго порядка малости, получаем

$$\bar{\lambda}(t_n) = \bar{\lambda}(t_{n-1}) \circ \bar{\omega}^*, \quad (6)$$

где $\bar{\omega}^* = \omega_0^* + \omega_1^* \bar{i}_1 + \omega_2^* \bar{i}_2 + \omega_3^* \bar{i}_3$ – кватернион с компонентами

$$\omega_0^* = 1 - \frac{|\bar{\omega}|^2}{8} h^2, \quad \omega_i^* = \frac{\omega_i}{2} h, \quad (i = 1, 3). \quad (7)$$

После подстановки (6) и (2) в (1) и (4) получаем кватернионное соотношение

$$\bar{\gamma} \circ \bar{\omega}_x^* \circ \bar{k}_x = \bar{i}_3 \circ \bar{\gamma} \circ \bar{\omega}_x^*, \quad (8)$$

где $\bar{\gamma} = \tilde{\lambda}^{\text{op}}(t_n) \circ \bar{\lambda}(t_{n-1})$, $\bar{\omega}_x^* = \omega_0^* + \omega_1^* \bar{i}_1 + \omega_2^* \bar{i}_2 + \omega_3^* \bar{i}_3$, $\bar{k}_x = \bar{k}_x(t_n)$.

Соотношение (8) можно записать в следующем виде:

$$\bar{\omega}_x^* \circ \bar{k}_x = \bar{n} \circ \bar{\omega}_x^*, \quad (9)$$

где $\bar{n} = \tilde{\bar{\gamma}} \circ \bar{i}_3 \circ \bar{\gamma} = \tilde{\lambda}(t_{n-1}) \circ \lambda^{\text{op}}(t_n) \circ \bar{i}_3 \circ \tilde{\lambda}^{\text{op}}(t_n) \circ \bar{\lambda}(t_{n-1})$.

Перейдем в соотношении (9) к операциям векторной алгебры:

$$\omega_{0x}^*(\bar{k}_x - \bar{n}) + \bar{\omega}_{vx}^* \times (\bar{k}_x + \bar{n}) - \bar{\omega}_{vx}^* \cdot (\bar{k}_x - \bar{n}) = 0. \quad (10)$$

В скалярном виде имеем систему

$$\begin{aligned} \omega_{1x}^* p_1 + \omega_{2x}^* p_2 + \omega_{3x}^* p_3 &= 0, & \omega_{0x}^* p_1 + \omega_{2x}^* q_3 - \omega_{3x}^* q_2 &= 0, \\ \omega_{0x}^* p_2 + \omega_{3x}^* q_1 - \omega_{1x}^* q_3 &= 0, & \omega_{0x}^* p_3 + \omega_{1x}^* q_2 - \omega_{2x}^* q_1 &= 0, \end{aligned}$$

где p_i и q_i – компоненты векторов $\bar{p} = \bar{k}_x - \bar{n}$, $\bar{q} = \bar{k}_x + \bar{n}$.

Из этой системы уравнений, учитывая (7), получаем следующие формулы нахождения неизвестной компоненты вектора абсолютной угловой скорости КА:

$$\omega_1 = \frac{P_2 \omega_2 + P_3 \omega_3}{P_2 q_2 + P_3 q_3} q_1, \quad \omega_2 = \frac{P_1 \omega_1 + P_3 \omega_3}{P_1 q_1 + P_3 q_3} q_2, \quad \omega_3 = \frac{P_1 \omega_1 + P_2 \omega_2}{P_1 q_1 + P_2 q_2} q_3. \quad (11)$$

При определении неизвестной компоненты вектора $\bar{\omega}$ по формулам (11) возникают методические погрешности, обусловленные тем, что направление вектора $\bar{\omega}$ меняется на шаге интегрирования, в то время как соотношение (5) является точным решением дифференциального уравнения (3) в случае, когда вектор $\bar{\omega}$ постоянен по направлению в связанной системе координат. Из этого следует, что изложенный метод дает хорошие результаты в случаях медленного изменения по направлению вектора абсолютной угловой скорости КА на шаге интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
2. Челноков Ю. Н. Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига-Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11 – 20.

УДК 531.383: 532.516

Д. В. Кондратов

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ В ПОПЛАВКОВОМ МАЯТНИКОВОМ АКСЕЛЕРОМЕТРЕ С УПРУГИМ КОРПУСОМ ПРИ ТОРЦЕВЫХ ИСТЕЧЕНИЯХ ЖИДКОСТИ

В системах инерциальной навигации используются поплавковые маятниковые акселерометры (ПМА), обладающие высокой точностью и вибростойкостью. Они находятся в условиях вибрации основания, на котором крепятся [1].

В отличие от прибора, описанного в [2], будем рассматривать случай, когда ширина торцевых щелей a значительно больше ширины цилиндрической щели δ . Если считать, что $\left(\frac{a}{\delta}\right) = O(\psi^{-1})$, $a = R_2 \cdot b_3 = \frac{\delta}{\psi} b_3$, $b_3 = O(1)$ и потребовать согласование расходов жидкости, то можно уста-

новить, что течение в торцевых щелях является безградиентным течением типа струйного. Из тонкой цилиндрической щели шириной $\delta \ll a$ вытекает струя жидкости и течёт вдоль торцевых дисков поплавка в среде из той же жидкости, захватывая узкую зону шириной порядка δ . Здесь малый параметр $\psi = \frac{\delta}{R_2} \ll 1$ характеризует ширину цилиндрического слоя жидкости, окружающей поплавок.

Уравнение движения жидкости, окружающей поплавок в поплавковой камере, уравнение неразрывности, начальные и граничные условия описаны в [2]. Кроме того запишем условия согласования давления и расхода жидкости при переходе из цилиндрической щели в торцевые для левой торцевой щели

$$P_u \Big|_{y=\frac{l_2}{2}} = P_T \Big|_{r=R_2+e\cos\theta}; \quad \int_{R_2+e\cos\theta}^{R_2+\delta+u_3} V_u \Big|_{y=\frac{l_2}{2}} dr = - \int_{\frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2+a}{2}} V_r \Big|_{r=R+e\cos\theta} dy.$$

Для правой торцевой щели имеют место аналогичные соотношения. Вместо них можно поставить условия симметрии относительно плоскости $y=0$

$$\frac{\partial P_u}{\partial y} = 0, \quad \int_{R_2+e\cos\theta}^{R_2+\delta+u_3} V_u dr = 0 \text{ при } y=0,$$

индекс u относится к цилиндрической, а T – к торцевой щели.

Кроме того необходимы условия периодичности параметров течения по θ с периодом 2π .

Скалярные уравнения динамики корпуса поплавкового маятниково-го акселерометра как упругой замкнутой цилиндрической оболочки, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява с учётом переносного движения относительно инерциального пространства, запишутся в виде [3]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{1-\mu_0}{2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} - \frac{1+\mu_0}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial \theta} - \frac{\mu_0}{R} \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{1-\mu_0^2}{Eh_0} [\rho_0 h_0 W_{7s} - q_s]; \\ & - \frac{1+\mu_0}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial y \partial \theta} + \frac{1-\mu_0}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} - a_0^2 \left[2(1-\mu_0) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \right] + \\ & + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - a_0^2 \left[(2-\mu_0) \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial \theta^3} \right] = \frac{1-\mu_0^2}{Eh_0} [\rho_0 h_0 W_{7\theta} - q_\theta]; \\ & - \frac{\mu_0}{R} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - a_0^2 \left[(2-\mu_0) \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \theta^3} \right] + \\ & + \frac{u_3}{R^2} + a_0^2 \left[R^2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \theta^4} \right] = \frac{1-\mu_0^2}{Eh_0} (-\rho_0 h_0 W_{7n} - q_n); \end{aligned}$$

где E – модуль Юнга, μ_0 – коэффициент Пуассона, ρ_0 – плотность материала, R – радиус срединной поверхности, h_0 – толщина оболочки, $a_0^2 = \frac{h_0^2}{12R^2}$, W_7 – абсолютное ускорение единицы площади срединной поверхности, \bar{n}_s , \bar{n}_θ , n – продольное и окружное направление срединной поверхности оболочки и нормаль к ней.

Границные условия для перемещений оболочки в условиях жёсткой заделки на торцах имеют вид $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial y}$ при $y = \pm \frac{l}{2}$.

Полученная связанныя задача упругогидродинамики решается методом возмущений, используя малый параметр $\lambda \ll 1$, называемый относительным эксцентризитетом. Решение ищем в виде разложения по степеням малых параметров, рассматривая только первые члены. Для решения уравнений динамики оболочки применяется метод Бубнова-Галёркина в первом приближении.

В табл. 1 приведены значения перемещений поплавка при отсутствии избытка массы (нулевой плавучести) в приборах с упругим и твёрдым корпусом при амплитуде виброускорения в $25g$.

Таблица 1

| | | | |
|----------------|----------|----------|----------|
| Частота, рад/с | 2,40E+03 | 3,42E+04 | 5,22E+04 |
| Упругий, м | 1,01E-08 | 3,92E-08 | 1,05E-08 |
| Твердый, м | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0,00E+00 |

В табл. 2 приведены значения перемещений поплавка при избытке массы 5% в приборах с упругим и твёрдым корпусом и при той же амплитуде виброускорения.

Таблица 2

| | | | |
|----------------|----------|----------|----------|
| Частота, рад/с | 2,40E+03 | 3,42E+04 | 5,22E+04 |
| Упругий, м | 4,60E-08 | 3,81E-08 | 1,05E-08 |
| Твердый, м | 5,07E-08 | 5,86E-10 | 2,59E-10 |

Расчёты показали, что в случае твёрдого корпуса прибора, при условии отсутствия избытка массы, перемещений не происходит, а если рассматривать упругий корпус прибора при том же условии, то появляются перемещения. Заметим также, что при ненулевом избытке массы влияние упругости на перемещение поплавка значительно возрастает, причём при небольших частотах упругость влияет незначительно, но при средних и высоких частотах упругость влияет значительно сильнее, чем другие факторы. Следовательно, упругость корпуса прибора играет значительную роль при перемещении поплавка и как следствие влияет на погрешность прибора при гармоническом законе вибрации основания с амплитудой виброускорения в единицах g .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалов С. Ф., Медведева И. И., Трунов А. А. Экспериментальное исследование движения поплавка внутри поплавковой камеры, заполненной вязкой жидкостью // Прикладная гидродинамика поплавковых приборов: Тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана. М., 1982. № 375. С. 60 – 65.
2. Чернов А. М. Гидродинамические реакции в поплавковом маятниковом акселерометре с упругим корпусом на вибрирующем основании // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 188 – 190.
3. Андрейченко К. П., Могилевич Л. И. Динамика гирокомпасов с цилиндрическим поплавковым подвесом. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. 160с.

УДК 518:517.944

А. Д. Луньков

ПЛОСКИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВУМЕРНЫХ СОСТАВНЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассмотрим задачу расчёта нестационарных температурных полей в двумерных составных областях, возникающую в случае, когда тепловой поток проходит через разнородное тело (то есть тело, состоящее из нескольких частей, различающихся коэффициентами теплопроводности).

В многосвязной области D , состоящей из m подобластей, в прямоугольной системе координат (x, y) задано нестационарное уравнение теплопроводности

$$\rho_i c_i \theta_{it} = \lambda_i \theta_{ixx} + \lambda_i \theta_{iyy} + g_i(x, y, t) \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Даны начальные условия $\theta_i(x, y, 0) = \theta_{0i}$, на границах между подобластями заданы условия 4-го рода.

Пусть Γ – граница области, $t_m > 0$ интерпретируется как финальный момент времени, а (x_0, y_0) – некоторая фиксированная точка в области D .

Для решения краевой задачи в области, заданной указанным выше образом, используем метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) в соответствии с [1], где изложено решение задачи для однородного тела. Метод ГИУ, применённый к неизвестной $\theta = \theta_i$, приводит к следующему представлению решений уравнения в однородной области:

$$P(x_0, y_0)\theta(x_0, y_0, t_m) = \int_{\Gamma} E(s)ds + \int_{\Gamma} E_{m1}(\theta(t_m, s), \theta_n(s, t_m), s)ds + \quad (2)$$

$$+ \int_{\Gamma} E_{m2}(\theta(s, t_0), \theta(s, t_{m-1}), \theta_n(s, t_0), \theta_n(s, t_{m-1}), s)ds.$$

Здесь и далее нижний индекс n обозначает производную по нормали. $t_m > t_{m-1} > \dots > t_1 > t_0 = 0$. Вид подынтегральных функций приведен в [1].

Согласно (2) значение температуры в m -й момент времени выражается через значения на границе области температуры и её производной по нормали в предыдущие моменты. Если точку (x_0, y_0) брать на границе, то (2) станет интегральным уравнением относительно θ и θ_n .

Зададим границу Γ области D в параметрическом виде относительно некоторой переменной τ с помощью Р-формы, определённой в [1]. Это однозначное отображение границы на некоторый отрезок $[d_0, d_N]$: $x = x_k(\tau), y = y_k(\tau)$ – уравнение k -го участка границы, где $d_{k-1} \leq \tau \leq d_k$. Здесь d_k увеличивается с ростом k .

Далее решение зависит от условий, заданных на внешних границах. Предположим, что условия могут быть 3-го (как и в [1]) или 1-го рода.

Объединим полученные для всех $i=1, 2, \dots, m$ и некоторого набора точек (x_0, y_0) уравнения, подставив в них граничные условия. Получаем систему одномерных интегральных уравнений двух видов

$$\left[V_0(\tau_0, t_m) + \int_{d_0}^{d_n} V_1(\tau_0, \tau, t_m) d\tau \right] \theta_i(\tau_0, t_m) + \int_{d_0}^{d_n} K(\tau_0, \tau, t_m) \theta_i(\tau, t_m) d\tau = b(\tau_0, t_m) + \int_{d_0}^{d_n} B(\tau_0, \tau, t_m, \theta_i(\tau, t_0) \dots \theta_i(\tau, t_{m-1})) d\tau. \quad (3)$$

Здесь τ_0 – образ точки (x_0, y_0) , находящейся на внешней границе, i – номер подобласти, на внешней границе которой находится точка (x_0, y_0) .

$$\begin{aligned} & \left[V_{0i}(\tau_0, t_m) + \int_{d_0}^{d_n} V_{1i}(\tau_0, \tau, t_m) d\tau \right] \theta_i(\tau_0, t_m) + \int_{d_0}^{d_n} K_i(\tau_0, \tau, t_m) \theta_i(\tau, t_m) d\tau + \\ & + \int_{d_0}^{d_n} L_i(\tau_0, \tau, t_m) \theta_{in}(\tau, t_m) d\tau = \\ & = b_i(\tau_0, t_m) + \int_{d_0}^{d_n} B_i(\tau_0, \tau, t_m, \theta_i(\tau, t_0), \theta_{in}(\tau, t_0) \dots \theta_i(\tau, t_{m-1}) \theta_{in}(\tau, t_{m-1})) d\tau. \end{aligned} \quad (4a)$$

Здесь τ_0 – образ точки (x_0, y_0) , находящейся на внутренней границе между i -й и j -й подобластями. Для таких точек имеет место, кроме того, уравнение (4b), получаемое заменой в (4a) i на j .

$V_0, V_1, V_{0i}, V_{1i}, b, b_i, B, B_i, K, K_i, L_i$ – известные функции, выражение которых через время и параметрические координаты достаточно громоздко. Так выглядят уравнения для задачи 3-го рода. Для задачи 1-го рода отличие состоит в том, что в уравнениях (3) при интеграле с ядром K неизвестной будет не θ , а θ_n .

В [1] при решении задачи для однородной области возникали лишь уравнения вида (3), т.е. тепловой поток в качестве неизвестной не присутствовал.

$\theta(\tau, t_0)$ известно из начальных условий. Тогда задача сводится к итеративному по времени решению интегральных уравнений относительно $\theta(\tau, t_i)$ и $\theta_n(\tau, t_i)$. Каждое интегральное уравнение в соответствии с [1] приводится к системе линейных алгебраических уравнений. Если задача 3-го рода, то неизвестными в системе будут значения температуры на всем наборе точек (x_0, y_0) , и значения теплового потока в тех точках, которые находятся на границах между подобластями. Если же задача – 1-го рода, то, напротив, тепловой поток будет искааться во всех точках, а температура лишь на внутренних границах. Уравнения (4a) умножаются на λ_i , а уравнения (4b) на λ_j для того, чтобы в качестве неизвестной был именно тепловой поток, а не производная по нормали. Значение функции может быть теперь найдено и в каждой точке внутри области по формуле (2). Полученная система уравнений имеет блочный вид. Поэтому при ее решении можно применять методы для разреженных матриц.

По приведённому выше алгоритму составлена программа расчёта температур в многосвязных сложных областях. В качестве примера рассмотрим область D , состоящую из 2-х прямоугольных подобластей. Подобласть D_1 ограничена прямыми $x=-1, x=0, y=0, y=1$. Подобласть D_2 ограничена прямыми $x=0, x=1, y=0, y=1$. Тогда граница между ними проходит по прямой $x=0$, а вся граница области D состоит из 7 участков (отрезков, параллельных одной из координатных осей).

Точное решение выглядит так:

$$\theta_1 = t \cdot (x^2 + 100x + 1) + 1; \quad \theta_2 = t \cdot (10x + 1) + 1$$

$$\theta_{0i} = 0, a_1 = 1, a_2 = 10, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.$$

Приведём в таблице решение задачи 3-го рода на каждом из участков границы в 5 узловых точках с шагом по времени $t_m - t_{m-1} = 0.001$ после 20-го шага (начальное время $t_0 = 0$, финальное время $t_{20} = 0.02$).

| Участки | Номера узлов | | | | |
|-----------------|--------------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y=0; x \geq 0$ | 1.020 | 1.521 | 2.025 | 2.531 | 3.040 |
| $x=1$ | 3.040 | 3.040 | 3.040 | 3.040 | 3.040 |
| $y=1; x \geq 0$ | 3.040 | 2.531 | 2.025 | 1.521 | 1.020 |
| $x=0$ | 1.020 | 1.020 | 1.020 | 1.020 | 1.020 |
| $y=1; x \leq 0$ | 1.020 | .970 | .920 | .871 | .820 |
| $x = -1$ | .820 | .820 | .820 | .820 | .820 |
| $y=0; x \leq 0$ | .820 | .871 | .920 | .970 | 1.020 |

Сравнение показывает, что точное значение температуры отличается от приближённого в большинстве точек не более чем на 0.01. Узловые точки соответствуют разбиению каждого отрезка на 4 равные части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

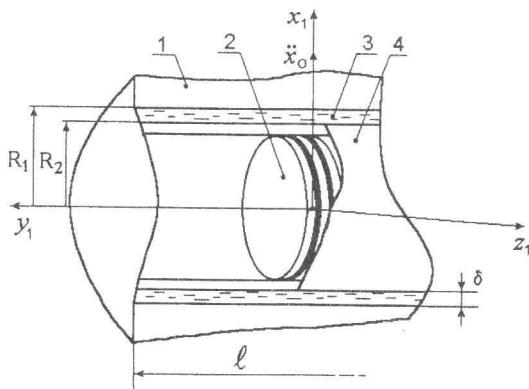
1. Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н. Температурные поля и термона-
пржения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985. 280 с.

УДК 531.383

Л. И. Могилевич, В. С. Попов

ДИНАМИКА ВЗАЙМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОГО ТЕЛА СО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ ПРИМЕНITЕЛЬНО К ДВИГАТЕЛЕСТРОЕНИЮ

Рассмотрим динамику упругой гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания и слоя охлаждающей жидкости для следующей физической модели (см. рисунок). Корпус двигателя 1 является абсолютно жёстким. Поршневая группа 2 приходит в движения за счёт периодического кратковременного воздействия взрыва рабочей смеси. Корпус двигателя имеет цилиндрическую полость длиной ℓ и радиусом R_1 . Слой вязкой несжи-
маемой охлаждающей жидкости 3, толщиной $\delta \ll R_2$, окружает гильзу цилиндра двигателя 4, радиуса R_2 , толщиной $h_0 \ll R_2$. Возможны следующие случаи истечения жидкости из радиальной щели в торцы: 1) истечение отсутствует (закрытые торцы); 2) свободное истечение (открытые торцы).



Корпус двигателя совершает колебания, за счёт неуравновешенности вращающихся масс самого двигателя, неровности дороги, а кроме того, на гильзу цилиндра действует сила давления газов при взрыве рабочей смеси.

Упругие свойства гильзы цилиндра учтём посредством введения упругой связи с приведённым коэффициентом жёсткости. Таким образом, будем рассматривать перемещения вследствие прогиба гильзы, центра масс твёрдого цилиндра с упругой связью и приведённой массой.

Систему координат $O_1x_1y_1z_1$ свяжем с корпусом двигателя. Введём в рассмотрение цилиндрическую систему координат r, θ, y и соответствующую ей декартовую систему координат $Oxyz$. Полюс O цилиндрической системы координат имеет смещение $e = x_1 \ll \delta$ относительно O_1 , вследствие перемещения гильзы, как жёсткого цилиндра с упругой связью. Направления осей Oy и O_1y_1 цилиндрической и декартовой систем координат совпадают.

Осуществим переход к одномассовой системе согласно [1], представив гильзу балкой: а) с жёстким защемлением и б) с шарнирным опиранием на торцах. Таким образом, уравнение движения центра масс гильзы будет иметь вид

$$m_2 \ddot{x}_1 + nx_1 = -m_2 \ddot{x}_0 + N_{\text{окx}_1} + F(t), \quad (1)$$

где \ddot{x}_0 – переносное виброускорение корпуса двигателя – гармоническая функция; m_2 – приведённая масса гильзы; n – приведённый коэффициент жёсткости упругой связи (учтём, что: а) жёсткое защемление $n = 192EJ/\ell^3$, $m_2 = 192m_e/4,73^4$; б) шарнирное опирание $n = 48EJ/\ell^3$, $m_2 = 48m_e/\pi^4$; здесь $m_e = 2\pi R_2 h_0 \ell \rho_0$ – масса гильзы; $J = 2\pi R_2 h_0 (R_2^2 + h_0^2/4)$ – момент инерции гильзы относительно оси; ρ_0 – плотность материала гильзы; E – модуль Юнга); $N_{\text{окx}_1}$ – реакция охлаждающего слоя жидкости; $F(t)$ – импульсная периодическая сила, обусловленная взрывом рабочей смеси; x_1 – перемещение центра масс гильзы.

Представим силу $F(t)$ в виде

$$F(t) = S[(H(t) - H(t + \varepsilon T/2)) + (H(t) - H(t - \varepsilon T/2))], \quad (2)$$

здесь S – амплитуда силы $F(t)$; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда; T – период; εT – длительность действия силы $F(t)$; $\varepsilon \ll 1$.

Учитывая периодичность (2) с периодом T , разложим её в ряд Фурье

$$F(t) = \frac{4S}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi k \varepsilon/2)}{k} \sin \frac{2\pi k}{T} t. \quad (3)$$

Введём в рассмотрение безразмерные малые параметры задачи $\lambda = e/\delta \ll 1$ и $\psi = \delta/R_2 \ll 1$. Решая задачу гидродинамики методом возмущений по малым параметрам λ и ψ , в режиме установившихся гармонических колебаний с частотой ω , получим выражение для реакции охлаждающего слоя жидкости [2]

$$N_{\omega \times \dot{x}_1} = -M\ddot{x}_1 - K\dot{x}_1 + m\ddot{x}_0, \quad (4)$$

здесь $M = 2m\epsilon^2\alpha(\psi \operatorname{Re})^{-1}(1 - \sigma^{-1}tn\sigma\Phi)$ – присоединённая масса жидкости; $K = 12\gamma t\omega(\psi \operatorname{Re})^{-1}(1 - \sigma^{-1}tn\sigma\Phi)$ – коэффициент демпфирования; $m = \pi R_2^2 \ell \rho$ – масса охлаждающей жидкости в объёме гильзы; $\operatorname{Re} = \delta^2 \omega / \nu$; ν – кинематический коэффициент вязкости, ρ – плотность охлаждающей жидкости; $12\gamma = \frac{2\epsilon^3(sh\epsilon - \sin \epsilon)}{\epsilon^2(ch\epsilon + \cos \epsilon) - 2\epsilon(sh\epsilon + \sin \epsilon) + 2(ch\epsilon - \cos \epsilon)}$; $\sigma = \frac{\ell}{2R_2}$; $2\epsilon^2\alpha = \frac{2\epsilon^3(e(ch\epsilon + \cos \epsilon) - (sh\epsilon + \sin \epsilon))}{\epsilon^2(ch\epsilon + \cos \epsilon) - 2\epsilon(sh\epsilon + \sin \epsilon) + 2(ch\epsilon - \cos \epsilon)}$; $\epsilon = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{2}}$; $\Phi = 0$ – для случая закрытых торцов; $\Phi = 1$ – для случая открытых торцов.

В силу линейности уравнения (1) рассмотрим отдельно воздействие переносного виброускорения \ddot{x}_0 и силы $F(t)$.

В первом случае получим закон перемещений центра масс жёсткого цилиндра за счёт действия переносного виброускорения \ddot{x}_0

$$x_{10} = \frac{1}{\sqrt{[n - (m_2 + M)\omega^2]^2 + K^2\omega^2}} \Delta m E_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + F(\omega)); \quad (5)$$

здесь $F(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{K\omega}{(m_2 + M)\omega^2 - n}$; $\Delta m = m - m_2$; $E_0 \omega^2$ – амплитуда переносного виброускорения \ddot{x}_0 ; φ_0 – начальная фаза.

Выражение (5) определяет амплитудную частотную характеристику (АЧХ)

$$A_{10}(\omega) = 1/\sqrt{(1 - (m_2 + M)\omega^2/n)^2 + K^2\omega^2/n^2}. \quad (6)$$

Проведём сравнение значения резонансных частот, найденных по (6), для гильзы цилиндра двигателя КамАЗ-740 ($R_2 = 68 \cdot 10^{-3}$ м, $\ell = 25 \cdot 10^{-2}$ м, $h_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ м, $E = 10^{11}$ Па, $\rho_0 = 6,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho = 1000$ кг/м³, $\nu = 10^{-4}$ м²/с, $\delta = 10^{-2}$ м) с резонансными частотами, определёнными в [3, 4], для гильзы, представляющей упругой оболочкой с жёсткой заделкой по торцам. (Заметим, что в рассматриваемом случае имеет место одна резонансная частота в отличие от трёх резонансных частот в [3, 4]). Резонансные частоты оболочки, окружённой слоем жидкости: а) закрытые торцы [3] – $\omega_1^o = 10210,68$ рад/с, $\omega_2^o = 70781,07$ рад/с, $\omega_3^o = 113684,87$ рад/с; б) открытые торцы [4] – $\omega_1^c = 11541,77$ рад/с, $\omega_2^c = 71603,75$ рад/с, $\omega_3^c = 113727,99$ рад/с. Резонансные частоты для жёсткого цилиндра с упругой связью при жёстком защемлении: а) закрытые торцы – $\omega_{\omega \times \dot{x}_1}^o = 24556,82$ рад/с; б) открытые торцы $\omega_{\omega \times \dot{x}_1}^c = 34011,68$ рад/с; при шарнирном опирании: а) закрытые торцы

– $\omega_u^o = 12136,03$ рад/с; б) открытые торцы – $\omega_u^c = 16665,23$ рад/с. Сравнение позволяет сделать вывод о правомерности предлагаемого подхода и о предпочтительности использования модели с шарнирным опирианием.

Во втором случае рассмотрим действие силы давления при взрыве рабочей смеси $F(t)$. С учётом (3) и (4), в котором $\ddot{x}_0 \equiv 0$, уравнение (1) можно записать в виде

$$m_2 \ddot{x}_{1F} + n x_{1F} + M \dot{x}_{1F} + K x_{1F} = F(t), \quad (7)$$

здесь x_{1F} – перемещение гильзы, обусловленное импульсной силой (3).

Решая (7) для режима установившихся гармонических колебаний, получим закон перемещения центра масс жёсткого цилиндра в виде

$$x_{1F} = \frac{4S}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi k \varepsilon / 2)}{k} \frac{\sin(k \omega_1 t + F(k \omega_1))}{\sqrt{[n - (m_2 + M)k^2 \omega_1^2]^2 + K^2 k^2 \omega_1^2}}, \quad (8)$$

здесь $\omega_1 = 2\pi/T$ – частота импульсной силы; K и M – коэффициент демпфирования и присоединённая масса, вычисляемые для $k \omega_1$.

Закон перемещения (8) позволяет определить АЧХ для k -й гармоники

$$A_{1F}(\omega) = 1 / \sqrt{(1 - (m_2 + M)k^2 \omega_1^2 / n)^2 + K^2 k^2 \omega_1^2 / n^2}. \quad (9)$$

Сравнивая выражения (6) и (9), можно отметить, что вклад в резонанс колебаний будут вносить только гармоники, частоты которых близки к резонансным частотам, определённым по (9) ($k \omega_1 \approx \omega_u$). Таким образом, если известен период T импульсной силы, то номер гармоники, вносящий вклад в явление резонанса колебаний, определяется на основе выше найденных резонансных частот.

В заключение отметим, что найденные в работе резонансные частоты соответствуют частотам, на которых возникает кавитационная коррозия гильзы цилиндра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курс сопротивления материалов / Под ред. М. М Филоненко-Бородич. М.: Гос. изд. техн.-теор. лит-ры, 1956.
2. Андрейченко К. П., Могилевич Л. И. Динамика гирокопов с цилиндрическим поплавковым подвесом. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. 160 с.
3. Могилевич Л. И., Попов В. С. Гидроупругость гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания при внешней вибрации // Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Сб. науч. тр. межвуз. научн. конференции. СГТУ, 2000. С. 189 – 196.
4. Могилевич Л. И. Упрогогидродинамика гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания в слое охлаждающей жидкости // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15 (18). Изд-во Сарат. ун-та, 2001. С. 70 – 76.

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРА С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СОЧЛЕНЕНИЯМИ*

В статье на примере трёхзвенного пространственного манипулятора с взаимно ортогональными кинематическими осями излагается новый метод решения обратной задачи кинематики, основанный на теории кинематического управления и кватернионном методе описания углового движения твёрдого тела.

1. Постановка задачи. Введём в рассмотрение следующие системы координат: X – неподвижную, связанную с основанием манипулятора, $Y^{(i)}$ – связанную с i -м звеном, Y – связанную с выходным звеном (схватом) манипулятора. Углы относительных поворотов звеньев вокруг осей X_1 , $Y_2^{(1)}$, $Y_3^{(2)}$ обозначим соответственно через α , β , γ .

Взаимную ориентацию введённых систем координат будем задавать собственными кватернионами поворотов [1] $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, $\bar{\lambda}_3$ в соответствии со схемой поворотов

$$X \xrightarrow{\bar{\lambda}_1} Y^{(1)} \xrightarrow{\bar{\lambda}_2} Y^{(2)} \xrightarrow{\bar{\lambda}_3} Y^{(3)}(Y) \sim X \xrightarrow{\bar{\lambda}} Y, \quad (1.1)$$

где

$$\bar{\lambda}_1 = \cos \frac{\alpha}{2} + \bar{i}_1 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \bar{\lambda}_2 = \cos \frac{\beta}{2} + \bar{i}_2 \sin \frac{\beta}{2}, \quad \bar{\lambda}_3 = \cos \frac{\gamma}{2} + \bar{i}_3 \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (1.2)$$

$\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона.

Тогда результирующий кватернион, описывающий ориентацию схвата манипулятора в системе координат X , будет иметь вид

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 \circ \bar{\lambda}_2 \circ \bar{\lambda}_3, \quad (1.3)$$

где символ \circ означает кватернионное произведение.

Проекции вектора $\bar{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения выходного звена манипулятора на оси систем координат Y и X определяются соотношениями (1.4) и (1.5) соответственно

$$\begin{aligned} \omega_{Y_1} &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma, & \omega_{Y_2} &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma, \\ \omega_{Y_3} &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-001922, и научной программы “Университеты России - фундаментальные исследования”, проект № 015.04.01.50.

$$\begin{aligned}\omega_{X_1} &= \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \sin \beta, & \omega_{X_2} &= \dot{\beta} \cos \alpha - \dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta, \\ \omega_{X_3} &= \dot{\beta} \sin \alpha + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Здесь точка означает производную по времени.

Разрешая уравнения (1.4), (1.5) относительно угловых скоростей относительных поворотов $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{\omega_{Y_1} \cos \gamma - \omega_{Y_2} \sin \gamma}{\cos \beta}, & \dot{\beta} &= \omega_{Y_1} \sin \gamma + \omega_{Y_2} \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} &= \omega_{Y_3} - \dot{\alpha} \sin \beta\end{aligned}\quad (1.6)$$

или

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{\omega_{X_3} \cos \alpha - \omega_{X_2} \sin \alpha}{\cos \beta}, & \dot{\beta} &= \omega_{X_2} \cos \alpha + \omega_{X_3} \sin \alpha, \\ \dot{\alpha} &= \omega_{X_1} - \dot{\gamma} \sin \beta.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Задача заключается в нахождении углов α , β , γ относительных поворотов звеньев по известным их начальным α_0 , β_0 , γ_0 и конечным α_t , β_t , γ_t значениям, характеризующим ориентацию выходного звена манипулятора в начальном и конечном положениях.

Эта задача, называемая обратной задачей кинематики, традиционно решается на основе конечных тригонометрических соотношений (1.2), (1.3) и уравнения в матрицах направляющих косинусов. Для трёхзвенного манипулятора с взаимно ортогональными кинематическими осями, такая задача решается довольно просто. Однако, при повышении числа степеней свободы системы аналитическое и численное решения представляют значительные трудности. Использование теории кинематического управления угловым движением твёрдого тела позволяет свести решение задачи к интегрированию кинематических уравнений движения манипулятора и, тем самым, снимает известные трудности решения краевых задач, описываемых нелинейными тригонометрическими уравнениями. Такой подход иллюстрируется на примере рассматриваемого манипулятора.

В соответствии с этой теорией в качестве управления ориентацией твёрдого тела (выходного звена манипулятора) выступает вектор абсолютной угловой скорости [2, 3], закон формирования которого строится по принципу обратной связи.

С точки зрения этой теории уравнения (1.6) или (1.7) описывают собой управляемую систему, переводимую асимптотически устойчивым (в целом) образом за счёт соответствующего выбора законов изменения компонент вектора абсолютной угловой скорости (управлений) из заданного начального состояния α_0 , β_0 , γ_0 в требуемое конечное α_t , β_t , γ_t .

2. Построение законов управления, использующих кватернион ошибки ориентации. Построение требуемого вектора абсолютной угловой скорости (вектора управления) может быть выполнено [4] либо в связанный системе координат Y , либо в неподвижной системе координат X по формулам

$$\bar{\omega}_Y = -k^* \frac{\bar{v}_v^*}{v_0^*}, \quad \bar{\omega}_X = -k \frac{\bar{v}_v}{v_o}, \quad (2.1)$$

где $v_0^*, v_o, \bar{v}_v^*, \bar{v}_v$ – скалярные и векторные части кватернионов

$$\bar{v}^* = \tilde{\lambda}^T \circ \bar{\lambda}, \quad \bar{v} = \bar{\lambda} \circ \tilde{\lambda}^T \quad (2.2)$$

ошибки ориентации выходного звена для текущего момента времени (в связанный и инерциальной системах координат соответственно). В соотношениях (2.2) кватернион $\bar{\lambda}$ текущей ориентации выходного звена манипулятора находится по формулам (1.3), (1.2), а кватернион программной ориентации $\tilde{\lambda}^T$ – по аналогичным формулам, в которых вместо α, β, γ необходимо взять $\alpha_T, \beta_T, \gamma_T$; k^* , k – коэффициенты усиления обратных связей ($k^*, k = const > 0$), выбираемые из условий устойчивости управляемого движения.

3. Решение обратной задачи. Алгоритм решения обратной задачи кинематики заключается в численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (1.6) или (1.7) для заданных $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, где компоненты вектора абсолютной угловой скорости определены соотношениями (1.2), (1.3), (2.1), (2.2).

В заключение отметим, что для обобщения описанного подхода на случай многозвенных пространственных манипуляторов необходимо обобщить кинематическую задачу управления угловым движением твёрдого тела на случай произвольного пространственного управляемого движения, вводя вместо углов, векторов и кватернионов дуальные углы, винты и бикватернионы Клиффорда и используя бикватернионные уравнения кинематики пространственных манипуляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
2. Плотников П. К., Сергеев А. Н., Челноков Ю. Н. Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9–18.
3. Панков А. А., Челноков Ю. Н. Исследование кватернионных законов кинематического управления ориентацией твёрдого тела по угловой скорости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 3–12.
4. Бирюков В. Г., Челноков Ю. Н. Векторное построение кинематического стабилизирующего управления угловым движением твёрдого тела // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 156–158.

**НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ПРОЦЕССА ВЫХОДА НА УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ
ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

В статье изучается поведение нелинейной динамической системы в процессе выхода её на установившийся режим колебаний под воздействием возмущающей и диссипативной силы. В качестве расчётного объекта берётся прямолинейная абсолютно гибкая нить [1], материал которой описывается законом Кельвина-Фойгта. Продольные колебания в нити возбуждаются перемещением левого её конца по гармоническому закону. Правый конец неподвижно закреплён. Процесс распространения возмущений описывается одномерным волновым уравнением, которое дополняется неравенствами, отражающими специфику сопротивления абсолютно гибкой нити растяжению – сжатию [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}; \\ N &= \begin{cases} f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}), & f \geq 0, \\ 0, & f < 0; \end{cases} \\ f &= \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\partial x}{\partial s} - 1, \quad \frac{\partial x}{\partial s} \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь скорость u отнесена к скорости продольной упругой волны, координаты (x – эйлерова, s – лагранжева) – к длине нити, натяжение N – к модулю упругости (жёсткости нити на растяжение); ε – деформация; $\dot{\varepsilon} \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$; η – коэффициент вязкости материала нити в модели Кельвина-Фойгта. Границные и начальные условия задачи имеют вид

$$x(0, t) = -p \sin \omega t, \quad x(1, t) = 1 + \varepsilon; \quad x(s, 0) = s(1 + \varepsilon_0), \quad u(s, 0) = 0 \quad (s > 0),$$

где ε_0 , p и ω – начальная деформация растяжения нити, амплитуда и круговая частота колебаний её левого конца.

Особенность задачи, определяющая её нелинейность, заключается в наличии неравенств в расчётной системе уравнений. Решается она численно с использованием пошаговой процедуры метода конечных разностей [3]. Выход решения на установившийся режим характеризуется отображением Пуанкаре $X_n = X(t_0 + nT)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, X – анализируемая функция времени.

На рис. 1 приведены отображения Пуанкаре для сеточной функции $N_c = N(0.75, nT)$ при различных значениях p , а на фазовой плоскости (рис. 2) показаны обнаруженные устойчивые режимы колебаний системы:

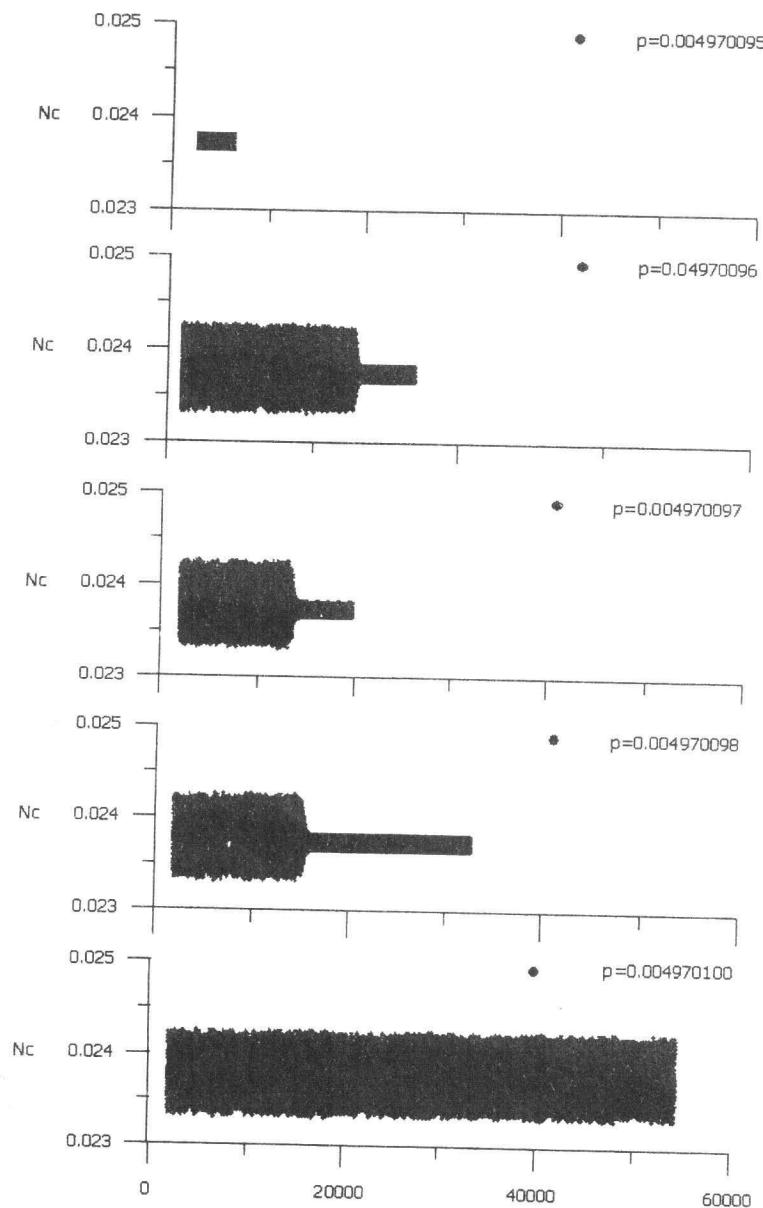


Рис. 1

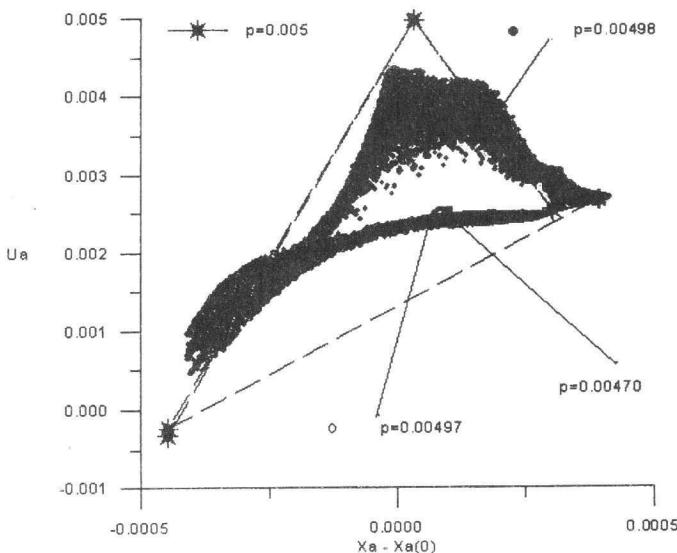


Рис. 2

периодический при $p = 0.0047$ – неподвижная точка, квазипериодический (0.00497 , овал), хаотический (0.00498) и субгармонический с периодом $8T$ (0.005 , 8 неподвижных точек). Длительность переходного процесса и его характер весьма различны для указанных режимов движения. Как правило, для периодических режимов этот процесс скоротечен и монотонен (от 200 до 2000 циклов). За это время система подстраивается под период вынуждающего воздействия. Иначе обстоит дело с квазипериодическими режимами. Продолжительность переходного процесса к ним может быть существенной. Так на рис. 1 видно, что при удалении параметра от устойчивого квазипериодического значения (0.00497) переходный процесс затягивается, а для $p = 0.0049701$ остаётся хаотическим. Качественная особенность его состоит в том, что устойчивый достаточно длительное время хаотический тип колебаний при наступлении критического состояния очень быстро преобразуется в квазипериодический с параметрами, близкими $p = 0.00497$. Это наиболее характерно для значений параметра в окрестности точек бифуркации решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М. А., Ридель В. В. Режимы разрывных колебаний в абсолютно гибкой нити // ДАН. 1995. Т. 343, № 4. С. 478 – 481.
2. Ридель В. В., Ильгамов М. А. Нелинейные волны в абсолютно гибкой нити // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 6. С. 139 – 146.
3. Ридель В. В., Гулин Б. В. Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990. 206 с.

КОЛЕБАНИЯ ТРЕУГОЛЬНОГО КОНИЧЕСКОГО КРЫЛА В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

С помощью метода разложения по малым параметрам [1] определяются коэффициенты аэродинамических производных момента тангажа при гиперзвуковом обтекании колеблющегося тонкого конического крыла. Рассмотрены плоское треугольное крыло и коническое крыло, для которого сечение поверхности ударной волны при стационарном гиперзвуковом обтекании представляет собой гиперболу [2].

1. Пусть тонкое треугольное крыло расположено в гиперзвуковом потоке под углом атаки α . Ударная волна полагается присоединённой к боковым кромкам крыла. Газ идеальный и совершенный с отношением теплоёмкостей γ . Скорость набегающего потока V_∞ , а число $M_\infty \gg 1$. Плоскость Oxz декартовой системы координат $Oxyz$ проходит через боковые кромки крыла, а начало координат находится в вершине крыла. Крыло и все параметры течения полагаются симметричными относительно плоскости Oxy .

Малый параметр ε , характеризующий отношение плотностей при переходе газа через сильную ударную волну, которая образуется при обтекании нижней поверхности крыла, определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_\infty^2 \sin^2 \alpha} \ll 1. \quad (1)$$

Конические безразмерные переменные вводятся по формулам

$$\eta = y(\varepsilon \operatorname{tg} \alpha)^{-1}, \quad \zeta = z(\varepsilon^{1/2} x \operatorname{tg} \alpha)^{-1}. \quad (2)$$

Поверхность крыла и поверхность ударной волны в конических переменных будут описываться соответственно соотношениями

$$\eta = \eta_w(\zeta), \quad \eta = \eta_s(\zeta), \quad |\zeta| \leq \zeta_k, \quad (3)$$

где $\zeta = \pm \zeta_k$ соответствует кромкам крыла.

С помощью метода разложения по малому параметру ε различными авторами решено большое количество задач о гиперзвуковом обтекании тел. В частности, в [2, 3] построено аналитическое решение для главных членов разложения при обтекании тонкого крыла, когда сечение поверхности ударной волны имеет форму гиперболы, т. е.

$$\eta = \eta_s(\zeta) = A - B\sqrt{1 + \beta^2 \zeta^2}. \quad (4)$$

Чтобы ударная волна была присоединённой, положительные константы A , B , β должны удовлетворять неравенству

$$A > B\sqrt{1 + 4\beta^2}. \quad (5)$$

В [2, 3] получены формулы для определения формы поверхности крыла и распределения давления на нём. В [2] приведены результаты рас-

чётов для определения формы поверхности крыла и распределения давления на ней для различных значений констант A , B , β . Изменяя значения указанных трёх констант можно получить разнообразные формы поверхностей крыла и главные члены разложения параметров течения при гиперзвуковом обтекании таких крыльев.

В [4] определение главных членов разложения решения задачи о гиперзвуковом обтекании плоского треугольного крыла сведено к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка.

2. Пусть тонкое треугольное коническое крыло, расположенное в гиперзвуковом потоке под углом атаки α , совершает малые колебания вокруг оси, параллельной оси Oz и расположенной в плоскости Oxz от оси Oz на расстоянии hb , где b – длина крыла в направлении оси Ox .

В [1] с помощью разложения по малым параметрам показано, что в этом случае коэффициенты аэродинамических производных моментов тангажа m_θ и m_ω , где θ – угол отклонения крыла от стационарного положения, ω – угловая скорость отклонения крыла, выражаются через $\eta_s(\zeta)$ и $\eta_w(\zeta)$ по формулам

$$\begin{aligned} \frac{m_\theta}{2 \sin 2\alpha} &= -\left[\frac{2}{3} - h + k^2 \left(-\frac{1}{5} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} \right) G \right], \\ \frac{m_\omega}{2 \sin 2\alpha} &= -\left[\frac{1}{2} - \frac{4}{3} h + h^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} h \right) G \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$G = \frac{1}{\zeta_k} \int_{-\zeta_k}^0 [\eta_s(\zeta) - \eta_w(\zeta)] d\zeta, \quad k = \frac{\omega b}{V_\infty \cos \alpha}, \quad (7)$$

где k – безразмерная частота колебаний.

3. По формулам (6), (7) проводились расчёты для гиперзвукового обтекания колеблющегося плоского крыла для случая $\alpha=20^\circ$, $\zeta_k=4.5$, $\gamma=1.4$, $k=0.25$; 0.5 ; 1.0 . Результаты расчётов представлены в таблице коэффициентов аэродинамических производных момента тангажа.

| h | m_θ $k=0.25$ | m_θ $k=0.5$ | m_θ $k=1.0$ | m_ω |
|-----|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------|
| 0.0 | -0.8490 | -0.8248 | -0.7279 | -0.9657 |
| 0.1 | -0.7223 | -0.7037 | -0.6295 | -0.7641 |
| 0.2 | -0.5954 | -0.5816 | -0.5267 | -0.5882 |
| 0.3 | -0.4681 | -0.4585 | -0.4197 | -0.4380 |
| 0.4 | -0.3407 | -0.3342 | -0.3084 | -0.3135 |
| 0.5 | -0.2129 | -0.2089 | -0.1927 | -0.2148 |
| 0.6 | -0.0849 | -0.0825 | -0.0728 | -0.1417 |
| 0.7 | 0.0434 | 0.0450 | 0.0515 | -0.0949 |
| 0.8 | 0.1719 | 0.1736 | 0.1800 | -0.0727 |
| 0.9 | 0.3008 | 0.3032 | 0.3129 | -0.0768 |
| 1.0 | 0.4299 | 0.4339 | 0.4501 | -0.1066 |

Расчёты, проведённые для треугольных крыльев с различными формами поверхности, в частности, для $A=1.5$, $B=0.5$, $\beta=0.5$, $A=4.5$, $B=1.5$, $\beta=1.0$ и для других случаев, дали значения коэффициентов аэродинамических производных, близкие к значениям, указанным в таблице коэффициентов. Это связано с тем, что для тонких треугольных крыльев с произвольной формой поверхности согласно закону сохранения массы в первом приближении $G=0.5$ в случае, когда при гиперзвуковом обтекании ударная волна оказывается присоединённой к боковым кромкам. Распределение нестационарной добавки давления на колеблющемся в гиперзвуковом потоке крыле с присоединённой к боковым кромкам ударной волной вычисляется по формулам работы [3]. Из этих формул видно, что распределение нестационарной добавки давления на поверхности крыла существенно зависит от формы поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hui W. H., Hemdan H. T. Unsteady and steady aerodynamic force of slender delta wings according to thin shock layer theory // Canadian Aeronautics and Space Journal. 1977. Vol. 23, № 4. P. 238 – 251.
2. Сапунков Я. Г. Пример приближённого аналитического решения задачи о гиперзвуковом обтекании треугольного крыла // Аэродинамика: Нелинейные проблемы: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 84 – 91.
3. Сапунков Я. Г. Стационарное и нестационарное гиперзвуковое обтекание конического крыла // Аэродинамика: Ударно-волновые процессы: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 15(18). С. 53 – 60.
4. Сапунков Я. Г. К задаче о гиперзвуковом обтекании плоского треугольного крыла // Аэродинамика: Плоские и осесимметричные течения жидкости: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Вып. 11(14). С. 42 – 50.

УДК 533.6011

Я. Г. Сапунков, Г. П. Шиндяпин, В. А. Поршнев, О. Н. Федорец

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕТОНАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ*

В статье исследуется движение детонационной волны и продуктов детонации в камере детонационного двигателя. Камера представляет собой трубу постоянного сечения S , конечной длины l , закрытую с одного конца и заполненную взрывчатой смесью.

1. Постановка задачи. Детонационная волна создаётся у закрытого конца камеры и распространяется по взрывчатой смеси к открытому её концу. Требуется определить распределение газодинамических параметров

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, научно-технической программы, проект № 01.01.030.

среды по всей длине камеры от начала создания детонации до завершения оттока её продуктов из камеры и суммарный импульс давления на дно камеры за этот промежуток времени.

2. Определение параметров течения газа в камере на этапе распространения фронта детонации. На этом этапе в камере возникают три области. Область 1 – область исходной взрывчатой смеси расположена между открытым концом камеры и фронтом детонации. Область 2 – область центрированной волны разрежения в продуктах детонации. Её передний фронт расположен непосредственно за фронтом детонации, а задний фронт определяет подвижную правую границу области 3 – области покоя в продуктах детонации, которая прилегает к закрытому концу камеры. В области 2 происходит непрерывное изменение параметров течения от их значений за фронтом детонации до значений в области покоя 3. Введем обозначения: γ_1 , ρ_1 , p_1 – отношение теплоёмкостей, плотность и давление в области исходной взрывчатой смеси; γ_2 – отношение теплоёмкостей в продуктах детонации; q – количество тепла, которое выделяется при сгорании единицы массы взрывчатой смеси; давление вне камеры p_1 . Для удобства расчётов вводится безразмерная величина h^2 , которая определяется согласно выражению

$$h^2 = 2q \frac{p_1}{\rho_1}. \quad (1)$$

Скорость звука a_1 во взрывчатой смеси определяется из соотношения

$$a_1 = \sqrt{\gamma_1 \frac{p_1}{\rho_1}}. \quad (2)$$

По камере с постоянной скоростью U распространяется фронт детонации Чепмена-Жуге. В этом случае число Маха M_1 , связанное с U и a_1 выражением

$$M_1 = \frac{U}{a_1} = U \sqrt{\frac{\rho_1}{\gamma_1 p_1}}, \quad (3)$$

определяется по формуле

$$M_1 = \sqrt{\frac{1}{\gamma_1} \left[\frac{1}{2} h^2 (\gamma_2^2 - 1) + \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1}{\gamma_1 - 1} + \sqrt{\left[\frac{1}{2} h^2 (\gamma_2^2 - 1) + \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1}{\gamma_1 - 1} \right]^2 - \gamma_2^2} \right]}. \quad (4)$$

Формула (4) получена из законов сохранения массы, количества движения и энергии на фронте волны детонации Чепмена-Жуге [1].

Давление p_S , плотность ρ_S , скорость звука a_S и скорость движения продуктов детонации v_S непосредственно за фронтом детонации в режиме Чепмена-Жуге определяются соотношениями:

$$p_S = \frac{p_1}{\gamma_2 + 1} \left(1 + \gamma_1 M_1^2\right), \quad \rho_S = \rho_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{(\gamma_2 + 1) M_1^2}{1 + \gamma_1 M_1^2}, \quad a_S = \sqrt{\gamma_2 \frac{p_S}{\rho_S}},$$

$$v_S = U - a_S. \quad (5)$$

Движение продуктов детонации на этапе распространения детонационной волны является автомодельным. Расстояние x отсчитывается вдоль камеры от её закрытого конца. Моменту возникновения детонации в камере соответствует момент времени $t=0$. Распределение параметров продуктов детонации в областях 2 и 3 в автомодельных переменных определяется по формулам

$$\frac{p}{p_S} = \begin{cases} [f(\xi)]^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2-1}}, & \text{если } \xi_* \leq \xi \leq 1; \\ b^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2-1}}, & \text{если } 0 \leq \xi < \xi_*; \end{cases} \quad \frac{\rho}{\rho_S} = \begin{cases} [f(\xi)]^{\frac{2}{\gamma_2-1}}, & \text{если } \xi_* \leq \xi \leq 1; \\ b^{\frac{2}{\gamma_2-1}}, & \text{если } 0 \leq \xi < \xi_*; \end{cases}$$

$$\frac{v}{v_S} = \begin{cases} \frac{2}{\gamma_2+1} \left[\frac{U}{v_S} \xi + \frac{\gamma_2-1}{2} - \frac{a_S}{v_S} \right], & \text{если } \xi_* \leq \xi \leq 1; \\ 0, & \text{если } 0 \leq \xi < \xi_*; \end{cases} \quad (6)$$

где

$$f(\xi) = 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \left[\frac{U}{a_S} \xi - \frac{v_S}{a_S} - 1 \right]; \quad \xi = \frac{x}{Ut}; \quad \xi_* = \frac{1}{U} \left[a_S - \frac{\gamma_2 - 1}{2} v_S \right];$$

$$b = f(\xi_*) = 1 - \frac{\gamma_2 - 1}{2} \frac{v_S}{a_S}. \quad (7)$$

3. Определение параметров течения продуктов детонации после прихода детонационной волны к открытому концу камеры. Параметры течения продуктов детонации на этом этапе определяются с помощью численного интегрирования уравнений одномерного нестационарного течения идеального газа методом Лакса-Вендроффа. Начальные условия для этого этапа определяются по формулам (6) и (7) для момента окончания предыдущего этапа. На концах камеры выполняются соответствующие граничные условия. Для решения краевой задачи с помощью ЭВМ составлена программа на языке *PASCAL*.

4. Расчет суммарного импульса. Теоретическое значение суммарного импульса давления I_1^t на дно камеры определяется по формуле

$$I_1^t = S \int_0^{t_k} [p(0, t) - p_1] dt, \quad (8)$$

где $p(0, t)$ – давление на дне камеры, t_k – момент времени, при котором скорость продуктов детонации на выходе из камеры обращается в нуль.

Реальное значение импульса тяги I_1 определяется из зависимости [2]

$$I_1 = K_{\pi} \cdot K_3 \cdot \alpha \cdot I_1^t,$$

где K_{π} – коэффициент качества продувки камеры; K_3 – коэффициент качества заполнения камеры; α – коэффициент избытка окислителя.

Коэффициенты K_{π} , K_3 , α определены экспериментально [2].

Расчёты проводились для компонентов топлива и детонационной камеры, на которых проводился натурный эксперимент, включающий 106 детонационных циклов.

Исходные данные для расчета:

компоненты топлива – $C_2H_2 +$ воздух; $l = 0,283$ м; $S = 0,0512$ м²; $\gamma_1 = 1,4$; $\gamma_2 = 1,28$; $\rho_1 = 1,35$ кг/м³; $p_1 = 1,0132 \cdot 10^5$ Па; $h^2 = 60$.

Результаты расчетов:

$M_1 = 5,3087$; $p_s = 17,9774 \cdot 10^5$ Па; $\rho_s = 2,3452$ кг/м³; $v_s = 747,93$ м/с; $a_s = 1014,54$ м/с; $U = 1762,47$ м/с; $t_k = 0,00138$ с; $I_1' = 17,97$ Н·с; $I_1 = 4,2265$ Н·с (для $K_n = 0,42$; $K_3 = 0,56$; $\alpha = 1,0$).

Экспериментальное значение единичного импульса $I_1^3 = 3,8475$ Н·с.

Время движения детонационной волны вдоль камеры 0,00016 с. В области 3 у закрытого конца камеры давление $p_3 = 6,6402 \cdot 10^5$ Па, плотность $\rho_3 = 1,0771$ кг/м³. Эти значения параметров у закрытого конца камеры сохраняются в течение 0,00043 с до прихода фронта волны разрежения от открытого конца камеры.

5. Вывод. Развитая модель достаточно хорошо описывает газодинамические процессы в камере детонационного двигателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. 2-е изд. М.: Наука, 1971.
2. Поршинев В. А., Федорец О. Н. Теоретико-экспериментальная методика расчёта основных параметров детонационных реактивных двигателей // Аэродинамика: Ударно-волновые процессы: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15(18). Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 82 – 88.

УДК 533.6.011:532.529

Г. Д. Севостьянов

РЕГУЛЯРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ОКОЛОЗВУКОВОГО СКАЧКА ОТ СТЕНКИ

Рассмотрим регулярное отражение косого околозвукового скачка AO от плоской стенки (оси x) в виде криволинейного скачка OB (причина его искривления – излом стенки ниже по потоку и вдали от точки O отраже-

ния). Требуется найти течение газа вблизи точки отражения за скачком OB . Задача рассматривалась еще Крокко [1], который ввел при этом "ежевидную" ударную поляру. Гудерлей [2] на плоскости годографа скорости для уравнения Трикоми получил первое приближение решения, заменив ударную поляру её касательной. В теории "коротких" волн на ударной волне оба условия не удовлетворены для аналогичной задачи.

Направим ось y перпендикулярно стенке в сторону потока. Течение газа описывается уравнениями Фальковича-Кармана [3] ($u = M^2 - 1$, M – число Maxa)

$$uu_x = v_y, \quad v_x = u_y, \quad (1)$$

на скачке $x = h(y)$ имеем два условия

$$h' = -\frac{[v]}{[u]}, \quad (h')^2 = \langle u \rangle, \quad (2)$$

$[f]$, $\langle f \rangle$ – разность и полусумма значений f_+ и f_- разрывной функции f на скачке.

До скачка AO имеем однородный слабосверхзвуковой поток: $u = u_\infty = M_\infty^2 - 1 > 0$, $v = v_\infty = 0$; на AO : $x = -\gamma y$, $\gamma = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$; $\omega = \frac{\pi}{2} - \alpha$ – угол падания скачка AO ; уравнение $x = h(y)$ скачка OB неизвестно.

Между скачками AO и OB имеется однородный поток: $u = u_1 > 0$, $v = v_1 < 0$, его параметры найдем, если в точке O имеем точку Крокко [2]:

$$\begin{aligned} u_1 &= zu_\infty, \quad u_c = -u_1/7, \quad v_c = 0, \quad z \approx 0,6060, \quad v_1 = -0,3529u_\infty^{3/2}, \\ \alpha &\approx \gamma = 0,8961\sqrt{u_\infty}, \quad \beta \approx \delta = \operatorname{tg} \beta = 0,5096\sqrt{u_\infty}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь β – угол наклона касательной к скачку OB к оси y в точке O (тогда $\omega' = \frac{\pi}{2} - \beta$ – угол отражения).

Из условий (2) на OB имеем

$$\begin{aligned} u &= u_+ = u_c + 4\delta G(y) + 2G^2(y), \\ v &= v_+ = 4u_c G(y) - 6\delta G^2(y) - 2G^3(y), \\ h'(y) &= g(y) = \delta + G(y), \quad G(0) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции h , g , G подлежат определению.

Ищем G и h в виде ряда по y с неизвестными постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} G(y) &= c_0 y + c_1 y^2 + c_2 y^3 + \dots \\ x = h(y) &= \delta y + c_0 y^2/2 + c_1 y^3/3 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

За скачком OB поле течения определяем через решение системы (1) для плоской стенки

$$\begin{aligned} u &= a_0(x) + a_1(x)y^2 + a_2(x)y^4 + \dots \\ v &= b_0(x)y + b_1(x)y^3 + b_2(x)y^5 + \dots \end{aligned}, \quad (6)$$

где все коэффициенты выражаются через одну пока произвольную функцию $a_0(x)$: $b_0 = a_0 a'_0$, $a_1 = b'_0 / 2$, ...

Ищем её в виде ряда

$$a_0(x) = u_c + g_c x + d_1 x^2 + d_2 x^3 + \dots \quad (7)$$

Здесь $g_c = [u_x(x, 0)]_c$ – параметр, пропорциональный кривизне скачка OB в точке O . Записав (6) на скачке OB ($x = h(y)$) и учитывая (4), (5), найдем коэффициенты в (5) и (7)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{g_c}{4}, \quad c_1 = -\frac{15}{64} \frac{\delta g_c^2}{u_c} > 0, \dots \\ d_0 &= g_c, \quad d_1 = -\frac{37}{32} \frac{g_c^2}{u_c} > 0, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение отраженного скачка OB

$$x = h(y) = \delta y + g_c \frac{y^2}{8} - \frac{5}{64} \frac{\delta g_c^2 y^3}{u_c} + \dots \quad (9)$$

для ускоренного потока за OB $g_c > 0$, для замедленного $g_c < 0$, для косого скачка OB $g_c = 0$.

Из (6) с помощью (7) и (8) определим поле скорости потока за OB :

$$\begin{aligned} u &= u_c + g_c x - \left(\frac{37}{u_c} \frac{x^2}{u_c} + 21y^2 \right) \frac{g_c^2}{32} + \dots, \\ v &= g_c y \left[u_c - \frac{21}{16} g_c x + \dots \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда величина V скорости и угол θ её наклона к стенке x определяются из формул

$$V^2 = V_\infty^2 + \left[1 + 2 \frac{u - u_\infty}{(\kappa + 1) M_\infty^2} \right]; \quad \theta = \frac{v}{(\kappa + 1) M_\infty^2}, \quad (11)$$

$\kappa > 1$ – отношение теплоёмкостей.

Коэффициент давления c_p выражается через функцию u :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = -2 \frac{u - u_\infty}{(\kappa + 1) M_\infty^2}, \quad (12)$$

p – давление, ρ – плотность, при этом на стенке ($y=0$)

$$\Delta c_p = c_p - c_{pc} = -\frac{2}{(\kappa+1)M_\infty^2} \left[g_c x - \frac{37}{32u_c} (g_c x)^2 + \dots \right]. \quad (13)$$

Полученное околозвуковое решение за OB можно записать в виде околозвукового закона подобия Кармана-Фальковича (1947)

$$\begin{aligned} X &= \frac{|g_c|}{|u_c|} x, \quad Y = \frac{|g_c|}{\sqrt{|u_c|}} y, \quad |u_c| = \varepsilon^2 \ll 1, \\ \frac{u}{|u_c|} &= U(X, Y) = -1 + X \operatorname{sign} g_c + \frac{37}{32} X^2 - \frac{21}{32} Y^2 + \dots, \\ \frac{v}{|u_c|^{3/2}} &= V(X, Y) = Y \left(-\operatorname{sign} g_c - \frac{21}{16} X + \dots \right), \\ \Delta C_p \Big|_{Y=0} &= \frac{\Delta c_p (\kappa+1) M_\infty^2}{2|u_c|} = -X \left(\operatorname{sign} g_c + \frac{37}{32} X + \dots \right), \\ X = H(Y) &= \sqrt{3} Y + \frac{1}{8} Y^2 \operatorname{sign} g_c + \frac{5\sqrt{3}}{64} Y^3 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Решение содержит параметры $M_\infty = \sqrt{1+u_\infty} > 1$ и g_c и отражает первое и второе приближение, остальные также получаются.

В системе (1) можно ввести интегропотенциал $I(x, y)$ равенствами

$$u = I_{xx}, \quad v = I_{xy},$$

который определяется из уравнения

$$(I_{xx})^2 = 2I_{yy},$$

допускающего введение геометрии в пространстве $x y I$. Интегропотенциал непрерывен с первой производной при переходе через скачок уплотнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Crocco L. Singolarità della corrente gassosa iperacustica nell'intorno di una prora a diedro // Aerotechnica. 1937. № 17. P. 519.
2. Guderley K. G. Theorie schallnaher strömungen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag. 1957 / Пер. с нем. К. Г. Гудерлей. Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.
3. Севостьянов Г. Д. Основы теории околозвуковых течений газа. Ч. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987.

Д. А. Сергеев, Ю. Н. Челноков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА*

Уравнения движения. Уравнения задачи переориентации орбиты управляемого космического аппарата (КА), движущегося в ньютоновском гравитационном поле, имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= cr^{-2}, \quad 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \Omega_\xi, \quad \Omega_\xi = p_3 rc^{-1} (i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi), \\ r &= p(1 + e \cos \varphi)^{-1}, \quad v_1 = ecp^{-1} \sin \varphi, \quad c = |r \times v| = const, \end{aligned} \quad (1)$$

где e и p – эксцентриситет и параметр орбиты, c – постоянная площадей; Ω_ξ – вектор абсолютной угловой скорости вращения орбиты, определённый своими проекциями в системе координат, связанной с орбитой, Λ – кватернион ориентации орбиты КА; r – расстояние от КА до притягивающего центра, p_3 – ускорение от тяги реактивного двигателя, направленной перпендикулярно плоскости орбиты; v_1 – проекция вектора v скорости КА на направление радиуса-вектора r КА; φ – истинная аномалия, \circ – символ кватернионного умножения.

Постановка задачи. Требуется определить ограниченное по модулю управление p_3 :

$$-p_{\max} \leq p_3 \leq p_{\max} \leq \infty, \quad (2)$$

переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (1), из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \phi(0) = \phi^0, \quad \Lambda(0) = \Lambda^0 \quad (3)$$

в конечное состояние

$$t = t_1, \quad vect(\bar{\Lambda}(t_1) \circ \Lambda^1) = 0 \quad (4)$$

и доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 p_3^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 - const,$$

где Λ^0 и Λ^1 – заданные кватернионы начальной и конечной ориентаций орбиты КА, $\bar{\Lambda}$ – кватернион, сопряжённый к Λ .

Минимум данного функционала (при $\alpha_2 \neq 0$) означает минимум энергозатрат и времени, затраченных на переориентацию орбиты КА.

Конечное значение времени t_1 , необходимого для изменения ориентации орбиты, также как и конечное значение истинной аномалии $\phi(t_1) = \phi^1$, не фиксируется и подлежит определению в результате решения

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 99-0100192, и научной программы “Университеты России – фундаментальные исследования”, проект № 015.04.01.50.

задачи оптимизации. Отметим, что в рассматриваемой задаче форма и размеры орбиты КА не изменяются в процессе управления его движением.

Необходимые условия оптимальности. Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума Понтрягина.

Введём сопряжённые переменные: кватернионную сопряжённую переменную \mathbf{M} , соответствующую кватернионной фазовой переменной Λ , и скалярную сопряжённую переменную χ , соответствующую скалярной фазовой переменной ϕ . Составим функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 p_3^2) + \chi c r^{-2} + p_3 r (2c)^{-1} (N_1 \cos \phi + N_2 \sin \phi), \quad (5)$$

где N_1 и N_2 – компоненты кватерниона

$$\mathbf{N} = N_0 \mathbf{i}_0 + N_1 \mathbf{i}_1 + N_2 \mathbf{i}_2 + N_3 \mathbf{i}_3 = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{M}.$$

Система дифференциальных уравнений для сопряжённых переменных будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= 2\chi v_1 r^{-1} + p_3 r (2c)^{-1} (N_1 \sin \phi - N_2 \cos \phi) - p_3 r^2 (2c^2)^{-1} v_1 (N_1 \cos \phi + N_2 \sin \phi), \\ \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \circ \Omega_\xi, \quad \Omega_\xi = p_3 r c^{-1} (\mathbf{i}_1 \cos \phi + \mathbf{i}_2 \sin \phi). \end{aligned} \quad (6)$$

Оптимальное управление находится из условия максимума функции H , определяемой соотношением (5), по переменной p_3 с учётом ограничения (2) и имеет вид

$$\begin{aligned} p_3^{opt} &= \left| p_3^{opt} \right| \operatorname{sgn} \{N_1 \cos \phi + N_2 \sin \phi\}, \quad \left| \mathbf{n}_\xi \right| = r (2c)^{-1} |N_1 \cos \phi + N_2 \sin \phi| \\ \left| p_3^{opt} \right| &= \begin{cases} \left| \mathbf{n}_\xi \right| / (2\alpha_2), & \text{если } \left| \mathbf{n}_\xi \right| / (2\alpha_2) \leq p_{max}, \\ p_{max}, & \text{если } \left| \mathbf{n}_\xi \right| / (2\alpha_2) > p_{max}. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Так как мы имеем задачу с подвижным правым концом, то условия трансверсальности приводят к соотношениям

$$\chi(t_1) = 0, \quad \operatorname{scal}(\bar{\Lambda}(t_1) \circ \mathbf{M}(t_1)) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, поставленная задача сводится к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений (1), (6) (при исключённом уравнении для сопряжённой переменной χ) девятого порядка, где оптимальное управление определяется соотношениями (7). При их интегрировании появится девять произвольных постоянных интегрирования, десятой неизвестной будет время t_1 . Для определения постоянных и времени t_1 имеем восемь граничных условий (3), (4), соотношения (8) и имеющее место для оптимального управления и оптимальной траектории равенство

$$H^{opt} \Big|_{t_1} = H(\phi, \Lambda, \chi, \mathbf{M}, p_3^{opt}) \Big|_{t_1} = 0,$$

которое замыкает полученную краевую задачу оптимизации.

Анализ задачи. Дифференциальные уравнения (1), (6) имеют первые интегралы:

$$\begin{aligned} \|\Lambda\|^2 &= \Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1, \quad \|\mathbf{M}\|^2 = M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = const, \\ \mathbf{M} \circ \bar{\Lambda} = \mathbf{N}^* &= const, \quad \mathbf{N}^* = N_0^* + N_1^* \mathbf{i}_1 + N_2^* \mathbf{i}_2 + N_3^* \mathbf{i}_3, \quad H^{opt} = H(\phi, \Lambda, \chi, \mathbf{M}, p_3^{opt}) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где Λ_j и M_j , ($j = 0, 1, 2, 3$) – компоненты кватернионов Λ и M .

Также отметим, что для кватернионных переменных N и N^* справедливо соотношение

$$N = \bar{\Lambda} \circ N^* \circ \Lambda, \quad (10)$$

из которого следуют равенства

$$N_0 = N_0^* = const, \quad |\vec{N}|^2 = N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = N_1^{*2} + N_2^{*2} + N_3^{*2} = const. \quad (11)$$

Из соотношений (10), (11) и второго выражения в равенствах (8) следует, что постоянная интегрирования $N_0^* = 0$ и, следовательно,

$$scal(\bar{\Lambda} \circ M) = \Lambda_0 M_0 + \Lambda_1 M_1 + \Lambda_2 M_2 + \Lambda_3 M_3 = 0. \quad (12)$$

Учёт кватернионного первого интеграла, фигурирующего в (9), и использование новых переменных N_j ($j = 1, 2, 3$) позволяют понизить порядок полученной системы дифференциальных уравнений (1), (6) краевой задачи оптимизации на пять единиц для любого управления p_3 , упростить их и привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= cr^{-2}, \quad r = p(1+e\cos\phi)^{-1}, \quad p, e, c - const, \\ \dot{N}_1 &= -p_3 rc^{-1} N_3 \sin\phi, \quad \dot{N}_2 = -p_3 rc^{-1} N_3 \cos\phi, \quad \dot{N}_3 = -p_3 rc^{-1} (N_1 \sin\phi - N_2 \cos\phi). \end{aligned} \quad (13)$$

Эти уравнения, дополненные соотношениями (7), образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений четвёртого порядка относительно переменных ϕ , N_j ($j = 1, 2, 3$). При их интегрировании появится четыре произвольных постоянных интегрирования, пятой неизвестной будет время t_1 . Для определения постоянных служат граничные условия (3), (4), соотношения (10) – (12).

Отметим, что в случае быстродействия система (13) сводится к скалярному нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка типа Риккати с комплексными коэффициентами или к скалярному линейному дифференциальному уравнению второго порядка с вещественными переменными коэффициентами, что позволяет эффективно использовать для изучения задачи качественные методы нелинейной механики.

Заключение. В статье дана новая постановка задачи оптимальной переориентации орбиты КА, не изменяющей своей формы и размеров, в процессе управления движением центра масс КА, использующая кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА. Эта постановка задачи открывает широкие возможности для её эффективного аналитического изучения и установления свойств и закономерностей оптимальной переориентации орбиты КА, чего нельзя сделать, используя дифференциальные уравнения ориентации орбиты в угловых элементах орбиты. Полученные уравнения позволили авторам разработать алгоритмы и программы численного решения поставленной задачи, позволяющие анализировать оптимальные управление и траектории КА во всём фазовом пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. Ч. II // Космич. исслед. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3 – 15.

УДК 531.383: 532.516

А. М. Чернов

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ В ПОПЛАВКОВОМ МАЯТНИКОВОМ АКСЕЛЕРОМЕТРЕ С УПРУГИМ КОРПУСОМ НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

Определяется влияние упругости корпуса поплавкового маятникового акселерометра (ПМА) на гидродинамические реакции при вибрации основания, на которое крепится прибор.

ПМА представляет собой маятниковую массу m на плече l , направленном вертикально вниз, закреплённую внутри цилиндрического поплавка. Поплавок – абсолютно твёрдое тело, взвешен в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей пространство между поплавком и внешним цилиндрическим корпусом. Поплавок удерживается внутри цилиндрического корпуса так, что у него в идеале остаётся одна степень свободы, а именно: поворот вокруг оси цилиндра (выходная ось). При работе ускорение, перпендикулярное плечу, на котором находится маятниковая масса, поворачивает поплавок вокруг выходной оси. Этот момент уравновешивается моментом электрической пружины. Поэтому угловое отклонение вокруг выходной оси оказывается пропорционально ускорению. Опоры подвеса поплавка представляют собой камневые опоры и магнитный подвес. Оси координат $O_1x_1y_1z_1$ жёстко связаны с корпусом прибора, O_1 – центр камеры и центр масс прибора, l_1 – длина камеры, R_1 – радиус камеры, x_1, y_1, z_1 – главные оси симметрии тела. Система $O_2x_2y_2z_2$ – жёстко связана с корпусом поплавка; x_2, y_2, z_2 – главные оси инерции корпуса поплавка; l_2, R_2 – длина и наружный радиус.

Поддерживающий и демпфирующий слой вязкой несжимаемой жидкости полностью заполняет зазоры $\delta = R_1 - R_2$ и $a = \frac{l_1 - l_2}{2}$ между стенками камеры и поплавка.

Корпус прибора – упругая замкнутая цилиндрическая оболочка с жёстким защемлением по торцам.

Рассмотрим абсолютное ускорение центра масс \bar{W}_1 абсолютно жёстких торцевых дисков корпуса прибора. Будем считать отсутствующим истечение жидкости из цилиндрической щели в торцевые щели.

Абсолютное ускорение единицы объёма жидкости в камере имеет вид

$$\bar{W}_4 = \bar{W}_1 + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V},$$

где ∇ – оператор Гамильтона; $\bar{r} = r\bar{n}_r + y\bar{j}$ – радиус-вектор центра масс жидкой частицы относительно полюса O_1 цилиндрической системы координат r, θ, y (подход Эйлера); $\bar{V} = V_r\bar{n}_r + V_\theta\bar{n}_\theta + V_y\bar{j}$ – скорость жидкости относительно камеры в проекциях на оси r, θ, y ; $\bar{n}_r, \bar{n}_\theta, \bar{j}$ – орты базиса цилиндрической системы координат r, θ, y .

Рассмотрим уравнение движения жидкости, окружающей поплавок в поплавковой камере. Уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости с учётом переносного движения основания маятникового акселерометра в выбранной системе координат r, θ, y , жёстко связанной с центром поплавковой камеры, примут вид

$$\bar{W}_4 = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \bar{V}, \quad \nabla \bar{V} = 0,$$

где P – давление жидкости, ρ – плотность, ν – кинематический коэффициент вязкости, Δ – оператор Лапласа.

Границные условия на непроницаемой поверхности поплавка в цилиндрической щели

$$V_r = \frac{\partial u_3}{\partial t}; \quad V_\theta = \frac{\partial u_2}{\partial t}; \quad V_y = -\frac{\partial u_1}{\partial t}, \text{ при } r = R_2 + \delta + u_3$$

$$V_r = \dot{x}_1 \sin(\theta + \varphi) + \dot{z}_1 \cos(\theta + \varphi); \quad V_\theta = \dot{x}_1 \cos(\theta + \varphi) - \dot{z}_1 \sin(\theta + \varphi);$$

$$V_y = 0, \text{ при } r = R_2 + e \cos \theta,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm \frac{l_2}{2},$$

где

$$u_1 = u_1(y, \theta, t) \text{ – продольное упругое перемещение оболочки;}$$

$$u_2 = u_2(y, \theta, t) \text{ – окружное упругое перемещение оболочки;}$$

$$u_3 = u_3(y, \theta, t) \text{ – прогиб оболочки;}$$

x_1, z_1 – перемещения центра масс поплавка относительно центра масс камеры.

Упругие перемещения оболочки корпуса ПМА удовлетворяют линейным уравнениям динамики упругой замкнутой цилиндрической оболочки с краевыми условиями для жёсткого защемления на торцах.

Торцевое истечение жидкости отсутствует, когда ширина торцевых щелей a значительно меньше ширины цилиндрической щели δ .

Полученная система решается методом возмущений. За малые параметры принимаем относительный эксцентриситет $\lambda \ll 1$ и относительную ширину цилиндрического слоя жидкости.

В табл. 1 приведены значения перемещений поплавка (м) при отсутствии избытка массы (нулевой плавучести) в приборах с упругим и твёрдым корпусом при гармоническом законе виброускорения с амплитудой 25г.

Таблица 1

| | | | |
|----------------|----------|----------|----------|
| Частота, рад/с | 2,40E+03 | 3,42E+04 | 5,22E+04 |
| Упругий, м | 8,12E-09 | 1,66E-09 | 6,59E-10 |
| Твёрдый, м | 0,00E+00 | 0,00E+00 | 0,00E+00 |

В табл. 2 приведены значения перемещений поплавка при избытке в 5% массы в приборах с упругим и твёрдым корпусом при том же самом виброускорении.

Таблица 2

| | | | |
|----------------|----------|----------|----------|
| Частота, рад/с | 2,40E+03 | 3,42E+04 | 5,22E+04 |
| Упругий, м | 7,41E-09 | 1,68E-09 | 6,69E-10 |
| Твёрдый, м | 4,53E-09 | 5,02E-11 | 2,22E-11 |

Расчёты показали, что при твёрдом корпусе прибора при отсутствии избытка массы – Δt перемещений не происходит, а при упругом корпусе прибора появляются перемещения. При избытке массы влияние упругости на перемещение поплавка значительно возрастает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалов С. Ф., Медведева И. И., Трунов А. А. Экспериментальное исследование движения поплавка внутри поплавковой камеры, заполненной вязкой жидкостью // Прикладная гидродинамика поплавковых приборов: Тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана. М., 1982. № 375. С. 60 – 65.
2. Коновалов С. Ф., Трунов А. А. Влияние упругих деформаций сильфона и кронштейна выносного элемента на виброустойчивость поплавкового прибора // Прикладная гидродинамика поплавковых приборов: Тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана. М., 1982. № 372. С. 25 – 29.
3. Андрейченко К. П., Могилевич Л. И. Динамика гирокомпасов с цилиндрическим поплавковым подвесом. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. 160 с.

УДК 533.6.011

И. А. Чернов

ПРИМЕР ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ КОНЕЧНОГО ТЕЛА ПО СХЕМЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим обтекание тела однородным трансзвуковым потоком идеального газа. Потенциал скоростей $\Phi(X, Y)$ (вектор скорости v равен $\text{grad } \Phi(X, Y)$) может быть записан в виде

$$\Phi(X, Y) = U \cdot \{X + R \cdot \delta \cdot (\phi(x, y, K) + K \cdot x) + \dots\}.$$

Здесь X, Y – две первые из трёх цилиндрических координат, при этом ось X направлена вдоль оси тела, ось Y – перпендикулярна к ней, R – радиус поперечного сечения тела, δ – малый параметр, связанный с относительной толщиной тела, $K = (1 - M^2) \cdot \delta^{-1/3}$ – трансзвуковой параметр подобия, который считается величиной порядка единицы, M – число Маха (безразмерная скорость тела), $x = X \cdot \delta^{-1/3} \cdot R^{-1}$, $y = Y \cdot R^{-1}$.

Для потенциала $\phi(x, y, K)$ получается уравнение трансзвуковой теории [1]

$$-\Phi_x \cdot \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \omega \frac{\Phi_y}{y} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\omega = 0$ или 1 для плоского или осесимметричного случаев соответственно.

Уравнение (1) называют уравнением Кармана-Фальковича, оно обладает классом автомодельных решений вида

$$\phi = y^{(3n-2)} \cdot q(\zeta) \quad (n \text{ – показатель автомодельности}).$$

Функция $q(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(q' - n^2 \cdot \zeta^2) \cdot q'' + (5n - 5 + \omega) \cdot n \cdot \zeta \cdot q' - (3n - 2)(3n - 3 + \omega) \cdot q = 0. \quad (2)$$

В [2] был приведён список точных решений этого уравнения, которые играют важную роль при асимптотическом описании различных особенностей трансзвукового потока.

1. Отметим два из них, полезные при описании течений с отрывом струи (схема Гельмгольца), они характеризуются выполнением условия $\Phi_x \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$. В случае $\omega = 0$ имеем:

$$1) \quad n = \frac{5}{6},$$

$$u \leftrightarrow \Phi_x = -y^{-\frac{1}{3}} C^2 (z^{36} - 1)^{\frac{4}{9}} z^{-22}, \quad v \leftrightarrow \Phi_y = y^{-\frac{1}{2}} \frac{2}{3} C^3 (z^{36} - 1)^{\frac{1}{6}} z^{-33}, \quad (3)$$

$$x = y^{5/6} \frac{C}{5} (5 - 3z^{36}) (z^{36} - 1)^{-5/18} z^{-11} \quad (z \text{ – параметр})$$

(это течение описывает дальнее поле при обтекании тела с образованием бесконечной каверны с границей в виде параболы $x \sim y^{5/2}$ на ∞ , при этом сопротивление тела будет конечным);

$$2) \quad n = \frac{6}{5},$$

$$u \leftrightarrow \Phi_x = C^2 z^{-1}, \quad v \leftrightarrow \Phi_y = C^3 z, \quad (4)$$

$$x = y^{5/6} \left(\frac{C}{6} \right) z^{-3} (3z^5 + 2).$$

Система (4) описывает ближнее поле при обтекании тела с образованием струи.

2. В случае $\omega = 1$ осесимметричным аналогом (3) является решение (2) при $n = \frac{2}{3}$. Обозначим $r = q'(\zeta)$, тогда из (2) получаем

$$\left(r - \frac{4}{9} \zeta^2 \right) r' - \frac{4}{9} \zeta r = 0. \quad (5)$$

В [3] указано, что (5) сводится к линейному уравнению для $\zeta^2 = f(r)$. Общий интеграл находится в виде $r^3 - \frac{2}{3} \zeta^2 r^2 = D_1$, где D_1 – произвольная постоянная. В зависимости от ζ и D_1 это кубическое уравнение имеет либо одно, либо три действительных решения (не считая $\zeta = const$). Выделим частное решение, которое соответствует струйной задаче

$$u \leftrightarrow \varphi_x = -y^{-2/3} \frac{C^2}{3} z^{-2} (3z^3 - 2)^{1/3}, \quad v \leftrightarrow \varphi_y = y^{-1} \frac{2}{9} C^3 z^{-3}, \quad (6)$$

$$x = y^{2/3} \left(\frac{C}{4} \right) z^{-1} (3z^3 - 2)^{-1/3} (4 - 3z^3).$$

Это осесимметричное течение описывает дальнее поле около тела с образованием струи вида $y \sim x^{-1/4}$ на ∞ .

3. При $\omega = 0$ есть возможность суммировать частные решения на плоскости годографа, так как уравнение (1) сводится к линейному преобразованию Лежандра. Это эквивалентно рассмотрению вместо зависимостей $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ обратных функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Решения (4), (3) представляются в виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{u^3}{3} + \frac{v^2}{2}, \\ y_1 = uv; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{4}{15} \rho^{-5/6} \left(1 - \frac{7}{3} \xi^3 \right) (1 - \xi^3)^{-1}, \\ y_2 = \frac{2}{3} \rho^{-1} \xi (1 - \xi^3)^{\frac{5}{6}}; \end{cases}$$

$$\text{где } \xi = u \left(\frac{3}{2} v \right)^{-2/3}, \quad \rho = \frac{9}{4} v^2 - u^2.$$

Если взять $x = x_1 + Kx_2$; $y = y_1 + Ky_2$, где $K > 0$ (например, $K = 1$), то получим решение с условием $y = 0$ при $v = 0$, $u < 0$; $y = 0$ при $u = 0$, $v > 0$; а также $y = 0$ на некоторой замыкающей кривой L в первом квадранте плоскости (u, v) , что соответствует обтеканию конечного тела потоком звуковой струи на ∞ с образованием струи, которая уходит в ∞ .

Вышесказанное демонстрирует общую идею, для большей точности следует вместо (x, y, u, v) использовать потенциал скорости, функцию тока, переменную Франкля, угол скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Germain P.* Ecoulements transsoniques homogènes // Progress in Aeronautical Sciences. 1964. Vol. 5. P. 143 – 273.
2. *Фалькович С. В., Чернов И. А.* Обтекание тела вращения звуковым потоком газа // Прикл. матем. и мех. 1964. Т. 28, № 2. С. 280 – 284.
3. *Чернов И. А.* Автомодельные решения в околосзвуковой газовой динамике // Трансзвуковые течения газа. Саратов: Изд-во Сарат ун-та, 1964. С. 63 – 100.

УДК 533.6.011:532.529

Г. П. Шиндяпин, Е. Н. Гамаюнова

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР И ПАРАМЕТРОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ УДАРНЫХ ВОЛН*

1. Проблема аналитического исследования ударно-волновых структур и полей давлений за ними при различных режимах нерегулярных и регулярных взаимодействий относительно слабых (интенсивности $P_{10} = (p_1 - p_0)/B_0$, $P_{20} = (p_2 - p_0)/B_0$, $B_0 = p_0 c_0^2$) ударных волн (УВ) (с углом наклона α к вертикали) в газе и газожидкостной среде, характеризуемой параметром $R_0(y)$, вызывает неизменный интерес исследователей [1, 2], связанный с попытками построения достаточно простых моделей ударно-волновых взаимодействий, адекватно описывающих процесс.

Экспериментально установленные [3, 4] режимы отражения и взаимодействия развитого маховского (простого маховского – SM, с невырожденными отражёнными волнами); вырожденного маховского (Неймановского – NM, с вырождением одной из отражённых волн); регулярного (R) теоретически найдены [1, 5] (режимы C, B, A – соответственно) с помощью асимптотики коротких волн, позволяющей рассчитать возникающие УВ, структуры и поля потока за ними. На рисунке в верхней части изображены схема взаимодействия УВ и интерферограмма [3], характеризующая распределение плотностей (давления и продольной скорости в случае относительно слабых УВ).

2. Исследование сводится к анализу в области взаимодействия во внутренних переменных $X, Y(\delta, Y)$ решения краевой задачи для компонент скорости μ, v системы уравнений коротких волн

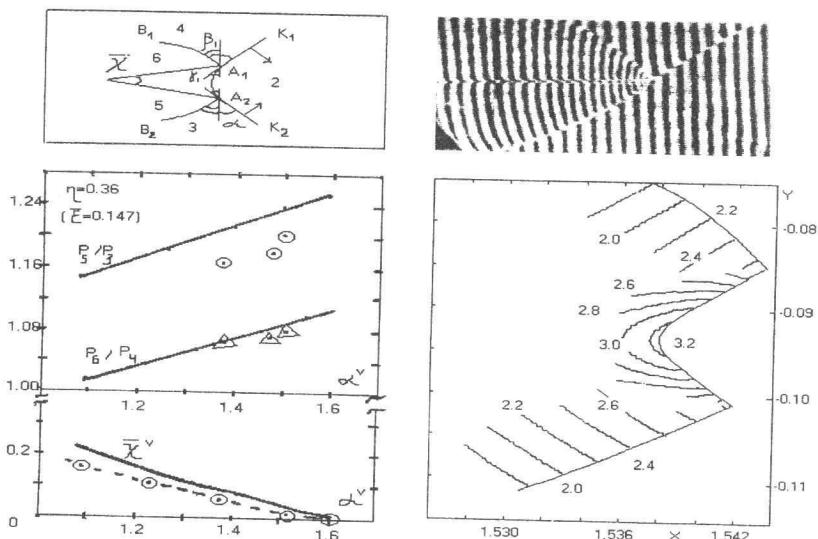
$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_Y + \mu = 0, \quad \mu_Y = v_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)}, \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00029.

удовлетворяющего на фронтах УВ $\delta = \delta^*(Y)$ (A_1A_2 – Maxa, $q_n = 0$; A_1B_1 – отражённого, $q_n = 1$; A_2B_2 – отражённого, $q_n = \eta$) условиям

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\delta^*}{dY} \right)^2 &= 2\delta - \mu - \mu_1, \quad (\mu - \mu_1) \frac{d\delta^*}{dY} = v - v_1, \quad \mu = P^{(1)} = H \\ \mu_1 &= q_n, \quad v_1 = -q_n(Y \pm \alpha^v), \quad \alpha^v = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{P_{10}^{1/2} R_0^{1/2}(\gamma)}, \quad \eta = \frac{P_{10}}{P_{20}}, \end{aligned} \quad (2)$$

и асимптотическим условиям сращивания на границах с областями линейного и квазиодномерного решения. Предполагается, что поперечная составляющая скорости за тройными точками может иметь разрыв ($\Delta v_n = v_n^+ - v_n^-$, $n = 1, 2$). α^v , η – параметры подобия задачи.



Для описания течений в области взаимодействия УВ используется класс точных решений (1), удовлетворяющий точно условиям на фронте (2) при $q = q^* = \text{const}$ ($q^* = q_0$ на A_1A_2 ; $q^* = q_1$ на A_1B_1 ; $q^* = q_2$ на A_2B_2)

$$\begin{aligned} \mu &= \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q); \quad \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q) \\ v &= \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q). \end{aligned} \quad (3)$$

Систему условий для определения функций $\varphi_2(q^*) \dots \chi_0(q^*)$ на фронтах УВ получим при подстановке (3) в (2)

$$\begin{aligned}
\varphi_2(q^*) &= 2q^*(1-2q^*), \quad \varphi_1(q^*) = 2(1-2q^*)\chi_1(q^*), \quad \psi_3(q^*) = -4q^{*2}(1-2q^*), \\
\varphi_0(q^*) &= 2\chi_0(q^*) - \chi_1^2(q^*) - q_n, \\
\psi_1(q^*) &= 2(3q^*-1)\chi_1^2(q^*) - 4q^*\chi_0(q^*) + (4q^*-1)q_n, \\
\psi_2(q^*) &= -6q^*(1-2q^*)\chi_1(q^*), \\
\psi_0(q^*) &= -2\chi_0(q^*)\chi_1(q^*) + \chi_1^3(q^*) + q_n(2\chi_1(q^*) \mp \alpha^\nu), \\
\chi_1(q^*) &= -2q^*Y_n \mp a_n, \quad \chi_0(q^*) = \delta_n + q^*Y_n^2 \pm a_n Y_n, \quad a_n = \sqrt{2\delta_n - \mu_n - q_n}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь для отражённых волн A_nB_n , проходящих через точку $A_n(\delta_n, Y_n)$, берётся $q^* = q_1$ и верхний знак для верхней волны ($q_n = 1$) и $q^* = q_2$ и нижний знак для нижней волны ($q_n = \eta$).

Для фронта Maxa A_1A_2 , проходящего через точку $A_n(\delta_n, Y_n)$, берётся $q^* = q_0$ и нижний знак для верхней точки A_1 , верхний знак для нижней точки A_2 ($q_n = 0$).

Анализ для фронта Maxa A_1A_2 [1] условий (4), дополненных соотношениями динамической совместимости и условиями экстремального поворота потока в тройных точках, вместе с уравнением притока массы сводится к решению системы двух уравнений для A_1, A_2 или $z_1, z_2 / \alpha^\nu, \eta$,

$$\begin{aligned}
A_1^2 &= 3z_1^2 - 2, \quad A_2^2 = 3z_2^2 - 2\eta, \quad A_1 + A_2 - 2\alpha^\nu = A, \\
3z_1^2 - 3z_2^2 - 1 + \eta &= (z_1 - z_2)A, \\
A[6z_1^2 - 4 - \eta + (z_1 + z_2 - A)(2z_1 - z_2)] &= \\
&= \sqrt{3z_1^2 - 2} + \eta\sqrt{3z_2^2 - 2\eta} - 2\left[\left(z_1^2 - 1\right)^{3/2} + \left(z_2^2 - \eta\right)^{3/2}\right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Значения параметров $\delta_n, Y_n; \mu_n, v_n^\mp, v_n^\pm; \beta_n^\nu, \gamma_n^\nu; q_0$, определяющих координаты, скорости и углы наклона УВ в тройных точках, а также геометрию и распределение параметров на фронте Maxa найдём по формулам (верхний знак и $n=1$ соответствуют верхней, нижний знак и $n=2$ – нижней точке)

$$\begin{aligned}
\delta_n &= (q_n + A_n^2)/2, \quad Y_n = \pm(A_n - \alpha^\nu), \quad \mu_n = (q_n + 2A_n^2)/3, \\
v_n^\pm &= \mp q_n A_n \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}(A_n^2 - q_n)^{3/2}, \quad \beta_n^\nu = \pm Y_n + \frac{1}{\sqrt{3}}(A_n^2 - q_n)^{1/2}, \\
v_n^\mp &= \mp \mu_n C_n, \quad \gamma_n^\nu = \mp Y_n + C_n, \quad C_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(2q_n + A_n^2)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Геометрию фронта Maxa и значения параметров на нём согласно (3) определим при $q = q_0$, рассчитывая параметр q_0 по формуле

$$q^* = q_0 = (C_1 + C_2)/2(Y_1 - Y_2). \tag{7}$$

Анализ параметров на фронтах отражённых УВ A_1B_1, A_2B_2 при $q^* = q_1$ и $q^* = q_2$ проведём с помощью (4) при условии, что параметры в

точке A_n ($\delta = \delta_n$, $\mu = \mu_n$, $Y = Y_n$) известны, а точка B_n – точка вырождения отражённой УВ. Записывая с помощью (3), (4) при $q=q^*$ условия вырождения в точке B_n ($\mu_n = q_n$, $\delta_n = q_n$), получим систему двух уравнений относительно q^* , Y_B с решением

$$q^* = \frac{a_n^2}{4(\delta_n - q_n)}, \quad Y_B = Y_n \pm \frac{a_n}{2q^*}, \quad a_n = \sqrt{2\delta_n - \mu_n - q_n}. \quad (8)$$

При нерегулярных взаимодействиях, используя (6), получим

$$q^* = 1/6, \quad Y_B = Y_n \pm \sqrt{3(A_n^2 - q_n)}. \quad (9)$$

При регулярных взаимодействиях, используя параметрическое представление [5] для $\delta = \delta_A$, $\mu_n = \mu_A$, α^ν через параметры z , η , найдём q^* , Y_B . В симметричном случае $\eta = 1$ получим

$$q^* = q_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha^{\nu 2} - 2 + \alpha^\nu \sqrt{\alpha^{\nu 2} - 4}}{\alpha^{\nu 2} - 1} \right), \quad \alpha^\nu \geq 2.0. \quad (10)$$

В общем случае для нерегулярных и регулярных взаимодействий определение параметра q^* позволяет согласно (3), (4) рассчитать положение и структуру УВ, распределение параметров на фронтах.

На рисунке слева в нижней части проведено сравнение расчётных характеристик (сплошные линии) P_6/P_4 , P_5/P_3 , $\bar{\chi}^\nu$ (характеризующих перепады давлений на отражённых фронтах в тройных точках и угол их распространения $\bar{\chi}^\nu = \operatorname{tg} \chi_0 / \bar{\epsilon}^{1/2}$) с экспериментальными данными W. R. Smith [3] (прерывистая линия) при нерегулярном невырожденном взаимодействии при $\eta = 0.36$ и различных α^ν (углах взаимодействия).

На рисунке справа в нижней части построено поле давлений (плотностей), а также ударная конфигурация по результатам интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных при подстановке (3) в (1), при условиях (7), (8) на фронтах УВ для случая $\eta = 0.4$, $\alpha^\nu = 1.6$. Качественное соответствие полученных линий равных давлений поведению интерферометрических полос в физическом эксперименте [3] в верхней части рисунка носит иллюстративный характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шиндягин Г. П. Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. МГЖ. 1996. № 2. С. 183 – 190.
2. Collela P., Henderson L. F. The von Neumann paradox for the diffraction of weak shock waves // J. Fluid Mech. 1990. Vol. 213. P. 71 – 94.
3. Smith W. R. Mutual reflection of two shock waves of arbitrary strengths // Phil. Fluids. 1959. Vol. 2. № 5. P. 533 – 541.
4. Ben-Dor G. Shock wave reflection phenomena. Vol. 2. № 5. P. 533 – 541.
5. Шиндягин Г. П. Аналитическое исследование ударно-волновых структур и потоков при отражении и взаимодействии относительно слабых ударных волн // Аэrodinamika: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2001. Вып. 15 (18). С. 31 – 44.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

| | |
|---|----|
| АЛЕКСАНДРОВ Е. Л., КУТЕПОВ В. А. Матричные спектральные функции симметричных операторов с равными конечными дефектными числами | 3 |
| АЛЕКСАНДРОВ Е. Л., ХЕББЕШ А. О характеристических и спектральных свойствах регулярных симметричных операторов, содержащих инволюцию | 5 |
| АНДРЕЕВА Н. Л. О линейно-выпуклой задаче оптимального управления с ограничениями по норме | 8 |
| БАБЕНКОВА Е. В., ВАСИЛЬЕВ Ю. П. Демпфирование метода секущих при решении уравнений с недифференцируемыми операторами | 10 |
| БЛИНКОВ Ю. А. Инволютивные базисы торических идеалов | 14 |
| ВАРЛАМОВА Е. В., ГРОМОВА Л. Л. Об интегральных средних для звездообразных функций порядка α^* | 17 |
| ВАХЛАЕВА Л. Ф., ВАХЛАЕВА Т. В., ПАВЛОВА Е. А. Экономичные алгоритмы решения разностных краевых задач для эллиптических уравнений | 21 |
| ВОЛОСИВЕЦ С. С. Приближение функций ограниченной p -вариации на прямой | 24 |
| ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом | 25 |
| ГАЛАЕВ С. В., ГОХМАН А. В. Почти симплектические связности на неголономном многообразии | 28 |
| ГАМОВА А. Н. Характеризация внутренних формул | 31 |
| ГОРБУНОВ О. Б. Спектральные свойства системы Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала | 34 |
| ГУРЕВИЧ А. П., ХРОМОВ А. П. О замыкании в пространстве $C^q[0,1]$ области определения дифференциального оператора | 37 |
| ДМИТРИЕВ О. Ю. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка | 40 |
| ДУДОВ С. И., ЗЛАТОРУНСКАЯ И. В. Алгоритм наилучшего приближения выпуклого компакта шаром произвольной нормы | 43 |
| ЗЮЗИН В. С., РЫЧКОВА Н. А. Сужение интервальных сплайнов, содержащих решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями | 46 |
| ИВАНОВ С. В. Разработка и программирование электронных учебников | 49 |
| ИГНАТЬЕВ М. Ю. Численный метод решения обратной задачи Штурмана-Лиувилля | 52 |
| ИШИНА С. И. Об универсальных проективно-планарных автоматах | 54 |
| КАБАНОВ С. Н. Асимптотическое поведение решения одного интегрального уравнения | 58 |
| КАМЫШОВА Г. Н. Некоторые оценки для ёмкости Робена | 61 |

| | |
|--|-----|
| КОВАЛЕВ А. Д., МОЖИЛКИН В. В. Оперативная реорганизация баз данных..... | 63 |
| КОНОПЛЕВ А. Б. Формула субдифференциала функции расстояния от точки до образа выпуклого мультиотображения..... | 66 |
| КУЗНЕЦОВА И. А. Минимальные и протоминимальные вероятностные метрики. | 69 |
| КУРДЮМОВ В. П., ХРОМОВ А. П. О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с переменным пределом интегрирования..... | 72 |
| КУРЫШОВА Ю. В. Восстановление интегродифференциального оператора по неполной спектральной информации | 75 |
| ЛУКОМСКИЙ Д. С. О достаточных условиях разрешимости обратной задачи для пучков дифференциальных операторов..... | 78 |
| ЛУКОМСКИЙ С. Ф. О сходимости кратных рядов Уолша в пространствах, близ- ких к L^∞ | 81 |
| МИТРОФАНОВ А. Ю. О цепях Маркова, зависящих от параметра | 84 |
| МИХАЙЛОВ В. Н., ТОЧИЛКИНА С. А. Метод расчёта закона распределения функции от дискретных случайных величин | 86 |
| МИХАЙЛОВ В. Н., ХАРЛАМОВ А. В. Линейная регрессия в сложных областях на плоскости | 89 |
| МОЖИЛКИН В. В. Анализ математической модели Симоновича рынка труда..... | 92 |
| МОЛОДЕНКОВА И. Д. Построение операторов, восстанавливающих производ- ные | 95 |
| МОЛЧАНОВ В. А. О матричных полугруппах над полукольцами и их приложе- ниях к теории формальных языков | 98 |
| ОТРЫВАНКИНА Т. М. Решётка псевдомногообразий конечных алгебраических автоматов..... | 101 |
| ПАСЕЧНИК М. В. Условия непустоты C_α -ядра в антагонистических играх с упорядоченными исходами | 104 |
| РОДИН А. М. Свойства M -вариационных модулей непрерывности..... | 107 |
| РОЗЕН В. В. Представление изотонных отображений в виде сумм весов маю- рантно стабильных подмножеств | 110 |
| РЫХЛОВ В. С. О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновен- ных дифференциальных операторов..... | 114 |
| СИДОРОВ С. П. Некоторые свойства линейных формсохраняющих операторов . | 117 |
| СКОСЫРЕВ В. В. Уравнения типа эволюционных со случайными операторами.... | 121 |
| ТАНАНКО И. Е. О стационарном распределении сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией | 124 |
| ТЕРЕХИН П. А. Неравенство Бернштейна для аналитических векторов экспонен- циального типа | 127 |
| ТРОШИНА Н. Ю. Решение одной дискретной краевой задачи принципа макси- мума | 130 |
| ФИЛИППОВ В. И. Почти всюду сходящиеся ряды по системам, образованным из сжатий и сдвигов одной функции в $S(0, 1)$ | 133 |
| ФИРСТОВ В. Е. Обобщения теоремы Пифагора, рекуррентные последовательно- сти и их алгебраические образы | 135 |
| ХАЛОВА В. А. Представление резольвенты одного класса интегральных опера- торов | 138 |
| ХРОМОВА Г. В. Выбор параметра регуляризации в методе Тихонова..... | 142 |
| ШЕВЦОВ В. И. Об одном свойстве неполной системы экспонент | 143 |
| ЮРКО В. А. О краевых задачах с особенностью внутри интервала | 146 |

СЕКЦИЯ МЕХНИКИ

| | |
|---|-----|
| АГАФОНОВА Н. Ю. Расчёт температурных полей в составных телах вращения ... | 149 |
| АНТОНЕНКО Э. В., ИВАНОВ С. С. Неосесимметричные собственные колебания ортотропных тонкостенных цилиндров переменной толщины | 152 |
| БЕРЕЗИН В. Л., ГУЛЯЕВ Ю. П. Определение контактных напряжений в неодно- родной упругой среде с локальными жёсткими включениями | 155 |
| БИРЮКОВ В. Г., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Определение неизвестной компоненты век- тора абсолютной угловой скорости космического аппарата по информации о направлении местной вертикали | 157 |
| КОНДРАТОВ Д. В. Гидродинамические реакции в поплавковом маятниковом ак- сelerометре с упругим корпусом при торцевых истечениях жидкости | 160 |
| ЛУНЬКОВ А. Д. Плоские нестационарные задачи теплопроводности в двумерных составных областях | 163 |
| МОГИЛЕВИЧ Л. И., ПОПОВ В. С. Динамика взаимодействия упругого тела со слоем жидкости применительно к двигателестроению | 166 |
| МОЛОТКОВ А. В., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. О применении теории кинематического управления к решению обратной задачи кинематики манипулятора с врача- тельными сочленениями | 170 |
| РИДЕЛЬ В. В., ИВАЩУРА А. И. Некоторые результаты численных исследований процесса выхода на установившийся режим движения нелинейной систе- мы с распределёнными параметрами | 173 |
| САПУНКОВ Я. Г. Колебания треугольного конического крыла в гиперзвуковом потоке | 176 |
| САПУНКОВ Я. Г., ШИНДЯПИН Г. П., ПОРШНЕВ В. А., ФЕДОРЕЦ О. Н. Математическая модель детонационного двигателя | 178 |
| СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Регулярное отображение околозвукового скачка от стенки .. | 181 |
| СЕРГЕЕВ Д. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Оптимальное управление ориентацией орби- ты космического аппарата | 185 |
| ЧЕРНОВ А. М. Гидродинамические реакции в поплавковом маятниковом акселеро- метре с упругим корпусом на выбирающем основании | 188 |
| ЧЕРНОВ И. А. Пример трансзвукового обтекания конечного тела по схеме Гельмгольца | 190 |
| ШИНДЯПИН Г. П., ГАМАЮНОВА Е. Н. Аналитическое исследование ударно- волновых структур и параметров при нелинейных взаимодействиях ударных волн | 193 |

Научное издание

**МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА**

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 3

Ответственный за выпуск В. Б. Поплавский

Технический редактор Л. В. Агальцова

Корректор Г. А. Рогова

Изд. лиц. № 020305 от 19.02.1997. Подписано в печать 19.11.2001.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 11,62(12,5). Уч.-изд. л. 11,3. Тираж 200 экз. Заказ 20.

Издательство Саратовского университета.

410026, Саратов, Астраханская, 83.

Типография Издательства Саратовского университета.

410026, Саратов, Астраханская, 83.