

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА

Сборник научных трудов

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1999

УДК [51+531+681.3]
ББК (22.1+22.2+32.973)я43
М34

Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч.
М34 тр. - Саратов: Изд - во Сарат. ун - та, 1999. - 148 с. : ил.
ISBN 5-292-02378-7

Сборник, посвящённый девяностолетию Саратовского государственного университета, содержит исследования в области математики, механики, математической кибернетики.

В работах содержатся исследования по кругу вопросов в области теорий операторов, функций и чисел, а также дифференциальных и интегральных уравнений; механики жидкости, газа и плазмы, механики деформированного твёрдого тела, теоретической механики; теории автоматов, графов, игр, булевых функций, оптимального управления.

Для научных работников и специалистов в области математики, механики и компьютерных наук.

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук Д.В. Прохоров (отв. редактор),
доктор физ.-мат. наук А.П. Хромов,
доктор физ.-мат. наук Г.П. Шиндяпин,
доктор техн. наук Д.В. Сперанский,
кандидат физ.-мат. наук В.Б. Поплавский (отв. секретарь)

УДК [51+531+681.3]
ББК (22.1+22.2+32.973)я43

Работа издана в авторской редакции

ISBN 5-292-02378-7

© Саратовский государственный
университет, 1999

*Посвящается
90-летию
Саратовского
государственного
университета*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ В САРАТОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В год 90-летнего юбилея Саратовского государственного университета (СГУ) учёные механико-математического факультета подготовили этот сборник научных статей. Отражая далеко не весь спектр сегодняшних научных интересов, они, тем не менее, представили различные научные направления математики, механики и математической кибернетики. Ограничения объёма представленных статей, продиктованные чисто техническими требованиями настоящего сборника, не позволяют разместить здесь все статьи и особенно те, которые полно отражают проводимые сегодня большие фундаментальные исследования. Нельзя обять необъятное. Ведь сегодня мехмат является самым большим факультетом СГУ.

История математики в СГУ начиналась с кафедры высшей математики, организованной в весенний семестр 1917/1918 учебного года в составе только что открытого в университете физико-математического факультета. Создание и развитие кафедры со дня ее основания связано с именем Владимира Васильевича Голубева, замечательного ученого и человека, который в 1920 году стал ректором нашего университета. Первые годы существования кафедры высшей математики связаны с именем и другого выдающегося математика - Ивана Ивановича Привалова, проработавшего в должности экстраординарного профессора до 1921 года. Выдающаяся монография И.И. Привалова "Интеграл. Коши" вошла в золотой фонд математической литературы.

В 1920 году открывается кафедра механики во главе с Георгием Николаевичем Свешниковым. В течение первых лет своего существования эта кафедра отличалась малочисленностью состава, но каждый из её сотрудников занимался широчайшим кругом проблем и преподавал по несколько дисциплин.

В 1921 году состоялся первый выпуск физико-математического факультета. Из числа первых выпускников-математиков в аспирантуру поступил Георгий Петрович Боев, ставший впоследствии первым деканом механико-математического факультета.

В 20 - 30-е годы на факультете создается библиотека, которая содержала почти всю вышедшую в то время на русском языке математическую литературу. (По сей день фонд этой библиотеки бережно хранит И. А. Кирсанова.) В эти годы кафедра математики "растет", возникают новые научные направления и в 1935 году кафедра высшей математики разделяется на 5 новых кафедр: математического анализа, теории функций, теории вероятностей, геометрии и алгебры. Заведовать этими кафедрами были приглашены крупные ученые, среди которых были И. Г. Петровский, А. Я. Хинчин, А. Г. Курош, В. В. Вагнер, блистательная деятельность которых оставила след на факультете.

Кафедра теории упругости во главе с С. Г. Лехницким, ставшим впоследствии лауреатом Государственной премии, была открыта в 1937 году. В том же году на физико-математическом факультете был организован Институт математики, механики и физики, который возглавил В. В. Вагнер. В эти предвоенные годы под руководством И. Г. Чудакова и С. Н. Кутина в университете идет строительство аэродинамической трубы, а в 1938 году открывается лаборатория оптических методов исследования напряжений.

В период Великой Отечественной войны кафедры наряду с учебной работой занимались решением задач для нужд оборонной промышленности: производились расчеты по заказам военных заводов, консультации для инженеров и техников.

Послевоенное время было временем становления механико-математического факультета. 1945 год считается годом его рождения. Тогда первый набор составлял около пятидесяти студентов. С 1947 по 1961 годы факультет бессменно возглавлял А.И. Барабанов, внесший значительный вклад в развитие факультета и сумевший создать особую "мехматовскую" атмосферу. Этот и последующий периоды характеризуются возникновением на факультете новых школ и научных направлений.

Важным событием в жизни университета и механико-математического факультета явилось создание в 1957 году первого в Поволжье Вычислительного центра. За 40-летний период его существования было воспитано не одно поколение математиков-программистов, создана саратовская школа математической кибернетики.

Конец 70-х годов характеризуется качественным скачком в области средств вычислительной техники, что приводит к бурному развитию дискретной математики. Именно в этот период ректор университета Анатолий Ми-

хайлович Богомолов организует и возглавляет кафедру математической кибернетики. С его именем связано не только появление на механико-математическом факультете новых кафедр (математической кибернетики, дискретного анализа, системного анализа и автоматического управления, теоретических основ информатики), но и развитие математической кибернетики на факультете вплоть до наших дней.

Имена выдающихся учёных и учителей С. В. Фальковича, А. А. Назарова, К. А. Родосского, В. В. Вагнера, А. Е. Либера, Н. Г. Чудакова, Д. Н. Ленского, А. И. Барабанова, Г. И. Перельмутера, Г. П. Боева, Е. Ф. Бурмистрова, Н. П. Купцова, Ю. Е. Пензова, Н. И. Кабанова, А. К. Павлючука, В. Ф. Емельянова, В. Е. Воскресенского, А. А. Привалова, А. М. Богомолова и многих других навсегда вошли в историю механико-математического факультета СГУ.

Следует вспомнить выдающихся выпускников факультета, ставших впоследствии членами Академии наук, лауреатами Государственных премий, крупными руководителями науки и образования. В первую очередь, это Б. В. Гнedenko, П. Л. Ульянов, В. В. Румянцев, А. С. Космодамианский, В. И. Шевченко.

Ограниченные рамки статьи не позволяют детально проследить все связи факультета с Российской Академией наук, отметившей в этом году свой 275-летний юбилей. Простое перечисление совместных работ за время существования механико-математического факультета потребовало бы объёма целой книги.

Сегодняшний механико-математический факультет в значительной степени характеризуется тем, что фактически произошла смена поколений. В течение последних десяти лет факультет "получил" докторов наук больше, чем за предыдущие три десятилетия. Сегодняшний мхмт – это более двух десятков докторов, профессоров: Л. Ю Коссович, Н. М. Маслов, В. В. Ридель, Г. П. Шиндяпин, Ю. Н. Челноков, Л. И. Могилевич, Э. В. Антоненко, В. М. Гурьянов, В. В. Розен, М. В. Лосик, В. Н. Салий, Д. В. Сперанский, В. А. Твердохлебов, А. А. Сытник, А. П. Хромов, Д. В. Прохоров, В. А. Юрко, Г. В. Хромова, С. И. Дудов, Ю. И. Митрофанов, В. Н. Михайлов. Сегодняшний мхмт - это более 1200 студентов.

Бурный рост факультета за последние годы объясняется развитием самой математики, увеличением ее роли в системе научного знания. В последние десятилетия отчетливо наблюдается процесс математизации наук, причем в сферу математики попадают традиционно нематематические дисциплины, к которым относятся психология, лингвистика, медицина, история и многие другие. Происходящий на наших глазах качественный скачок в процессах управления, связанный с внедрением информационных технологий и средств

обработки информации, является еще одной причиной роста интереса общества и особенно молодежи к математическому образованию.

Процесс математического вузовского образования постоянно подвержен коррекции, переосмыслению, изменению методики. Высокий профессиональный и педагогический уровень коллектива механико-математического факультета СГУ всегда позволял в соответствии с требованиями жизни корректировать учебные программы, вводить новые специальности и специализации. В последние годы факультет ведет подготовку специалистов по специальностям "Математика", "Прикладная математика", "Механика", "Информационные системы в экономике" (с 1994 года), а с 1999 г. введена еще одна новая специальность - "Вычислительные машины, системы, комплексы и сети".

На факультете предстоит большая работа по гармоничному развитию новых специальностей. Присоединение ряда математических кафедр педагогического института к мехматовским кафедрам (это обусловлено вхождением педагогического института в состав СГУ) также является трудной и длительной задачей, стоящей перед факультетом.

Впереди ещё много других задач.

Мы гордимся своей историей. Она вселяет в нас надежду и уверенность в том, что факультет справится со всеми трудностями, которые он испытывает сегодня.

В. Б. Поплавский

УДК 518:517.944

Н. Ю. Агафонова, В. Н. Михайлов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СОСТАВНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассмотрим в прямоугольной системе координат x, y, z в общем случае многосвязную область Q , которая состоит из M подобластей Q_1, Q_2, \dots, Q_M , ограниченных соответственно подобластями E_1, E_2, \dots, E_M . В каждой из подобластей задано уравнение Лапласа

$$\Delta u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0, \quad i = \overline{1, M}. \quad (1)$$

Область, внешнюю к Q , обозначим через Q_0 . Границу между подобластями Q_i и Q_j обозначим через E_{ij} ; индексы i, j могут принимать значения $0, 1, 2, \dots, M$. Под M_i будем подразумевать множество тех значений j , которые обозначают номера Q_j , граничащих с Q_i .

Для решения $u_i(x, y, z)$ уравнения (1) в подобласти Q_i имеет место интегральное представление [1, 2].

$$p_i(x_0, y_0, z_0)u_i(x_0, y_0, z_0) = \iint_{E_i} (\delta \frac{\partial u_i}{\partial n_i} - u_i \frac{\partial \delta}{\partial n_i}) dE, \quad (2)$$

где (x_0, y_0, z_0) - любая фиксированная точка, dE - элемент поверхности E_i , $\frac{\partial}{\partial n_i}$ - производная по внешней к подобласти E_i нормали; функция источника δ имеет вид:

$$\delta = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Точка (x_0, y_0, z_0) может лежать как внутри или вне области Q , так и на ее границе. Величина $p(x_0, y_0, z_0)$ равна нулю для точек (x_0, y_0, z_0) , лежащих вне Q ; для внутренних точек $p = 4\pi$; на поверхности E величина $p(x_0, y_0, z_0)$ равна телесному углу, вырезаемому из сферы с центром в точке

(x_0, y_0, z_0) поверхностью E при стремлении радиуса этой сферы к нулю – телесный угол при этом должен измеряться внутри области Q .

Представим (2) в виде

$$P_i(x_0, y_0, z_0) u_i(x_0, y_0, z_0) = \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} (\delta \frac{\partial u_i}{\partial n_{ij}} - u_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}}) dE, \quad (3)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n_{ij}}$ – производная по нормали к границе E_{ij} , направленная во-

вне из подобласти E_i . Умножим i -тое равенство на величину $\mu_i(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ и, просуммировав по i от 1 до M , получим

$$\sum_{i=1}^M p_i \mu_i u_i(x_0, y_0, z_0) = \sum_{i=1}^M \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} (\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial n_{ij}} \delta - \mu_i u_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}}) dE. \quad (4)$$

В этом выражении суммирование по внутренним границам между двумя подобластями E_i и E_j производится дважды: по E_{ij} и E_{ji} (здесь $j > 0$). Объединим эти интегралы. Границы между подобластями E_k и E_l , $k > l$ будем обозначать через E_{kl} независимо от того, рассматривается она как граница подобласти E_k или как граница подобласти E_l . Заметим, что на границе между E_i и E_j имеет место соотношение $\frac{\partial}{\partial n_{ij}} = -\frac{\partial}{\partial n_{ji}}$.

С учетом сказанного выше перепишем (4) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M p_i \mu_i u_i(x_0, y_0, z_0) &= \sum_{i=1}^M \iint_{E_{i0}} (\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial n_{i0}} \delta - \mu_i u_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}}) dE + \\ &+ \sum_{i=1}^M \sum_{j \in R_i} \iint_{E_{ij}} [(\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial n_{ij}} - \mu_j \frac{\partial u_j}{\partial n_{ij}}) \delta - (\mu_i u_i - \mu_j u_j) \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}}] dE, \end{aligned} \quad (5)$$

где R_i – множество номеров $0 < j < i$ подобластей E_j , граничащих с E_i .

Во многих приложениях на внутренних границах E_{ij} ($j > 0$) должны выполняться условия:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial n_{ij}} = \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial n_{ij}}, \quad u_i = u_j, \quad (6)$$

где λ_i – постоянная для подобласти E_i величина.

Положим в (5) $\mu_i = \lambda_i$, в результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M p_i \lambda_i u(x_0, y_0, z_0) = & \sum_{i=1}^M \iint_{E_{i,0}} \left(\lambda_i \frac{\partial u}{\partial n_{i,0}} \delta - \lambda_i u \frac{\partial \delta}{\partial n_{i,0}} \right) dE + \\ & + \sum_{i=1}^M \sum_{j \in R_i} \iint_{E_{i,j}} \left[(\lambda_i - \lambda_j) u \frac{\partial \delta}{\partial n_{i,j}} \right] dE. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь принято $u(x, y, z) = u_i(x, y, z)$, если точка (x, y, z) принадлежит подобласти Q_i ; функция $u(x, y, z)$ непрерывна во всей составной области Q благодаря граничному условию (6).

Если точка (x_0, y_0, z_0) лежит внутри подобласти Q_k , то из (7) получаем

$$4\pi u(x_0, y_0, z_0) = \sum_{i=1}^M \iint_{E_{i,0}} \left(\lambda_i \frac{\partial u}{\partial n_{i,0}} \delta - \lambda_i u \frac{\partial \delta}{\partial n_{i,0}} \right) dE + \sum_{i=1}^M \sum_{j \in R_i} \iint_{E_{i,j}} \left[(\lambda_i - \lambda_j) u \frac{\partial \delta}{\partial n_{i,j}} \right] dE.$$

Из формулы (5) можно получить и другое интегральное представление для решения уравнений Лапласа (1) с граничными условиями (6). Положим в (5) $\mu_i = 1$ для всех значений i ; с учетом граничных условий получаем

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) \sum_{i=1}^M p_i(x_0, y_0, z_0) = & \\ = & \sum_{i=1}^M \iint_{E_{i,0}} \left(\frac{\partial u}{\partial n_{i,0}} \delta - u \frac{\partial \delta}{\partial n_{i,0}} \right) dE + \sum_{i=1}^M \sum_{j \in R_i} \iint_{E_{i,j}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n_{i,j}} - \frac{\partial u_j}{\partial n_{i,j}} \right) \delta dE. \end{aligned} \quad (8)$$

В этой формуле решение выражено через скачки производных по нормали на внутренних границах. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если функции $u_i(x, y, z)$ удовлетворяют уравнениям Лапласа (1) и условиям (6) на границах между подобластями Q_1, Q_2, \dots, Q_M составной области Q , то имеют место интегральные представления (7), (8).

Полученные интегральные представления решения уравнения Лапласа могут быть использованы для сведения краевых задач к интегральным уравнениям подобно [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.
3. Бобрик А.И., Михайлов В.Н. Решение некоторых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями IV рода // ЖВММФ. 1974. Т. 14, № 1. С. 126 - 134.

4. Аккуратов Ю.Н., Михайлов В.Н. Решение нелинейных стационарных задач теплопроводности с граничными условиями I - IV рода // ЖВММФ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1819 - 1826.

УДК 517.983/.983.8

Е. Л. Александров

О МЕТОДЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Существенным моментом классического метода Фурье разделения переменных при решении некоторых краевых задач математической физики является то, что операции дифференцирования, фигурирующие в этих задачах, рассматриваемые в соответствующих гильбертовых пространствах, являются регулярными симметричными операторами с конечными дефектными числами. Поэтому один из них можно расширить до самосопряженного с дискретным спектром $\{\lambda_k\}$ и полной системой собственных функций $\{\phi_k(x)\}$, а для сопряженного второго из операторов любая точка комплексной плоскости будет его собственным значением, в частности, собственными значениями будут все λ_k , соответствующие собственные функции $\psi_k(t)$ принадлежащим дефектным подпространствам этого оператора. Используя этот факт, мы применяем метод Фурье для нахождения решений u операторных уравнений $B_t^*u = A_xu + f$, с краевыми условиями, налагаемыми на u , где операторы B_t и A_x являются симметрическими (один из них регулярный) с равными дефектными числами и действуют, соответственно, в гильбертовых пространствах $L^2(G_t)$ и $L^2(G_x)$, G_t и G_x - области из \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m .

2. Пусть B - симметричный оператор с индексами дефекта (1.1), $\overset{\circ}{B}$ - его самосопряженное расширение, $\varphi_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ - элемент дефектного подпространства \mathcal{N}_λ оператора B . Всякая аналитическая в верхней полуплоскости C^+ функция $\theta(\lambda)$, не превосходящая по модулю единицы, $|\theta(\lambda)| \leq 1$, $\lambda \in C^+$ определяет квазисамосопряженное (диссипативное) расширение $B_\theta : B_\theta f = B^*f$, $f \in D(B_\theta) = D(B) + c [\theta(\lambda)\varphi_i - \varphi_i]$, $c \in C$, резольвента которого (обобщенная резольвента оператора B) задается формулой [1]

$$R_\lambda(B^\theta)f = R_\lambda(\overset{\circ}{B})f + \frac{1 - \theta(\lambda)}{\theta(\lambda)\chi(\lambda) - 1} \cdot \frac{(f, \varphi_{\bar{\lambda}})}{(\lambda + i)(\varphi_\lambda, \varphi_i)} \varphi_\lambda, \quad \lambda \in C^+, \quad (1)$$

где $\chi(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \cdot \frac{(\varphi_\lambda, \varphi_{-i})}{(\varphi_\lambda, \varphi_i)}$.

Отметим, что если λ - точка регулярного типа оператора B , то она является собственным значением оператора B^* , соответствующей собственной функцией будет элемент φ_λ дефектного подпространства $\mathfrak{N}_\lambda : B^* \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$.

3. Однородная задача. В пространстве $L^2(0,1)$ рассмотрим оператор A_x , полагая для любой $f \in L^2(0,1)$

$$A_x f(x) = \pi i \int_0^1 |x-y| f(y) dy.$$

Оператор A_x является оператором Гильберта-Шмидта, он имеет полную систему собственных функций $\varphi_k(x) = \text{Cos}(2k-1)\pi x$, соответствующих собственным значениям $\lambda_k = 2\pi^{-1}i(2k-1)^{-2}$. В пространстве $L^2(\mathbb{R})$ определим оператор дифференцирования B_t , равенством $B_t f = \frac{1}{2\pi i} f'$, заданный на множестве функций $f \in L^2(\mathbb{R})$ абсолютно непрерывных на \mathbb{R} таких, что $f' \in L^2(\mathbb{R})$ и $f(a) = 0$, где $a < 0$ – произвольное отрицательное число. Оператор B_t будет иметь индексы дефекта (1.1), элемент дефектного подпространства B_t есть функция [2]

$$\Psi_\lambda(t) = 1_{\varepsilon(\lambda)}(t-a) e^{2\pi i \lambda(t-a)}, \quad \text{Im } \lambda \neq 0,$$

где $1_{\varepsilon(\lambda)} = 1_{(0, \infty)}(t) = 1_+(t)$ – индикаторная функция множества $(0, \infty)$, если $\text{Im } \lambda > 0$ и $1_{\varepsilon(\lambda)}(t) = 1_-(t)$, если $\text{Im } \lambda < 0$.

Поставим задачу: найти решение u операторного уравнения

$$B_t^* u = A_x u, \quad (1_0)$$

удовлетворяющее условию

$$\langle g, u \rangle_t = \varphi(x), \quad \text{где } \varphi \in L^2(0,1) \text{ и } g(t) = t; \quad (2_a)$$

$$\langle \delta, u \rangle_t = u(0, x) = \varphi(x). \quad (2_b)$$

ТЕОРЕМА 1. Однородная задача (1₀), (2_a) при любой $\varphi \in L^2(0,1)$ имеет единственное решение $u \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$, задаваемое рядом

$$u(t, x) = 1_+(t-a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_k)}{(k-0,5)^4 + (k-0,5)^2 a} e^{-\frac{4(t-a)}{(2k-1)^2}} \text{Cos}(2k-1)\pi x. \quad (3)$$

Если ряд из коэффициентов Фурье (φ, φ_k) абсолютно сходится, то задача (1₀), (2_b) имеет единственное решение $u \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$, которое задается рядом

$$u(t, x) = 1_+(t-a) \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k) e^{-\frac{4t}{(2k-1)^2}} \text{Cos}(2k-1)\pi x. \quad (4)$$

Ряды (3) и (4) равномерно сходятся на $\mathbb{R} \times [0,1]$.

4. Неоднородная задача. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$. Сохраняя прежние обозначения, рассмотрим неоднородную задачу: найти решение u уравнения

$$B_t^* u = A_x u + f, \quad (1_h)$$

удовлетворяющее условию

$$u(\cdot, \cdot) \in D(\overset{\circ}{B}_t), \quad (5)$$

где $\overset{\circ}{B}_t$ – самосопряженное расширение оператора B_t , например, $\overset{\circ}{B}_t$ – оператор дифференцирования, заданный на множестве абсолютно непрерывных функций $f \in L^2(\mathbb{R})$ таких, что $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 2. Задача (1_h), (5) имеет единственное решение u

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} R_{\lambda_k}(\overset{\circ}{B}_t) b_k(t) \phi_k(x),$$

где $b_k(t) = (f(t, \cdot), \phi_k)$, $R_{\lambda_k}(\overset{\circ}{B}_t)$ – резольвента оператора $\overset{\circ}{B}_t$, в точке λ_k .

ТЕОРЕМА 3. Задача (1_h), (2_a) имеет единственное решение

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} R_{\lambda_k}(B_t^{\theta_k}) b_k \cos(2k - 1)\pi x,$$

где при каждом k $R_{\lambda_k}(B_t^{\theta_k})$ определяется формулой (1), θ_k ($|\theta_k| \leq 1$) подбирается так, чтобы выполнялось (2_a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров Е.Л. О спектральных функциях одного интегрального оператора с ядром Карлемана // Изв. вузов. Сер. математика. 1979. № 7. С. 3 - 12.
2. Александров Е.Л. Резольвенты и спектральные функции операторов свертки. Саратов, 1997. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 14.04.97, № 1246 – В97.

УДК 519.61

Ю. П. Васильев

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Наличие параллельных ЭВМ и систем с матричными языками программирования позволяет ставить задачи и разрабатывать численные методы их решения в обобщенном операторном виде.

В данной работе рассматривается приближенное решение полной проблемы собственных значений для линейного оператора в конечномерном пространстве

$$AX = X\Lambda, \quad (1)$$

где A – квадратная матрица, $X \neq \Theta$ – искомая матрица из собственных векторов, Λ – искомая матрица из собственных значений [1]. A, X, Λ рассматриваем как элементы из пространства $R_{n,n}$. Θ – нулевой элемент ($\Theta \in R_{n,n}$). Для получения единственного решения введём “нормирующий” линейный оператор $G \in R_{n,n}$, который выбирается в зависимости от решаемой задачи и вида матрицы A . (В случае, скажем, матрицы простой структуры [2] – в виде диагональной матрицы.) Таким образом, для построения численного метода решения полной проблемы собственных значений ставится задача решения нелинейной системы матричных уравнений

$$AX = X\Lambda, \quad (2)$$

$$GX = I, \quad (3)$$

где (3) – условия, “нормирующие” матрицу собственных векторов X . $I \in R_{n,n}$ (в простейшем случае – единичная матрица).

Представим задачу (2), (3) в виде нелинейного операторного уравнения

$$T(X, \Lambda) = \begin{bmatrix} AX - X\Lambda \\ GX - I \end{bmatrix} = 0, \quad (4)$$

где T – нелинейный оператор.

Для решения нелинейного уравнения (4) применим итерационный метод Ньютона [1]

$$Y^{k+1} = Y^k - (T'(Y^k))^{-1} T(Y^k), Y^0 \in R, k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Алгоритм метода. Алгоритм метода сводит решение нелинейного матричного уравнения (4) к решению системы нелинейных скалярных уравнений

$$T(Y) = 0 \quad (6)$$

методом (5). Далее для пояснений рассмотрим случай матрицы простой структуры. При этом (6) будет системой из $n^2 + n$ эквивалентных в смысле решения скалярных уравнений с решением в виде вектора-решения Y размера $n^2 + n \times 1$ из элементов строк матриц X, Λ . Используя операции тензорного произведения “ \otimes ” [2], получим для (6) выражение вида

$$T(Y) = \begin{bmatrix} A \otimes I - I \otimes \Lambda & 0 \\ \tilde{G} & 0 \end{bmatrix} Y - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0, \quad (7)$$

где I – единичная матрица n -го порядка, \tilde{G} – матрица размера $n \times n^2$, элемен-

ты которой равны единице, если они соответствуют диагональным элементам матрицы X в преобразовании (3), остальные – нули.

Производную нелинейного оператора T в (5) определим следующим образом [1]

$$T(X + W, \Lambda + V) - T(X, \Lambda) = T'(X, \Lambda) \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} + o(W, V),$$

где

$$T'(X, \Lambda) \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AW - W\Lambda - XV \\ GW \end{bmatrix}, \quad (8)$$

W и V – малые приращения матричного аргумента, $o(W, V)$ – величина более высокого порядка малости. Эквивалентное выражение для (8) примет вид линейного оператора

$$T'(X, \Lambda)Z = \begin{bmatrix} A \otimes I - I \otimes \Lambda' & XQ \\ \tilde{G} & 0 \end{bmatrix} Z, \quad (9)$$

где Z – вектор размера $n^2 + n$ из строк матриц W и V , $R = XQ$ – матрица преобразования RZ_n размера $n^2 \times n$, Z_n – вектор размера $n \times 1$ из последних n элементов вектора Z , Q – матрица преобразования R с нулевыми и единичными элементами.

Через нули в выражениях (6), (7), (9) обозначены матрицы и векторы с нулевыми элементами соответствующих размеров.

На каждом шаге итераций по формуле (5) решается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} T'(Y^k) \Delta Y^k &= -T(Y^k), \quad Y^0 \in R, \\ Y^{k+1} &= Y^k + \Delta Y^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Итерации заканчиваются при $\|T(Y^{k+1})\| \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность.

При воспроизведении алгоритма решения на ЭВМ предполагается наличие соответствующих операций над матрицами. В частности, имеются операции тензорного (кронекерова) произведения, преобразование матрицы в вектор из строк, формирование матрицы R . Алгоритм метода был реализован на ЭВМ в системе MATLAB [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., 1978.
2. Ланкастер П. Теория матриц. М., 1978.
3. Потёмкин В.Г. Система MATLAB. М., 1997.

АЛГОРИТМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРУЧЕНИЙ

Распределение поручений учебной нагрузки сотрудникам кафедры проводится на учебный год, начиная с 1-го сентября и до окончания экзаменов, работы приёмных комиссий, занятый вечерних и заочных отделений.

Входными данными алгоритма распределения поручений, определяющими сроки проведения занятий, объём, преподавателей, являются: учебные планы, рабочие планы, заявки других факультетов, нормы времени в часах, требования к должностям сотрудников кафедры. Кроме того, при составлении поручений учитываются научные направления, планы повышения квалификации, участие в приёмных и государственных комиссиях по приёму экзаменов, кураторство в студенческих группах, руководство кафедрой, аспирантами, соискателями.

Выходными документами алгоритма распределения поручений являются:

1. Расчёт часов по кафедре с учётом заявок факультетов университета.
2. Учебная нагрузка в часах по семестрам с указанием зачётов и экзаменов.
3. Таблица оперативного проведения распределения поручений сотрудникам кафедры по дисциплинам Учебного плана и по объёмам в часах.
4. Персональные карточки с указанием всей учебной нагрузки по семестрам и за весь учебный год.
5. Итоговые отчёты выполнения сотрудниками кафедры учебной нагрузки по семестрам.

Все перечисленные выходные документы алгоритма распределения поручений сопровождаются подведением итоговых сумм по семестрам и за весь учебный год для каждого вида учебной нагрузки.

Алгоритм распределения поручений реализован на электронных таблицах системы программирования Excel [1].

Далее приведены фрагменты выходных документов в виде распечаток электронных таблиц и их краткое описание.

Таблица 1 является фрагментом всей таблицы алгоритма и содержит основную информацию о расчёте часов на кафедре.

Столбцы таблицы имеют имена [1] отражающие их назначение. Например, "лек" - лекции. Ячейки таблицы имеют относительные адреса и снабжены формулами. Адреса ячеек по горизонтали обозначены буквами, по вертикали - цифрами. Формулы ячеек таблицы расчета часов по кафедре содержат операторы языка системы Excel, операндами в которых являются числа в ячейках с соответствующими именами или адресами.

Приведем наиболее характерные формулы ячеек в столбцах "Лекции", "Консультации", "Экзамены".

"Лекции" =(лек1*18+лек2*17)*пот ,

"Консульт."=(ЗНАК(лек1)*2+ЗНАК(лек2)*2+(лек1*18+лек2*17)*0.05)*гр,

"Экзамены" =ЕСЛИ(лек<>0;1;0)*студ/2.

В этих формулах лек1, лек2, пот, гр, студ, лек - имена соответствующих столбцов таблицы 1 и таблицы 2.

Таблица 1

1999/2000 уч.год		РАСЧЕТ ЧАСОВ ПО КАФЕДРЕ МАТ. ФИЗ. И ВЫЧ. МАТ.																													
Дисциплины	Специальн.	Курс	Студентов	Групп		Лекции		Практика		Лаборат.		Инд. зан.		Консульт.		Экзамен		Зачет		Приз.прак.		Курс.раб		Дипл.раб.		Рук. коф.		Рук.капитир.		Общ.нагр	
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ																															
Численные мет.	п/м	3	140	5	70																							168			
Уравн. мат.физ.	п/м	3	140	5	87	350																					784				
ИТОГО ПО МЕХМАТУ				157	350																						952				
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ																															
Методы мат.физ/Ф/Ф	Ф/Ф	3	80	5	36	90																					275				
ИТОГО ПО ФИЗ. ФАК.						36	90																				275				
ИТОГО ПО КАФЕДРЕ						193	440	0	265	79	180																1227				

Таблица 2 является фрагментом всей таблицы алгоритма и является базой для вычислений по формулам ячеек других фрагментов таблицы.

Таблица 2

												ЧИСЛО ЧАСОВ В СЕМЕСТРЕ												
						1 семестр						2 семестр												
потоков	студентов	групп		лекции1		практика1		лаборат.1		инд. зан.1		экз.. зан.1		лекции2		практика2		лаборат.2		инд. зан.2		экз.. зан.2		
		1	56	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Таблица 3 - это фрагмент таблицы оперативного распределения нагрузки для Петрова Ф.П. Ячейки таблицы 3 содержат формулу, например, для 1-го семестра

= (лек+конс+экз)+(пр1*18+ла1*18+зач/гр)*X,

где через X обозначено число планируемых групп студентов, 18 - число недель в первом семестре. Остальные операнды формулы - имена столбцов в соответствующей строке со значениями таблиц 1 и 2. Аналогичная формула для 2 - го семестра. Формула выполняется, если имеются значения в ячейках. Таким образом, задача распределения нагрузки состоит в копировании формулы в соответствующую ячейку, а также задание числа планируемых групп студентов.

Таблица 3

ПЕТРОВ Ф.П.	
Часы нагрузки	
Вид нагр.	1сем
лек=	36
лек+экз=	42
	курс раб.
	15

Карточка персональной учебной нагрузки приведена таблицей 4. Карточка заполняется на каждого преподавателя по заранее подготовленному шаблону простым копированием строк для соответствующих дисциплин из таблицы 1. При этом ячейки в строках копируются с формулами. Остаётся указать количество групп и студентов для окончательного заполнения. Остальные ячейки заполняются автоматически.

Таблица 4

Дисциплины	Нагрузка доцента Петрова Ф.П.															
	Количество часов нагрузки															
Специальн.	Курс	Студентов	Групп	Лекции	Практика	Лаборат.	Инд. зан.	Консульт.	Экзамен	Зачет	Произ.прак.	Курс. раб.	Дипл.раб.	Рук. каф.	Рук. аспир.	Общ.нагр.
1 семестр																
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ																
Численные мет.	п/м	3	140	5	70			28	70						168	
Уравн. мат.физ.	п/м	3	140	5	87	140		70	32	70	28				427	
															595	
	ИТОГО ЗА 1 СЕМ.			157	140			70	60	140	28					
2 семестр																
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (дневное отделение)																
Методы мат.физ/ф/	3	80	5	36	90			90	19	40					275	
															275	
	ИТОГО ЗА 1 СЕМ.			36	90			90	19	40						
	ИТОГО ЗА ГОД			193	230			160	79	180	28				870	

Таблица 5 выполнения учебных поручений воспроизводится на заранее заготовленном шаблоне простым копированием строк из карточек персональной нагрузки с последующим уточнением реального выполнения.

Таблица 5

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского										Декан факультета профессор, доктор					
ВЫПОЛНЕНИЕ УЧЕБНЫХ ПОРУЧЕНИЙ ПО КАФЕДРЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ										в	1 СЕМ.	1998/1999 уч. г.			
№	Ф.И.О.	Факультет	Дисциплины	Специальн.	Курс	Студентов	Количество часов нагрузки		Консульт.	Экзамен	Зачет	Произ.прак.	Курс.раб.	Дипл.раб.	Общ.нагр
							Групп	Лекции	Практика	Лаборат.	Инд.зан.				
1	Петров Ф.П. проф.	M/M ММФ	УМФ ФФ	п/м ф/ф	3 2	122 56	6 3	36 18			16 4	25 28			77 68
Итого за 1-й семестр							54	18			20	53			145

При необходимости все таблицы печатаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаров А. Excel 7.0 в примерах. – СПб. : Питер, 1996.

УДК 539.3

Л. Ф. Вахлаева, Т. В. Вахлаева

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ И ЭКОНОМИЧНОСТИ ПРЯМЫХ И ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении краевых задач для уравнений математической физики разностным методом возникает задача решения систем разностных уравнений большого порядка, матрица которых имеет много нулевых элементов.

Выбор алгоритма зависит от типа расчета (многовариантный или нет), от объема памяти машины и от порядка системы. Естественно выбирать тот метод, для которого время решения минимально по сравнению с другими методами. При теоретических оценках качества алгоритмов их сравнение проводится по числу $Q(\epsilon)$ арифметических действий, достаточных для нахожде-

ния решения задачи с заданной точностью. Количество действий в итерационном методе определяется в зависимости от ε по формуле $Q(\varepsilon) = q \cdot n_0(\varepsilon)$, где q - число действий на одной итерации, $n_0(\varepsilon)$ - количество итераций, необходимых для получения решения с точностью ε .

Сравнение различных методов при решении разностных уравнений Пуассона показало, что одним из лучших по скорости сходимости среди итерационных методов является метод верхней релаксации. При этом количество итераций $n_0(\varepsilon)$ увеличивается пропорционально увеличению числа узлов по каждой переменной [1]. Поэтому целесообразно применение разностных схем повышенной точности, которые дают возможность использовать более крупную сетку и тем самым добиться уменьшения $n_0(\varepsilon)$ при решении систем разностных уравнений. Это подтверждено при решении краевых задач теории пластин и оболочек [2].

При исследовании сложных колебаний изотропных пластинок прямоугольных в плане, которые описываются системой уравнений в частных производных четвертого порядка (уравнений Маргера-Власова-Муштари), после замены частных производных по x и y на сетке $\omega_h = \{(ih, jh) | i, j = 0, m, h = 1/m\}$ разностными соотношениями с погрешностью $O(|h|^4)$ получим систему нелинейных дифференциально-разностных уравнений относительно прогиба w_{ij} и систему линейных разностных уравнений относительно функций F_{ij} большого порядка.

$$\frac{d^2 w_{ij}}{dt^2} = L_1^h(w_{ij}, F_{ij}), \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$L_2^h(F_{ij}) = L_3^h(w_{ij}), \quad i, j = \overline{1, m-1}, \quad (2)$$

где $L_1^h(w_{ij}, F_{ij})$ - нелинейный разностный оператор, содержащий разностные производные до четвертого порядка включительно, $L_2^h(F_{ij})$ - линейный разностный оператор, содержащий производные четвертого порядка, $L_3^h(w_{ij})$ - нелинейный разностный оператор второго порядка. Присоединим к (1) - (2) начальные и краевые условия:

$$w|_{t=0} = w_0(x, y); \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

$$w|_{\Gamma} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

$$F|_{\Gamma} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

где n - нормаль к границе Γ .

Аппроксимация с погрешностью $O(|h|^4)$ краевых условий требует два ряда законтурных узлов и 25-точечный шаблон для частных производных в исходных уравнениях. Обозначим $\bar{\omega}_h^+ = \{j, j = \overline{1, n}, h = 1/m, n = m + 5\}$ - сеточную область, включающую законтурные, граничные и внутренние узлы.

Алгоритм решения задачи (1) - (5) состоит в следующем:

1. Решается система линейных уравнений (2) с учетом краевых условий (5) относительно F_{ij} , при этом для вычисления правой части $L_3^h(w_{ij})$ используются начальное условие $w_{ij}|_{t=0} = w_0(i, j)$ и краевое условие (4).

2. Система дифференциально-разностных уравнений относительно w_{ij} по переменной t интегрируется с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка, где на каждом временном шаге t_k происходит 4-хкратное обращение к решению системы (2) линейных уравнений относительно F_{ij} , при этом для вычисления правой части используются значения w_{ij} на предыдущем временном шаге t_{k-1} . Запишем систему (2) с учетом краевых условий (5) в матричном виде

$$AF = P, \quad (6)$$

где P - вектор правых частей, зависящий от w_{ij} , F - искомый вектор с компонентами F_{ij} , A - матрица размерности $(n-2)^2 \times (n-2)^2$.

При решении системы (6) прямым методом Гаусса придется затратить число арифметических действий, равное $Q_\Gamma = \frac{2}{3}N(N^2 + 3N - 1)$, где $N = (n-2)^2$. Для элементов матрицы \bar{A} , включающей вектор правой части, потребуется двумерный массив размерности $(n-2)^2 \times [(n-2)^2 + 1]$.

Применим для решения системы (6) итерационный метод верхней релаксации, который запишется так:

$$F_{ij}^{(r+1)} = \frac{\omega}{a_{ij}} \left(P_{ij} - \sum_{\substack{p < i \\ s < j}} a_{ps} F_{ps}^{(r+1)} - \sum_{\substack{p \geq i \\ s \geq j}} a_{ps} F_{ps}^{(r)} \right) + (1-\omega) F_{ij}^{(r)}, \quad (7)$$

где p и s принадлежат 25-точечному шаблону сетки $\bar{\omega}_h^+$, r - номер итерации, $r = 0, 1, \dots, n_0(\epsilon)$. Здесь не требуется хранения матрицы \bar{A} . Количество действий, затрачиваемых на одну итерацию, равно $q = 50N$, $N = (n-2)^2$. Количество итераций $n_0(\epsilon) \leq 4$ при $\epsilon = 10^{-4}$, так как при шаге в Рунге-Кутта $\tau = 0.0002$ предыдущее значение $F_{ij}(t_{k-1})$ является хорошим начальным приближением для $F_{ij}(t_k)$. Общее количество действий для верхней релаксации

$Q_{\text{с.п.}}(\varepsilon) = q \cdot n_0(\varepsilon) = 50 \cdot N \cdot n_0(\varepsilon)$. Сравним с методом Гаусса. Найдем коэффициент эффективности

$$K = Q_\Gamma / Q_{\text{с.п.}}(\varepsilon) = (N^2 + 3N - 1) / (75 \cdot n_0(\varepsilon)).$$

При $N = 121$, что соответствует $h = 1/8$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $n_0(\varepsilon) = 4$, получим $K=50$, т.е. количество действий при решении системы разностных уравнений (6) итерационным методом верхней релаксации в 50 раз меньше, чем при решении прямым методом Гаусса. Кроме того, итерационный метод является экономичным в том смысле, что не требует хранения в памяти матрицы A размерности $121 \times 122 = 14762$. При увеличении порядка системы (6), коэффициент K возрастает.

Итак, для решения системы разностных уравнений большого порядка, соответствующих задаче (6), целесообразно применять итерационный метод верхней релаксации, который является эффективным и экономичным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.:Наука, 1978.
2. Вахлаева Л.Ф., Крысько В.А., Соколов С.С. О выборе порядка аппроксимации разностной краевой задачи теории оболочек // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. науч. сб. Саратов, 1981. С. 45 - 49.

УДК 513.88

А. П. Гуревич, А. П. Хромов

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ¹

В пространстве $L[0,1]$ рассмотрим оператор

$$Af = A_0 f + \sum_{k=1}^m g_k(f, v_k),$$

где

$$A_0 f = \alpha_1 \int_0^x f(t) dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} f(t) dt, \quad (f, v_k) = \int_0^1 f(t) v_k(t) dt, \quad g_k(x), v_k(x) \in C^1[0,1].$$

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.

Предполагаем, что системы $\{g'_k(x)\}_1^m, \{v_k(x)\}_1^m$ линейно независимы и $\delta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$.

Обозначим через $R_\lambda f = (E - \lambda A)^{-1} Af = \int_0^1 G(x, t, \lambda) f(t) dt$ (E - единичные

оператор) резольвенту Фредгольма оператора A . В настоящей статье при некоторых предположениях относительно оператора A найдены необходимые и достаточные условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней на всем отрезке $[0,1]$ средних вида

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda ,$$

где $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям:

- a) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;
- б) существует $C > 0$ такая, что $|g(\lambda, r)| \leq C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$;
- в) существуют положительные β_1, β_2 такие, что

$$g(re^{i\phi}, r) = O\left(\left|\phi + \alpha - \frac{\pi}{2}\right|^{\beta_1} \left|\phi + \alpha + \frac{\pi}{2}\right|^{\beta_2}\right),$$

где $\alpha = \arg \sqrt{\delta}$ (оценки равномерны по r);

- г) $g(\lambda, r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ и фиксированном λ .

Примерами таких функций могут служить функции вида

$$g(\lambda, r) = g_1(\lambda, r) g_2(\lambda, r),$$

где

$$g_1(\lambda, r) = \left(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\alpha - \pi/2)}\right)^{\beta_1} \left(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\alpha + \pi/2)}\right)^{\beta_2}, \beta_1, \beta_2 > 0,$$

$$g_2(\lambda, r) = \left(1 - \frac{f(\lambda)}{M_r(f)}\right)^{\beta_3}, M_r(f) = \max_{|\lambda|=r} |f(\lambda)|, \beta_3 \geq 0.$$

Отметим, что для случая дифференциального оператора n -го порядка с регуляярными по Биркгофу краевыми условиями [1, с.66] М.Стоун [2] исследовал средние по Риссу спектральных разложений, представимые в виде

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^l \widetilde{R}_\lambda f d\lambda, l > 0$$

(\widetilde{R}_λ - резольвента дифференциального оператора) и показал, что на каждом $[a, b] \subset (0, 1)$ имеет место равносуммируемость их с такими же средними обычных тригонометрических разложений в ряды Фурье. Этой же тематике посвящены работы [3 - 5].

В дальнейшем важную роль будет играть вид оператора A^{-1} . Поэтому укажем сначала условия его существования. Обозначим через $M = (m_{ij})$ ($i = 1, \dots, m+1; j = 1, \dots, m$) матрицу с элементами $m_{ij} = U(g_j)$ ($j = 1, \dots, m$); $m_{ij} = \delta_{i,j+1} + (Lg_j v_{i-1})$ ($i = 2, \dots, m+1; j = 1, \dots, m$).

Здесь $u(f) = \alpha_1 f(0) - \alpha_2 f(1)$, $Lf = \delta^{-1} \{ \alpha_1 f'(x) + \alpha_2 f'(1-x) \}$, $\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

ТЕОРЕМА 1. Оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\text{rang } M = m$.

Будем предполагать, что A^{-1} существует. Обозначим $\mu = \lambda\sqrt{\delta}$; S_ε - область, получающаяся из λ -плоскости удалением всех собственных значений A^{-1} вместе с их круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$; $\|\cdot\|$ - норма в $C[0,1]$.

ТЕОРЕМА 2. Если $f(x) \in C[0,1]$, а $\lambda \in S_\varepsilon$, то

$$\|R_\lambda f\| = O\left(\frac{1}{\operatorname{Re} \mu}\|f\|\right).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x), g_0(x) \in C[0,1]$. Тогда, если на окружности $|\lambda| = r$ нет характеристических чисел оператора A , то

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f(x) d\lambda &= f(x)(1 - g(\mu_0, r)) + g(\mu_0, r)[f(x) - f_0(x)] + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{g(\lambda, r)}{\lambda - \mu_0} R_\lambda g_0(x) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda [f(x) - f_0(x)] d\lambda, \end{aligned}$$

где μ_0 - произвольное комплексное число ($|\mu_0| < r$), не являющееся характеристическим значением оператора A .

ТЕОРЕМА 4. Область значения оператора A состоит из всевозможных абсолютно непрерывных функций $y(x)$, удовлетворяющих условию вида

$$\delta_1 y(0) - \delta_2 y(1) - (y, w) = 0 \quad (1)$$

где $w(x) \in C[0,1]$.

ТЕОРЕМА 5. Замыкание D^0 области значений оператора A в метрике $C[0,1]$ совпадает с множеством непрерывных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих (1).

ТЕОРЕМА 6. Для того, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f(x) d\lambda \right\| = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in D^0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. Стоун М.Н. // Trans.Amer.Math. 1926. Vol. 28. P. 695 - 761.
3. Хромов А.П. // ДАН СССР. 1962. Т. 146, № 6. С. 1294 - 1297.
4. Тихомиров В.В. // ДАН СССР. 1976. Т. 226, № 5. С. 1015 - 1017.
5. Тихомиров В.В. // Мат. сб. 1977. Т. 102, № 1. С. 33 - 55.

УДК 511.2

Г. И. Гусев

ОБ ИЗОМЕТРИЯХ В НЕАРХИМЕДОВЫХ ПОЛЯХ, СВЯЗАННЫХ С РЯДАМИ НЬЮТОНА

Пусть (K, ϕ) - нормированное поле, где ϕ - нетривиальная неархимедова норма. Будем считать, что характеристика поля равна нулю. Обозначим

$$V = \{\alpha \mid \alpha \in K; \phi(\alpha) \leq 1\} - \text{кольцо нормирования поля } K,$$

$$P = \{\alpha \mid \alpha \in K; \phi(\alpha) < 1\} - \text{идеал нормирования},$$

$$E = \{\varepsilon \mid \varepsilon \in K; \phi(\varepsilon) = 1\} - \text{группа единиц поля } K,$$

$$F = V/P - \text{поле классов вычетов по mod } P \text{ (поле вычетов).}$$

Известен следующий критерий локальной компактности неархимедова поля.

ТЕОРЕМА [1, с. 43]. Неархимедово поле (K, ϕ) является локально компактным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. (K, ϕ) является полным полем.
2. Идеал нормирования P является главным, т. е. существует такой простой элемент $\pi \in K$, что $P = \pi V$.
3. Поле вычетов F поля K является конечным.

В нашем случае поле K является конечным расширением некоторого поля Q_p , p -адических чисел, где p – простое, причём $p = \pi^e \varepsilon$, где e – натуральное и $\varepsilon \in E$.

Определение 1. Отображение $\sigma: V \rightarrow V$ называется изометрией V , если для произвольных $a, b \in V$

$$\phi(\sigma(a) - \sigma(b)) = \phi(a - b).$$

Определение 2. Отображение $\tau: E \rightarrow E$ называется изометрией E , если для произвольных $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in E$

$$\phi(\tau(\varepsilon) - \tau(\tilde{\varepsilon})) = \phi(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}).$$

С компактами V и E связаны группы изометрий $GIs(V)$ и $GIs(E)$.

Примером аналитической изометрии компакта V является отображение $\sigma: V \rightarrow V$

$$\forall x \in V \quad \sigma(x) = x + \pi f(x), \quad (1)$$

где $f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v x^v$ - степенной ряд с коэффициентами $a_v \in V$, причём $\lim_{v \rightarrow \infty} \phi(a_v) = 0$.

Отображение $\tau: E \rightarrow E$, определяемое формулой

$$\forall \varepsilon \in E \quad \tau(\varepsilon) = \varepsilon + \pi f_1(\varepsilon) + \pi f_2(\varepsilon^{-1}), \quad (2)$$

где $f_i(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v^i x^v$ - степенные ряды, подчинённые прежнему условию, также является изометрией E .

Определение 3. Функции $F(x)$ и $G(x)$, заданные на компакте V , будем называть изометрически эквивалентными, если существует изометрия σ такая, что

$$\forall x \in V: F(\sigma(x)) = G(x).$$

Аналогично определяется изометрическая эквивалентность функций на компакте E .

В связи с исследованием проблемы изометрической эквивалентности функций нам необходимо изучить метрические свойства коэффициентов аналога ряда Ньютона в поле (K, ϕ) .

ЛЕММА. Пусть π - простой элемент неархimedова локально-компактного поля характеристики нуль, n - натуральное, $v_0 = \text{ord}_\pi n$. Тогда ряд Ньютона

$$H_{n,v}(x) = \left(1 + \pi^v x\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \sum_{S=1}^{\infty} \frac{1}{S!} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{n} - S + 1\right) \pi^{Sv} x^S$$

в случае, когда $v_0 \geq 1$, при произвольном натуральном v таком, что

$$v > e \left(\text{ord}_\pi n + \frac{1}{p-1} \right),$$

представим в следующем виде:

$$H_{n,v}(x) = 1 + \pi G_{n,v}(x), \quad (*)$$

где $G_{n,v}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^{n,v} x^i$ - степенной ряд с целыми π -адическими коэффициентами, сходящийся на компакте V ;

в случае, когда $v_0 = 0$, ряд Ньютона также представим в виде $(*)$ при $v \geq 1$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $v_0 = 0$, т. е.

$n \in E$. Тогда p -адическую единицу $\frac{1}{n}$ разложим в ряд:

$$\frac{1}{n} = \sum_{v=0}^{\infty} c_v p^v \quad c_0 \neq 0, \quad c_v \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Для каждого натурального s выберем $n_s = \sum_{v=1}^{m_s} c_v p^v$ так, что

$$\text{ord}_p \left(\frac{1}{n} - l \right) = \text{ord}_p (n_s - l) \quad \text{при всех целых } l \in [1, S-1]. \quad \text{Тогда}$$

$$\text{ord}_p \left(\frac{1}{S!} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{n} - S + 1 \right) \right) = \text{ord}_p C_{n_s}^S \geq 0, \quad \text{и, следовательно,}$$

$$\text{ord}_\pi \left(\frac{1}{S!} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{n} - S + 1 \right) \pi^{v_s} \right) \geq v_s S \rightarrow \infty, \text{ при } S \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, мы установили сходимость ряда Ньютона при всех $x \in V$ и возможность представления его в виде (*).

В случае, когда $v_0 \geq 1$, имеем при $v > e \left(\text{ord}_p n + \frac{1}{p-1} \right)$:

$$\begin{aligned} \text{ord}_\pi \left[\frac{1}{S!} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{n} - S + 1 \right) \pi^{v_s} \right] &= S v + e \text{ord}_p \left[\frac{1}{S!} \cdot \frac{1}{n^s} \right] = \\ &= S v - e \left(\frac{S - \sigma_p(S)}{p-1} + S \text{ord}_p n \right) = S \left(v - e \left(\text{ord}_p n + \frac{1}{p-1} \right) \right) + \frac{e \sigma_p(S)}{p-1} \geq 1. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_p(S)$ является суммой цифр p -ичного разложения числа S . Более того, отсюда следует сходимость ряда Ньютона $H_{n,v}(x)$ при всех $x \in V$ и его представление в виде (*). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. В условиях и обозначениях леммы для произвольного степенного ряда $f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v x^v$ с целыми π -адическими коэффициентами, сходящегося на компакте V , функции

$$\sigma(x) = x H_{n,v}(f(x)), \quad x \in V$$

и

$$\tau(\varepsilon) = \varepsilon H_{n,v}(f(\varepsilon^{-1})), \quad \varepsilon \in E$$

являются изометриями соответствующих компактов, представимыми в форме (1) или (2).

Доказательство непосредственно следует из леммы о подстановке ряда в ряд [2] и нашей леммы.

ТЕОРЕМА 2. В условиях и обозначениях леммы для произвольного степенного ряда $f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v x^v$ с целыми π -адическими коэффициентами, сходящегося на компакте V , имеют место следующие изометрические эквивалентности:

1. $x^n + \pi^v x^n f(x) \equiv x^n$ на компакте V ;
2. $\varepsilon^n + \pi^v \varepsilon^n f(\varepsilon^{-1}) \equiv \varepsilon^n$ на компакте E .

Доказательство. В силу теоремы 1 существуют такие изометрии σ и τ соответствующих компактов V и E , что

$$\forall x \in V: x^n + \pi^v x^n f(x) = \sigma^n(x)$$

и

$$\forall \varepsilon \in E: \varepsilon^n + \pi^v \varepsilon^n f(\varepsilon^{-1}) = \tau^n(\varepsilon).$$

Таким образом, утверждения 1 и 2 доказаны.

Примечание. Теорема 2 находит многочисленные приложения в теории рациональных тригонометрических сумм, диофантовом анализе и в теории интегрирования по аддитивной мере Хаара в p -адических полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ленской Д.Н. Функции в неархimedовски нормированных полях. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1962.
2. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1972.

УДК 519.853.3

С. И. Дудов, И. В. Златорунская

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹

Пусть D - заданный выпуклый компакт из \mathbb{R}^P , функция $n(x)$ удовлетворяет на \mathbb{R}^P аксиомам нормы. Обозначим через

$$\Omega = \overline{\mathbb{R}^P \setminus D}, \quad R(x) = \max_{y \in D} n(x - y),$$

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.

$$\rho_D(x) = \min_{y \in D} n(x - y), \quad P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x).$$

Рассмотрим следующую задачу

$$\Phi(x) \equiv R(x) + P(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^P}. \quad (1)$$

Известно [1, 2], что к этой задаче сводится задача наилучшего приближения выпуклого компакта D шаром в норме $n(\cdot)$. Легко видно, что функция $R(x)$ является выпуклой и, как показано в [2], функция $P(x)$ также выпукла и конечна на \mathbb{R}^P . Поэтому задача (1) является задачей выпуклого программирования. Получим необходимое и достаточное условие ее решения.

Будем далее обозначать через $Q^R(x, D) = \{y \in D / n(x - y) = R(x)\}$, $Q^P(x, A) = \{z \in A / n(x - z) = \rho_A(x)\}$, $\partial n(x)$ - субдифференциал нормы $n(\cdot)$ в точке x , $K(x, D)$ - конус возможных направлений множества D в точке x , K^+ - сопряжение конуса K , coA выпуклую оболочку множества A , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение, $n^*(x) = \max_{n(v) \leq 1} \langle v, x \rangle$.

Для получения условий оптимальности в задаче (1) необходимо располагать дифференциальными характеристиками выпуклых функций $R(x)$ и $P(x)$, т.е. их субдифференциалами.

Используя теорему 3.6 из [3], а также замкнутость множества $Q^R(x, D)$ и полуунепрерывность субдифференциала нормы $\partial n(\cdot)$, как многозначного отображения: $\mathbb{R}^P \rightarrow 2^{\mathbb{R}^P}$, нетрудно доказать следующий факт.

ТЕОРЕМА 1. Для субдифференциала функции $R(x)$ справедлива формула

$$\partial R(x) = co\{\partial n(x - y) / y \in Q^R(x, D)\}, \forall x \in \mathbb{R}^P. \quad (2)$$

В работе [4] доказано, что субдифференциал выпуклой функции $\rho_D(x)$ можно выразить в виде

$$\partial \rho_D(x) = \partial n(x - y) \cap -K^+(z, D), \quad \forall z \in Q^P(x, D), \quad x \in \mathbb{R}^P, \quad (3)$$

а супердифференциал вогнутой на множестве D функции $\rho_\Omega(x)$ в виде

$$\overline{\partial \rho_\Omega(x)} = co\{v \in K^+(z, D) / n^*(v) = 1, z \in Q^P(x, \Omega)\}, \quad \forall x \in \text{int } D. \quad (4)$$

Используя формулы (3), (4), нетрудно показать, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Субдифференциал выпуклой функции $P(x)$ можно записать в виде

$$\partial P(x) = \begin{cases} \partial n(x - y) \cap -K^+(z, D), & \forall z \in Q^P(x, D), \text{ если } x \notin D, \\ co\{v \in -K^+(z, D) / n^*(v) = 1, z \in Q^P(x, \Omega)\}, & \text{если } x \in D. \end{cases} \quad (5)$$

Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы точка x_0 была решением задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$o_p \in \partial\Phi(x_0) \equiv \partial R(x_0) + \partial P(x_0), \quad (6)$$

где $\partial R(x_0)$ и $\partial P(x_0)$ определяются формулами (2) и (5).

Доказательство. Функция $\Phi(x)$, как сумма выпуклых и конечных функций, сама является выпуклой и конечной. Ее субдифференциал, по теореме Моро-Рокафеллара, есть алгебраическая сумма $\partial R(x)$ и $\partial P(x)$. Поэтому, в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см., например, [3]), необходимым и достаточным условием решения задачи (1) является включение (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский М.С., Силин Д.Б. О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Тр. Мат. ин - та им. В.А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 338 - 354.
2. Златорунская И.В. О редукции задачи равномерной оценки выпуклого компакта шаром произвольной нормы к задаче выпуклого программирования // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун - та, 1999. С. 116 – 120.
3. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982.
4. Дудов С.И. Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530 - 542.

УДК 511.335

Л. А. Евтеева, Н. И. Климов, Ю. В. Славина

АСИМПТОТИКА СУММ С ФУНКЦИЯМИ МЁБИУСА И ЭЙЛЕРА

При применении метода решета Сельберга к проблеме простых чисел арифметической прогрессии используются асимптотики сумм, содержащих функции Мёбиуса μ и Эйлера φ . Основное переменное действительное $z \rightarrow \infty$, c - произвольно большая постоянная, k - натуральный параметр, p - простое число, $s = \sigma + it$.

ТЕОРЕМА 1 (Климов – Славина). Пусть k удовлетворяет условию

$$k = O(z^c), \quad (1)$$

тогда

$$S_1(z, k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq z, (n, k)=1} \frac{\mu^2(n)n}{\varphi(n)} \sim \frac{\varphi(k)}{k} z.$$

Доказательство. При $\sigma > 1$ аналитическая производящая функция

$$P(s, k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1, (n, k)=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n) n^{s-1}} = G(s, k) \zeta(s),$$

где $\zeta(s)$ - функция Римана,

$$G(s, k) = P_1(s, k) \prod_1(s, k), \quad \prod_1(s, k) = \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

$$P_1(s, k) = \prod_{p, (p, k)=1} \left(1 + \frac{1}{(p-1)p^s} - \frac{1}{(p-1)p^{2s}}\right)$$

- абсолютно и равномерно относительно параметра k сходящееся при $\sigma \geq \sigma_1 > 1/2$ бесконечное произведение.

Обобщая фундаментальную формулу [1, формула (14), с. 43], получим при $\sigma_0 > 1$

$$\int_1^z S_1(u, k) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} z^{s+1} g(s, k) ds,$$

где $g(s, k) = s^{-1}(s+1)^{-1} P(s, k)$; законность необходимых преобразований обеспечивается абсолютной сходимостью интеграла ввиду наличия множителя s^2 в знаменателе.

Перенесём контур интегрирования налево от полюса в точке $\sigma = 1$, например, на прямую $\sigma_1 = 3/4$; это возможно, так как при фиксированных z, k остаток интеграла по бесконечному контуру по модулю $< \varepsilon, \varepsilon > 0$, за счёт оценки $|\zeta(s)|$ и множителя s^{-2} . По теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{z^2} \int_1^z S_1(u, k) du = \frac{1}{2} \frac{\varphi(k)}{k} (1 + I(z, k)), \quad I(z, k) = \frac{k}{\varphi(k)\pi i} \int_{(\sigma_1)} z^{s-1} g(s, k) ds.$$

Для оценки $I(z, k)$ основное - оценка $\prod_1(s, k)$: при условии (1)

$$\prod_1(s, k) = \sum_{d/k} \frac{\mu(d)}{d^s} = O\left(\sum_{d/k} \frac{1}{d^{\sigma_1}}\right) = O(\tau(k)) = O(z^\varepsilon),$$

где $\tau(k)$ - число делителей, $\varepsilon > 0$; при $z \rightarrow \infty$ $I(z, k) \rightarrow 0$ за счёт множителя $z^{-1/4+\varepsilon}$.

Переход к $S_1(z, k)$ осуществляется обобщением, что при условии (1) возможно (!), известной теоремы С из кн. [1, с. 48].

ТЕОРЕМА 2 (Евтеева - Клинов). При условии (1) из теоремы 1

$$S_2(z, k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq z, (n, k)=1} \mu^2(n) \sim \prod_{p, (p, k)=1} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \frac{\varphi(k)}{k} z.$$

Доказательство. Используется по методу Ландау-Перрона [2, с. 427, теорема 3.1; с. 70 - 72, теоремы 3.2, 3.3] прямоугольный контур Γ с вершинами $(a - iT, a + iT, b + iT, b - iT)$, содержащий полюс производящей функции в точке $\sigma = 1$, где выбрано $a = 3/4, b = 1 + (\ln z)^{-1}, T = \sqrt{z}$. Имеем

$$S_2(z, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{z^s}{s} G^*(s, k) \zeta(s) ds + O\left(\frac{z^b}{T(b-1)} + \frac{z \ln z}{T}\right),$$

где $G^*(s, k) = P_1^*(s, k) \prod_1(s, k) \zeta(s)$, $P_1^*(s, k)$ – абсолютно сходящееся при $\sigma > 1/2$ бесконечное произведение; по теореме Коши последний интеграл выражается через

$$\operatorname{res}_{s=1} G^*(s, k) \zeta(s) \frac{z^s}{s} = \prod_{p, (p, k)=1} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \frac{\varphi(k)}{k} z$$

и интегралы по остальным сторонам контура Γ . Эти интегралы оцениваются как и в доказательстве теоремы 1. На вертикальном участке понижающим множителем является $z^{-1/4+\varepsilon}$. На горизонтальном участке понижающим множителем является T^{-1} :

$$\left| \int_{a+iT}^{b+iT} \frac{z}{s} G^*(s, k) \zeta(s) ds \right| = O\left(z^{1+\varepsilon} T^{1/4-1}\right) = o\left(\frac{\varphi(k)}{k}\right).$$

Теорема 3 (Климов). Пусть $k, z \rightarrow \infty$ таким образом, что

$$\frac{k^2}{\varphi^2(k)} \sum_{p/k} \frac{\ln p}{p} = o(\ln z), \quad (2)$$

тогда имеют место асимптотические формулы для $S_1(z, k), S_2(z, k)$, сформулированные в теоремах 1 и 2.

Доказательство. Использована, как в доказательстве теоремы 1, фундаментальная формула; $\prod_1(s, k)$ разбивается на три суммы

$$\prod_1(s, k) = \sum_{d/k, d \geq z} \frac{\mu(d)}{d^s} + \sum_{d/k, d \leq z^{1-\varepsilon}} \frac{\mu(d)}{d^s} + \sum_{d/k, z^{1-\varepsilon} < d < z} \frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Для первого слагаемого используется контур $\sigma = \sigma_0$, тогда в знаменателе велико d^{σ_0} ; для второго и третьего слагаемых контур интегрирования переносится на прямую $\sigma = \sigma_1$, $1/2 < \sigma_1 < 1$, здесь необходимо условие (2).

Примечания. 1. Это доказательство более громоздко, чем доказательство теоремы 1, но значительно проще доказательства этой теоремы переносом

контура на $\sigma = 1$, которое только намечено, но почти не приведено в работе [3, лемма 1, доказательство леммы 6а].

2. Введение условия (1) вместо условия (2) существенно упрощает доказательство оценки сверху для простых чисел арифметической прогрессии в работе [3, теорема 1].

3. Ранее К. Иsekii [4, лемма 6] получил асимптотику для

$$\sum_{\substack{n \leq z, \\ (n, k)=1}} \varphi^{-1}(n), \quad k \leq z.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ингам А. Е. Распределение простых чисел. М.; Л., 1936.
2. Прахар К. Распределение простых чисел. М., 1967.
3. Климов Н.И. Малое решето // Матем. заметки. 1980. Т. 27, вып. 2. С. 161 - 174.
4. Iseki K.A Divisor Problem involving Prime Numbers // Japanese J. of Mathematics. 1951. Vol. 21. P. 67 - 92.

УДК 517.928

И. И. Ефремов

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНДЕФИНИТНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Введение. Пусть на отрезке $[0,1]$ задан линейный квазидифференциальный (к.д.) оператор L , определяемый к.д. выражением

$$D_n y = y^{[n]}, \quad (1)$$

где

$$D_k y = y^{[k]} = i \frac{d}{dx} y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj} y^{[j]}, \quad k = n, n-1, \dots, 1,$$
$$D_0 y = y^{[0]} = y, \quad p_{kj} \in L[0,1]$$

и линейно-независимыми нормированными [1, с. 65] краевыми условиями

$$U_v(y) = U_{v0}(y) + U_{vl}(y) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$U_{v0}(y) = \alpha_v y^{[k_v]}(0) + \sum_{j=0}^{k_v-1} \alpha_{vj} y^{[j]}(0),$$

$$U_{v1}(y) = \beta_v y^{[k_v]}(1) + \sum_{j=0}^{k_v-1} \beta_{v,j} y^{[l_j]}(1),$$

где $\alpha_{v,j}, \beta_{v,j} \in C$, $|\alpha_v| + |\beta_v| > 0$ для $1 \leq v \leq n$, $n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$, $k_{v+2} < k_v$ для $1 \leq v \leq n-2$.

Рассмотрим задачу о собственных значениях (с.з.) оператора L с весовой ступенчатой функцией $r(x)$ в виде:

$$Ly = \lambda r(x)y, \quad (3)$$

где $r:[0,1] \rightarrow C \setminus \{0\}$ - ступенчатая функция, $r(x) = r_k$, если $x \in I_k$, $k = 0, 1, \dots, m$, $I_0 = [a_0 = 0, a_1]$, $I_k = (a_k, a_{k+1}]$ для $k \neq 0$, $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m+1} = 1$.

К.д. выражение $D_n y = y^{[n]}$ является обобщением линейного дифференциального выражения n -го порядка [1, с. 13]:

$$l(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y. \quad (4)$$

Задачи о собственных значениях линейных дифференциальных операторов с весовой функцией $r(x)$ были предметом многочисленных исследований Лангера (см., например, [2]) и других авторов. В этих исследованиях $r(x)$ предполагалась достаточно гладкой функцией, а дифференциальное выражение $l(y)$ имело специальный вид. W. Eberhard, G. Freiling, A. Schneider в [3] рассмотрели задачу о собственных значениях линейных дифференциальных операторов со ступенчатой весовой функцией $r(x)$ в наиболее общем виде. При этом предполагалось, что $r(x)$ принимает только действительные значения, коэффициент $p_1(x)$ в (4) либо равняется тождественно 0, либо является достаточно гладкой функцией, а краевые условия удовлетворяют определенным требованиям, называемым условиями регулярности.

В этой статье будет одно определение регулярности задачи (3), которое обобщает определение регулярности, данное в [3] на случай к.д. операторов и комплекснозначной функции $r(x)$ для $n = 2\mu$. При этом при определенном расположении ступенек $r(x)$ получены более точные асимптотические формулы для с.з. задачи (3) по сравнению с [3]. При этом мы будем только предполагать, что $p_{k,k-1} \in L[0,1]$, а это соответствует случаю, когда $p_1 \in L[0,1]$.

Пусть далее для определенности $n = 2\mu$.

2. Условия регулярности. Обозначим $R(x) = (-1)^{n+1} i^n r(x)$, $\lambda = \rho^n$.

Пусть

$$R_k = (-1)^{n+1} i^n r_k = |R_k| e^{i\varphi_k},$$

где $0 \leq \varphi_k < 2\pi$, $k = \overline{0, m}$, $S_v(R_k) = \left\{ \rho \in C \mid \frac{v\pi}{n} - \frac{\varphi_k}{n} \leq \arg \rho \leq \frac{(v+1)\pi}{n} - \frac{\varphi_k}{n} \right\}$.

Для каждого R_k разобьем всю комплексную ρ -плоскость на $2n$ секторов. Рассмотрим всевозможные пересечения $(m+1)$ секторов $S_{v_0}(R_0) \cap \dots \cap S_{v_m}(R_m)$, где $v_0, v_1, \dots, v_m = 0, \dots, 2n-1$, тогда комплексная ρ -плоскость будет разбита на не более, чем $N = (m+1)2n$ секторов. Пусть S один из таких секторов. В каждом S -секторе можно занумеровать корни n -й степени $\{w_{kj}\}_{j=1, \dots, n}$ из $(-R_k)$ таким образом, что $\operatorname{Re} w_{k1} \leq \dots \leq \operatorname{Re} w_{kn}$, $k = 0, 1, \dots, m$, $\rho \in S$. Положим

$$\Theta(x_1, \dots, x_\sigma; x_{\sigma+1}, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \alpha_1 x_1^{k_1} & \dots & \alpha_1 x_\sigma^{k_1} & \beta_1 x_{\sigma+1}^{k_1} & \dots & \beta_1 x_n^{k_1} \\ \alpha_2 x_1^{k_2} & \dots & \alpha_2 x_\sigma^{k_2} & \beta_2 x_{\sigma+1}^{k_2} & \dots & \beta_2 x_n^{k_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n x_1^{k_n} & \dots & \alpha_n x_\sigma^{k_n} & \beta_n x_{\sigma+1}^{k_n} & \dots & \beta_n x_n^{k_n} \end{vmatrix}.$$

Определение. Будем говорить, что оператор L порожден регулярными краевыми условиями (2), если в любом S -секторе определители

$$\Theta(iw_{01}, \dots, iw_{0\mu}; iw_{m\mu+1}, \dots, iw_{mn}),$$

$$\Theta(iw_{01}, \dots, iw_{0\mu-1}, iw_{0\mu+1}; iw_{m\mu+1}, \dots, iw_{mn}),$$

$$\Theta(iw_{01}, \dots, iw_{0\mu}; iw_{m\mu}; iw_{m\mu+2}, \dots, iw_{mn})$$

отличны от 0.

В этом случае имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $n = 2\mu$, $\arg r_i - \arg r_j \neq 0$ если $i \neq j$, $0 \leq \arg r_i, \arg r_j < 2\pi$, тогда регулярная задача (3) будет иметь $2(m+1)$ последовательностей собственных значений

$$\lambda_k^l = (\rho_k^l)^n, \quad \tilde{\lambda}_k^l = (\tilde{\rho}_k^l)^n, \quad l = 0, \dots, m, \quad k = N, N+1, \dots$$

$$\rho_k^l = \pi k i a_l + A_l + h_k^l, \quad (5)$$

$$\tilde{\rho}_k^l = \pi k i b_l + B_l + \tilde{h}_k^l, \quad (6)$$

где a_l, b_l, A_l, B_l - некоторые комплексные константы, а $h_k^l = o(1)$, $\tilde{h}_k^l = o(1)$, $k \rightarrow \infty$.

Если $p_{kk-1} \in L^2[0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |h_k^l|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{h}_k^l|^2 < \infty. \quad (7)$$

Замечание. Если $\arg r_i = \arg r_j$ для некоторых i, j , то можно получить оценки для ρ_k^l в виде $\rho_k^l = \pi k i \{c_l + O(\frac{1}{k})\}$, где c_l некоторая комплексная кон-

станта, $l = 1, \dots, p$, а p некоторое целое число. Аналогичные формулы можно получить для нечетного n . При получении оценки (7) используется лемма, обобщающая известную лемму Кесельмана, полученная в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
2. Langer R. // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 545 - 582.
3. Eberhard W., Freiling G., Schneider A. // Differential and Integral Equations. 1990. Vol. 3, November. P. 1167 - 1179.
4. Рыхлов В.С. Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов :Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1981.

УДК 517.984.36

М. Ю. Игнатьев

ЛИНЕЙНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЬЮ¹

Пусть D - область на комплексной плоскости, звездная относительно 0, $A(D)$ - пространство функций, аналитических в области D , с топологией равномерной сходимости на компактах, $A_k(D) = \{z^k f(z), f \in A(D)\}$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\gamma \in (0, \pi/2)$. Будем говорить, что звездная относительно 0 область D удовлетворяет условию $R(\gamma)$, если $z \in D \Rightarrow \{z \exp(\pm it - t \operatorname{ctg} \gamma)\}_{t \in (0, +\infty)} \subset D$. Отметим, что, если $\gamma_1 > \gamma_2$, то область, удовлетворяющая условию $R(\gamma_1)$, удовлетворяет также условию $R(\gamma_2)$.

Введем в рассмотрение следующую полугруппу операторов дробного интегродифференцирования, построенную на основе оператора Чезаро I :

$$I^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \ln^{\alpha-1}(1/\tau) f(z\tau) d\tau, \alpha > 0; \quad (1)$$

$$I^{-1} f(z) = \frac{d}{dz} (zf(z)); \quad I^\alpha = I^{[\alpha]} I^{\alpha - [\alpha]}, \alpha < 0. \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Саратовского международного центра перспективных исследований, грант № 99-1-01.

Рассмотрим следующий интегро-дифференциальный оператор дробного порядка $\alpha > 2$:

$$L = I^{-\alpha}(E + H) + I^{-\alpha+1}Q, \quad (3)$$

$$Hf(z) = \int_0^1 H(\tau)f(z\tau)d\tau, \quad (4)$$

$$Qf(z) = \int_0^1 Q(z, \tau)f(z\tau)d\tau. \quad (5)$$

Основной результат работы – следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 2$, область D удовлетворяет условию $R(\gamma)$ для некоторого $\pi/2 - \pi/\alpha < \gamma < \pi/2$. Пусть L – оператор вида (3) – (5), где функция $Q(z, t)$ – аналитическая по z при любом фиксированном t , и для некоторого $p > 1$ принадлежит как функция t пространству $L_p[0, 1]$ при каждом фиксированном $z \in D$, и для любого компакта $K \subset D$

$$\sup_{z \in K} \|Q(z, t)\|_{L_p[0, 1]} < \infty. \quad (6)$$

Пусть $H(t) = H_1(\ln(1/t))$, $H_1(t)$ аналитична в области $S_\alpha = \{t : |\arg t| < \pi/2 + \pi/\alpha\}$, и:

$$|H_1(t)| < C |t|^{\varepsilon-1} \exp(\mu_j |t|) \quad \forall t \in S_\alpha, \quad (7)$$

где $\varepsilon > 0$, $\mu_0 \in [0, 1]$, $\mu_1 \geq 0$, $\psi_0 \in [0, \pi/2)$, $j = 0$ если $|\arg t| \leq \psi_0$, $j = 1$ если $\psi_0 < |\arg t| < \pi/2 + \pi/\alpha$.

Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для любой звездной относительно 0 области $D' \subseteq D$ оператор L линейно эквивалентен в $A_n(D')$ оператору L_1 :

$$L_1 = I^{-\alpha}(E + H + IQ_1), \quad (8)$$

где

$$Q_1 f(z) = \int_0^1 Q(0, t)f(zt)dt. \quad (9)$$

Если, кроме того, все собственные значения оператора L_1 (8), (9) различны, то операторы L и L_1 линейно эквивалентны в $A(D')$.

При получении теоремы 1 используется развитие метода, предложенного и развивавшегося ранее в работах В.А. Марченко, Л.А. Сахновича, А.П. Хромова, И.Г. Хачатряна, О.В. Седина, В.В. Рындиной, М.С. Еремина. Отметим преемственность полученных результатов с результатами работ [1, 2], посвященных изучению вопросов линейной эквивалентности дифференциальных операторов целых порядков с особенностью, обобщающих классический оператор Эйлера, а также интегро-дифференциальных операторов целого порядка вида:

$$Ly = z^n y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} q_j(z) z^j y^{(j)} + \int_0^z P(z,t) y(t) dt. \quad (10)$$

Одним из возможных приложений теоремы 1 является изучение поведения рядов по собственным функциям оператора L .

Будем предполагать для определенности, что функция $Q(z,t)$ - целая по переменной z , и все собственные значения оператора L_1 различны. В этом случае для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует единственная собственная функция $y(z,k)$ оператора L , представимая в виде $y(z,k) = z^{k-1} + z^k \varphi(z,k)$, $\varphi(z,k) \in A(D)$, причем любая собственная функция оператора L совпадает с точностью до постоянного множителя с одной из функций $y(z,k)$.

Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}, \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k y(z,k), \quad (12)$$

с одной и той же последовательностью коэффициентов $\{a_k\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, где область D совпадает со всей комплексной плоскостью. Пусть все собственные значения оператора L_1 различны. Пусть, кроме того, радиус сходимости ряда (11) отличен от 0. Тогда

1. Ряд (12) сходится в $A(K)$, где K - круг сходимости ряда (11).

2. Обозначим через $f(z)$ и $g(z)$ функции, представляемые в окрестности 0 рядами (11) и (12) соответственно, через D_f и D_g звезды Миттаг-Леффлера функций $f(z)$ и $g(z)$. Тогда $D_f = D_g$ и $g_{\delta}(z) \rightarrow g(z)\delta \rightarrow +0$ в

$$A(D_g), \text{ где } g_{\delta}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1+(k-1)\delta)} y(z,k).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рындина В.В. Об эквивалентности дифференциального оператора n -го порядка с регулярной особой точкой и оператора Эйлера в пространстве $A(G)$ // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 3. С. 674 - 678.

2. Еремин М.С. Оператор преобразования в звездообразной области решений некоторых интегро-дифференциальных уравнений высших порядков. Минск, 1990. 49 с. Деп. в ВИНИТИ 07.05.90, № 2381 - В90.

Н. И. Клинов, О. П. Крайнова

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ДЛЯ БЛИЗНЕЦОВ

Получено упрощенное доказательство оценки сверху в проблеме обобщённых близнецов с достаточно хорошим значением коэффициента $A=16$, при достаточно больших значениях основного переменного: при целом u , $2 \leq |u| \leq x$, при p, p' – простых

$$J_u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \leq x, |p+u|=p'} 1 \leq A \prod_{p/u, p>2} \frac{p}{p-1} \frac{x}{\ln^2 x} \left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln \ln x)^2}\right) \right). \quad (1)$$

В монографии Прахара [1, с. 60, теорема 4.4] та же оценка, но без указания численного значения коэффициента A получена применением метода решета Сельберга с привлечением довольно громоздких преобразований [1, с. 54 - 59 или 2].

Доказательство опирается на работу Н. И. Клинова, Г. З. Пильтая, Т. А. Шептицкой [3, теорема 1, с. 44 - 45], основанную на методе решета Сельберга с привлечением обобщения функции число делителей, в которой коэффициент $A=18,9$ при $x \geq e^{480}$.

Лучшая оценка с коэффициентом $A=10,6$ получена в кандидатских диссертациях И.В. Чулановского (элементарным методом) и Н.И. Клинова (с применением аналитического метода), опубликованных в работе [4] (без доказательства) и в работе [5]. Работы сложные.

Такая же оценка, как в неравенстве (1), верна для числа решений в простых числах уравнений $p+p'=N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М., 1967.
2. *Brisse E.* Estimation superieure du nombre des nombres premiers contenus dans les progressions arithmetiques par la methode du crible de Selberg // Seminar theor. Nombres Delange - Pisot. Fac. Sci. Paris, 1962. № 5. P. 1 - 20.
3. *Клинов Н.И., Пильтай Г.З., Шептицкая Т.А.* Оценка абсолютной постоянной в проблеме Гольдбаха-Шнирельмана // Исследования по теории чисел. Саратов, 1972. Вып. 4. С. 35 - 51.
4. *Чулановский И.В.* Некоторые оценки, связанные с новым методом Сельберга в элементарной теории чисел // ДАН. 1948. Т. 63, № 5. С. 491 - 494.
5. *Клинов Н.И.* Комбинирование элементарного и аналитического методов в теории чисел // УМН. 1958. Т. 13, вып. 3. С. 145 - 164.

В. В. Корнев

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КВАТЕРНИОНАХ¹

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0, \quad (1)$$

где $\underline{x}(t)$ - неизвестная функция вещественного переменного t , значениями которой являются кватернионы $\underline{x} = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$; p, q - заданные кватернионы.

Для нахождения решений (1) можно применить классический метод Эйлера [1], согласно которому частные решения ищутся в виде $\underline{x}(t) = e^{\lambda t}$.

Кватернионная экспонента $e^{\lambda t}$, определяемая рядом

$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \dots + \frac{1}{n!}(\lambda t)^n + \dots$, обладает теми же свойствами, что и обычная

экспонента: $e^{\lambda t} \neq 0$, $\frac{de^{\lambda t}}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$, $\frac{d^2e^{\lambda t}}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$. При подстановке $\underline{x}(t) = e^{\lambda t}$ в

уравнение (1) получается кватернионный аналог характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (2)$$

Теорема 1. Уравнение (2) всегда имеет решение, и число различных решений не может быть больше двух.

Доказательство теоремы 1 заключается в исследовании системы из четырех скалярных нелинейных уравнений, эквивалентной уравнению (2). В практическом плане нахождение решений уравнения (2) в общем случае сводится к нахождению единственного положительного корня скалярного кубического уравнения.

Теорема 2. Если уравнение (2) имеет два различных корня λ_1 и λ_2 , то общее решение (1) имеет вид

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda_1 t} \underline{c}_1 + e^{\lambda_2 t} \underline{c}_2, \quad (3)$$

где $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ - произвольные кватернионы.

Если λ - единственный корень характеристического уравнения (2), то общее решение определяется формулой

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(c_1 + \int_0^t e^{-\lambda \tau} e^{-(\lambda + p)\tau} d\tau \cdot c_2 \right). \quad (4)$$

Замечание. Интеграл в (4) вычисляется в явном виде и представляет собой линейную комбинацию функций вида $e^{\alpha t} \sin \beta t$, $e^{\alpha t} \cos \beta t$, $e^{\alpha t} t \sin \beta t$ и $e^{\alpha t} t \cos \beta t$ (α, β - вещественные числа, выражаемые через компоненты кватернионов p и q). Важно отметить, что под интегралом в формуле (4) нельзя складывать показатели степеней, так как произведение кватернионов не коммутативно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плотников П.К., Сергеев А.Н., Челноков Ю.Н. Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. Инж. журн. Механика твердого тела. 1991. № 5. С. 9 - 18.

УДК 517.984

К. В. Кравченко

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА¹

Введение

Обратная задача спектрального анализа заключается в определении операторов по некоторым их спектральным характеристикам и играет важную роль в различных областях естествознания. Наиболее полные результаты в теории обратных задач известны для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля с двухточечными краевыми условиями [1, 2]. Известно, в частности, что задание спектральной функции или, что то же самое, функции Вейля однозначно определяет оператор. Основным инструментом исследования при этом являлся оператор преобразования.

В настоящей работе изучаются дифференциальные операторы с нелокальными краевыми условиями. Прямые задачи спектральной теории для таких операторов достаточно полно исследованы [3, 4]. В теории же обратных задач автору известна лишь работа [5]. Как следует из Контрпримера 1, в случае нелокальных краевых условий задания функции Вейля уже недостаточно для однозначного определения потенциала. Таким образом, открытым является даже вопрос о постановке обратной задачи. Кроме того, для иссле-

¹ Работа выполнена при частичной поддержке Саратовского Международного Центра Перспективных Исследований, грант № 99-1-01.

дования таких дифференциальных операторов не подходит метод оператора преобразования. В статье даются постановки обратной задачи по функции Вейля и дополнительным спектральным характеристикам. Получены соответствующие теоремы единственности решения. Построены контрпримеры, показывающие существенность введения новых, по сравнению с классическим случаем, данных и ограничений. При рассуждениях используется метод, связанный с развитием идеи метода контурного интеграла, З.Л. Лейбензона [6] и В.А. Юрко [7].

1. Дифференциальные операторы с "разделенным" спектром

Рассмотрим дифференциальное уравнение (ДУ) и линейные формы вида:

$$ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y; \quad 0 \leq x \leq T < \infty, \quad (1)$$

$$U_j(y) \equiv H_j y'(0) + h_j y(0) + \int_0^T y'(t) d\sigma_j(t); \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь $q(x) \in L(0, T)$ - комплекснозначная суммируемая функция; $\sigma_j(t)$ - непрерывные справа заданные комплекснозначные функции, имеющие ограниченную вариацию, а H_j, h_j - известные комплексные числа, причем $H_1 \neq 0$.

Условимся в обозначениях. Если рассматривается некоторый дифференциальный оператор l , то наряду с ним рассматривается оператор \tilde{l} того же самого вида, но с другой функцией $\tilde{q}(x)$ в ДУ. Если некоторый символ ϕ обозначает объект, относящийся к оператору l , то $\tilde{\phi}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к \tilde{l} .

Пусть функция $\Phi(x, \lambda)$ является решением ДУ(1) при следующих условиях

$$U_1(\Phi) = 1, \quad V(\Phi) = 0, \quad (3)$$

где $V(y) \equiv y'(T)$. Обозначим $m(\lambda) = U_2(\Phi)$. Функцию $\Phi(x, \lambda)$ будем называть решением Вейля, а функцию $m(\lambda)$ - функцией Вейля для (1)-(2).

Рассмотрим фундаментальную систему решений ДУ (1) $X_k(x, \lambda)$; $k = 1, 2$ при условиях $X_1(0, \lambda) = X'_2(0, \lambda) = 1$; $X'_1(0, \lambda) = X_2(0, \lambda) = 0$. Обозначим

$$\omega(\lambda) = \det \begin{bmatrix} U_2(X_k) \\ U_1(X_k) \end{bmatrix}_{k=1,2}; \quad \Delta_j(\lambda) = \det \begin{bmatrix} V(X_k) \\ U_j(X_k) \end{bmatrix}_{k=1,2}, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Предполагаем, что $\omega(\lambda) \neq 0$. Нули $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$; $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 0}$, $j = 1, 2$ целых аналитических по λ функций $\omega(\lambda)$, $\Delta_j(\lambda)$ совпадают соответственно с собственными значениями краевых задач L_j ; $j = 0, 1, 2$ для ДУ (1) с краевыми условиями $U_1(y) = U_2(y) = 0$; $U_j(y) = V(y) = 0$. Ясно, что

$$m(\lambda) = \Delta_2(\lambda) / \Delta_1(\lambda). \quad (5)$$

Определение 1. Будем говорить, что соблюдается условие "разделенности" спектров S , если

$$\{\xi_n\}_{n \geq 0} \cap \{\lambda_{k1}\}_{k \geq 0} = \emptyset, \quad (6)$$

то есть краевые задачи L_0 и L_1 не имеют общих собственных значений.

Обратную задачу поставим следующим образом

Задача 1. Пусть выполняется условие S . По заданным функциям $m(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ требуется определить потенциал $q(x)$.

Замечание 1. В случае распадающихся краевых условий, когда $\sigma_j(t) \equiv \text{const}$, введенная в работе функция Вейля совпадает с классической функцией Вейля, условие "разделенности" спектров выполняется автоматически, а $\omega(\lambda) \equiv \text{const} \neq 0$.

Поставленная задача 1 имеет единственное решение и справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняется условие S . Если $m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)$, $\omega(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda)$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $[0, T]$.

2. Контрпримеры

Покажем, что в общем случае, даже при соблюдении условия S , функции Вейля недостаточно для однозначного определения потенциала. Пусть линейные формы имеют вид $U_1(y) \equiv y'(0)$; $U_2(y) \equiv y'(a)$, где $0 < a < T$. Следующие утверждения очевидны.

ЛЕММА 1. 1) если $q(x) = \tilde{q}(T - x)$, $0 \leq x \leq T$, то $\Delta_1(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_1(\lambda)$;

2) если $q(x) = \tilde{q}(T + a - x)$, $a \leq x \leq T$, то $\Delta_2(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_2(\lambda)$;

3) если $q(x) = \tilde{q}(a - x)$, $0 \leq x \leq a$, то $\omega(\lambda) \equiv \tilde{\omega}(\lambda)$.

ЛЕММА 2. Если λ^* - общее собственное значение двух каких-либо краевых задач из L_j , $j = 0, 1, 2$, то это λ^* является собственным значением и третьей краевой задачи, то есть:

1) если $\Delta_1(\lambda^*) = \omega(\lambda^*) = 0$, то $\Delta_2(\lambda^*) = 0$;

2) если $\Delta_1(\lambda^*) = \Delta_2(\lambda^*) = 0$, то $\omega(\lambda^*) = 0$;

3) если $\Delta_2(\lambda^*) = \omega(\lambda^*) = 0$, то $\Delta_1(\lambda^*) = 0$.

Контрпример 1. Выберем функцию $q(x) \neq q(T - x)$ так, чтобы $q(x) \equiv 0$ при $x \in [0, a_0] \cup [T - a_0, T]$, где $0 < a_0 < T/4$, а в остальном произвольную. Покажем, что найдется $a \in (T - a_0, T)$ такое, что будет выполняться условие "разделенности" спектров. В самом деле, собственные значения задачи L_2 известны $\sqrt{\lambda_{k2}} = k\pi/(T - a)$; $k \geq 0$, а собственные значения λ_{nl} задачи L_1 не зависят от выбора a . Рассмотрим счетное множество $A = \{a : a = T - \pi k / \sqrt{\lambda_{nl}} ; n, k = 0, 1, 2, \dots\}$. Очевидно существует $a \in (T - a_0, T)$ такое, что $a \notin A$. Для этого $\{\lambda_{nl}\}_{n \geq 0} \cap \{\lambda_{k2}\}_{k \geq 0} = \emptyset$, и значит, с учетом леммы 2, соблюдается условие S .

Пусть функция $\tilde{q}(x) \equiv q(T-x)$, тогда $\Delta_2(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_2(\lambda)$, $\Delta_1(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_1(\lambda)$. Иными словами, при соблюдении условия "разделенности" спектров $m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)$, а функции $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ различны.

Построим, теперь, Контрпример 2, в $m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)$, $\omega(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda)$ а функции $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ различны. Иначе говоря, покажем, что при отсутствии априорных ограничений на спектр, задания функций $m(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ уже недостаточно для единственности решения обратной задачи.

Контрпример 2. Зафиксируем $a = T/2$ и рассмотрим $q(x) \neq q(T-x)$ с периодом $T/2$, то есть $q(x) \equiv q(x + T/2)$ при $0 \leq x \leq T/2$.

Пусть $\tilde{q}(x) \equiv q(T-x)$, тогда $\omega(\lambda) \equiv \tilde{\omega}(\lambda) \equiv \Delta_2(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_2(\lambda)$, $\Delta_1(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_1(\lambda)$. То есть в $m(\lambda) \equiv \tilde{m}(\lambda)$, $\omega(\lambda) \equiv \tilde{\omega}(\lambda)$ а функции $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ различны.

3. Случай произвольного поведения спектра

Введем следующие решения ДУ(1)

$$\phi(x, \lambda) = \det \begin{bmatrix} X_k \\ U_1(X_k) \end{bmatrix}_{k=1,2}; \quad \psi(x, \lambda) = \det \begin{bmatrix} X_k \\ U_2(X_k) \end{bmatrix}_{k=1,2}. \quad (7)$$

Определитель Вронского $\langle \phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda) \rangle = -\omega(\lambda)$ и, следовательно, в точках $\lambda = \xi_n$ - нулях функции $\omega(\lambda)$ решения $\phi(x, \xi_n)$ и $\psi(x, \xi_n)$ линейно зависимы, то есть

$$A_n \psi(x, \xi_n) = B_n \phi(x, \xi_n). \quad (8)$$

Для простоты будем предполагать, что $\omega(\lambda)$ не имеет кратных нулей. Обозначим $A = \{n : \phi(x, \xi_n) \neq 0\}$. Для $n \in A$ определим $C_n = B_n / A_n$.

При отсутствии априорных ограничений на спектр обратная задача ставится следующим образом

Задача 2. По заданным спектральным характеристикам $m(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ и $D = \{C_n\}_{n \in A}$ требуется определить потенциал $q(x)$.

Замечание 2. Если в некоторой точке $\lambda = \xi_n$, $n \in A$ выполняется условие "разделенности" спектров, то $C_n = m(\xi_n)$. Иначе говоря, при соблюдении условия S множество D однозначно определяется заданием функций $m(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$.

Поставленная выше задача 2 имеет единственное решение и справедлива

Теорема 2. Пусть $m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)$, $\omega(\lambda) = \tilde{\omega}(\lambda)$ и пусть, кроме того $D = \tilde{D}$, тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $[0, T]$.

Подробное доказательство сформулированных утверждений см. в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977.
2. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1982. Вып. 6. С. 15 - 58.
4. Кабанов С.Н. Теоремы равносходимости для операторов с краевыми условиями общего вида :Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1991. 132 с.
5. Типенко Г.С. О единственности обратной задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. М., 1984. 28 с. Деп. ВИНИТИ 22.08.84, № 5961- 84.
6. Лейбензон З.Л. Обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков // Тр. Моск. мат. о-ва. 1966. Т.15. С. 70 - 144.
7. Юрко В.А. Восстановление несамосопряженных дифференциальных операторов на полуоси по матрице Вейля // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 3. С. 431-456.
8. Кравченко К.В. О восстановлении дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями. Саратов, 1997. 80 с. Деп. в ВИНИТИ 22.09.97, №2885-В97.

УДК 517.984

П. М. Кудишин

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОСОБЕННОСТЬЮ¹

Рассмотрим дифференциальное уравнение и линейные формы $L = (\ell, V_p)$ вида

$$\ell y \equiv y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{v_j}{x^{n-j}} + q_j(x) \right) y^{(j)} = \lambda y, \quad 0 < x < T \quad (1)$$

$$V_p(y) \equiv y^{(n-p)}(T) + \sum_{j=0}^{n-p-1} v_{p,j} y^{(j)}(T), \quad p = \overline{1, n-1}.$$

Пусть μ_1, \dots, μ_n - корни характеристического многочлена

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566 и Саратовского международного центра перспективных исследований № 99-1-01.

$$\delta(\mu) = \sum_{j=0}^n v_j \prod_{k=0}^{j-1} (\mu - k), \quad v_n = 1, v_{n-1} = 0.$$

Для определенности будем считать, что $\mu_k - \mu_j \neq sn$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); $\operatorname{Re} \mu_1 < \dots < \operatorname{Re} \mu_n$. Обозначим $\vartheta_{v,j} := n - 1 - \operatorname{Re}(\mu_n - \mu_1) - j + v$, и предположим, что функции $q_j^{(v)}(x)$, $v = \overline{0, j-1}$, абсолютно непрерывны на $[\alpha, T]$ для любого $\alpha > 0$ и $q_j^{(v)}(x)x^{\vartheta_{v,j}} \in L(0, T)$, $v = \overline{0, j}$. При выполнении этих условий будем говорить, что $L = (\ell, V_p) \in U$.

Решениями Вейля будем называть функции $\Phi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, n}$, являющиеся решениями дифференциального уравнения (1) при условиях

$$\Phi_k(x, \lambda) \sim c_{k0} x^{\mu_k}, \quad x \rightarrow 0; \quad V_p(\Phi_k(x, \lambda)) = 0, \quad p = \overline{1, n-k}.$$

Функции $\Phi_k(x, \lambda)$ являются мероморфными по λ со счетным множеством полюсов $\Lambda_k = \{\lambda_{lk}\}_{l \geq 1}$. Начиная с некоторого все полюса простые.

Обозначим

$$\Phi(x, \lambda) = [\Phi_1(x, \lambda), \dots, \Phi_n(x, \lambda)]^T, \quad \Lambda := \bigcup_{k=1}^{n-1} \Lambda_k.$$

В дальнейшем, если при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ некоторая функция

$$F(\lambda) = \sum_{k=-q}^p \alpha_k (\lambda - \lambda_0)^k + o((\lambda - \lambda_0)^p),$$

то $F_{<k>}(\lambda_0) := [F(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}^{<k>} := \alpha_k$.

Пусть λ_0 является полюсом решений Вейля $\Phi(x, \lambda)$ кратности не более чем N . Тогда существует единственный набор матриц $M_{-k-l,p}(\lambda_0)$, $k, p = \overline{0, N-1}$, порядка n , такой, что справедлива формула

$$\Phi_{<-p-l>}(x, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{N-1} M_{-k-l,p}(\lambda_0) \Phi_{<k>}(x, \lambda_0), \quad p = \overline{0, N-1}, \quad x \in (0, T).$$

Обозначим через Λ_{mk} множество нулей функции

$$\Delta_{mk}(\lambda) = (-1)^{m-k} \det[V_p(S_i(x, \lambda))]_{p=\overline{1, n-m}; i=\overline{m, n \setminus k}},$$

где функции $S_i(x, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (1), причем при каждом $x > 0$ они являются целыми по λ и $S_i(x, \lambda) \sim c_{i0} x^{\mu_i}$, $x \rightarrow 0$.

Будем говорить, что $L \in U'$, если $L \in U$ и $\bigcap_{k=m}^n \Lambda_{mk} = \emptyset$, $m = \overline{1, n-1}$.

Определение. Спектральными данными для $L \in U'$ будем называть множество $M := \{\lambda_0, M_{-k-l,p}(\lambda_0)\}_{\lambda_0 \in \Lambda, k, p = \overline{0, N-1}}$.

Пусть $L, \tilde{L} \in U'$. При $\varepsilon, \varepsilon_0 = 0, 1; j, j_0 = \overline{1, n-1}; k, k_0 = \overline{0, N-1}$,
 $l, l_0, \alpha, \alpha_0 = 1, 2, 3, \dots; x, \delta \in (0, T), \lambda \in \Lambda$, положим

$$\xi_l := l^{-n+1} \sum_{m=1}^{n-1} \left(|\lambda_{lm} - \tilde{\lambda}_{lm}| + l^{\operatorname{Re}(\tilde{\mu}_m - \tilde{\mu}_{m+1})} \left| \left[M_{-1,0}(\lambda_{lm}) \right]_{m,m+1} - \left[\tilde{M}_{-1,0}(\tilde{\lambda}_{lm}) \right]_{m,m+1} \right| \right)$$

$$Y := \left| \delta_{ji} \right|_{j=\overline{1, n-1}; i=\overline{0, n-1}},$$

$$M_{-k-1, k_0}^0(\lambda_0) = M_{-k-1, k_0}(\lambda_0), \quad M_{-k-1, k_0}^1(\lambda_0) = \tilde{M}_{-k-1, k_0}(\lambda_0),$$

$$\tilde{p}_r(x) = \tilde{v}_r x^{r-n} + \tilde{q}_r(x), r = \overline{0, n-2},$$

$$w_{lj}^\delta(x) := \begin{cases} l^{-\operatorname{Re} \tilde{\mu}_{j+1}} \exp\left(-xl \frac{\pi}{T} \operatorname{ctg} \frac{j\pi}{n}\right), & xl \geq \delta, \\ x^{\operatorname{Re} \tilde{\mu}_{j+1}}, & xl < \delta \end{cases}$$

$$w_{l0j}^\delta(x) := (\xi_l + l^{-n+1}) w_{lj}^\delta(x), \quad w_{l1j}^\delta(x) := w_{lj}^\delta(x), \quad \lambda_{l0j} = \lambda_{lj}, \quad \lambda_{l1j} = \tilde{\lambda}_{lj},$$

$$\tilde{G}_{k,k_0}^\varepsilon(x, z_0, \lambda_0) = -Y \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{i+j \leq n-1} \sum_{s=j}^{n-i-1} (-1)^s \binom{s}{j} \tilde{p}_{s+i+1}^{(s-j)}(x) \times$$

$$\times \left[\left[\frac{\tilde{\Phi}^{(i)}(x, \lambda) \tilde{\Phi}^{*(j)}(x, \mu)}{\lambda - \mu} \right]_{\mu=\lambda_0}^{<q>} \right]_{\lambda=z_0}^{<k>} M_{-k_0-1, q}^\varepsilon(\lambda_0) Y^T,$$

$$\tilde{g}_k^{*, \varepsilon}(x, \lambda_0) := - \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{\Phi}_{<p>}^*(x, \lambda_0) M_{-k-1, p}^\varepsilon(\lambda_0) Y^T, \quad \varphi_k(x, \lambda_0) := Y \Phi_{<k>}(x, \lambda_0),$$

$$\kappa_{vs} := \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\varepsilon=0}^1 (-1)^\varepsilon \left[\tilde{g}_k^{*, \varepsilon(v)}(x, \lambda_{l ej}) \right]_j \left[\varphi_k^{(s)}(x, \lambda_{l ej}) \right]_j, \quad v+s \leq n-1, \quad (2)$$

$$t_{jv}(x) := \sum_{\beta=v+1}^j \binom{j}{\beta} \binom{\beta-1}{v} \kappa_{\beta-v-1, j-\beta}(x), \quad j > v; \quad t_{jv}(x) := \delta_{jv}, \quad j \leq v, \quad (3)$$

$$\xi_v^0(x) := \sum_{s=0}^{n-v-1} \sum_{j=v+1}^{n-s} \left(\binom{j+s}{j} \binom{j-1}{v} \tilde{p}_{j+s}(x) \kappa_{j-v-1, s}(x) + \right.$$

$$\left. + \delta_{s0}(-1)^{j-v} \sum_{r=0}^{j-v+1} \binom{j-v-1}{r} \tilde{p}_j^{(j-v-1-r)}(x) \kappa_{r0}(x) \right), \quad v = \overline{0, n-2}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_v(x) := \xi_v^0(x) - \sum_{j=v+1}^{n-2} \varepsilon_j(x) t_{jv}(x), \quad v = \overline{0, n-2}, \quad (5)$$

$$[W_\delta(x)]_{\alpha, \alpha_0} := \delta_{l_0} \delta_{k_0} \delta_{j_0} \delta_{\varepsilon \varepsilon_0} w_{lj}^\delta(x), \quad [\tilde{\varphi}(x)]_\alpha := [\tilde{\varphi}_k(x, \lambda_{l ej})]_j,$$

$$[\tilde{G}(x)]_{\alpha, \alpha_0} := (-1)^{\varepsilon_0} [\tilde{G}_{k, k_0}^{\varepsilon_0}(x, \lambda_{l ej}, \lambda_{l_0, \varepsilon_0, j_0})]_{j, j_0},$$

$$[J]_{\alpha, \alpha_0} := \delta_{l, l_0} \theta_{\varepsilon, \varepsilon_0}, \quad \theta_{00} := \theta_{11} := 1, \quad \theta_{01} := -1, \quad \theta_{10} := 0,$$

$$\tilde{\Psi}_\delta(x) := (W_\delta(x))^{-1} J \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{H}_\delta(x) := (W_\delta(x))^{-1} J \tilde{G}(x) J^{-1} W_\delta(x),$$

$$A_j(\lambda_0) := \begin{bmatrix} [M_{-p-1,s}(\lambda_0)]_{1,n-j+1} & \cdots & [M_{-p-1,s}(\lambda_0)]_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [M_{-p-1,s}(\lambda_0)]_{n-j,n-j+1} & \cdots & [M_{-p-1,s}(\lambda_0)]_{n-j,n} \end{bmatrix}_{s,p=\overline{0,N-1}},$$

где $\tilde{\varphi}(x), \tilde{\Psi}_\delta(x)$ - бесконечные вектор-столбцы, $W_\delta(x), \tilde{G}(x), J, \tilde{H}_\delta(x)$ - бесконечные матрицы при каждом фиксированном $x \in (0, T)$ и $\delta > 0$, а α и ε, j, k, l связаны соотношениями

$$\alpha = \varepsilon + 1 + 2(j-1) + 2(n-1)k + 2(n-1)N(l-1),$$

$$l = \left[\frac{\alpha}{2(n-1)N} \right] + 1, \quad k = \left[\frac{\alpha - 2(n-1)N(l-1)}{2(n-1)} \right],$$

$$j = \left[\frac{\alpha - 2(n-1)k - 2(n-1)N(l-1)}{2} \right] + 1,$$

$$\varepsilon = \alpha - 1 - 2(j-1) - 2(n-1)k - 2(n-1)N(l-1),$$

где $[.]$ - целая часть выражения в скобках. Аналогичные связи имеют место для α_0 и $\varepsilon_0, j_0, k_0, l_0$.

Пусть Ω - множество наборов $M = \{\lambda_0, M_{-k-1,p}(\lambda_0)\}_{\lambda_0 \in \Lambda, k, p = \overline{0, N-1}}$,

где Λ, N - свои для каждого набора M , Λ - счетное множество, $M_{-k-1,p}(\lambda_0)$

- матрицы порядка n такие, что

$$1) [M_{-k-1,p}(\lambda_0)]_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, i},$$

$$2) \operatorname{rank} A_j(\lambda_0) \leq N, \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$3) \text{существует } \lambda^+ \text{ такое, что для любых } \lambda_0 \in \Lambda, |\lambda_0| > \lambda^+$$

$$M_{-k-1,p}(\lambda_0) = 0, \quad k = \overline{1, N-1}; \quad p = \overline{0, N-1}, \quad M_{-1,p}(\lambda_0) = 0, \quad p = \overline{1, N-1},$$

$$4) \text{при } q, j = \overline{0, N-1}, r = \overline{-2N, -2}, \lambda_0 \in \Lambda$$

$$\sum_{p=\max\{-N, r+1\}}^{\min\{-1, N+r\}} M_{pq}(\lambda_0) M_{-j-1, p-r-1}(\lambda_0) + M_{r-j, q}(\lambda_0) - M_{-j-1, q-r-1}(\lambda_0) = 0,$$

$$5) \text{для любого } \lambda_0 \in \Lambda_m \text{ существуют } p_0, j_0 \text{ такие, что } 0 \leq p_0 \leq N-1, \\ m+1 \leq j_0 \leq n, [M_{-p_0-1, K_{mm}(\lambda_0)}(\lambda_0)]_{m, j_0} \neq 0, \text{ где } \Lambda_m := \{\lambda_0 \in \Lambda : K_{mm}(\lambda_0) := \\ := \operatorname{rank} A_{n-m}(\lambda_0) > 0\}, \quad m = \overline{1, n-1}.$$

ТЕОРЕМА. Для того чтобы набор $M \in \Omega$ был спектральными данными для $L \in U'$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) (асимптотика) существует $\tilde{L} \in U'$ такое, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \xi_l l^{n-1} < +\infty;$$

2) (условие P) при каждом фиксированном $x \in (0, T]$ и $\delta > 0$ линейный ограниченный оператор $E + \tilde{H}_\delta(x)$, действующий из m в m , имеет ограниченный обратный, где m - пространство ограниченных последовательностей;

3) $\varepsilon_j^{(v)}(x), v = \overline{0, j-1}$, абсолютно непрерывны на $[\alpha, T]$ для любого $\alpha > 0$, и $\varepsilon_j^{(v)}(x)x^{\theta_{v,j}} \in L(0, T)$, $v = \overline{0, j}$, где функции $\varepsilon_j(x)$ строятся по формулам (2) - (5), а $\phi(x) = J^{-1}W_{T/2}(x)(E + \tilde{H}_{T/2}(x))^{-1}\tilde{\psi}_{T/2}(x)$.

УДК 517.948.35

В. П. Курдюмов

**БАЗИСНОСТЬ РИССА
СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ,
ИМЕЮЩИМ РАЗРЫВЫ НА ЛИНИЯХ $t = x$ И $t = 1 - x$ ¹**

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^1 A(x, t)f(t)dt, \quad x \in [0, 1]. \quad (1)$$

Предполагается, что A^{-1} существует и

$$A(x, t) = \alpha_1 A_1(x, t)\varepsilon(x, t) + \alpha_2 A_2(x, t)\varepsilon(t, x) + \\ + \alpha_3 A_3(1-x, t)\varepsilon(1-x, t) + \alpha_4 A_4(1-x, t)\varepsilon(t, 1-x),$$

где $\varepsilon(x, t) = 1$ при $x \geq t$ и $\varepsilon(x, t) = 0$ при $x < t$. Также предполагается, что $A_i(x, t) = 1 + B_i(x, t)$, $B_i(x, t)$ непрерывны вместе со своими частными производным по x , по t и второй смешанной производной;

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} B_i(x, t)|_{t=x} = 0; \quad i = \overline{1, 4}; \quad k = 0, 1; \quad \delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \neq 0$$

Таким образом, ядро $A(x, t)$ является гладким всюду, кроме линий $t = x$ и $t = 1 - x$, а на последних $A(x, t)$ допускает разрывы первого рода.

Проблемами обращения операторов вида (1), исследованию конечномерных возмущений таких операторов, равносходимости разложений по корневым векторам и в обычный тригонометрический ряд посвящены работы А.П. Хромова [1 - 3]. Исследованию базисности Рисса корневых векторов не-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.

которых частных случаев операторов вида (1) посвящены работы автора [4, 5]. Для интегральных операторов с ядрами, имеющими разрыв производной некоторого порядка лишь на диагонали $t = x$, такие исследования уже произведены, например, в работах автора [6, 7].

Обозначим

$$\gamma_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)\delta^{-1}, \quad \gamma_2 = (\alpha_3 - \alpha_4)\delta^{-1},$$

$$a = 1 + \gamma_1 A(0, +0) + \gamma_2 A(0, 1 - 0) + \int_0^1 A(0, t)R(t, 0)dt,$$

$$b = -\gamma_1 A(0, 1 - 0) - \gamma_2 A(0, +0) - \int_0^1 A(0, t)R(t, 1)dt,$$

где $R(x, t) = \gamma_1 S(x, t) + \gamma_2 S(x, 1 - t)$,

$S(x, t)$ - ядро оператора S , определенного соотношением $(E + S_\beta)^{-1} = E + S$,

$$S_\beta = Q\tilde{S}_\beta, \quad Qf(x) = \delta^{-1}\{(\alpha_1 - \alpha_2)f(x) + (\alpha_3 - \alpha_4)f(1 - x)\},$$

$$\tilde{S}_\beta f(x) = \int_0^1 \tilde{S}_\beta(x, t)f(t)dt, \quad \tilde{S}_\beta(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}A(x, t) + \beta A(x, t), \quad \beta \text{ - число, определенное}$$

теоремой 1 из [1], E - единичный оператор.

ТЕОРЕМА. Если $\gamma_2(b\gamma_2 + \alpha\gamma_1 \pm \delta^{-1/2}a) + ab\delta_{0, \gamma_2} \neq 0$ ($\delta_{0, \gamma_2} \neq 0$ только при $\gamma_2 = 0$), то корневые векторы оператора A образуют базис Рисса в $L_2[0, 1]$.

Отметим, что доказательство сводится к установлению аналогичного утверждения для интегро-дифференциального оператора L в векторном пространстве $L_2^2[0, 1/2]$ со скалярным произведением

$$\langle y, z \rangle = \int_0^{1/2} (y^1(t)\overline{z^1(t)} + y^2(t)\overline{z^2(t)})dt, \quad y(t) = (y^1(t), y^2(t))^T, \quad z(t) = (z^1(t), z^2(t))^T,$$

T - знак транспонирования. Для этого оператора L выводятся асимптотические формулы для его собственных значений λ_m , строится асимптотическое представление резольвенты $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ и устанавливается два важных свойства:

$$1) \left\| \sum_{m \in J} \int_{C(\lambda_m)} R_\lambda d\lambda \right\|_1 \leq K, \quad \text{где } K \text{ не зависит от } J, \quad J \text{ - произвольный ко-}$$

нечный набор целых попарно различных чисел, $C(\lambda_m)$ - достаточно малый контур, охватывающий λ_m и не охватывающий других его собственных значений, $\|\cdot\|_1$ - норма в пространстве $L_2^2[0, 1/2]$.

2) ни один ненулевой вектор $f \in L_2^2[0, 1/2]$ не удовлетворяет условиям
 $E(\lambda_m)f = 0$ для всех $\lambda_m \in \sigma(L)$, где $E(\lambda_m) = (-2\pi i)^{-1} \int_{C(\lambda_m)} R_\lambda d\lambda$, $\sigma(L) -$
спектр оператора L , $C(\lambda_m)$ - то же, что и в свойстве 1).

Эти свойства позволяют установить утверждение теоремы для оператора L , а затем и для оператора A .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 9-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1997. С. 162.
2. Хромов А.П. Одномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов с ядрами, имеющими особенности на диагоналях // Воронеж. весенняя мат. шк. «Понtryгинские чтения» :Тез. докл. Воронеж, 1997. С. 160.
3. Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Воронеж. весенняя мат. шк. «Понtryгинские чтения» :Тез. докл. Воронеж, 1998. С. 208.
4. Курдюмов В.П. О базисности Рисса корневых векторов интегральных операторов с разрывными ядрами // Современные проблемы теории функций и их приложения :Тез. докл. 9-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1997. С. 96.
5. Курдюмов В.П. Теорема о базисности Рисса корневых векторов одного класса интегральных операторов // Воронеж. весенняя мат. шк. «Понtryгинские чтения» :Тез. докл. Воронеж, 1998. С.180.
6. Курдюмов В.П. О базисности по Риссу корневых векторов интегрального оператора с ядром типа функции Грина // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов, 1976. Вып. 6, ч. II. С. 25 - 43.
7. Курдюмов В.П. Необходимые и достаточные условия оптимальности для дифференциально-операторного уравнения. Саратов, 1985. 35 с. Деп. в ВИНИТИ 02.07.85, № 4781.

Ю. В. Курышова

**ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ¹**

Рассмотрим следующие краевые задачи $L_i = L_i(q, M)$:

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x,t)y(t)dt = \lambda y, \quad (1)$$

$$y(0) = y^{(i-1)}(\pi) = 0, \quad i=1,2 \quad (2)$$

Здесь $x \in [0, \pi]$, $q(x) \in L_2(0, \pi)$, $M(x, t)$ интегрируемая на $(0, \pi) \times (0, x)$

функция. Полагаем $\int_0^\pi q(x)dx = 0$. Обозначим через $\{\lambda_{ni}\}_{n=1}^\infty$ собственные значения (С3) задачи L_i . В настоящей статье исследуется обратная задача восстановления потенциала q по двум спектрам задач L_i (функция M полагается известной).

Краевая задача $L_i^* = L_i^*(q, M)$:

$$\ell^* z \equiv -z'' + q(x)z + \int_0^\pi M(t, x)z(t)dt = \lambda z \quad (3)$$

$$z(0) = z^{(i-1)}(\pi) = 0, \quad (4)$$

называется сопряжённой к задаче L_i .

Пусть $S(x, \lambda)$ есть решение уравнения (1) с начальными условиями $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$, а $S^*(x, \lambda)$, $C^*(x, \lambda)$ решения уравнения (3) с начальными условиями $S^*(\pi, \lambda) = 0$, $S^{*\prime}(\pi, \lambda) = -1$ и $C^*(\pi, \lambda) = 1$, $C^{*\prime}(\pi, \lambda) = 0$.

Введём функции $\{\xi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ по следующим формулам

$$\xi_{2n}(x) = 1 - \frac{2\lambda_{n1}}{b_{n1}} S^*(x, \lambda_{n1})S(x, \lambda_{n1}), \quad \xi_{2n-1}(x) = 1 - \frac{2\lambda_{n2}}{b_{n2}} C^*(x, \lambda_{n2})S(x, \lambda_{n2}),$$

где числа b_{ni} определяются соотношениями

$$b_{n1}S^0(x, \mu_{n1}) = S^{0*}(x, \mu_{n1}), \quad b_{n2}S^0(x, \mu_{n2}) = C^{0*}(x, \mu_{n2}).$$

Функции S^0, S^{0*}, C^{0*} задаются аналогично функциям S, S^*, C^* , но для уравнений с $M \equiv 0$, а $\{\mu_{ni}\}_{n=1}^\infty$ собственные значения задач $L_i^0 = L_i(q, 0)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\{\lambda_{ni}\}_{n=1}^\infty$ - С3 краевых задач $L_i(q, M)$ и пусть функции $\{\xi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ω -линейно независимы в $L_2(0, \pi)$. Найдётся число $\delta > 0$ та-

¹ Работа выполнена при поддержке Саратовского международного центра перспективных исследований (СМЦПИ), грант № 99-1-01.

кое, что для чисел $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ выбранных из условия

$\Lambda := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n1} - \tilde{\lambda}_{n1}|^2 + |\lambda_{n2} - \tilde{\lambda}_{n2}|^2} < \delta$, существует функция \tilde{q} из $L_2(0, \pi)$

такая, что числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ являются СЗ задач $L_i(\tilde{q}, M)$, причём $\|\tilde{q} - q\|_{L_2} < C\Lambda$, где константа C зависит лишь от задач $L_i(q, M)$.

Схема доказательства. Система функций $\{\xi_n(x)\}_1^{\infty}$ является базисом Риса в $B = \text{span}\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, обозначим $\{\chi_n(x)\}_1^{\infty}$ биортогональный базис. Условимся для произвольной функции $H(x, \lambda)$ обозначать $H_{ni}(x) = H(x, \tilde{\lambda}_{ni})$.

Рассмотрим в $B_1 = \text{span}\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ интегральное уравнение

$$r(x) = f(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_j H_j(x, t_1, \dots, t_j) r(t_1) \dots r(t_j) dt_1 \dots dt_j, \quad (6)$$

здесь

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S(\pi, \tilde{\lambda}_{n1}) \chi_{2n}(x) + \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} S'(\pi, \tilde{\lambda}_{n2}) \chi_{2n-1}(x) \right), \\ H_j(x, t_1, \dots, t_j) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{b_{n1}} S_{n1}^*(t_1) G_{n1}(t_1, t_2) \dots G_{n1}(t_{j-1}, t_j) S_{n1}(t_j) \chi_{2n}(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{b_{n2}} C_{n2}^*(t_1) G_{n2}(t_1, t_2) \dots G_{n2}(t_{j-1}, t_j) S_{n2}(t_j) \chi_{2n-1}(x) \right). \end{aligned}$$

$G(x, t, \lambda)$ продолженная нулём функция Грина задачи Коши $\ell y = \lambda y$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Можно показать, что $\|f(x)\|_2 < C\Lambda$; $\|H_j(x, t_1, \dots, t_j)\|_2 < C_0^j$, ($j \geq 2$), где $\|\cdot\|_2$ - норма в $L_2(0, \pi)$. Существует фиксированное число $\delta > 0$ такое, что при $\Lambda < \delta$ уравнение (6) имеет единственное решение $r(x)$ в классе B_1 в шаре $\|r\| < 2\delta C$, причём $\|r\| < 2\|f\|$. Обозначим $\tilde{q}(x) := q(x) - r(x)$. Покажем, что

числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ образуют спектр задач $L_i(\tilde{q}, M)$,

$$\tilde{\ell}y \equiv -y'' + \tilde{q}(x)y + \int_0^x M(x, t)y(t)dt.$$

С этой целью рассмотрим уравнение

$$\tilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \int_0^{\pi} G_{ni}(x, t)r(t)\tilde{y}_{ni}(t)dt. \quad (7)$$

Решаем его методом последовательных приближений, получим

$$\tilde{y}_{ni}(x) = S_{ni}(x) - \varphi_{ni}(x), \quad (8)$$

где $\varphi_{ni}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_j G_{ni}(x, t_1) \dots G_{ni}(x, t_j) r(t_1) \dots r(t_j) dt_1 \dots dt_j.$

Тождество (6) равносильно некоторому уравнению вида $\ell y - \lambda y = p(x)$, из которого нетрудно получить

$$\tilde{\ell} \tilde{y}_{ni} = \tilde{\lambda}_{ni} \tilde{y}_{ni}(x), \quad \tilde{y}_{ni}(0) = 0; \quad \tilde{y}'_{ni}(0) = 1. \quad (9)$$

Используя (9) и (3), записанное для решений $S_{nl}^*(x)$ и $C_{n2}^*(x)$, получим

$$\int_0^{\pi} r(x) S_{nl}^*(x) \tilde{S}_{nl}(x) dx \equiv S_{nl}(\pi) - \tilde{y}_{nl}(\pi), \quad (10)$$

$$\int_0^{\pi} r(x) C_{n2}^*(x) \tilde{S}_{n2}(x) dx \equiv S'_{n2}(\pi) - \tilde{y}'_{n2}(\pi).$$

Далее, умножая тождество (6) на $\xi_n(x)$, интегрируя его по x от 0 до π , и учитывая при этом формулы (8), получим

$$\int_0^{\pi} r(x) S_{nl}^*(x) \tilde{S}_{nl}(x) dx \equiv S_{nl}(\pi) - \int_0^{\pi} r(x) dx, \quad (11)$$

$$\int_0^{\pi} r(x) C_{n2}^*(x) \tilde{S}_{n2}(x) dx \equiv S'_{n2}(\pi) - \int_0^{\pi} r(x) dx.$$

Сравнивая (10) и (11), имеем:

$$\tilde{y}_{nl}(\pi) = \int_0^{\pi} r(x) dx, \quad \tilde{y}'_{n2}(\pi) = \int_0^{\pi} r(x) dx. \quad (12)$$

Имеет место оценка $|\tilde{y}_{nl}(x)| < \frac{C}{n^2}$, следовательно, из (12) при $n \rightarrow \infty$ получим

$\int_0^{\pi} \tilde{q}(x) dx = 0$, и $\tilde{y}_{nl}(\pi) = 0$, $\tilde{y}'_{n2}(\pi) = 0$. Функции $\tilde{\Delta}_1(\lambda) := \tilde{y}_{nl}(\pi)$ и $\tilde{\Delta}_2(\lambda) := \tilde{y}'_{n2}(\pi)$ называются характеристическими для задач \tilde{L}_i , множество их нулей совпадает со спектрами. Из (12) имеем $\tilde{\Delta}_1(\tilde{\lambda}_{nl}) = \tilde{\Delta}_2(\tilde{\lambda}_{n2}) = 0$, следовательно, числа $\{\tilde{\lambda}_{ni}\}_1^\infty$ составляют спектр задач \tilde{L}_i . Теорема доказана.

**ОБ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ
ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА¹**

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$Ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x, \rho) y^{(k)} = 0, \quad P_k(x, \rho) = \sum_{i=k}^n \rho^{n-i} p_{ki}(x), \quad x \in (0, +\infty). \quad (1)$$

Полагаем, что p_{kk} - постоянные, $p_{ki}(x) \in L(0, \infty)$, $p_{k,k+1}(x)$ - абсолютно непрерывны, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{k+1, n}$.

Пусть $\{R_i\}_{i=1}^n$ - корни характеристического многочлена для (1), имеющего вид $F(R) = \sum_{k=0}^n p_{kk} R^k$, ($p_{nn} = 1$). Считаем, что $R_k - R_j \neq 0$, $k \neq j$ и $R_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$. Известно, что комплексную плоскость (ρ) можно разбить на N секторов так, что внутри каждого из них корни $\{R_i\}_{i=1}^n$ могут быть занумерованы следующим образом:

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n) \quad \forall \rho \in S_v. \quad (2)$$

Пусть функции $\Phi(x, \rho) = [\Phi_m(x, \rho)]_{m=\overline{1, n}}$ являются решениями (1) при условиях $U_{\xi 0}(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$, ($\xi = \overline{1, m}$), а также $\Phi_m(x, \rho) = O(e^{\rho R_m x})$, $x \rightarrow \infty$, $\rho \in S_v$, R_m занумерованы в порядке (2), где

$$U_{\xi 0}(y) = y^{(n-\xi)}(0) + \sum_{k=1}^{n-\xi} \rho^k u_{k\xi} y^{(n-k-\xi)}(0), \quad u_{k\xi} = \sum_{i=0}^k \frac{\beta_{k, k+1}^{(\xi)}}{\rho^i}, \quad \beta_{k, k+1}^{(\xi)} - \text{const.}$$

$U = \{U_{\xi 0}\}_{\xi=\overline{1, n}}$ - линейные формы для уравнения (1).

Обозначим $M_{mk}(\rho) = U_{k,0}(\Phi_m)$, $k = \overline{m+1, n}$. $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m, k = \overline{1, n}}$, $M_{mk}(\rho) = \delta_{mk}$, $k = \overline{1, m}$.

Условимся, что наряду с L рассматриваются дифференциальный оператор и линейные формы \tilde{L} того же вида, но с другими коэффициентами. Если некоторый символ φ обозначает объект, относящийся к L , то $\tilde{\varphi}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к \tilde{L} , а $\hat{\varphi} = \varphi - \tilde{\varphi}$.

В дальнейшем всегда считаем, что $p_{kk} = \tilde{p}_{kk}$.

¹ Работа выполнена при поддержке Саратовского международного центра перспективных исследований, грант № 99-1-01.

$$\text{Обозначим } \omega_\xi(R) = R^{n-\xi} \sum_{i=0}^{n-\xi} \frac{\beta_{ii}^{(\xi)}}{R_i}, \quad \Delta(p) = \det(\omega_\xi(R_k))_{\xi, k=\overline{1, p}}.$$

Наложим некоторые ограничения. Считаем, что для любого $p = \overline{1, n}$, $\Delta(p) \neq 0$. Это условие должно выполняться для любого сектора S_v с его собственной нумерацией корней $\{R_k\}_{k=\overline{1, n}}$.

Обозначим через W_η - множество функций $f(x)$, $0 \leq x \leq \infty$ таких, что $f(x), f'(x), \dots, f^{(\eta-1)}(x)$ - абсолютно непрерывны и $f^{(k)}(x) \in L(0, \infty)$, $k = \overline{0, \eta}$. Пусть $N \geq 2$ - фиксированное, целое число. Будем говорить, что $L \in Y_N$ если $p_{\eta, j}(x) \in W_{\eta+N}$, $j = \overline{\eta+1, n}$ при любом фиксированном ρ , $\eta = \overline{0, n-2}$. В дальнейшем считаем, что $L \in Y_N$.

Обозначим

$$\langle y(x, \rho), z(x, \rho) \rangle = \sum_{i,j=0}^{n-1} \Theta_{ij}(x, \rho) y^{(i)}(x, \rho) z^{(j)}(x, \rho),$$

$$\Theta_{ij}(x, \rho) = \sum_{s=j}^{n-i-1} (-1)^s C_s^j P_{s+i+1}^{(s-j)}(x, \rho), \quad i+j \leq n-1,$$

$$\Theta_{ij}(x, \rho) = 0, \quad i+j > n-1.$$

Рассмотрим сопряженные дифференциальный оператор и линейные формы $L^* = (I^*, U^*)$

$$I^* z \equiv z^{(n)} + \sum_{\eta=0}^{n-1} (-1)^{\eta} (P_\eta(x, \rho) z)^{(\eta)} = 0, \quad (3)$$

$$U_{\xi 0}^* = z^{(n-\xi)}(0) + \sum_{\eta=0}^{n-\eta-1} \rho^\eta u_{\xi \eta 0}^* z^{(\eta)}(0),$$

где линейные формы $U^* = [(-1)^{k-1} U_{n-k+1, 0}^*]_{k=\overline{1, n}}$ определяются из соотношения $\langle y, z \rangle_{x=0} = U(y)U^*(z)$.

Обозначим $\Phi^*(x, \rho) = [(-1)^{k-1} \Phi_{n-k+1}^*(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}^T$, где функции $\Phi_m^*(x, \rho)$ являются решениями (3) при условиях $U_\xi^*(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1, m}$, $\Phi_m^*(x, \rho) = O(e^{\rho R_m^* x})$, $x \rightarrow \infty$, $R_m^* = -R_{n-m+1}$.

Пусть $\tilde{L} = (\tilde{I}, \tilde{U})$ - некоторые известные дифференциальный оператор и линейные формы. Обозначим через $\xi_{v\pm}$ - верхний (нижний) берег разреза вдоль луча γ_v , $\Gamma_v^\pm = \{\rho : \rho \in \xi_v^\pm, \rho \notin \text{int } \gamma_0\}$ где γ_0 - ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda \cup \tilde{\Lambda}$. Рассмотрим в ρ -плоскости контур $\gamma = \bigcup_{v=1}^N \Gamma_v$, где $\Gamma_v = \Gamma_{v-1}^+ \cup \Gamma_v^- \cup \gamma_0^v$, γ_0^v часть контура γ_0 заключенная между лучами γ_{v-1} и γ_v .

Не уменьшая общности, в дальнейшем считаем, что $P_{n-1}(x, \rho) = 0$. Обозначим $c_{k,j} = \frac{b_k - b_j}{a_k - a_j}$ где $R_j = a_j + ib_j$, $k, j = \overline{1, n}$.

Введём следующие ограничения: для любых k, j, i : $c_{k,j} \neq c_{k,i}$, причем все индексы равноправны.

Обозначим $Y[\delta_{j,k-1}]_{j=\overline{1,n-1}, k=\overline{1,n}} = diag[M_{m,m+1}(\rho)]_{m=\overline{1,n-1}}$,

$$\tilde{A}_0(\rho) = \hat{M}(\rho)\tilde{M}^{-1}(\rho), \quad A_0(\rho) = \hat{M}(\rho)M^{-1}(\rho),$$

Определим матрицы $f(x, \rho) = [f_k(x, \rho)]_{k=\overline{2,n}}$,

$$f^*(x, \rho) = [(-1)^{k-1} f_{n-k+1}^*(x, \rho)]_{k=\overline{1,n-1}}^T, \text{ по формулам}$$

$$f_k(x, \rho) = \kappa_v(\rho)\Phi_k(x, \rho), \quad f_k^*(x, \rho) = \kappa_v^*\Phi_k^*(x, \rho),$$

где $\kappa_v = 0$ на γ_v если Φ_k имеет скачок на γ_v , $\kappa_v = 1$ на γ_v если Φ_k аналитична на γ_v . Аналогично определяются функции κ_v^* для Φ_k^* .

При $\rho \in \gamma$ положим $\alpha(\rho) = \prod_{v=1}^N \kappa_{+v} Y A_0(\rho) Y^T$, $N(\rho) = E + \frac{1}{2}\alpha(\rho)$,

$\tilde{\alpha}(\rho) = \prod_{v=1}^N \kappa_{+v} Y \tilde{A}_0(\rho) Y^T$, $\tilde{N}(\rho) = E + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}(\rho)$, где $\kappa_{+v}(\rho) = 1$ при $\rho \in \Gamma_v \cup \gamma_0$,

$$\kappa_{+v}(\rho) = 0 \text{ при } \rho \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^N \Gamma_v.$$

При $\rho, \mu \in \gamma$ определим матрицы $\phi(x, \rho) = [\phi_k(x, \rho)]_{k=\overline{2,n}}$,

$$\psi(x, \rho) = [\psi_k(x, \rho)]_{k=\overline{2,n}},$$

$$g^*(x, \rho) = [g_k^*(x, \rho)]_{k=\overline{2,n}}^T, \quad r(x, \rho, \mu) = [r_{k,j}(x, \rho, \mu)]_{k=\overline{2,n}, j=\overline{1,n}},$$

по формулам

$$\phi(x, \rho) = \begin{cases} Y\Phi(x, \rho), & \rho \in \gamma_0, \\ f(x, \rho), & \rho \in \bigcup_{v=1}^N \Gamma_v, \end{cases}$$

$$g^*(x, \rho) = \begin{cases} -\Phi^*(x, \rho) A_0(\rho) Y^T, & \rho \in \gamma_0, \\ -f^*(x, \rho) \hat{M}_{\partial}(\rho), & \rho \in \bigcup_{v=1}^N \Gamma_v, \end{cases}$$

$$\psi(x, \rho) = V^{(-1)}(x)\phi(x, \rho), \quad r(x, \rho, \mu) = \frac{\langle \phi(x, \rho), g^*(x, \mu) \rangle}{\rho - \mu},$$

где $V(x)$ - главная часть асимптотики определителя при $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\det(\tilde{\Phi}_k^{(n-1)}(x, \rho), \dots, \tilde{\Phi}_k'(x, \rho), \Phi_k(x, \rho))_{k=\overline{1,n}}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. При любом фиксированном $x > 0$, $\psi(x, \rho)$ является решением уравнения

$$\tilde{\phi}(x, \rho) = \tilde{N}(x, \rho)\psi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \rho, \mu) \psi(x, \mu) d\mu \quad \rho \in \gamma.$$

Решая это уравнение и проводя дополнительные исследования, находим $\{\eta_k(x, \rho)\}_{k=1, n}$, где $\eta_k(x, \rho) = V^{-1}(x)\Phi_k(x, \rho)$, $k = \overline{1, n}$.

Обозначим $\Delta = \det(\eta_k^{(j)}(x, \rho))_{k=\overline{1, n}, j=\overline{n-1, 0}}$. Введем определители Δ_j получающиеся из определителя Δ заменой j -го столбца ($j = \overline{1, n}$) на столбец

$$\eta = [-\eta_k^{(n)}(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}.$$

Далее, последовательно находим

$$P_k(x, \rho) = \frac{\Delta_{n-k}}{\Delta} - \sum_{i=k+1}^n C_i^k P_i(x, \rho) \frac{V^{(i-k)}(x)}{V(x)}, \quad k = \overline{n-2, 0}.$$

Что и решает задачу определения дифференциального уравнения.

УДК 519.6

И. Д. Молоденкова

ПРИЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ОСРЕДНЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

В работах [1, 2] осредняющие операторы типа свертки применяются для выделения информативной составляющей экспериментальной кривой и подавления функции помех.

Здесь операторы такого типа применяются для восстановления непрерывной 2π -периодической функции, заданной своим δ -приближением в L_2 : $\|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$.

Построена последовательность осредняющих операторов:

$$A(x, f_\delta, H) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x, t, H) f_\delta(t) dt, \quad (1)$$

$H = 2\pi / (n+1)$, $n = 1, 2, \dots$, сохраняющих тригонометрические сплайны в смысле П.-Ж. Лорана [3]:

$$\sigma(x) = \sigma(-\pi) \cos(x+\pi) + \sigma'(-\pi) \sin(x+\pi) + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2} [\sin((x-x_i)_+) - (x-x_i)_+ \cos(x-x_i)], \quad (2)$$

$$x_i = x_0 + iH, \quad i = \overline{0, n+1}, \quad x_0 = -\pi, \quad x_{n+1} = \pi.$$

Ядра операторов ищутся в виде

$$K(x, t, H) = \begin{cases} \sum_{j=1}^3 \alpha_j(x) \varphi_j(t), & x \in [-\pi, x_1] \text{ или } (x_n, \pi] \\ \sum_{j=1}^5 \beta_j(x) \varphi_j^1(t), & x \in (x_l, x_{l+1}), l = \overline{1, n-1} \\ \sum_{j=1}^7 \gamma_j(x) \varphi_j^2(t), & x \in \Omega(x_l), \end{cases}$$

$$\Omega(x_l) : x_l - \delta/2 < x < x_l + \delta/2, \quad l = \overline{1, n},$$

$\alpha_j(x), \beta_j(x), \gamma_j(x)$ – коэффициенты, подлежащие определению из систем, полученных из условия сохранения на $(-\pi, x_1), (x_n, \pi]$ функций $1, \sin x, \cos x$; на (x_l, x_{l+1}) – функций $1, \sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x$; на $\Omega(x_l)$ – функций $1, \sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x, x_+ \sin x, x_+ \cos x$. $\varphi_j(t), \varphi_j^1(t), \varphi_j^2(t)$ – линейно-независимые функции, полученные сдвигом

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1/h, 0 \leq t \leq h \\ 0, \text{ по-другому}, \end{cases}$$

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \varphi(t - (j-1)h + \pi), & x \in [-\pi, x_1], \\ \varphi(t - (j-1)h - x_n), & x \in (x_n, \pi], \quad h = H/3, \quad j = \overline{1, 3}, \end{cases}$$

$$\varphi_j^1(t) = \varphi(t - (j-1)h - x_l), \quad x \in (x_l, x_{l+1}), \quad h = H/5, \quad l = \overline{1, n-1},$$

$$\varphi_j^2(t) = \varphi(t - (j-1)h - x_l + \delta/2), \quad x \in \Omega(x_l), \quad h = \delta/7, \quad \delta = H/10, \quad l = \overline{1, n}.$$

За осреднение принимается $A(x, f_\delta, H)$. В случае численной реализации значения $A(x, f_\delta, H)$ вычисляются с помощью квадратурных формул.

Доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть 2π -периодическая непрерывная функция задана своим δ -приближением в $L_2 : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$. Пусть $\{A(x, f_\delta, H)\}$, $H = 2\pi/(n+1)$, $n = 1, 2, \dots$ последовательность (1). Тогда $\{A(x, f_\delta, H)\}$ сходится к $f(x)$ при $\delta \rightarrow 0, H \rightarrow 0$ по норме пространства C .

На основе двусторонней оценки для интегральных операторов Г.В. Хромовой [4] для функций $f(x)$ класса $\mu_2^1 = \{f(x) \in W_2^1[-\pi, \pi] : \|f\|_{W_2^1} \leq 1\}$, где $W_2^1[-\pi, \pi]$ – пространство вещественных абсолютно-непрерывных функций, $f' \in L_2$, $\|f\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f^2 + (f')^2) dx \right)^{1/2}$ доказана

ТЕОРЕМА 2. На классе функций μ_2^1 справедлива оценка

$$2^{-1/4} 3^{1/4} k^{1/2} \delta^{1/2} \leq \Delta \leq 2^{3/4} 3^{1/4} k^{1/2} \delta^{1/2}, \quad (3)$$

где $\Delta = \Delta(\delta, H, 1) = \sup\{\|A(x, f_\delta, H) - f(x)\|_C : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta, f \in \mu_2^1\}$,

$$\mu_1^2 = \{f(x) \in W_2^1[-\pi, \pi] : \|f\|_{W_2^1} \leq 1\}, \quad k = \max \begin{cases} 3 \sqrt{\sum_{j=1}^3 (\alpha_j(x))^2} \\ 5 \sqrt{\sum_{j=1}^5 (\beta_j(x))^2} \\ 7 \sqrt{\sum_{j=1}^7 (\gamma_j(x))^2} \end{cases}.$$

Отметим, что оценка приближения (3) с точностью до константы совпадает по порядку δ с неулучшаемой оценкой метода регуляризации А.Н. Тихонова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск, 1983.
2. Василенко В.А., Зюзин М.В., Ковалков А.В. Сплайн-функции и цифровые фильтры. Новосибирск, 1984г.
3. Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация. М., 1975.
4. Хромова Г.В. Об оценках погрешностей приближенных решений интегральных уравнений 1-го рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. Выч. математика и кибернетика. 1990. № 2. С.19.

УДК 517.6

М. Г. Плешаков

ОДИН КОНТРПРИМЕР ДЛЯ КОМОНОТОННОГО НЕРАВЕНСТВА ДЖЕКСОНА¹

Получение оценки уклонения при равномерном приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами является важной задачей в теории приближения функций. Особый интерес представляет случай, когда приближение является формоохраняющим (Shape-preserving Approximation) [1], т.е. когда аппарат приближения сохраняет некоторые свойства приближаемой функции (монотонность, выпуклость и т.д.). В 1979 году А.С. Шведов [2, 3] построил пример, показы-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120.

вающий, что оценка типа Джексона-Стечкина величины приближения монотонной функции монотонными алгебраическими многочленами через модуль непрерывности порядка 3 и выше вообще неверна, в отличие от приближения без ограничений. В этой работе построен контрпример, являющийся аналогом контрпримера А.С. Шведова [3].

Пусть C – пространство непрерывных 2π -периодических действительнозначных функций f с равномерной нормой; $\omega(f; t)$ – модуль непрерывности функции f ; T_n , $n \in N$, – пространство тригонометрических полиномов порядка $\leq n$. Обозначим $Y := \{y_i\}_{i \in Z}$ – множество периодических наборов точек, т.е. $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$. Будем писать $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, если $f(x) – 2\pi$ -периодическая непрерывная функция и $f(x)$ не убывает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i нечетное; $f(x)$ не возрастает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i четное. Зафиксируем $s \in N$ и набор Y . Обозначим $E_n(f) := \inf_{T_n \in T_n} \|f - T_n\|$ – величину наилучшего приближения функции f , $E_n^{(1)}(f, Y) := \inf_{T_n \in T_n \cap \Delta^{(1)}(Y)} \|f - T_n\|$ – величину наилучшего комонотонного приближения функции f по набору Y .

При построении контрпримера используем ядро Джексона $J_N(t)$ (см.[2, с.157]) и тригонометрические полиномы специального вида $\Pi(x)$ и $\Pi_*(x)$. Обозначим M – норму Π_* , m – минимум $\Pi(x)$ на некотором $[-d, d]$, $d = d(Y) = \text{const}$.

$$\tilde{M} := \frac{1}{\pi} \|J_N\|, \quad \tilde{m} := \frac{1}{\pi} \min_{t \in [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t \pm d^*),$$

где $d^* = d^*(Y) = \text{const}$ и заметим, что $\tilde{m} > 0$. Наконец, положим

$$\overline{M} := 2 + \pi^3 \sqrt{\frac{M\tilde{M}}{m\tilde{m}}}.$$

Всюду далее предполагаем, что число b удовлетворяет неравенствам

$$0 < b < \frac{\pi}{2NM}, \quad (1)$$

в частности,

$$\frac{d^* - 2b}{2} > \frac{d}{8}. \quad (2)$$

Пример. Для любых $k \in N$, $k > 2$, и $n \in N$ существует функция $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$ такая, что $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ и

$$E_n^{(1)}(f; Y) > B_Y n^{\frac{k}{2}-1} \omega_k \left(f; \frac{1}{n} \right), \quad (3)$$

где $B_Y = \text{const}$, зависит только от Y и k .

Доказательство. Для каждого b обозначим

$$Q_r(x, b) := Q_r(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin \frac{t - 2b}{2} \Pi_*(t) J_N(t - d^*) dt ,$$

$$Q_l(x, b) := Q_l(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin \frac{t - 2b}{2} \Pi_*(t) J_N(t + d^*) dt .$$

Тогда в силу известных свойств ядра Джексона и с помощью выбора b , $Q_r(2\pi) \geq 0$, $Q_l(2\pi) \leq 0$. Положим $Q(x, b) := Q(x) := \alpha_b Q_r(x) + (1 - \alpha_b) Q_l(x)$, где число $\alpha_b \in [0, 1]$, $Q(x)$ есть тригонометрический полином порядка $s+2N-2$. Чтобы построить функцию f , нам потребуется

ЛЕММА. Для любого b существует число b_0 такое, что $2b < b_0 < \bar{M}b$ и $Q(b_0) = 0$

Пусть $K_b(x) - 2\pi$ -периодическая функция такая, что $K_b(x)$ равна 0, если $x \in (0, b_0)$, равна 1, если $x \in [-\pi, 0] \cup [b_0, \pi]$. Положим $g(x; b) := \frac{1}{\pi} \int_0^x K_b(x) \sin \frac{1}{2}(t - 2b) \Pi_*(t) (\alpha_b J_N(t - d^*) + (1 - \alpha_b) J_N(t + d^*)) dt$.

Из леммы следует, что g – есть 2π -периодическая функция, более того, ясно, что $g \in \Delta^{(1)}(Y)$. Очевидны неравенства:

$$\|g - Q\| \leq M \tilde{M} b_0 \sin \frac{b_0 - 2b}{2} < \frac{1}{2} M \tilde{M}^2 b^2 =: c_1 b^2 , \quad (4)$$

$$\omega_k \left(g; \frac{1}{n} \right) \leq \omega_k \left(g - Q; \frac{1}{n} \right) + \omega_k \left(Q; \frac{1}{n} \right) \leq 2^k c_1 b^2 + \left(\frac{1}{n} \right)^k M_k , \quad (5)$$

где $M_k = \text{const}$, не зависит от b и n .

Возьмем произвольный полином $\tau_n \in T_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$, $n > s + 2N - 2$, положим $R_n(x) := \tau_n(x) - Q(x)$, тогда $R_n'(b) = \tau_n'(b) - Q'(b) \geq -Q'(b) \geq -bm\tilde{m}/\pi =: c_2 b$. Применяя неравенство Бернштейна, получаем $c_2 b \leq R_n'(b) \leq n \|R_n\|$, откуда

$$\|\tau_n - g\| \geq \frac{c_2 b}{n} - c_1 b^2 = \frac{c_2 b}{n} \left(1 - \frac{c_1 b n}{c_2} \right) . \quad (6)$$

Теперь для доказательства (3) при каждом $n > N_0$ возьмем

$f(x) := g(x; b_n)$, $b_n := \frac{c_2}{2c_1} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$, где N_0 выбрано из условий $\bar{M}b_{N_0} < \frac{\pi}{2N}$ и

$N_0 > s + 2N - 2$. Тогда (3) следует из (5) и (6):

$$\frac{\|\tau_n - f\|}{\omega_k(f; \frac{1}{n})} \geq \frac{\frac{c_2 b_n}{n} \left(1 - \frac{c_1 b_n n}{c_2}\right)}{2^k c_1 b_n^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^k M_k} \geq \frac{1}{2n} \frac{c_2 b_n}{2^k c_1 b_n^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^k M_k} =: B_Y n^{\frac{k-1}{2}}.$$

Для случая $n > N_0$ неравенство (3) доказано. Для случая $n < N_0$ оно следует из неравенства $E_n^{(1)}(f; Y) \geq E_{1+N_0}^{(1)}(f; Y)$. Пример доказан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилевич Я., Шевчук И.А. Комонотонное приближение // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т.2, № 2. С. 319 - 363.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.:Наука, 1977.
3. Шведов А.С. Теорема Джексона в L_p , $0 < p < 1$, для алгебраических многочленов и порядки комонотонных приближений // Матем. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 107 - 117.
4. Шведов А.С. Комонотонное приближение функций многочленами //ДАН СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 39 - 42.

УДК 519.853.3

Н. В. Рыхлов

ФОРМУЛА СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА КАЛИБРОВОЧНОЙ ФУНКЦИИ¹

Пусть множество M - выпуклый телесный компакт из конечномерного пространства R^P , содержащий внутри себя нулевой элемент: $0 \in \text{int } M$. Как известно [1, с. 45], калибровочной функцией (или функцией Минковского) называется $n_M(x) = \left\{ \mu > 0 \mid \frac{x}{\mu} \in M \right\}$. Получим формулу субдифференциала этой выпуклой функции. Напомним, что субдифференциалом выпуклой на R^P функции $f(x)$ в точке x_0 называется множество

$$\partial f(x_0) = \left\{ v \in R^P \mid f(x) - f(x_0) \geq (v, x - x_0), \forall x \in R^P \right\}.$$

Через M^* будем обозначать поляру множества M , то есть

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.

$$M^* = \left\{ l \in R^P \mid (l, x) \leq 1, \forall x \in M \right\},$$

а через $n_M^*(w) = \max_{w_0 \in M} (w_0, w)$ - поляру калибра [1, с. 150].

ТЕОРЕМА. Имеет место формула

$$\partial n_M(x_0) = \begin{cases} \left\{ w \in R^P \mid n_M^*(w) = 1, (w, x_0) = n_M(x_0) \right\} & \text{если } x_0 \neq 0, \\ M^*, & \text{если } x_0 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство.

1. Рассмотрим случай, когда $x_0 \neq 0$.

А) пусть для w выполняется $n_M^*(w) = 1, (w, x_0) = n_M(x_0)$. Нетрудно показать, что

$$n_M(x) = \max_{w \in M^*} (w, x). \quad (2)$$

В соответствии с (2) мы можем записать: $n_M(x) \geq (w, x), \forall w \in M^*$. Вычитая из этого неравенства равенство $n_M(x_0) = (w, x_0)$, получаем:

$$n_M(x) - n_M(x_0) \geq (w, x - x_0).$$

$$\left\{ w \in R^P \mid n_M^*(w) = 1, (w, x_0) = n_M(x_0) \right\} \subset \partial n_M(x_0). \quad (3)$$

Б) пусть $w \in \partial n_M(x_0)$, то есть

$$n_M(x) - n_M(x_0) \geq (w, x - x_0), \quad \forall x \in R^P. \quad (4)$$

Положив в этом неравенстве $x = 0$, получим:

$$n_M(x_0) \leq (w, x_0). \quad (5)$$

Если взять $x = \alpha x_0, \alpha > 1$, то

$$\begin{aligned} \alpha n_M(x_0) - n_M(x_0) &\geq (\alpha x_0, x_0) - (x_0, x_0) \Leftrightarrow (\alpha - 1)n_M(x_0) \geq (\alpha - 1)(w, x_0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n_M(x_0) \geq (w, x_0) \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5), (6) следует

$$n_M(x_0) = (w, x_0). \quad (7)$$

Покажем, что $n_M^*(w) \leq 1$. Предположим противное: $n_M^*(w) > 1$. Возьмем

$w_0 = \frac{w}{n_M^*(w)}$. Тогда $n_M^*(w) = 1$ и $w_0 \in M^*$, то есть w_0 - граничная точка для

M^* . По теореме об опорной гиперплоскости [1, с. 116] существует элемент $z_0 \in R^P, \|z_0\| = 1$, такой, что

$$(w_0, z_0) = \max_{n_M(w)=1} (w, z_0) = n_M(z_0). \quad (8)$$

Пользуясь неравенством (4), получаем: $n_M(z) \geq (w, z)$, $\forall z \in R^P$. Тогда

$$n_M(z_0) \geq (w, z_0) = n_M^*(w) \left(\frac{w}{n_M^*(w)}, z_0 \right) > \left(\frac{w}{n_M^*(w)}, z_0 \right) = (w_0, z_0) = n_M(z_0).$$

Получили противоречие. Значит, $n_M^*(w) \leq 1$. Но, учитывая (7), имеем

$$n_M^*(w) = 1. \quad (9)$$

Из (7), (9) следует включение

$$\partial n_M(x_0) \subset \{w \in R^P \mid n_M^*(w) = 1, (w, x_0) = n_M(x_0)\}, \quad \forall x_0 \neq 0. \quad (10)$$

Из (3) и (10) получаем (1) при $x_0 \neq 0$.

2. Пусть теперь $x_0 = 0$.

А) если $w \in M^*$, то $n_M^*(w) \leq 1$. Из (2) следует, что $n_M(x) \geq (w, x)$ или $n_M(x) - n_M(0) \geq (w, x)$. А это означает, что $w \in \partial n_M(0)$. Тем самым показали справедливость включения $M^* \subset \partial n_M(0)$.

Б) пусть $w \in \partial n_M(0)$. Рассуждая также, как и в п.1 Б), нетрудно показать, что $w \in M^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

УДК 517.5

С. П. Сидоров

ОДНО ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ¹

Как установил П.П. Коровкин [1], порядок приближения положительными линейными полиномиальными операторами $L_n(f; x)$ ($n \in N, f \in C[0,1]$), $L_n f$ есть алгебраический полином степени n) не может быть выше, чем n^{-2} в $C[0,1]$. В.С. Виденский показал [2], что свойство полиномиальности операторов не является необходимым для доказательства этого результата П.П. Коровкина. Принципиальную роль играет ограниченность размерности пространства образов оператора. Обозначим $B[0,1]$ пространство действительных ограниченных функций с нормой $\|f\|_{B[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Напомним,

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00566.

что линейный оператор $L_n f$, отображающий $C[0, 1]$ в линейное пространство конечной размерности $n+1$, называется оператором конечного ранга $n+1$.

ЛЕММА. Пусть $L_n(f; x)$ - линейный положительный оператор конечного ранга $n+1$, отображающий $C[0, 1]$ в $B[0, 1]$, такой, что $L_n(1; x) \equiv 1$. Тогда для $m \in N$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |L_n(|t-x|^m; x)| \geq \left(\frac{1}{2(n+1)} \right)^m. \quad (1)$$

Доказательство. Возьмем какой-нибудь базис $\{u_j(x)\}_{j=0}^n$, $x \in [0, 1]$, линейного пространства $\{L_n f : f \in C[0, 1]\} \subset B[0, 1]$ и рассмотрим матрицу $A = \|u_j(x_k)\|_{j=0, \dots, n; k=0, \dots, n+1}$, где $x_k = k/(n+1)$, $k = 0, \dots, n+1$. Ранг матрицы A не равен нулю, так как в противном случае возможно представление $L_n(f; x_k) = \sum_{j=0}^n a_j(f) u_j(x_k) = 0$ для всякой непрерывной на $[0, 1]$ функции f , что невозможно.

Возьмем ненулевой вектор $\{\delta_k\}_{k=0}^{n+1}$, ортогональный всем строкам матрицы A :

$$\sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| = 1, \quad \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k u_j(x_k) = 0, \quad j = 0, \dots, n.$$

Определим непрерывную на $[0, 1]$ функцию $h(x)$ так, чтобы $h(x_k) = \text{sign } \delta_k$, $k = 0, \dots, n+1$; $h(x)$ является линейной на интервалах $[x_0, x_1], \dots, [x_n, x_{n+1}]$. Тогда $h(x) \in Lip_{2(n+1)}[0, 1]$, $\|h\|_{C[0, 1]} = 1$.

Так как функция $L_n(h; x)$ лежит в линейном пространстве, порожденном функциями $\{u_j(x)\}_{j=0}^n$, то

$$\sum_{k=0}^{n+1} \delta_k L_n(h; x_k) = 0$$

Значит,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| = \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k h(x_k) = \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k (h(x_k) - L_n(h; x_k)) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} |\delta_k| |L_n(h; x_k) - h(x_k)| \leq \|L_n h - h\|_{B[0, 1]}. \end{aligned} \quad (2)$$

Наконец, используя неравенство Гельдера для линейных положительных функционалов, мы получаем

$$|L_n(h; x) - h(x)| \leq |L_n(h; x) - h(x)L_n(1; x) + h(x)L_n(1; x) - h(x)| \leq \\ \leq L_n(|h(t) - h(x)|; x) + |h(x)| |L_n(1; x) - 1| \leq 2(n+1) \left[L_n(|t-x|^m; x) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad m=1,2,\dots \quad (3)$$

Совмешая (2) и (3), получаем (1).

Пример. Линейный оператор $M_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \mu_{k,n}(x)$,

$$\text{где } \mu_{k,n}(x) = \begin{cases} -\frac{(k-nx-1)^l}{(k-nx)^l - (k-nx-1)^l}, & x \in [(k-1)/n, k/n]; \\ \frac{(k-nx+1)^l}{(k-nx+1)^l - (k-nx)^l}, & x \in [k/n, (k+1)/n]; \\ 0, & x \in [0,1] \setminus [(k-1)/n, (k+1)/n], \end{cases}.$$

l - некоторое фиксированное нечетное число, таков, что

$$1) M_n(1; x) = 1;$$

$$2) M_n((t-x)^l; x) = 0;$$

$$3) \sup_{x \in [0,1]} |M_n((t-x)^{l+1}; x)| = \left(\frac{1}{2n}\right)^{l+1};$$

$$4) \sup_{x \in [0,1]} |M_n(|t-x|^l; x)| = \left(\frac{1}{2n}\right)^l.$$

ТЕОРЕМА. Пусть L_n есть множество линейных положительных операторов конечного ранга $n+1$, действующих из $C[0,1]$ в $B[0,1]$, таких, что $L_n(1; x) \equiv 1$, $x \in [0,1]$. Для $m \in N$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^m \leq \inf_{L_n \in L_n} \sup_{x \in [0,1]} |L_n(|t-x|^m; x)| \leq \left(\frac{1}{2n}\right)^m.$$

Это утверждение следует непосредственно из леммы и примера. При $m=0$ получается неравенство В. С. Виденского [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коровкин П. П. О порядке приближения функций линейными положительными операторами // ДАН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1158 -1161.
2. Виденский В. С. Об одном точном неравенстве для линейных положительных операторов конечного ранга // Докл. АН ТаджССР. 1981. Т. 24, № 12. С. 715 - 717.

П. А. Терёхин

СЖАТИЯ И СДВИГИ ФУНКЦИИ С НЕНУЛЕВЫМ ИНТЕГРАЛОМ¹

Пусть задана функция $\varphi(t)$, $t \in R^n$, и последовательность $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ линейных операторов в R^n . Для $k = 0, 1, \dots$ и для $i = (i_1, \dots, i_n) \in Z^n$ положим $\varphi_{k,i}(t) = \varphi(A_k t - i)$.

Определение. Семейство функций $\{\varphi_{k,i}\}$ назовём системой сжатий и сдвигов функции φ , если для каждого линейного оператора A_k существует обратный оператор A_k^{-1} и выполняется условие: $A_k^{-1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $\varphi \in L_1 \cap L_p(R^n)$, $1 < p < \infty$, имеет ненулевой интеграл $\int_{R^n} \varphi(t) dt \neq 0$. Пусть, далее, существует постоянная M такая, что для любого числового семейства $\{c_i\} \in l_p(Z^n)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{i \in Z^n} c_i \varphi(-i) \right\|_p \leq M \left(\sum_{i \in Z^n} |c_i|^p \right)^{1/p}.$$

Тогда система сжатий и сдвигов функции φ является системой представления в пространстве $L_p(R^n)$ в следующем смысле: любая функция $f \in L_p(R^n)$ может быть представлена в виде суммы семейства $f = \sum c_{k,i} \varphi_{k,i}$, коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(|\det A_k|^{-1} \sum_{i \in Z^n} |c_{k,i}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Сформулированная теорема даёт положительный ответ на вопрос работы [1] о справедливости аналогичной теоремы представления для функций φ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{i \in Z^n} |\varphi(-i)| \in L_p([0, 1]^n).$$

Класс таких функций φ был введён в работе [2].

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 98-01-00842.

Отметим, что данная работа является продолжением и частично обобщением результатов автора [3 – 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Filippov V.I., Oswald P. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. of Approximation Theory. 1995. Vol. 82. P. 15 - 29.
2. Jia R.Q., Micchelli C. Using the refinement equation for the construction of pre-wavelets. II. Power of two // Curves and Surfaces (P.J. Laurent, A.L. Mchaut and L.L. Schumaker, Eds.). New York : Academic Press, 1991. P. 209 - 246 .
3. Терёхин П.А. Система сжатий и сдвигов функции в пространстве $L_p(R^n)$, $1 < p < \infty$ // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронеж, 1999. С. 184.
4. Терёхин П.А. Система сжатий и сдвигов функции на отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. Саратов, 1997. С. 153.
5. Терёхин П.А. О представляющих свойствах системы сжатий и сдвигов функции на отрезке // Изв. Тульск. гос. ун - та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т.4, вып. 1. С. 136 - 138.
6. Терёхин П.А. Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Сер. математика. 1999. №8. С. 72 - 81.

УДК 512.64

П.А. Терёхин

НОРМИРОВАННЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $d \geq 0$; $m, n \geq 1$ - целые числа. Билинейное отображение $\Phi: R^m \times R^n \rightarrow R^{n+d}$ назовём нормированным (НБО), если $|\Phi(x, y)| = |x| \cdot |y|$, где $|\cdot|$ - евклидова норма в пространстве соответствующей размерности.

Основной вопрос: при каких d, m, n существует НБО?

При $d = 0$ ответом на основной вопрос является следующая хорошо известная теорема.

ТЕОРЕМА (Гурвиц, Радон, Экман [1]).

НБО $\Phi: R^m \times R^n \rightarrow R^n$ существует тогда и только тогда, когда

$m \leq \rho(n)$, где функция $\rho(n)$ однозначно определена следующими соотношениями:

- 1) $\rho(n) = \rho(2^k)$, если $n = 2^k \cdot (2N + 1)$;
- 2) $\rho(16n) = \rho(n) + 8$;
- 3) $\rho(2^k) = 2^k$, если $k = 0, 1, 2, 3$.

При $d = 1$ справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА [2]. НБО $\Phi: R^m \times R^n \rightarrow R^{n+1}$ существует тогда и только тогда, когда $m \leq \begin{cases} \rho(n) & \text{при чётном } n; \\ \rho(n+1) & \text{при нечётном } n. \end{cases}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eckmann B. Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz - Radon über die Komposition quadratischer Formen // Comm. Math. Helv. 1942/43. Vol. 15, № 4. P. 358 - 366.
2. Терёхин П.А. Тригонометрические алгебры // Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 236 :Вопросы теории представлений алгебр и групп.5. СПб., 1997. С. 183 - 191.

УДК 518:517.948

Г. В. Хромова

О СКОРОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

Рассматривается уравнение 1 рода

$$Au = f, \quad (1)$$

где $u \in M_2^r[0,1] = \left\{ u \in W_2^r[0,1] : \|u\|_{W_2^r} \leq 1, r \geq 1 - \text{целое} \right\}$, $W_2^r[0,1]$ - пространство

Соболева, $A \in (C^{(r-1)}[0,1] \rightarrow L_2[0,1])$ и является 1) оператором вложения из $C^{(r-1)}[0,1]$ в $L_2[0,1]$, либо 2) интегральным оператором с ядром Грина линейного обыкновенного дифференциального оператора L порядка m [1].

Пусть R_α - семейство операторов, соответствующих методу регуляризации Тихонова [2]

Обозначим $C_\varepsilon[0,1] = C[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$,

$$\Delta_{l,\varepsilon}^{(p)}(R_\alpha A, M_2^r) = \sup \left\{ \| R_\alpha^{(p)} A u - u^{(p)} \|_{C_\varepsilon} : u \in M_2^r[0,1] \right\},$$

$$p = 0, 1, \dots, r-1, \quad R_\alpha^{(p)} \varphi = \frac{\partial^p}{\partial x^p} (R_\alpha \varphi).$$

При фиксированном p значение величины $\Delta_{l,\varepsilon}^{(p)}(R_\alpha A, M_2^r)$ представляет собой значение скорости аппроксимации p -й производной приближенного решения уравнения (1) в методе Тихонова.

Данное сообщение представляет уточнение результата из [1]: там для скорости аппроксимации приведены точные по порядку α оценки, здесь же мы получаем для этой величины асимптотически точное значение, т.е. решаем задачу Колмогорова-Никольского для операторов $R_\alpha A$ на классе $M_2^r[0,1]$.

ТЕОРЕМА. Справедливы представления:

$$\Delta_{l,\varepsilon}^{(p)}(R_\alpha A, M_2^r) = C \alpha^{\frac{2(r-p)-1}{4(m+r)}} + \beta(p), \quad p = 0, 1, \dots, r-1,$$

где $C = C_1 + C_2$,

$$C_1 = \frac{(-1)^{r+p+1}}{n} \sum_{i \in I_1} \omega_i^{2m+2p+1}, \quad C_2 = -\frac{2(-1)^{r+1}}{n^2} \sum_{i, j \in I_1} \frac{\omega_i^{p+1} \omega_j^{2m+p+1}}{\omega_i + \omega_j},$$

$\beta(\alpha)$ - функция, убывающая быстрее любой степени α , $n = 2r$ в случае 1), $n = 2r + 2m$ в случае 2), остальные обозначения см. в [1].

Доказательство базируется на исследованиях, проведенных в работе [1]. Мы ограничимся здесь доказательством того, что $C \neq 0$. Покажем сначала, что $C_2 \neq 0$. Обозначим сумму, стоящую в выражении для C_2 , через C_3 . Расположим корни ω_i , $i \in I_1$, в ином порядке, чем в [1]:

$$\tilde{\omega}_1 = \gamma, \quad \tilde{\omega}_2 = \gamma e^{-\frac{i\pi}{n}}, \quad \tilde{\omega}_3 = \gamma e^{-\frac{i2\pi}{n}}, \dots, \quad \tilde{\omega}_n = \gamma e^{-\frac{i(n-1)\pi}{n}}, \quad \text{где } \gamma = e^{-\frac{-i\pi}{2}}.$$

Рассмотрим функцию:

$$\Phi(\eta) = \sum_{i,j \in I_1} \tilde{\omega}_i^{p+1} \tilde{\omega}_j^{2m+p+1} e^{-\eta(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_j)}$$

на линии $\eta = t e^{-\frac{i\pi}{n}}$, $t > 0$.

Тогда, очевидно, $\int_0^\infty \Phi(\eta) d\eta = C_3$ и $\Phi(\eta) = \psi^{(p+1)}(\eta) \psi^{(2m+p+1)}(\eta)$, где

$$\psi(\eta) = \sum_{i \in I_1} e^{-\eta \omega_i}.$$

Отсюда имеем:

$$C_3 = \int_0^\infty \psi^{(p+1)}(\eta) \psi^{(2m+p+1)}(\eta) d\eta =$$

$$= [\psi^{(2m+p)} \psi^{(p+1)} - \psi^{(2m+p-1)} \psi^{(p+2)} + \dots + (-1)^{m-1} \psi^{(2m+p+1)} \psi^{(m+p)}]_0^1 +$$

$$+ (-1)^m \int_0^\infty [\psi^{(m+p+1)}(\eta)]^2 d\eta.$$

Поскольку $\psi^{(s)}(0) = 0$ при s - четном, то подстановки обращаются в ноль.

Перейдем к вещественной переменной t и учтем, что

$$\psi^{(k)}(\eta) = (-1)^k e^{-\frac{k\pi}{n}} \tilde{\psi}^{(k)}(t).$$

Отсюда имеем:

$$C_3 = (-1)^m e^{-i\frac{\pi}{n}[2(m+p)+1]} \int_0^\infty |\tilde{\psi}^{(m+p+1)}(t)|^2 dt \neq 0.$$

Из того, что $C_2 \neq 0$ следует, что и $C \neq 0$. Доказательство этого получается с привлечением фактов из теории уравнений 1 рода. Рассмотрим величину $\Delta_{\epsilon}^{(p)}(\delta, R_\alpha, M_2^r) = \sup \left\{ \|R_\alpha^{(p)} f_\delta - u^{(p)}\|_{c_\epsilon} : u \in M_2^r, \|f_\delta - Au\|_{L_2} \leq \delta \right\}$, характеризующую погрешность приближенного решения уравнения (1) с приближенно заданной правой частью. Известно, что порядок по δ этой величины является оптимальным (наименьшим среди всех возможных приближенных методов решения уравнения (1)) при согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, имеющим порядок δ^2 . [3]. Тот же оптимальный порядок получится, если $\alpha(\delta)$ выбирать из условия:

$$\alpha^{-\frac{1}{2}} \delta (-C_2)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{2(r-p)-1}{4(m+r)}} + \tilde{C} \alpha^{\frac{2(r-p)-1}{4(m+r)}} \rightarrow \inf_{\alpha},$$

где \tilde{C} - константа, стоящая при "главном" порядке в асимптотике величины $\Delta_{1,\epsilon}^{(p)}(R_\alpha A, M_2^r)$ [4]. В случае, если $C \neq 0$, то $\tilde{C} = C$ и порядок по δ в согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$ будет δ^2 . Если же $C = 0$, то мы придем к зависимости $\alpha(\delta)$, для которой порядок по δ величины $\Delta_{\epsilon}^{(p)}(\delta, R_\alpha, M_2^r)$ будет меньше оптимального, что невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромова Г.В. О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений I рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1994. № 4. С. 3 - 10.
2. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. 1963. Т.153, № 1. С. 49 - 52.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложений. М.: Наука. 1978.
4. Хромова Г.В. Об оценках погрешности приближенных решений интегральных уравнений I рода // Вестн. МГУ. Сер. 15. 1994. № 4. С. 3 - 10.

УДК 517.5

В. И. Шевцов

УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ОДНОМ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Дифференциальные уравнения бесконечного порядка используются во многих вопросах комплексного анализа. В создании теории таких уравнений большую роль сыграли работы Д. Полиа, Ж. Валирона, А.О. Гельфонда, А.Ф. Леонтьева и других математиков. Основной задачей теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка является задача аппроксимации любого решения такого уравнения посредством элементарных решений. В работе А.Ф. Леонтьева [1] имеется обзор по уравнениям бесконечного порядка. В монографиях [2, 3] приводится ряд результатов, относящихся к уравнениям бесконечного порядка и их приложениям.

Пусть $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ - целая функция конечного порядка ρ , $0 < \rho < 1$.

Предположим, что все нули функции $L(\lambda)$ - простые, обозначим их через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположив их в порядке неубывания их модулей. Рассмотрим на отрезке $[-1;1]$ систему функций $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}$. Такая система экспонент неполна в метрике C ни на каком отрезке вещественной оси.

Обозначим через C_{m_n} класс бесконечно дифференцируемых на $[-1;1]$ функций таких, что

$$\forall f \in C_{m_n}, \forall n \geq 0 \quad |f^{(n)}(x)| < A_f m_n, \quad (1)$$

где A_f - некоторая постоянная, которая зависит только от функции $f(x)$, m_n - последовательность неотрицательных чисел такая, что выполнено условие

$$\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln m_n}{n \cdot \ln n} < \frac{1}{\rho}. \quad (2)$$

Отметим, что если $\alpha < 1$, то этот класс функций состоит из функций аналитических на отрезке $[-1; 1]$. Если $\alpha = 1$, а $m_n = n^{\alpha n} \ln^{\alpha n} n$ и $\beta_n = \inf_{h \geq 0} (n+h)^\alpha \ln^\alpha (n+h) = n^\alpha \ln^\alpha n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} < \infty$, поэтому такой класс не квазианалитический. Если $\alpha = 1$, $m_n = n^n \ln^n n$, то такой класс квазианалитический, он содержит и не аналитические функции [4].

Обозначим, далее, через $C_{m_n}^*$ подкласс C_{m_n} такой, что любая $f \in C_{m_n}^*$ удовлетворяет уравнению бесконечного порядка:

$$M_L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x) = 0, \quad x \in [-1; 1], \quad (3)$$

характеристическая функция которого $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ является целой функцией порядка ρ , $0 < \rho < 1$. В работе [6] показано, что класс $C_{m_n}^*$ - квазианалитический. В [6] построена система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - биортогональная к системе экспонент $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ на $[-1; 1]$. Функции $f \in C_{m_n}$ приведем в соответствие ряд экспонент по данной биортогональной системе функций

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k x}, \quad A_k = \int_{-1}^1 f(t) \varphi_k(t) dt \quad (4)$$

В исследованиях по теории рядов экспонент важное значение имеет интерполирующая функция, которую ввел А.Ф. Леонтьев. Она имеет следующий вид:

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [f^{(k-1)}(0) + \mu f^{(k-2)}(0) + \dots + \mu^{k-1} f(0)].$$

Если $f \in C_{m_n}$, то $\omega_L(\mu, F)$ - целая функция комплексного переменного μ . Функции $f(x) \in C_{m_n}$ приведем в соответствие ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\lambda_k x}, \quad B_k = \frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{L'(\lambda_k)}. \quad (5)$$

В данной статье излагаются результаты, относящиеся к исследованию поведения рядов (4) и (5).

Сформулируем следующую теорему

ТЕОРЕМА 1. Если $f(x) \in C_{m_n}^*$, то $\forall n A_n = B_n$.

Доказательство данной теоремы опирается в основном на то, что класс $C_{m_n}^*$ - квазианалитический. Укажем также на теорему, которая получается непосредственным применением теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda_n > 0$ и выполнено условие $\exists h, 0 < h < 1$, такое, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^h} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} < \infty.$$

Если $f(x) \in C_{m_n}^*$, тогда $f(x)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1$ и в этой полуплоскости

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}.$$

Рассмотрим теперь следующую систему уравнений бесконечного порядка

$$M_L(f) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x) = 0, \quad (6)$$

$$M_{L_1}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k f^{(k)}(x) = 0, \quad x \in [-1; 1]$$

Характеристические функции этой системы функций $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ и $L_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k$ - целые функции порядка ρ , $0 < \rho < 1$. Как и выше предполагается, что все нули характеристических функций – простые. Справедлива теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если характеристические функции системы (6) не имеют общих нулей, то единственным решением системы (6) является $f(x) \equiv 0$.

Нами также исследована структура решений системы (6) при условии, что характеристические функции имеют общие нули. Обозначим через $\{\mu_k\}$ - общие нули функций $L(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 4. Существует последовательность $r_k \uparrow \infty$ такая, что если $f(x)$ удовлетворяет системе (6), то

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\mu_s| < r_k} \tilde{A}_s e^{\mu_s x}, \quad \tilde{A}_s = \frac{\omega_L(\mu_s, F)}{L'(\mu_s)}$$

равномерно на $[-1; 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и их применение // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. 1964. Т. 2. С. 648 - 660.
2. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М., 1976.
3. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М., 1960.
4. Мандельбройт С. Квазианалитические классы функций. М.; Л., 1937.
5. Шевцов В.И. Свойства специального класса бесконечно дифференцируемых функций // Теория функций и приближений :Тр. 4-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1990. Ч. 3.
6. Шевцов В.И. Об одном классе бесконечно дифференцируемых функций // Теория функций и приближений :Тр. 6-й Сарат. зимней шк. Саратов, 1992.
7. Леонтьев А.Ф. Обобщение рядов экспонент. М., 1980.

УДК 539.3

Э. В. Антоненко, Ю. А. Блинков, С. С. Иванов

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ
С ВЕСОВОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИЕЙ
В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ УПРУГИХ ТЕЛ

Математическое содержание проблем устойчивости и колебаний механических систем сводится к решению задач Штурма-Лиувилля. Рассматриваются линейные однородные дифференциальные уравнения с однородными краевыми условиями. Коэффициенты дифференциальных уравнений содержат параметр, через который выражается критическая нагрузка или собственная частота. Находится значение параметра, для которого существует функция, удовлетворяющая всем краевым условиям и дифференциальному уравнению.

Задачи о собственных частотах поперечных колебаний стержней [1], осесимметричных оболочечных колебаний цилиндров и потери их устойчивости при действии внешнего давления [2, 3] описываются дифференциальным уравнением

$$\psi''''(x) - k^4 \psi(x) = 0, \quad (1)$$

где $\Psi(x)$ - функция прогиба оси стержня или радиальные перемещения оболочки, x - осевая координата. Рассматривая однородные конструкции, имеем для колебаний стержней и гладких оболочек

$$k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}; \quad k^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D} - \frac{Eh}{DR^2}. \quad (2)$$

В задаче устойчивости оболочки

$$k^4 = \frac{n^4(n^2 - 1)}{EhR^3} \left[P_* - \frac{D(n^2 - 1)}{R^3} \right]. \quad (3)$$

Здесь и далее обозначения общепринятые [1], m - погонная масса стержня, EI - его изгибная жесткость. Длину стержня и оболочки обозначим l , начало координат поместим на одном из краёв, введем параметр $\alpha = kl$. Из (2) и (3) получим собственные частоты

$$\omega^2 = \alpha^4 \frac{EI}{ml^4}, \quad \omega^2 = \frac{E}{\rho R} \left(1 + \alpha^4 \frac{DR^2}{Eh^4} \right) \quad (4)$$

и критическое давление потери устойчивости

$$P_* = \frac{D(n^2 - 1)}{R^3} \left[1 + \alpha^4 \frac{EhR^6}{DL^4 n^4 (n^2 - 1)^2} \right].$$

Рассмотрим составные конструкции, представляющие собой последовательно соединенные вдоль продольной оси x стержни или оболочки с постоянной толщиной и жесткостью на i -м участке. Тогда полная длина конструкции $l = \sum_{i=1}^N l_i$, где N - число участков или количество соединенных стержней (оболочек). Поместив начало оси x на левом краю конструкции, будет иметь краевые условия в сечениях $x = 0$ и $x = l$. Дифференциальное уравнение задачи имеет вид (1), где

$$k = k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x \leq l_1; \\ k_i, & \sum_{j=1}^{i-1} l_j \leq x \leq \sum_{j=1}^{i+1} l_j; \\ k_N, & \sum_{i=1}^{N-1} l_i \leq x \leq l. \end{cases} \quad (5)$$

Зависимости (1) и (5) представляют задачу о собственных значениях с весовой ступенчатой функцией.

Искомые параметры ω или P_* постоянны для всей конструкции (всей совокупности её частей). Это утверждение позволяет установить связь между коэффициентами k или α на разных участках.

Например, из (4) получим

$$\alpha_{i+1}^4 = \alpha_i^4 \lambda \gamma; \quad \lambda = \frac{l_{i+1}}{l_i}; \quad \gamma = \sqrt[4]{\left(\frac{EI}{m} \right)_i \left(\frac{m}{EI} \right)_{i+1}}. \quad (6)$$

Решение задач упрощается, если ввести локальную систему координат, в которой продольная ось берёт начало на левом крае i -го участка $x_i(0) = 0$ и заканчивается при $x_i = l_i$. Тогда граничные условия конструкции будут соответствовать $x_1 = 0$ и $x_N = l_N$. Функции $\Psi(x)$ на каждом участке будут соответствовать функции $\Psi_i(x_i)$, которые должны удовлетворять условиям совместности деформаций соседних участков. Для уравнения (1) таких условий будет $2N$ штук:

$$\begin{aligned} \psi_i(l_i) &= \psi_{i+1}(0); & \psi'_i(l_i) &= \psi'_{i+1}(0); \\ \psi''_i(l_i) &= \psi''_{i+1}(0); & \psi'''_i(l_i) &= \psi'''_{i+1}(0). \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) совместно с четырьмя граничными условиями дают систему уравнений, содержащую искомый параметр. Для нетривиальности её решения определитель системы должен быть равен нулю.

Пример. Найдем собственные частоты поперечных колебаний конструкции из двух стержней ($i = 1; 2$). Из (6) находим

$$\alpha_2 = \alpha_1 \lambda \gamma; \quad \lambda = \frac{l_2}{l_1}; \quad \gamma = \sqrt[4]{\left(\frac{EI}{m}\right)_1 \left(\frac{m}{EI}\right)_2}.$$

Пусть края конструкции шарнирно оперты:

$$\psi_1(0) = 0; \quad \psi_1''(0) = 0; \quad \psi_2(l_2) = 0; \quad \psi_2''(l_2) = 0. \quad (8)$$

Решение (1) запишем в функциях Крылова

$$\psi_i(x_i) = A_i S_i(x_i) + B_i T_i(x_i) + C_i U_i(x_i) + D_i V_i(x_i). \quad (9)$$

Уравнения (7), (8) с учётом (9) дают систему уравнений, с определителем

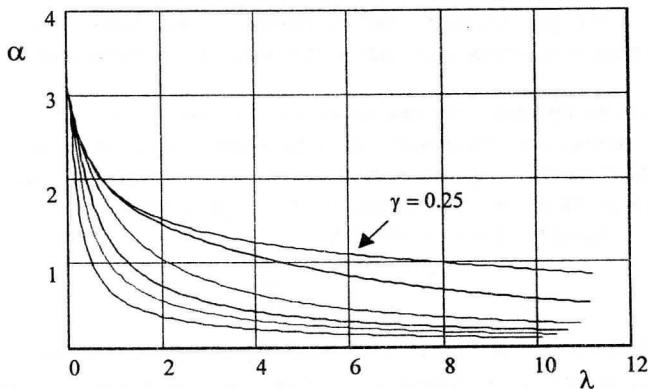
$$\begin{vmatrix} T_1 & V_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ S_1 & U_1 & 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ V_1 & T_1 & 0 & 0 & -\gamma^2 & 0 \\ U_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^3 \\ 0 & 0 & S_2 & T_2 & U_2 & V_2 \\ 0 & 0 & U_2 & V_2 & S_2 & T_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

где функции Крылова в сечениях $x_i = l_i$ ($\alpha_i = k_i l_i$) имеют вид

$$T = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\alpha + \sin\alpha); \quad V = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\alpha - \sin\alpha); \quad S = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha + \cos\alpha); \quad U = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha - \cos\alpha).$$

Численное решение уравнения (10) даёт зависимость $\alpha_1 = \alpha_1(\lambda, \gamma)$, которая для первых корней уравнения при $\gamma = 0.25, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$ представлена на рисунке.

α



Аналогичные зависимости получены для первых четырех корней систем с другими граничными условиями, которые при известных λ и γ позволяют найти α_1 и по формулам (4) - собственные частоты. Из этих зависимостей следуют, как частные случаи классические значения λ . Для рассмотренного примера $\alpha_s = s\pi$ ($s = 1 \dots 4$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.:Наука, 1965.
2. Антоненко Э.В. Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами // Прикл. механика. 1975. Т. IV, вып. 6. С. 44-50.
3. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. М.:Машиностроение, 1966.

УДК 533.6.011/533.625/661.013

В. В. Безлюдный, В. В. Можилкин

РАСЧЕТ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ТЕЛ

В настоящее время для расчета нестационарных аэродинамических характеристик летательных аппаратов (ЛА) широко используется линейная теория [1]. Однако, при сверхзвуковых скоростях полета в силу возникновения ударных волн, их взаимодействия друг с другом, точность таких результатов может быть невысокой.

Численные методы расчета трехмерных неуставновившихся течений в настоящее время требуют больших вычислительных ресурсов и поэтому не могут широко использоваться для параметрического исследования характеристик ЛА.

В связи с этим предлагается численный метод расчета нестационарного сверхзвукового обтекания тел, основанный на линеаризации трехмерных неуставновившихся течений в предположении, что тело совершают малые гармонические колебания около некоторого среднего положения, то есть его поверхность можно представить уравнением:

$$\begin{aligned} z &= F(x, y, t) = f_0(x, y) + f_\omega(x, y)e^{i\omega t} \\ |f_\omega| &\ll f_0, \quad Sh = \omega L/V_\infty \ll 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ω - круговая частота колебаний; L - характерный размер тела; V_∞ - скорость набегающего потока. Система координат выбрана таким образом, что ось oX параллельна набегающему потоку. Представляя решение в виде

$$U(x, y, z, t) = U_0(x, y, z) + U_\omega(x, y, z)e^{i\omega t}, \tag{2}$$

получим краевую задачу для стационарных уравнений Эйлера и систему линейных уравнений, оператор которой совпадает с оператором стационарной системы. Это позволяет применить единый численный метод для решения данных систем.

Примем допущение, что течение во всей области является « x - сверхзвуковым», то есть x - координата скорости газа больше скорости звука. Тогда как стационарные уравнения Эйлера, так и линейная система для возмущений будут гиперболическими. Это позволяет применить для их решения разностную схему С.К. Годунова распада произвольного разрыва (стационарный вариант) [2].

Численное решение строится с явным выделением головной ударной волны, уравнение которой представляется в виде

$$z = \phi(x, y, t) = \phi_0(x, y) + \phi_w(x, y)e^{i\omega t}. \quad (3)$$

В предположении (1) как для стационарной задачи, так и для нестационарного возмущения счетная область ограничена головной стационарной ударной волной

$$z = \phi_0(x, y) \quad (4 \text{ a})$$

и средним положением поверхности тела

$$z = f_0(x, y). \quad (4 \text{ b})$$

Сетка строится аналогично [2]. Область, ограниченная поверхностью тела и фронтом ударной волны делится на слои $x = \text{const}$. В каждой из этих плоскостей строится сетка с количеством узлов m^*n такая, что при отображении физической плоскости в плоскость индексов, сетка преобразовывалась бы в прямоугольник. Величина шага сетки по x должна удовлетворять условию Куранта-Фридрихса-Леви (см. [2]).

Расчет стационарной задачи методом Годунова полностью аналогичен [2].

Уравнения для нестационарной добавки имеют вид

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + i\omega D = 0. \quad (5)$$

Здесь A, B, C, D - линейные функции от возмущений.

Разностная схема Годунова для (5) может быть записана в виде:

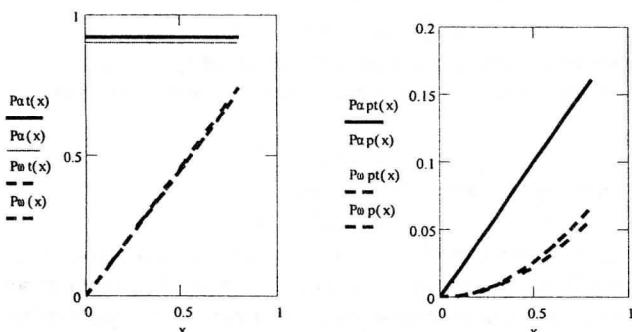
$$(AS_x)^{j-1/2, k-1/2} = (AS_x)_{j-1/2, k-1/2} + \sum_{p=1}^4 (AS_x + BS_y + CS_z)_{p, \alpha_p} + \\ + \frac{h_x}{2} i\omega D_{j-1/2, k-1/2} (S_x^{j-1/2, k-1/2} + S_{x, j-1/2, k-1/2}); \quad j=1, \dots, m; \quad k=1, \dots, n; \quad (6)$$

S_x, S_y, S_z - проекции граней ячеек на плоскости OYZ, OXZ, OXY , взятые со знаками соответствующих нормалей; $\alpha_1 = (j-1, k-1/2); \alpha_2 = (j-1/2, k-1); \alpha_3 = (j, k-1/2); \alpha_4 = (j-1/2, k)$.

Замыкает соотношение (6) решение задачи о распаде произвольного разрыва для гармонических возмущений. Оно сводится к решению уравнений для инвариантов Римана системы (5). Нетрудно аналогично построить решение задачи распада разрыва в окрестности тела и ударной волны.

Данная разностная схема является маршевой. Поэтому требуется задание начального слоя. Он строится по известным коническим течениям.

Рассмотрим в качестве примера обтекание пластинки, расположенной параллельно скорости стационарного потока и совершающей поступательные и вращательные колебания вдоль своей нормали (α и ωz задачи [1]). На рисунке приведены производные давления p^α , $p^{\omega z}$, p_{α}^α , $p_{\omega}^{\omega z}$.



Производные давления для α , ωz задач (индексы α , ω).

Индекс p соответствует производным с точкой, t -точному решению

Совпадение результатов расчета и аналитического решения для $M = 2.39$, $Sh = 0.01$ хорошее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.:Наука, 1971.
2. Численное решение многомерных задач газовой динамики /Под ред. С.К. Годунова. М.:Наука, 1977.

О ВЛИЯНИИ ШПУНТОВОЙ ЗАВЕСЫ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ОСНОВАНИИ ПЕРЕМЫЧКИ И ПОДТОПЛЕНИЕ ТЕРРИТОРИИ, ПРИМЫКАЮЩЕЙ К ВОДОЁМУ

Рассматривается задача о подтоплении территории, отделённой от водоёма непроницаемой дамбой, усиленной шпунтовой крепью. Предполагается, что дамба имеет конечную ширину и достаточно большую протяжённость. Элементы системы покоятся на водонасыщенном пористом основании достаточно большой мощности. Фильтрационное течение рассматривается лишь в пористом основании, а в водоёме и грунтовом массиве около дамбы давление считается, ввиду малых скоростей, гидростатическим. При сделанных предположениях течение можно рассматривать как плоско-параллельное. Предполагается, что отсчёт давления ведётся от начального гидростатического распределения, водём в начальный момент пуст, и идёт его заполнение. Математическая задача сводится к решению уравнения В.Н. Щелкачёва.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (-\infty < x < \infty, 0 < z < \infty, t > 0) \quad (1)$$

при условиях

$$U(x, z, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2)$$

$$U(+\infty, z, t) = \gamma \int_0^t H \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} \right) d\tau \quad (3)$$

$$U(-\infty, z, t) = 0, \quad u(x, \infty, t) = 0 \quad (4)$$

$$U(x, 0, t) = \begin{cases} \gamma H(t) & 0 < x < \infty \\ \gamma h(x, t) & -\infty < x < -b \end{cases} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = \begin{cases} -\frac{\mu m}{k} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} & -\infty < x < -b \\ 0 & -b < x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x \rightarrow 0} = 0 \quad 0 < z < a. \quad (7)$$

Здесь ρ , μ , β - плотность, динамическая вязкость и коэффициент объёмной упругости воды, $\kappa = \frac{k}{\mu(m\beta + \alpha)}$ - коэффициент пьезопроводности, а a и m - объёмная упругость среды и пористость. В грунтовом массиве $\{-\infty < x < -b, 0 < z < h(x, t)\}$ течение не рассматривается, и все условия снесены.

ны на поверхность $z = 0$. $H(t)$ – текущий уровень воды в водоёме. Аналогичная задача при исчезающе малой ширине дамбы решалась в работе [1].

Решение задачи (1) – (7) можно записать как комбинацию тепловых потенциалов, мощности источников которых определяются из граничных условий.

$$U(x, z, t) = \begin{cases} \gamma \int_0^t H \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa(t-\tau)}} \right) d\tau - \frac{\mu}{2\pi k} \int_0^t \frac{\exp \left\{ -\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)} \right\}}{t-\tau} d\tau \int_a^\infty Q(\eta, \tau) \times \\ \times \left[\exp \left\{ -\frac{(z-\eta)^2}{4\kappa(t-\tau)} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(z+\eta)^2}{4\kappa(t-\tau)} \right\} \right] d\eta & 0 < x < \infty \\ \frac{\mu}{2\pi k} \int_0^t \frac{\exp \left\{ -\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)} \right\}}{t-\tau} d\tau \int_a^\infty Q(\eta, \tau) \exp \left\{ -\frac{(z-\eta)^2}{4\kappa(t-\tau)} \right\} + \\ + \exp \left\{ -\frac{(z+\eta)^2}{4\kappa(t-\tau)} \right\} d\eta - \frac{\mu m}{2\pi k} \cdot \int_0^t \frac{\exp \left\{ -\frac{z^2}{4\kappa(t-\tau)} \right\}}{t-\tau} d\tau \cdot \\ \cdot \int_{-\infty}^{-b} \frac{\partial h(\xi, \tau)}{\partial \tau} \left[\exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-\tau)} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa(t-\tau)} \right\} \right] d\xi & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Здесь $Q(z, t)$ – плотность расхода воды под шпунтовой завесой. Удовлетворив условиям (4) – (7), получим два уравнения для функций $Q(z, t)$ и $h(x, t)$, которые в изображениях (преобразование Лапласа-Карсона по переменной t) приобретают вид ($a < z < \infty$)

$$\frac{2}{\pi} \int_a^\infty \bar{Q}(\eta, s) K_0 |z - \eta| \beta d\eta - \frac{2ms}{\pi} \int_b^\infty \bar{h}(-\xi, s) K_0 \left(\beta \sqrt{z^2 + \xi^2} \right) d\xi = K \bar{H}(s) \exp(-\beta z) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}(-x, s) + \frac{ms}{\pi K} \int_b^\infty \bar{h}(-\xi, s) [K_0(|x - \xi| \beta) + K_0(x + \xi) \beta] d\xi = \\ = \frac{2}{\pi K} \int_a^\infty \bar{Q}(\eta, s) K_0 \left(\beta \sqrt{x^2 + \eta^2} \right) d\eta \quad (0 < x < \infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $K = \frac{k\gamma}{\mu}$ – коэффициент фильтрации, $\beta = \sqrt{\frac{s}{\kappa}}$, а $K_0(x)$ – функция Макдональда. В работе [1] построено точное решение уравнения (8).

$$\bar{Q}(z, s) = \frac{K \bar{H}(s) \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \cdot e^{-\beta z}}{\sqrt{z-a}} + \frac{ms}{\pi \sqrt{2}} e^{-\beta z} \frac{d}{dz} \int_0^\infty \bar{h}(-\xi, s) d\xi \times \\ \times \int_a^\xi \exp\left(-\beta \left(\sqrt{y^2 + \xi^2} - y\right)\right) \left(\frac{\sqrt{y^2 + \xi^2} + y}{(\xi - y)(y^2 + \xi^2)} \right)^{1/2} dy. \quad (10)$$

Учитывая слабую сжимаемость воды ($\kappa \rightarrow \infty$), из (10) получим

$$\bar{Q}(z, s) \approx \frac{\exp(-\beta z)}{\sqrt{z-a}} \left\{ K \bar{H}(s) \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} + \frac{ms}{\pi \sqrt{2}} \int_b^\infty \bar{h}(-\xi, s) [\xi (\sqrt{a^2 + \xi^2} - a)]^{1/2} + \right. \\ \left. + z (\sqrt{a^2 + \xi^2} + a)^{1/2} \right] d\xi \right\}. \quad (11)$$

Решение системы уравнений (9) и (11) ищется в виде степенных рядов

$$\bar{Q}(z, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_n(z, s) m^n, \quad \bar{h}(-x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_n(-x, s) m^n.$$

Для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ получаем систему рекуррентных соотношений

$$\bar{Q}_n(z, s) = (A_{n-1} + B_{n-1} z) \frac{s \exp(-\beta z)}{\pi \sqrt{2(z-a)}}. \\ \bar{h}_n(-x, s) = \frac{s \sqrt{2}}{\pi^2 K_a} \int (A_{n-1} + B_{n-1} \eta) \frac{\exp(-\beta \eta)}{(\eta - a)^{1/2}} K_0(\beta \sqrt{x^2 + \eta^2}) d\eta - \\ - \frac{s}{K \pi} \int_b^\infty \bar{h}_{n-1}(-\xi, s) [K_0|x - \xi| \beta + K_0(x + \xi) \beta] d\xi,$$

$$A_n = \int_b^\infty \xi \bar{h}_n(-\xi, s) (\sqrt{a^3 + \xi^2} - a)^{1/2} d\xi, \quad B_n = \int_b^\infty \xi \bar{h}_n(-\xi, s) (\sqrt{a^3 + \xi^2} - a)^{-1/2} d\xi.$$

Было вычислено нулевое и первое приближение аналогично [1] и выполнено его обращение. Вычислив значение $\bar{U}(x, 0, s)$ в области $-b < x < 0$, найдём распределение давления в основании дамбы. Ввиду громоздкости полученные формулы не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Больман Н.Г., Сафрончик А.И. Неустановившаяся фильтрация из канала с непроницаемыми стенками и шпунтовой крепью // Аэродинамика. Саратов :Изд – во Сарат. ун – та, 1997. С. 131 - 140.

В. М. Гурьянов, В. В. Гурьянов

ПЛОСКИЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

1. Пусть W — внутренняя энергия деформируемой идеально-упругой однородной сплошной среды при нулевом значении энтропии. Не уменьшая общности, можно считать, что W является полиномом в случае изотропной среды инвариантов (I_1, I_2, I_3), а в случае анизотропной среды компонентов (γ_{ij}) тензора конечных деформаций, записанного в декартовой лагранжевой системе координат (x, y, z). Коэффициенты полинома в упомянутых случаях являются упругими константами [1].

Самая существенная разница между изотропной и анизотропной средами заключается в том, что при повороте введенной системы координат упругие константы изотропной среды не изменяют своих значений, а в анизотропной — изменяют. Методика пересчета значений упругих констант при повороте системы координат хорошо известна [1, 2] и поэтому останавливаться на ней не будем.

Заметим еще, что если предварительное напряженное состояние изотропной упругой сплошной среды отличается от состояния равномерного всестороннего растяжения или сжатия, то такая среда приобретает свойства анизотропии [3]. На этом явлении основаны методы фотоупругости [4]. Поэтому изучение особенностей распространения упругих волн в анизотропных средах приобретает дополнительный смысл.

Для плоских волн конечных деформаций смещение ($u(r,t)$) точек $r = xi_1 + yi_2 + zi_3$ представим в виде разложения по ортам ($i_k, k = 1, 2, 3$) принятой координатной системы, т.е. $u(r,t) = \sum_{k=1}^3 u_k(x,t)i_k$, t — время. В этом случае

$$W=W(p_1, p_2, p_3)=W(p), \quad p = \partial u / \partial x.$$

Систему уравнений, описывающих явление распространения безударных волн $u(x,t)$ запишем так:

$$\begin{aligned} q_r - A(p)p_x &= 0, \\ q_x - p_t &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В этой системе $A(p) = \{a_{ij}\} = \partial^2 W / \partial p_i \partial p_j$ — квадратная симметричная матрица третьего порядка, $q = \partial u / \partial x$, нижние индексы x, t у векторов p и q означают дифференцирование по x и t .

Поскольку матрица A симметричная, то все ее собственные значения ($\lambda_k, k=1,2,3$) вещественные. Считаем их положительными, чем и обеспечивается гиперболичность системы, т.е. наличие волновых движений. Если первые две компоненты соответствующих собственных векторов

$(I_k, k=1,2,3)$ отличны от нуля, то волна $\mathbf{u}(x,t)$ состоит из одной квазипротивной и двух квазипоперечных волн. В общем случае распространения плоских волн в изотропной среде одна волна обязательно поперечная [5].

Для полного исследования систему (1) необходимо привести к характеристической нормальной форме.

2. Теория простых (Римана) волн, которые являются частным случаем монотипных, достаточно хорошо изучена и описана [6]. Поэтому обратимся к общему случаю аналогично [7].

Рассмотрим сначала продольные волны. Для этого в (1) положим
 $W(p)=f(p_1)+g(p_2, p_3)$. (2)

В этом случае $a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{31}=0$, собственный вектор I_1 матрицы A , соответствующий продольной волне (p_1 — объемное расширение) является ортом I_1 , а собственное значение $\lambda_1=a_{11}=v^2(p_1)$ должно быть по принятому условию положительным.

Уравнения продольных волн по (1) и (2) принимают вид

$$\begin{aligned} q_{1t} - v^2(p_1) p_{1x} &= 0, \\ q_{1x} - p_{1t} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) ничем не отличаются по форме от уравнений продольных волн изотропной среды. Коренное отличие заключается в том, что при повороте системы координат (x,y,z) и переходе при этом к системе (x',y',z') коэффициенты полиномов $W=W(p_1, p_2, p_3)$ и $W=W(p_1', p_2', p_3')$ ($p_i' = \partial u_i / \partial x'$) будут различны, что и приведет к различию скоростей v и v' .

В изотропной среде скорость v не зависит от направления распространения плоской волны, что хорошо известно и здесь на это обращено внимание по формальным соображениям.

Собственные значения λ_2, λ_3 и собственные векторы I_2, I_3 матрицы A при (2) соответствуют поперечным волнам и имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= \frac{a_{22} + a_{33}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{22} + a_{33})^2}{4} + a_{23}^2}, \\ I_2 &= \left(0, 1, \frac{a_{23}}{\lambda_2 - a_{33}} \right), \\ I_3 &= \left(0, \frac{a_{23}}{\lambda_3 - a_{22}}, 1 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Эти волны связаны между собой. Однако, если $a_{23}=0$, что соответствует виду внутренней энергии $W(p)=a(p_1)+b(p_2)+c(p_3)$, то они становятся монотипными и можно записать общий вид уравнений монотипных волн

$$\begin{aligned} q_t - v^2(p) p_x &= 0, \\ q_x - p_t &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где через p и q обозначены p_k и q_k для фиксированного значения k . При этом векторы $\mathbf{q} = i_k q_k$, $\mathbf{p} = i_k p_k$ ($k=1,2,3$) и скаляр $v^2(p_k)$ определяют эти волны в случае их независимого распространения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Гостехиздат, 1950.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
5. Гурьянов В.В. Взаимодействие плоских нелинейных сейсмических волн // Изв. АН СССР. Сер. физика Земли. 1990, №11. С. 57 - 71.
6. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.
7. Гурьянов В.В. Монотипные плоские изоэнтропические волны конечных деформаций//Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1993. Вып. 1. С. 149 - 157.

УДК 624.131+5539.215

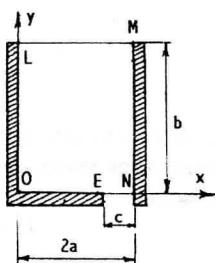
А. А. Контарев, А. Г. Маркушин, Е. В. Садовничая

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИСТИЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрим движение сыпучего тела при разгрузке бункера в форме параллелепипеда с горизонтальным выпускным отверстием в виде щели во всю длину днища бункера, расположенным у одной из его боковых стенок, и воспользуемся, при этом моделью истечения сыпучего тела [1], основанной на теории пластического течения при переменных нагрузлениях.

Предположим, что длина бункера достаточна для того, чтобы в каждом поперечном сечении, удаленном от торцевых стенок можно было бы считать движение сыпучего тела одинаковым. Это позволяет ограничить рассмотрение движения материала его исследованием только в одном из этих сечений.

Отнесем выделенное сечение бункера к декартовой системе координат согласно рисунку. Для определения плоского напряженно-деформированного состояния материала и его движения при



рассмотрении процесса разгрузки бункера в квазистатической постановке имеем уравнения теории упругости в приращениях напряжений [2] :

$$\frac{\partial d\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial d\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial d\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial d\sigma_y}{\partial y} = \Delta P. \quad (1)$$

В основе уравнений состояния пластически деформируемого материала лежат, как правило, условия пластичности, условия упрочнения и ассоциированный закон течения.

В теории течения в случае плоской деформации устанавливается связь между приращениями деформаций $d\varepsilon_x$, $d\varepsilon_y$, $d\gamma_{xy}$, приращениями напряжений $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\tau_{xy}$ и напряжениями σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Будем считать, что упрочнение является изотропным, а приращения деформаций складываются из приращений упругих и пластических составляющих

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^e + d\varepsilon_x^p, \quad d\varepsilon_y = d\varepsilon_y^e + d\varepsilon_y^p, \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^e + d\gamma_{xy}^p, \quad (2)$$

здесь индексами e и p обозначены упругие и пластические составляющие соответственно.

Предположим также, что относительное изменение объема θ и среднее напряжение σ связаны также, как и при упругой деформации: $\sigma = K\theta$ или $d\sigma = Kd\theta$, где $K = \lambda / \mu$ - объемный модуль упругости.

Будем считать, что приращения напряжений и упругих деформаций связаны между собой обобщенным законом Гука:

$$d\varepsilon_x^e = 1/E [(1 - \mu^2) d\sigma_x - \mu(1 + \mu) d\sigma_y], \quad d\varepsilon_y^e = 1/E [(1 - \mu^2) d\sigma_y - \mu(1 + \mu) d\sigma_x], \\ d\gamma_{xy}^e = 1/G d\tau_{xy}. \quad (3)$$

В качестве условия пластичности возьмем энергетическое условие, по которому наступление пластического состояния определяется только вторым инвариантом девиатора напряжений, а в качестве параметра q упрочнения выберем параметр Удквиста, считая, что обобщенную кривую $\sigma_u = \Phi(q)$ можно построить по диаграмме деформирования материала, найденной из опытов.

Приращения пластических деформаций запишем в виде [2, 3]

$$d\varepsilon_x^p = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma) d\sigma_i, \quad d\varepsilon_y^p = F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_y - \sigma) d\sigma_i, \quad d\gamma_{xy}^p = F_\sigma(\sigma_i) \tau_{xy} d\sigma_i, \quad (4)$$

$$\text{где } \sigma_i = \sqrt{(1 - \mu + \mu^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \sigma_x \sigma_y (1 + 2\mu - 2\mu^2) + 3\tau_{xy}^2}, \\ \sigma = (1 + \mu)/3 (\sigma_x + \sigma_y). \quad (5)$$

Значение функции $F_\sigma(\sigma_i)$ может быть найдено с помощью обычной кривой деформирования и определено по формуле [2, 3],

$$F_\sigma(\sigma_i) = \begin{cases} 3/(2\sigma_i)(1/E_k - 1/E), & \sigma_i > \sigma_i^1, \\ 0, & \sigma_i < \sigma_i^1, \end{cases} \quad (6)$$

где σ^1_i - интенсивность напряжений, соответствующая по кривой деформирования пластической деформации ε_{ii}^P , накопленной к началу рассматриваемого этапа нагружения $\varepsilon_{ii}^P = \int d\varepsilon^P$, $E_k = \partial \sigma_i(\varepsilon_i) / \partial \varepsilon_i$.

Здесь интенсивность дифференциалов пластической деформации вычисляется по формуле

$$d\varepsilon^P = 2/3 \sqrt{(d\varepsilon_x^P)^2 + (d\varepsilon_y^P)^2 - d\varepsilon_x^P d\varepsilon_y^P + (d\gamma_{xy}^P)^2} \quad (7)$$

Подставив (3) и (4) в (2), получим уравнения состояния пластически деформируемой среды по теории течения:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= 1/E [(1 - \mu^2) d\sigma_x - \mu(1 + \mu) d\sigma_y] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma) d\sigma_i, \\ d\varepsilon_y &= 1/E [(1 - \mu^2) d\sigma_y - \mu(1 + \mu) d\sigma_x] + F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_y - \sigma) d\sigma_i, \\ d\gamma_{xy} &= 1/G d\tau_{xy} + F_\gamma(\sigma_i) \tau_{xy} d\sigma_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Численное решение рассматриваемой задачи проведем методом дополнительных деформаций [2 - 4]. Согласно этому методу решение задачи проводится поэтапно в смысле нагружения. При этом реальный процесс нагружения – разгрузки материала аппроксимируется квазистатическим процессом, в котором изменение нагружающего параметра ассоциируется с изменением времени. В качестве нагружающего параметра выберем перемещение v в центре отверстия выпуска материала, а в роли начального приближения решения задачи возьмем решение этой же задачи, но при закрытом выпускном отверстии.

Согласно технике применения метода дополнительных деформаций выполним интегрирование соотношений (8) по времени для n -го этапа нагружения, в результате получим:

$$\begin{aligned} \Delta_n \varepsilon_x &= 1/E [(1 - \mu^2) \Delta_n \sigma_x - \mu(1 + \mu) \Delta_n \sigma_y] + \Delta_n \varepsilon_x^P, \\ \Delta_n \varepsilon_y &= 1/E [(1 - \mu^2) \Delta_n \sigma_y - \mu(1 + \mu) \Delta_n \sigma_x] + \Delta_n \varepsilon_y^P, \quad \Delta_n \gamma_{xy} = 1/G \Delta_n \tau_{xy} + \Delta_n \gamma_{xy}^P, \\ \text{где } \Delta_n \varepsilon_x^P &= \langle \varepsilon_x^{pn} \rangle d\sigma_i, \quad \Delta_n \varepsilon_y^P = \langle \varepsilon_y^{pn} \rangle d\sigma_i, \quad \Delta_n \varepsilon_{xy}^P = \langle \varepsilon_{xy}^{pn} \rangle d\sigma_i, \end{aligned} \quad (9)$$

при этом под $\langle \varepsilon_x^{pn} \rangle$, $\langle \varepsilon_y^{pn} \rangle$, $\langle \varepsilon_{xy}^{pn} \rangle$ понимается среднее значение величин

$$\varepsilon_x^P = [F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma)]_n, \quad \varepsilon_y^P = [F_\sigma(\sigma_i)(\sigma_y - \sigma)]_n, \quad \gamma_{xy}^P = F_\gamma''(\sigma_i) \tau_{xy}'' . \quad (10)$$

Разрешив соотношения (8) относительно приращений напряжений и учитывая равенство нулю объемной пластической деформации, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_n \sigma_x &= (\lambda + 2G) \Delta_n \varepsilon_x + \lambda \Delta_n \varepsilon_y - 2G \Delta_n \varepsilon_x', \\ \Delta_n \sigma_y &= (\lambda + 2G) \Delta_n \varepsilon_y + \lambda \Delta_n \varepsilon_x - 2G \Delta_n \varepsilon_y', \quad \Delta_n \tau_{xy} = G \Delta_n \gamma_{xy} - G \Delta_n \gamma_{xy}^P . \end{aligned} \quad (11)$$

Для вычисления приращений напряжений, деформаций и перемещений на каждом этапе нагружения построим процесс последовательных приближений. Первоначально приращения перемещений будем вычислять по напряженно-деформированному состоянию предыдущего этапа, затем будем полагать

$$\langle \Delta u^n \rangle = \frac{1}{2} (\Delta u^{n-1} + \Delta u^n), \quad \langle \Delta v^n \rangle = \frac{1}{2} (\Delta v^{n-1} + \Delta v^n), \quad \langle \varepsilon_x^{pn} \rangle = \frac{1}{2} (\varepsilon_x^{pn-1} + \varepsilon_x^{pn}), \quad (12)$$

и расчет будет повторяться до тех пор, пока значения приращений перемещений и пластических деформаций на смежных итерациях не окажутся достаточно близкими.

Если подставить соотношения (11) в уравнения (1) и использовать при этом соотношения аналогичные соотношениям Коши, связывающие приращения компонент деформации с приращениями перемещений, то можно получить систему дифференциальных уравнений для последних. Решение этой системы относительно приращений перемещений проводилось методом конечных разностей, для чего была поставлена соответствующая краевая задача. Краевые условия для указанной системы определялись следующим образом (см. рис. 1): на границе LM и EN: $\Delta_n \tau_{xy} = 0$, $\Delta_n \sigma_y = 0$ – свободная поверхность; на границе MN: $\Delta_n u = 0$, $\Delta_n \tau_{xy} = \operatorname{tg} \psi \Delta_n \sigma_x$ – шероховатая стенка, ψ – угол трения; на границе EO: $\Delta_n u = 0$, $\Delta_n v = 0$ – абсолютно шероховатая стенка; на границе OL: $\Delta_n u = 0$, $\Delta_n \tau_{xy} = 0$ – идеально гладкая стенка. Конечно-разностная краевая задача (КРКЗ) решалась методом верхней релаксации.

По приведенным выше формулам вычисления проводились в следующей последовательности. Предварительно определялись исходные данные задачи: задавались геометрические характеристики a , b , c области решения, механические характеристики материала E , μ , ψ , σ_1^t , σ_2^t , σ_3^t , σ_4^t и зависимость $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ в аналитической форме или таблично. Далее задавались начальные значения всех величин, принимающих участие в вычислениях – u , v , Δu , Δv , ε_x , σ_x , ε_x^p , e^p , ... Затем, решалась упругопластическая задача при закрытом отверстии, т.е. на всей границе ON принимались условия $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. При этом нагружение собственным весом осуществлялось не сразу, а поэтапно – за m – этапов. Алгоритм решения этой задачи является частным случаем алгоритма задачи истечения и поэтому отдельно его описывать не будем, тем более, что разгрузка отдельных элементов материала при нагружении собственным весом принципиально невозможна. Под элементом материала здесь и далее понимается достаточно большая совокупность отдельных зерен в окрестности узла (i, j) .

Решение задачи при закрытом отверстии будем считать первым этапом решения задачи истечения. Определение компонент решения u_2 , v_2 , $2\varepsilon_x$, ... $2\sigma_x$, ... , $2e^p$ (индексами внизу условимся отмечать номер этапа нагружения, а индексами вверху, слева или справа – номер итерации метода последовательных приближений) на втором этапе проводились по формулам

$$u_2 = u_1 + \Delta_2 u, \quad v_2 = v_1 + \Delta_2 v, \quad 2\varepsilon_x = {}_1\varepsilon_x + \Delta_2 \varepsilon_x, \dots \quad 2\sigma_x = {}_1\sigma_x + \Delta_2 \sigma_x, \dots \quad 2e^p = {}_1e^p + \Delta_2 e^p \quad (13)$$

и следующей схеме.

По найденным на первом этапе дополнительным деформациям, при $\Delta p=0$, открытом отверстии и заданным значениям $(\Delta_2 v)_{i,0}$ по некоторому закону (линейному или синусоидальному, i – соответственно точкам отверстия) находилось решением КРКЗ первое приближение $\Delta_2 u^1$, $\Delta_2 v^1$, затем по

формулам – аналогам соотношений Коши определялись соответствующие им величины $\Delta_2 \varepsilon_x^1, \dots$, далее, по ним и формулам (11) при $\Delta_2^1 \varepsilon_x^P = 0, \dots$ вычислялись $\Delta_2 \sigma_x^1, \dots$, после чего – величины $\Delta_2 \sigma_x^1 = \sigma_x + \Delta_2 \varepsilon_x^1, \dots$, по ним и формуле (5) вычислялись интенсивность напряжений σ_i (теоретическая).

Далее по формуле (3) определялись приращения упругих деформаций $\Delta_2^1 \varepsilon_x^e, \dots$, затем – приращения пластических деформаций $\Delta_2^1 \varepsilon_x^P = \Delta_2^1 \varepsilon_x - \Delta_2^1 \varepsilon_x^e, \dots$, и по ним и формуле (7) вычислялась интенсивность $\Delta_2^1 d\sigma^P$ дифференциалов пластических деформаций. После чего, определялось значение интенсивности $\Delta_2^1 e_p^1 = e_p + \Delta_2^1 d\sigma^P$, и, наконец, значение интенсивности полных деформаций e_i по формуле

$$\Delta_2^1 e_i^1 = \sigma_i / \sqrt{3} + \Delta_2^1 e_p^1.$$

При этом знак «+» или «-» для σ_i выбирался (также как и для $\Delta_2^1 d\sigma^P$) исходя из знака объемной деформации $\theta = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2$, именно, если $\theta > 0$ (т.е. и $\sigma > 0$, что соответствует растяжению элемента материала), то принимался знак «-», в противном случае, при сжатии элемента материала – знак «+».

Далее вычислялось приращение интенсивности деформаций $\Delta e_i = \Delta_2^1 e_i^1 - e_i$ и затем включался алгоритм учета истории нагружения элемента сыпучего тела, который выдавал значение σ_i^d интенсивности напряжений соответствующее кривой деформирования найденной опытным путем и значение производной $E_k = \partial \sigma_i(\varepsilon_i) / \partial \varepsilon_i$ – модуль упрочнения, затем по формулам (6) и (10) определялись величины $\Delta_2^1 \varepsilon_x^P, \dots$, и по ним и формулам (11) и (9) перепределялись дополнительные деформации $\Delta_2^1 \varepsilon_x^P, \dots$, причем $d\sigma_i$ вычислялось как $d\sigma_i = \Delta_2^1 \sigma_i^d - \sigma_i^d$.

После чего с найденными значениями $\Delta_2^1 \varepsilon_x^P$ выполнялась вторая итерация процесса последовательных приближений и, затем вычисления повторялись в описанном порядке до тех пор, пока различия в значениях $\Delta_2^{n-1} \varepsilon_x^P, \dots, \Delta_2^n \varepsilon_x^P, \dots$ оказывались меньше требуемой погрешности, после чего по формулам (13) и находились компоненты решения на втором этапе выгрузки бункера (втором этапе нагружения). Третий этап начинался с решения КРКЗ при $\Delta_2 \varepsilon_x^P, \dots$ и нахождения $\Delta_3^1 u, \Delta_3^1 v$, далее процесс повторялся до значений u^n, v^n , при которых сохранялся физический смысл получаемого решения.

В заключение отметим, что при учете истории нагружения элемента материала были использованы пределы текучести при растяжении-сжатии динамически уложенного сыпучего тела наряду с таковыми для материала с естественной (насыпью) укладкой зерен [5]. Под динамической укладкой понимается следующее. Предполагается, что при течении материала его зерна, стремясь занять устойчивое положение, ориентируются длинными осями и утолщенными частями по направлению к отверстию и, двигаясь к нему, сближаются (регулярно укладываются), увеличивая тем самым плотность материала и пределы текучести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркушин А.Г. К построению модели истечения сыпучего материала // Математика, механика и их приложения :Материалы науч.-практ. конф. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1998. С. 58.
2. Биргер И.А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Сер. механика. 1965. №2. С. 113 - 119.
3. Биргер И.А. Теория пластического течения при неизотропическом нагружении // Изв. АН СССР. Сер. механика и машиностроение. 1964. №1. С. 193.
4. Шевченко Ю.А. Термопластичность при переменных нагрузлениях., Киев :Наукова думка, 1970.
5. Маркушин А.Г. Об алгоритме учета истории нагружения в задаче истечения сыпучего материала // Математика, механика и их приложения :Материалы науч.-практ. конф. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1998. С. 56.

УДК 539.3

В. А. Крысько, Л. Ф. Вахлаева, Т. В. Вахлаева

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ И БИФУРКАЦИЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ ВДОЛЬ СТОРОНЫ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

За исходные уравнения приняты уравнения Маргера-Власова-Муштари:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial w}{\partial t} = & -\frac{1}{12(1-\nu^2)} \left[\lambda^{-2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - P_x \right] - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - P_y \right] + q; \\ \lambda^{-2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = & -\frac{1}{2} L(w, w), \end{aligned}$$

где $L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

Рассматриваются колебания при $\epsilon = 1$ квадратной пластинки из изотропного материала ($\nu = 0.3$), у которой часть границы, а именно $\{0 \leq x \leq 0.5, y = 1\}$, защемлена, а оставшийся контур – шарнирно-оперт под действием продольной нагрузки $P_x = P_0 \sin \omega t$. Из вариационных принципов в точке разрыва получены условия согласования [1]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

Алгоритм построен следующим образом: уравнения в частных производных сводятся с помощью метода конечных разностей повышенного порядка точности $O(h^4)$ к системе линейных алгебраических уравнений относительно функции F , которая на каждом шаге по времени решается методом верхней релаксации, и системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно прогиба w , которая решается методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Начальные условия выбираются следующим образом: методом установления решается задача при заданных краевых условиях под действием малой поперечной нагрузки и $\varepsilon = 70$ (коэффициент при \dot{w} в уравнениях Маргера-Власова-Муштари). Величина нагрузки q выбирается такой, чтобы значение прогиба в центре было меньше 0.001. Полученное поле прогибов $w_{i,j}^{(0)} (i, j = \overline{1, n})$ принимается за начальное состояние при $t = 0$:

$$w|_{t=0} = w_{i,j}^{(0)} (i, j = \overline{1, n}), \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Рассматриваются сложные колебания и бифуркации с позиции качественной теории дифференциальных уравнений. Для этого строятся обобщенные трехмерные фазовые и обобщенные трехмерные модальные фазовые портреты, сечения Пуанкаре, зависимости $w(t)$. Также строятся аналогичные интегральные характеристики. С помощью быстрого преобразования Фурье строится график зависимости $A(\omega)$ и спектр мощности. Для выявления пространственного хаоса предложено некоторое обобщение показателей Ляпунова.

Исследование всего вышеперечисленного комплекса позволяет описать сценарий появления ряда бифуркаций, появление двухмерных и трехмерных торов и проанализировать весь сценарий динамического поведения пластиинки в зависимости от управляющего параметра P_0 . Показано, что возможны случаи последовательного разрушения и восстановления двухмерных и трехмерных торов. Получен сценарий перехода системы в состояние хаоса, как пространственного, так и временного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вахлаева Л.Ф., Крысько В.А. Устойчивость гибких пологих оболочек прямоугольных в плане с разными вдоль стороны граничными условиями // Изв. вузов. Сер. строительство и архитектура. 1984. № 4. С. 21 - 25.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КВАТЕРНИОННЫМИ И КЛАССИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ОРБИТЫ¹

В статье выводятся соотношения, связывающие между собой классические элементы орбиты (a - большая полуось, e - эксцентриситет, i - наклон орбиты, Ω - долгота восходящего узла, ω - угловое расстояние перицентра от узла) и кватернионные [1] или векторные [2] элементы орбиты для возмущённого движения по траектории эллиптического типа.

1. Для регуляризации уравнений движения точки массы m под действием силы гравитационного притяжения к центру с массой M (полагается $M >> m$) и управляющей или возмущающей силы mp используются переменные Кустаанхеймо-Штифеля (KS-переменные) $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$, которые связаны с радиусом вектором точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и её вектором скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ соотношениями [2, 3] :

$$\mathbf{x} = P^T(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = 2r^{-1} P^T(\mathbf{u}) \mathbf{s}, \quad r = |\mathbf{x}| = u^2, \quad (1.1)$$

$$P^T(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & -u_2 & -u_3 \\ -u_3 & u_2 & u_1 & -u_0 \\ u_2 & u_3 & u_0 & u_1 \end{vmatrix}.$$

Векторные или кватернионные элементы орбиты $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ в случае движения точки по траектории эллиптического типа, когда полная энергия единицы массы $h = 0.5v^2 - \gamma Mr^{-1} < 0$, (γ - гравитационная постоянная), связаны с KS-переменными соотношениями [2]

$$\mathbf{u} = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \\ \mathbf{s} = (-A \sin \varphi + B \cos \varphi)(0.5\gamma M Q^{-1})^{1/2}, \quad Q = A^2 + B^2, \quad (1.2)$$

где 2φ - обобщённая эксцентрическая аномалия. В случае отсутствия возмущений ($p \equiv 0$) \mathbf{A} и \mathbf{B} сохраняют постоянные значения. Если управляющие или возмущающие силы малы по сравнению с силами гравитационного притяжения к центру, то векторные элементы орбиты оказываются медленно изменяющимися переменными. Это позволяет уменьшить объём вычислений при решении задач управления с использованием векторных элементов орбиты.

2. По положению и скорости точки можно определить оскулирующую орбиту, по которой двигалась бы точка только под действием силы притяжения к центру. В работе [2] имеются соотношения, которые связывают KS-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, коды проектов 96-01-01251 и 99-01-00192.

переменные с классическими элементами орбиты. Используя эти соотношения, можно получить формулы для определения большой полуоси и эксцентриситета через векторные элементы орбиты

$$a = 0.5Q, \quad e = [(A^2 - B^2)^2 + 4(A, B)^2]^{1/2} Q^{-1}. \quad (2.1)$$

Трёхмерные векторы V, U, W вводятся соотношениями

$$V = P^T(A)A, \quad U = P^T(B)B, \quad W = P^T(A)B. \quad (2.2)$$

Единичные векторы C, D , расположенные в плоскости оскулирующей орбиты, среди которых C направлен наperiцентр орбиты, а D - по вектору скорости, которую имела бы точка, находясь в перицентре, определяются по формулам

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{2ae} (V + U), \\ D &= \frac{1}{2a^2 e \sqrt{1-e^2}} [(A, B) (V - U) - (A^2 - B^2) W]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Координаты векторов C и D связаны с угловыми элементами орбиты соотношениями [2]

$$\begin{aligned} C_1 &= \cos\Omega \cos\omega - \sin\Omega \sin\omega \cos i, \\ C_2 &= \sin\Omega \cos\omega + \cos\Omega \sin\omega \cos i, \quad C_3 = \sin\omega \sin i, \\ D_1 &= -\cos\Omega \sin\omega - \sin\Omega \cos\omega \cos i, \\ D_2 &= -\sin\Omega \sin\omega + \cos\Omega \cos\omega \cos i, \quad D_3 = \cos\omega \sin i. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если оскулирующая орбита является круговой, то согласно (2.1)

$$e = 0, \quad a = A^2 = B^2, \quad (A, B) = 0. \quad (2.5)$$

В этом случае единичный вектор K , перпендикулярный к плоскости орбиты, определяется векторным произведением

$$K = [V, W] a^{-2}. \quad (2.6)$$

Координаты вектора K связаны с угловыми элементами орбиты i и Ω соотношениями

$$K_1 = \sin i \sin\Omega, \quad K_2 = -\sin i \cos\Omega, \quad K_3 = \cos i. \quad (2.7)$$

3. Если ввести мнимые единицы Гамильтона j_1, j_2, j_3 , то все четырёхмерные вектора можно интерпретировать как кватернионы. В частности, кватернионный элемент орбиты A и сопряжённый к нему кватернион \bar{A} будут иметь вид

$$A = A_0 + j_1 A_1 + j_2 A_2 + j_3 A_3, \quad \bar{A} = A_0 - j_1 A_1 - j_2 A_2 - j_3 A_3. \quad (3.1)$$

Трёхмерные вектора можно интерпретировать как кватернионы с нулевой скалярной частью. Тогда всё содержание п.п. 1 и 2 можно изложить с использованием кватернионов и операций над ними. Кватернионы V, U, W можно представить в виде

$$V = \bar{A} \bullet j_1 \bullet A, \quad U = \bar{B} \bullet j_1 \bullet B, \quad W = \bar{A} \bullet j_1 \bullet B, \quad (3.2)$$

где символ \bullet обозначает кватернионное умножение. Кватернион K и скалярное произведение векторов (A, B) можно представить в виде

$$K = \text{vect}(V \bullet W) a^{-2}, \quad (A, B) = \text{scal}(\bar{A} \bullet B), \quad (3.3)$$

где $\text{scal}(\dots)$ и $\text{vect}(\dots)$ - обозначают скалярную и векторную части кватерниона соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I, II // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 6. С. 759 - 770; 1993. Т. 31, вып. 3. С. 3 - 15.
2. Stiefel E.L., Scheifele G. Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin : Springer, 1971.
3. Сапунков Я.Г. Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космические исследования. 1996. Т. 34, вып. 4. С. 428 - 433.

УДК 301.51.17.07.05

О. М. Сапункова

ПРИМЕР МГД-ТЕЧЕНИЯ С ДВУМЯ ХАРАКТЕРНЫМИ СКОРОСТЯМИ

1. Пусть две плоские струи идеальной плазмы с общей линией симметрии Ox движутся навстречу друг другу в магнитном поле, силовые линии которого параллельны линиям тока.

Считается, что движение установившееся, адиабатическое, внешнее электрическое поле отсутствует, энтропия постоянна во всём потоке. Для магнитного поля выполняется условие $\text{rot}[\nu(1-s)] = 0$, где ν - вектор скорости плазмы,

$$s = s_0(1-\tau)^\beta \quad (1)$$

- число Альвена,

$$s_0 = \mu \kappa^2 \rho_0, \quad (2)$$

μ -магнитная проницаемость, $\kappa = H/(\rho v) = \text{const}$, H - напряжённость магнитного поля, ρ - плотность, ρ_0 - плотность в точке остановки, $\tau = (v/v_{\max})^2$, v_{\max} - максимальная скорость, $\beta = (\gamma-1)^{-1}$, γ - показатель адиабаты.

Если $s_0 \leq 1$, то рассматриваются дозвуковые струи, а при $s_0 > 1$ рассматриваются струи с догиперкритическими скоростями.

Вдоль оси Ox слева направо движется струя плазмы, которая на бесконечности имеет ширину $2h_1$, скорость V_1 , плотность ρ_1 , а справа налево движется струя плазмы с соответствующими значениями $2h_2$, V_2 , ρ_2 на бесконечности. После соударения образуются две симметричные струи, направления которых в бесконечности составляют углы $\pm\theta_0$ с осью Ox . Значение θ_0 определяется из уравнения импульсов:

$$\cos\theta_0 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}. \quad (3)$$

Линия раздела L , симметричная относительно оси Ox и проходящая через точку остановки O (начало координат), делит всё течение на две области D_1 и D_2 .

Пусть давление во внешней среде постоянно и равно p . Обозначим через ρ' , ρ_0' , v' , τ' , s' , H' значения ρ , ρ_0 , v , τ , s , H в области D_1 , а через ρ'' , ρ_0'' , v'' , τ'' , s'' , H'' - те же значения в области D_2 . При этом

$$\tau' = \frac{v'^2}{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0'}{\rho_0}}, \quad \tau'' = \frac{v''^2}{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0''}{\rho_0''}}, \quad (4)$$

где p_0 - давление в точке остановки.

Из уравнения адиабаты и интеграла Бернулли получаются следующие соотношения вдоль линии раздела L :

$$\frac{\rho'}{\rho_0'} = \frac{\rho''}{\rho_0''}, \quad \tau' = \tau'', \quad \rho' v'^2 = \rho'' v''^2. \quad (5)$$

При удалении в бесконечность вдоль L эти соотношения переходят в равенства

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\rho_2}{\rho_0''}, \quad \tau_1 = \tau_2, \quad \rho_1 V_1^2 = \rho_2 V_2^2. \quad (6)$$

Если магнитная проницаемость μ одинакова для обеих струй, то из формул (1) и (2) имеем для областей D_1 и D_2 :

$$s' = s_0'(1-\tau')^\beta, \quad s_0' = \mu \kappa_1^2 \rho_0', \quad s'' = s_0''(1-\tau'')^\beta, \quad s_0'' = \mu \kappa_2^2 \rho_0'', \quad (7)$$

где κ_1 , κ_2 - значения постоянной κ в областях D_1 и D_2 . Если на линии раздела ток отсутствует, то при переходе через L касательная составляющая вектора H непрерывна: $H' = H''$. Подставляя в это равенство выражение $H = \kappa \rho v$ и используя (5), получим на L :

$$\kappa_1^2 \rho_0' = \kappa_2^2 \rho_0''$$

откуда, согласно (7)

$$s_0' = s_0'' = s_0, \quad s' = s_0(1-\tau')^\beta, \quad s'' = s_0(1-\tau'')^\beta. \quad (8)$$

2. В плоскости годографа τ , θ , где θ - угол наклона вектора скорости к оси Ox , часть течения, соответствующая значениям $\theta > 0$, представлена областью

$$0 \leq \tau \leq \tau_1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (9)$$

Пусть ψ' - значение функции тока в области D_1 , а ψ'' - соответствующее значение в области D_2 . Введём функцию ψ , определённую во всей области течения так, что

$$\psi' = a' \psi, \quad \psi'' = a'' \psi, \quad (10)$$

где a' , a'' - постоянные, определяемые из условий (5), (6),

$$a' = (V_1/V_2)^{1/2}, \quad a'' = (V_2/V_1)^{1/2}. \quad (11)$$

Тогда задача сводится к нахождению в области (9) решения уравнения [1]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{2\tau(1-s)^2}{(1-\tau)^{\beta-1}[(1-\tau)(1-s)+2\beta s\tau]} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\} = \frac{\tau(2\beta+1)-1}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} (1-s) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (12)$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \psi &= 0 && \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_1, \theta = 0, \theta = \pi, \\ \psi &= Q_1 d'' && \text{при } \tau = \tau_1, 0 < \theta < \theta_0, \\ \psi &= Q_2 d' && \text{при } \tau = \tau_1, \theta_0 < \theta < \pi, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$Q_1 = V_1 h_1 \rho_1 / \rho_0', \quad Q_2 = V_2 h_2 \rho_2 / \rho_0''.$$

Решение краевой задачи (12), (13) ищется методом Фурье. Оно имеет вид

$$\psi(\tau, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_{n/2}(\tau) \sin n\theta, \quad (14)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \frac{1}{Z_{n/2}(\tau_1)} \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \left[Q_1 + (-1)^n \frac{V_1}{V_2} Q_2 - \left(Q_1 + \frac{V_1}{V_2} Q_2 \right) \cos n\theta_0 \right], \quad (15)$$

функция $Z_{n/2}(\tau)$ есть решение уравнения

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\tau(1-s)^2 \frac{d}{d\tau} Z_{n/2}(\tau)}{(1-\tau)^{\beta-1}[(1-\tau)(1-s)+2\beta s\tau]} \right\} = \frac{1-\tau(2\beta+1)}{\tau(1-\tau)^{\beta+1}} (1-s) \frac{n^2}{4} Z_{n/2}(\tau). \quad (16)$$

После перехода на физическую плоскость определяются границы обеих струй. Для левой струи имеем:

$$x = C_1 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} b_n C_n, \quad y = h_1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} b_n d_n. \quad (17)$$

Для правой струи:

$$x = C_1 + (h_1 + h_2) \sin \theta_0 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} b_n C_n, \quad y = h_2 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} b_n d_n. \quad (18)$$

Здесь C_1 - постоянная, а остальные коэффициенты определяются по формулам:

$$b_n = [h_1 + (-1)^n h_2 - (h_1 + h_2) \cos n\theta_0] \Delta_{n/2}(\tau),$$

$$C_n = \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} + \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}, \quad d_n = \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1}. \quad (19)$$

Функция $\Delta_{n/2}(\tau)$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} \tau(1-\tau)(1-s) \frac{d\Delta_{n/2}(\tau)}{d\tau} + \beta\tau\Delta_{n/2}(\tau) + \frac{n}{2}[(1-\tau)(1-s) + 2\beta s\tau]\Delta_{n/2}^2(\tau) = \\ = \frac{n}{2}[1 - \tau(2\beta + 1)](1-s). \end{aligned} \quad (20)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С.В., Сапункова О.М. Уравнение типа Чаплыгина в магнитной газодинамике //Изв. вузов. Сер. математика. 1969. Вып. 6. С.78 - 85.

УДК 533.6.011

Г. Д. Севостьянов

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНЫЕ ЧЕРЕЗ ОКОЛОЗВУКОВОЙ СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ

Уравнения Фальковича-Кармана для двумерных безвихревых околозвуковых течений идеального газа [1] ($\omega=0$ и $\omega=1$ соответственно для плоского и осесимметричного течений)

$$u u_x = v_y + \omega \frac{v}{y}, \quad v_x = u_y \quad (1)$$

на скачке уплотнения $x = h(y)$ задают два условия [1]

$$h'(y) = -\frac{[v]}{[u]} = -\frac{[u^2/2]}{[v]}, \quad (2)$$

где $[f]$ – разность значений функции f на сторонах скачка. Для однопараметрических решений (u, v, x – функции y и параметра p ; $x_p \neq 0$) приведём (1), (2) к дивергентной форме

$$\begin{aligned} (y^\omega C_*)_p &= (y^\omega x_p v)_y, \quad C_{**p} = (x_p u)_y, \\ C_* &= \frac{u^2}{2} + x_y v, \quad C_{**} = v + x_y u \end{aligned} \quad (3)$$

и условиям на скачке

$$\left(\frac{dp}{dy} \right)_{sh} = -\frac{[C_*]}{[x_p u]} = -\frac{[C_*]}{[x_p v]}.$$

В случае изопараметрического скачка ($dp = 0$ вдоль него) функции $C_*(p, y)$ и $C_{**}(p, y)$ непрерывны всюду (и через скачок). Структурная функция $S(p, y)$ вводится [2] структурной формулой $u = S x_p + x_y^2$, при этом $x_p^2 S^2 = C_{**}$ – непрерывная всюду функция. Свойство непрерывности

C_* , C_{**} , C_{***} подтверждается на примерах О.С. Рыжова (1967) и автора (1969) для параболического и кубического скачка соответственно.

Для автомодельных решений (1) с показателем n

$$x = py^n, u = y^{2n-2}F(p), v = y^{3n-3}G(p),$$

$$S = y^{n-2}s(p), s(p) = F - n^2 p^2, \sigma = s^2(p)$$

функции C_* , C_{**} , C_{***} имеют вид

$$C_* = y^{4n-4}c_*(p), C_{**} = y^{3n-3}c_{**}(p), C_{***} = y^{4n-4}\sigma(p),$$

$$c_* = \frac{F^2}{2} + npG, c_{**} = G + npF, c_* = (4n-3+\omega)G, c_{**} = (3n-2)F.$$

Они непрерывны через изопараметрический скачок; иногда всюду постоянны: c_* при $n = (3-\omega)/4$; c_{**} при $n = 2/3$. При $\omega = 0$ и $n = 1/2$ постоянна функция $c_* + pc_{**}$. Непрерывная всюду функция $\sigma(p)$ выражается через c_* и c_{**} : $s^2 = \sigma = n^4 p^4 + 2(c_* - np c_{**})$ и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) 2 порядка. F и G выражаются через разрывную на скачке функцию $s(p)$. Сделан расчёт функций c_* , c_{**} , σ для случаев ($\omega = 0$, $n = 4/5$) и ($\omega = 1$, $n = 4/7$) со скачком при звуковом обтекании тел. Недивергентная форма (1) для однопараметрических решений [2]

$$\begin{aligned} y^\omega(Su_p + x_y u_y) &= (y^\omega v)_y, \quad x_p u_y - x_y u_p = v_p, \\ \left[y^\omega(Su_p + x_y u_y) \right]_p &= \left[y^\omega(x_p u_y - x_y u_p) \right]_y, \\ u &= Sx_p + x_y^2 \end{aligned} \quad (4)$$

имеет в B -подклассе решения со звуковой свободной границей ($\omega = 0$)

$$\begin{aligned} S &= y, \quad x = a_0(p) + a_3(p)y^3 \\ u &= \omega_1(p)y + \omega_4(p)y^4; \quad \omega_1 = a'_0, \\ \omega_4 &= a'_3 + 9a_3^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициенты функции $x(p, y)$ удовлетворяют ОДУ

$$\begin{aligned} a_3''' + 48a_3a_3'' + 6a_3'^2 + 432a_3^2a_3' &= 0 \\ a_0''' + 12a_3a_0'' - 12(a_3' + 9a_3^2)a_0' &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Первое ОДУ приведём [2] к уравнению Абеля второго рода

$$a_3' = a_3^2\tau(\eta), \quad \eta = \ln|a_3|, \quad q(\tau) = \tau'(1)$$

$$q\tau \frac{dq}{d\tau} = -\chi(\tau, q), \quad \chi(\tau, q) = q^2 + 7\tau q + 48q + 6(\tau + 8)(\tau + 9). \quad (7)$$

В особой точке $M_1(-8, 0)$ (седло): $\tau = -8$, $a_3 = 1/(8p)$, $a_0 = c_1 p^{1/4} + c_2 p^{5/4}$, $\omega_4 = 1/(64p^2)$, $\omega_1 = a'_0$ решение u имеет два автомодельных решения ($n = 5/3$ при $c_1 = 0$; $n = 3/5$ при $c_2 = 0$) и описывает трансзвуковое тече-

ние: звуковая свободная струя натекает на край заслонки, за которой имеется субкритическое давление.

В особой точке $M_2(-9, 0)$ (узел): $\tau = -9$, $a_3 = 1/(9p)$, $a_0 = c_1 p^{2/3} + c_2 p$, $\omega_4 = 0$, $\omega_1 = a_0$ решение имеет два автомодельных решения ($n = 3/2$ при $c_1 = 0$; $n = 6/5$ при $c_2 = 0$) и описывает течение, когда в звуковую свободную границу струи параллельно ей помещён профиль.

Точки $M_3(0, -12)$ (узел) и $M_4(0, -36)$ (седло) приводят к решению [1] автора (a_3 постоянна; $\omega_4 = 9a_3^2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севостьянов Г.Д. Основы теории околозвуковых течений газа. Саратов :Изд-во Сарат. ун-та, 1987.
2. Севостьянов Г.Д. Структура элементарных околозвуковых решений // Аэродинамика. Саратов :Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 109-117.

УДК 533.6.011

И. А. Чернов

P-РЕШЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВЫХ УРАВНЕНИЙ АЭРОДИНАМИКИ

Построены новые частные решения трансзвуковых уравнений газовой динамики двумерных течений, которые представляются в параметрической форме: как искомые, так и независимые переменные записываются в виде полиномов по параметру с коэффициентами, зависящими от второго параметра. Для коэффициентов получаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые приводятся к нормальному виду.

Трансзвуковая система уравнений в плоском случае имеет вид

$$uu_x - v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0. \quad (1)$$

Здесь u, v приведённые компоненты скорости, x, y - декартовы координаты.

Обсуждаемый метод заключается в представлении u, v, x, y в виде полиномов [1]

$$(u, v, x, y) = \sum_{i=0}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} (u_i(s), v_i(s), x_i(s), y_i(s)) \cdot t^i. \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) даёт систему ОДУ. Интересны такие $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, которые приводят к совместным системам.

Система (1) допускает класс автомодельных решений вида

$$u = y^{2(n-1)}U(\zeta), \quad v = y^{3(n-1)}V(\zeta), \quad \zeta = xy^{-n}, \quad (3)$$

где n – показатель автомодельности.

Будем рассматривать решения (2) с

$$\alpha = 2m, \quad \beta = 3m, \quad \gamma = k + m, \quad \delta = k$$

и обозначать их символом $P(m, k, t^\varepsilon)$. Такие решения являются некоторым обобщением автомодельных с

$$n = 1 + m/k.$$

Третий аргумент в P означает, что в полиномах (2) используются степени с шагом по t^ε .

В качестве примера рассмотрим $P(1, p, t)$. Сначала положим $p = 0$. Представим соответствующее решение в виде, удобном для обобщения

$$\begin{cases} u = u_0 + u_1 t + u_2 t^2, & v = v_0 + v_1 t + t^2 \\ x = x_0 + x_1 t + t^3, & y = y_0. \end{cases}$$

В результате подстановки в (1) получим систему ОДУ

$$u_0' = 3(u_2 u_1^2 - v_1), \quad u_1' = 8u_2^2 u_1, \quad u_2' = 4u_2^3 - 9,$$

$$v_0' = 3u_1(u_2 v_1 - u_0), \quad v_1' = 2u_2^2 v_1 - 6u_2 u_0 - 3u_1^2,$$

$$x_0' = 3u_2 u_1 x_1, \quad x_1' = 2u_2^2 x_1, \quad y_0' = -3x_1.$$

Решение p -го порядка записывается с теми же (u, v) , но с полиномиальными (x, y) в виде

$$x = \sum_{i=0}^{p+1} x_i(s) t^i, \quad y = \sum_{i=0}^{p+1} y_i(s) t^i.$$

Оказалось, что для написания соответствующей системы ОДУ следует воспользоваться следующим рекуррентным правилом перехода от решения $(p-1)$ -го к решению p -го порядка: вычесть из правой части уравнения для x_{p-1} величину $3pu_2 u_1 y_p$, записать в правую часть уравнения с y_{p-1} дополнительное слагаемое $3pu_2 u_1 y_p$, добавить в уравнение с x_p величину $3(p+1)u_2 u_1 x_{p+1} - 5pu_1 y_p$, добавить два новых ОДУ:

$$x_{p+1}' = 2(p+1)u_2^2 x_{p+1} - 3pu_2 y_p,$$

$$y_p' = 2pu_2^2 y_p - 3(p+1)x_{p+1}.$$

Каждое из рассмотренных выше решений ассоциировано со своим автомодельным подклассом, в котором участвуют старшие коэффициенты из полиномов для u, v, x, y и которые образуют нелинейное ядро (самостоятельную подсистему) всей системы ОДУ. Если положить коэффициент $y_k(s)$ равном единице, так что

$$u \sim u_{2m}(s)t^{2m}, \quad v \sim v_{3m}(s)t^{3m}, \quad x \sim x_{kn}(s)t^{kn}, \quad y \sim y^k,$$

то x_{kn} играет роль $\zeta = x/y^n$ - независимого инварианта автомодельных решений. Полезно использовать опыт изучения автомодельных решений, в частности, их изображение на фазовой плоскости (S, T) [2, 3]

$$T = u_{2m} x_{kn}^{-2}, \quad S = \frac{1}{3n-2} (u_{3m} x_{kn}^{-3} + nT), \quad \frac{dT}{dS} = \frac{P(S, T, n)}{Q(S, T, n)},$$

$$P = 2T^2 + (3n-5)nT - (3n-2)(3n-3)S, \quad Q = (n^2 - T)(T - 3S).$$

Изучая конкретное P – решение, полезно следить за соответствующей кривой на плоскости (S, T) . Эта методика продемонстрирована в [4] для $P(1, 1, t^2)$ ассоциированного с $n = 2$ при описании течений в соплах Лаваля с параболической ударной волной.

Занимаясь построением аналитических решений указанных выше систем ОДУ, можно использовать в качестве отправной точки известные автомодельные решения, в том числе и тривиальные. В частности, таковыми являются решения, изображаемые особыми точками на плоскости (S, T) , например, точками C и D , координаты которых определяются как

$$C\left(S = \frac{5n^3}{3(3n-2)}, \quad T = n^2\right), \quad D(S = 2/3, \quad T = 1).$$

Использование точки C в качестве исходного автомодельного решения означает следующий выбор для старших коэффициентов в соответствующем P – решении (a – произвольная постоянная)

$$x_{kn} = a, \quad u_{2m} = (na)^2, \quad v_{3m} = \frac{2}{3}(na)^3.$$

В силу этих равенств подсистема ОДУ для x_{kn}, u_{2m}, v_{3m} оказывается удовлетворённой и необходимо решить укороченную систему ОДУ. Её решение будем называть C – решением и обозначать символом $C(m, k, t^\varepsilon)$ с теми же аргументами, что и в соответствующем P – решении. Заметим, что переход от P к C – решению связан с уменьшением порядка системы на 2, то есть с потерей двух постоянных.

Если в качестве базового автомодельного решения использовать осо- бую точку D в плоскости (S, T) , то получим (a – произвольная постоянная)

$$x_{kn} = a, \quad u_{2m} = a^2, \quad v_{3m} = \left(3n - \frac{8}{3}\right)a^3.$$

Соответствующий подкласс может быть обозначен как $D(m, k, t^\varepsilon)$. Физическое свойство, которое его характеризует, это – выход на течение Прандтля-Майера с поведением $u \sim \left(\frac{x}{y}\right)^2, \quad v \sim \left(\frac{x}{y}\right)^3$ при $y \rightarrow 0$.

Отметим ещё одну возможность, реализуемую при выборе частного решения нелинейного ядра: использовать автомодельное решение, названное

в [3] интегралом Жермена и существующее при любом показателе автомодельности (z - параметр)

$$x_{k,n} = az(z-1), \quad u_{2,m} = (az)^2, \quad v_{3,m} = \frac{2}{3}(az)^3.$$

Соответствующий подкласс может быть обозначен как $G(m, k, t^\varepsilon)$. В [5] обсуждался вопрос о решении системы (1), которое описывает пример обтекания конечного тела звуковым на бесконечности потоком газа (профиль Гудерлея и его осесимметричный аналог). Отметим, используя введенную здесь символику, что речь шла о свойствах подкласса $G(1, 1, t^2)$ решений, которые существуют не только в плоском, но и в осесимметричном случае. Дополнительные подробности можно найти в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севостьянов Г.Д. Примеры околозвуковых течений идеального газа со скачком уплотнения // МЖГ. 1969. №1. С. 49 - 52.
2. Guderley K., Yoshihara H. On Axial – Symmetric Transonic Flow Pattern // Quart. Appl. Math. 1951. Vol. 8, №4. P. 78 - 92.
3. Чернов И.А. Автомодельные решения в околозвуковой газовой динамике // Трансзвуковые течения газа. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1964. С. 63 - 100.
4. Капункин Б.А., Чернов И.А., Шеховцева Е.Ю. Параболические ударные волны в соплах Лаваля // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 65 - 88.
5. Chernov I.A. Parametric representation of exact solutions of the transonic equations // International Workshop on Advances in Analytical Methods in Aerodynamics :Programm and abstracts. Poland, Miedzyzdroje, July, 1993. P. 51 - 54.
6. Чернов И.А. Полиномо-параметрические решения трансзвуковых уравнений // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. С. 91 - 102.

Г. П. Шиндяпин, В. Л. Мыльцин

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И КЛАССИФИКАЦИИ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ГАЗАХ И ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ¹

Исследуются процессы взаимодействия и отражения ударных волн (УВ) в газах и газожидкостных средах, имеющих важное значение для развития сверхзвуковой авиации, космонавтики и др. Рассматриваются взаимодействия УВ относительно малой интенсивности (абсолютная интенсивность УВ при этом может быть велика), когда за фронтами УВ возникают области резких изменений параметров – области коротких волн, и ударные нагрузки возрастают (рис. 1). В этих областях процесс существенно нелинейен, что вызы-

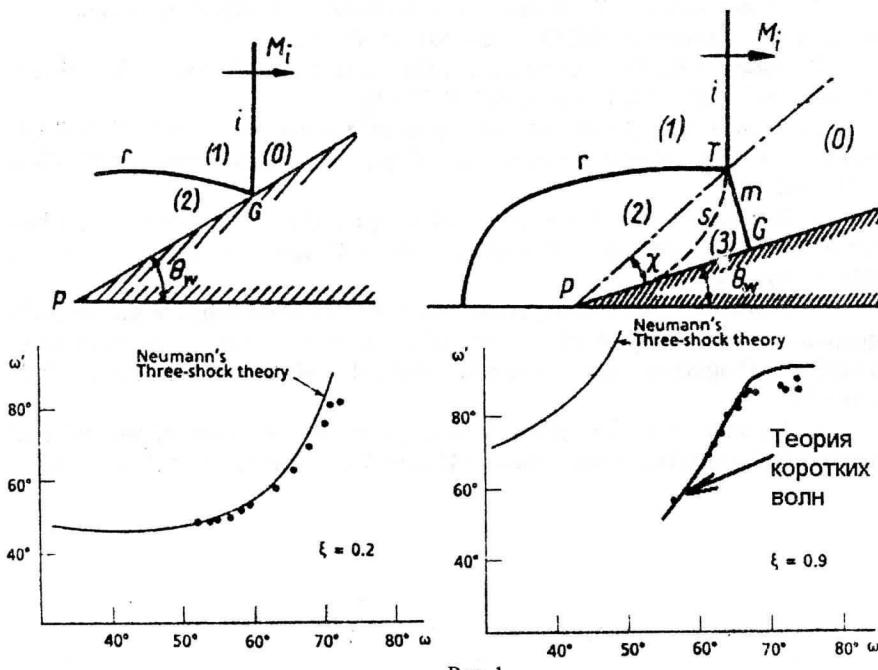


Рис. 1

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00816 и частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-15-96030.

вает серьезные трудности при анализе. В частности, известный парадокс Неймана (слабого маховского отражения) состоит в том, что для относительно слабых УВ теоретические результаты в случае нерегулярного отражения УВ не согласуются с экспериментом (отсутствуют схемы течений с УВ, адекватно описывающие процесс), в то время как для относительно сильных УВ такое согласие наблюдается.

Неизменное внимание к проблеме отечественных (С.А. Христианович, Б.И. Заславский, Г.П. Шинляпин и др.) и зарубежных исследователей (Л.Ф. Хендерсон, Г. Бен-Дор, К. Такаяма и др.) на протяжении более 50 лет привело к появлению разнообразных альтернативных точек зрения на природу противоречия. В частности, при анализе влияния вязкости и теплопроводности на формирование внутренней структуры зон взаимодействия (ветвления) УВ Г.П. Шинляпиным, А.Д. Ковалевым были выяснены качественные различия при зарождении регулярной и нерегулярной структуры, объясняющие появление неклассического условия разрыва поперечной составляющей скорости в тройных точках в случае исчезающей диссипации.

Исторически известны многочисленные попытки подправить локальные 2-х и 3-х ударные теории отражения Неймана, чтобы результаты расчетов согласовались с экспериментом для слабых УВ (V.J. Lighthill (1949), K.J. Guderley (1957), J. Sternberg (1959), L.F. Henderson (1985), P. Collela (1990) и другие). Эти попытки продолжаются и в настоящее время, однако, все явнее вырисовывается необходимость построения теории взаимодействия, отражающей влияние потока в целом на образующиеся ударно-волновые структуры.

Отечественная асимптотическая теория коротких волн [1, 2] позволяет преодолеть эти трудности и предсказать ударно-волновые структуры (рис. 2), параметры потока, соответствующие экспериментальным данным (см. рис. 1). Область А соответствует регулярному режиму взаимодействия 2-х УВ, области В и С – нерегулярному режиму.

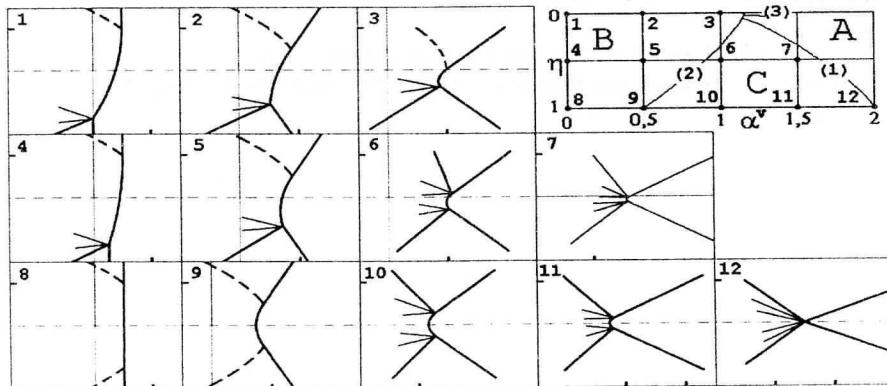


Рис. 2

Нелинейный эффект теории особенно наглядно проявляется в зависимости коэффициента максимального давления при взаимодействии 2-х УВ (рис. 3) от отношения интенсивностей $\eta = P_{20} / P_{10}$ и параметра подобия α^v , учитывающего интенсивность, угол взаимодействия и газосодержание среды.

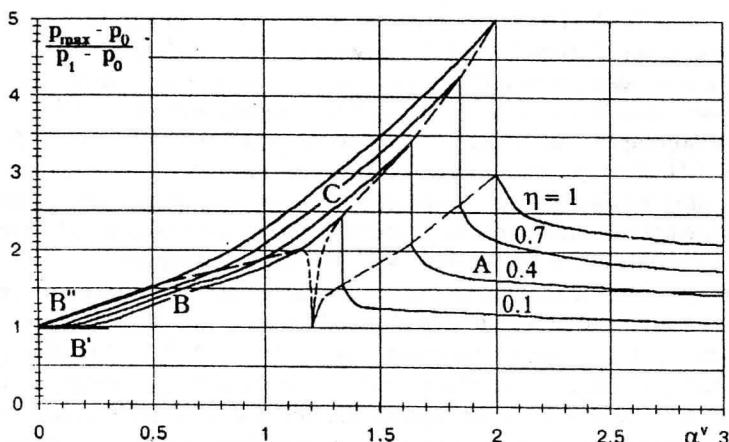


Рис. 3

Согласно линейной теории этот коэффициент равен двум.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шиндягин Г.П., Ковалев А.Д. Математическое моделирование в задачах динамики многофазных сред. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Ч. II.
2. Шиндягин Г.П. Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. МЖГ. 1996. №2. С. 183 - 190.

УДК 519.21

И. А. Батраева

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЛОВАРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ,
НЕПРЕДСТАВИМЫХ КОНЕЧНЫМИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ
АВТОМАТАМИ

Рассмотрим класс словарных отображений $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$. Этот класс разделяется на два подкласса: класс конечно-автоматных отображений и класс неавтоматных отображений. В соответствии с этим разделением в теории автоматов выделяются два подхода к изучению поведения автоматов - 1) изучение свойств отображений, представимых конечными автоматами, 2) изучение свойств отображений, непредставимых конечными автоматами (другими словами, это изучение того, какие пары вход-выходных слов не представимы автоматами).

Автоматные отображения задаются инициальными конечными детерминированными автоматами (КДА) вида $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ (или (A, s_0)), где $|S|=n$, $|X|=m$, $|Y|=k$. Инициальный автомат (A, s_0) задает отображение $\varphi_{(A, s_0)} = \{(p, q) \mid p \in X^* \& q \in Y^* \& |p| = |q| \& \lambda(s_0, p) = q\}$. Автомат A задает автоматное отношение $\Phi_A = \bigcup_{s \in S} \varphi_{(A, s)}$. Будем обозначать класс инициальных

КДА с n состояниями, m входными, k выходными сигналами как $K_{in}(n, m, k)$, и соответственно через $K(n, m, k)$ класс неинициальных КДА. Классу автоматов K соответствует класс отношений $\Phi_K = \{\Phi_A \mid A \in K\}$.

Для классов инициальных автоматов строится иерархия по числу состояний. Этой иерархии будет соответствовать некоторая иерархия классов автоматных отношений, определяемая следующим соотношением:

$$\Phi_{K_{in}(n, m, k)} \subset \Phi_{K_{in}(n+1, m, k)}.$$

При рассмотрении иерархии по состояниям для КДА существенным становится вопрос об определении для заданного произвольного класса автоматов $K(r, m, k)$ является ли он классом $K(n, m, k)$.

Условие отделимости классов определяется следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1 (необходимое и достаточное условие отделимости классов автоматов).

Класс автоматов $K(r,m,k)$, задающий класс автоматных отношений $\Phi_{K(r,m,k)}$, будет классом $K(n,m,k)$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$(\forall x \in X)(\forall y, q \in Y, y \neq q)(x^n, y^{n-1}q) \in \Phi_{K(r,m,k)} \& (x^{n+1}, y^nq) \notin \Phi_{K(r,m,k)}.$$

Доказательство. По определению класса $K(n,m,k)$ найдется автомат A , у которого

$$(\exists x \in X)(\forall s_i, i = \overline{1, n-1}) \delta(s_i, x) = s_{i+1} \& \lambda(s_i, x) = y \& \lambda(s_n, x) = q,$$

то есть граф автономного подавтомата A_x - это цепь длины n , и, следовательно, для входного слова x^n выходная реакция будет $y^{n-1}q$.

Предположим, что на входное слово x^{n+1} некоторый автомат A_x допускает выходное слово y^nq . По определению автономного автомата его граф это либо цикл длины n , либо цепь, заканчивающаяся циклом. Очевидно, что в обоих случаях автомат на $n+1$ такте перейдет в одно из пройденных состояний, и, следовательно, на выходе должен появиться входной символ, уже встречавшийся ранее, что противоречит предположению, так как $y \neq q$ по условию. Так как автомат A произвольный, то пара (x^{n+1}, y^nq) непредставима всеми автоматами данного класса.

$$\text{Следствие. } (\forall n, m, k \in N)(\forall x \in X)(\forall y, q \in Y, y \neq q)(x^{n+1}, y^nq) \notin \Phi_{K(n,m,k)}.$$

Рассмотрим вопрос о виде нереализуемых автоматами вход-выходных пар. Введем следующие обозначения: p - периодическое входное слово, p_0 - его период, т.е. $p = p_0^j$, q - периодическое выходное слово, q_0 - его период, т.е. $q = q_0^j$. Слово p будем называть квазипериодическим, если его можно представить в виде $p = p_0 \nu p_0$, где $p_0, \nu \in X^*$ и $\nu \neq p_0$.

В монографии [1] введен график $\Gamma_A(p) = (S, \varphi)$, где $(s, s') \in \varphi$ тогда и только тогда, когда $\delta(s, p) = s'$. Показано, что если на вход автомата подавать периодическую входную последовательность, то, начиная с некоторого символа, выходная последовательность также становится периодической.

Исследуем вопрос об условиях периодизации выходного слова и вид нереализуемых связей между периодическим словом на входе и выходными словами.

ЛЕММА 1. Пусть на вход автомата $A \in K(n, m, k)$ подается слово $w = \nu p_0$, где $p, \nu \in X^*$, $p = p_0^i$, $i \geq n$. Тогда на выходе автомата A будет получено слово $w' = u'q'qv'$, где $u', q', q, v' \in Y^*$, $|u'| = |u|$, $|v'| = |v|$, $|q'| + |q| = |p|$, $q = q_0^j$, $j \leq n$, и для q', q, q_0 выполняются следующие соотношения:

$$1) |q'| \leq (n-1)|p_0|,$$

$$2) |q_0| = \nu |p|, \text{ где } \nu = \frac{n |p_0| - |q'|}{|p_0|},$$

$$q = \lambda(\delta(s_0, pr_{1...|q|}p), p_0) \lambda(\delta(s_0, pr_{1...|q|+|p_0|}p), p_0) ... \lambda(\delta(s_0, pr_{1...|q|+(v-1)|p_0|}p), p_0),$$

$$3) q = q_o^{\frac{|p|-|q|}{|q_0|}}.$$

Доказательство. Для автомата A и произвольного входного слова p_0 строится в соответствии с [1] граф $\Gamma_A(p_0)$. По теореме 23 [1] о свойствах графа $\Gamma_A(p_0)$ граф $\Gamma_A(p_0)$ это либо цикл, либо цепь оканчивающаяся циклом. В выходном слове появляется периодическая часть после попадания в этот цикл. Тогда длина непериодической части q' выходного слова определяется длиной цепи, так как максимальная длина цепи будет $n-1$ (цикл вырождается в петлю), то $|q'| \leq (n-1)|p_0|$. Периодом выходного слова будет выходная последовательность, получаемая внутри цикла в $\Gamma_A(p_0)$ в результате воздействия входного слова p_0 . Поэтому длина слова-периода q_0 либо равна, либо кратна длине p_0 . Соотношение 3 очевидно - если показатель степени дробный, то последний период в слове q не закончен.

Из определения графа $\Gamma_A(p)$ и теоремы 23[1] следует

ТЕОРЕМА 2. Для любого слова $p = p_0^i, i > n, p_0 \in X^*$, нереализуемой является связь со словом $w \in Y^*, |w|=|p|$, если начиная с $(n-1)|p_0|+1$ символа слово w не становится периодическим, с периодом q_0 , кратным p_0 .

ТЕОРЕМА 3. Для любого слова $p = p_0 x_{j_1} \dots x_{j_\tau} p_0^i, i > 1, \tau \in N, x_{j_\mu} \in X, \mu = \overline{1, \tau}$, связь со словом q является нереализуемой в классе $K(2, m, k)$, если слово q нельзя представить в одном из следующих видов:

$$1) q = q_1 y_{j_1} \dots y_{j_\tau} q_1 q_2^t, t \in \{i-1, (i-1)/2\}, \quad 2) q = q_1 y_{j_1} \dots y_{j_\tau} q_2^t, t \in \{i, i/2\},$$

$$3) q = q_2 y_{j_1} \dots y_{j_\tau} q_1 q_2^t, t \in \{i-1, (i-1)/2\}, \quad 4) q = q_2 y_{j_1} \dots y_{j_\tau} q_2^t, t \in \{i, i/2\},$$

где для 1) - 4) выполняется $|p_0| = |q_1| = |q_2|$, $y_{j_\mu} \in Y, \mu = \overline{1, \tau}$, и

$$x_{j_1}, \dots, x_{j_\tau} \in p_0 \Rightarrow (\forall 1 \leq r \leq \tau) (\exists 1 \leq l \leq |p_0|) (x_{j_r} = p_{l_1} p_0 \& (y_{j_r} = p_{l_2} q_1 \vee y_{j_r} = p_{l_2} q_2))$$

Доказательство. Доказательство основано на том, что автомат с 2 состояниями после подачи на вход первого p_0 либо переходит в состояние, являющееся входом в петлю графа $\Gamma_A(p_0)$, либо движется по петле, либо проходит половину цикла $\Gamma_A(p_0)$, если цикл состоит из двух состояний. Далее анализируется поведение автомата (выходные сигналы) при подаче на вход подслова $x_{j_1} \dots x_{j_\tau}$, на основании этого определяется вид выходного слова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов А.М., Твердохлебов В.А. Диагностика сложных систем.
Киев :Наукова Думка, 1974.

УДК 519.21

Е. В. Елисеева

ОБ ИЗБЫТОЧНОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕСТОВ

В статье приведен анализ нескольких вариантов обобщенных универсальных тестов для параметров $X = \{0,1\}$ и $n = 2$, выделяющих классы автоматов.

Показано, что универсальные тесты допускают сокращение без потери свойства универсальности. Найдена длина сокращенного универсального теста. Кроме этого, рассмотрена структура множеств автоматов, возникающих в процессе распознавания. Полученные в ходе исследований результаты сформулированы в виде леммы.

Определение 1. Универсальный тест $q \in X^*$ называется *тупиковым*, если исключение из него любой буквы дает последовательность, не являющуюся универсальным тестом.

Определение 2. Тупиковый тест наименьшей длины называется *минимальным универсальным тестом*.

ЛЕММА. Для конечных детерминированных автоматов с входным алфавитом $X = \{0,1\}$ и двумя состояниями существует минимальный универсальный тест $q \in X^*$. Минимальный тест не единственен.

Доказательство. Рассматриваются автоматы класса $A_{2,2,2}$. Длина входного слова для распознавания пар автоматов из данного класса автоматов определяется по формуле $m = \frac{1}{2} * n * (n - 1)$, где $n = \sum_{i=1}^2 |S_i| = 4$, то есть

$m = 6$. Тогда длина универсального теста равна $|p| = 2^{6+6-1} = 69$. Покажем, что эта величина может быть уменьшена за счет исключения вхождения некоторых слов.

Построим и проанализируем все варианты распознавания автоматов по реакциям на входные последовательности, являющиеся подсловами универсального теста.

Для этого из универсального теста p выделяются все слова p_{u_1}, \dots, p_{u_v} длины n_1 , т.е. $|p_{u_1}| = \dots = |p_{u_v}| = n_1$. По реакциям на каждое из этих слов автоматы разбиваются на классы следующим образом. Для любого

автомата A_i и отрезка универсального теста p_{u_j} , класс W_i^j состоит из автоматаов, имеющих одинаковую с A_i выходную реакцию на p_{u_j} . Затем прикладываем весь универсальный тест. По выходным реакциям на этот тест автоматы также разбиваются на классы: для любого автомата A_i и универсального теста p класс W_i состоит из автоматаов, имеющих одинаковую с A_i реакцию на p .

Легко показать, что для каждого i из рассматриваемого класса автоматаов либо справедливо равенство $W_i^{n_1} = W_i$, либо найдется такой автомат, для которого будет иметь место неравенство $W_i^{n_1} \neq W_i$.

Равенство $W_i^{n_1} = W_i \forall i \in \{1, \dots, 256\}$ означает, что разбиение на классы словом длины n_1 совпадает с разбиением на классы универсальным тестом, то есть $W_i^{n_1}$ содержит те же автоматы, что и W_i . Неравенство $W_i^{n_1} \neq W_i$ означает, что разбиение на классы не окончено и $W_i^{n_1}$ содержат различимые автоматы. Тогда из универсального теста p выделяются все слова p_{v_1}, \dots, p_{v_v} длины $n_2 = n_1 + 1$. По реакциям на каждое из этих слов автоматы снова разбиваются на классы описанным выше образом и сравниваются с разбиением на классы после приложения универсального теста.

Заметим, что $|W_i^{n_1}| \geq |W_i^{n_2}|$. Действительно, чем больше длина прикладываемого слова, тем больше (или столько же) различных реакций на них можно получить, то есть тем больше (или столько же) классов, следовательно, меньше (или столько же) автоматаов в каждом классе. Другими словами, имеет место $W_i^{n_1} \supseteq W_i^{n_2}$, а значит, $|W_i^{n_1}| \geq |W_i^{n_2}|$.

Процесс увеличения длины входного слова продолжается до прекращения разбиения на классы.

Описанным выше способом были найдены наименьшие по длине слова, после приложения которых прекращается разбиение на классы нераспознаваемых автоматаов. Получены тесты

$$q = p_{u_j} \neq p : W_i^{n_1} = W_i^{n_2} = W_i, |p_{u_j}| = 16.$$

Очевидно, что эти тесты являются минимальными, то есть удовлетворяют условию леммы.

Заметим, что, так как из универсального теста выделялись все слова длины n_1 , затем все слова длины n_2 , и т.д., то такое сокращение не единственно.

Лемма доказана.

Замечание. Так как рассматриваются не инициальные автоматы, то выражение “автоматы A_k и A_i имеют одинаковые выходные реакции на p_{u_j} ”

означает, что множества выходов этих автоматов на данное входное слово совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Твердохлебов В.А. Универсальные генераторы тестов и системы диагностирования // Техническая диагностика. Ростов н/Д, 1982.
2. Твердохлебов В.А. Логические эксперименты с автоматами. Саратов, 1988.

УДК 512.5

О. В. Емельянова

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

В работе [1] рассматривается проблема описания графов, ориентация ребер которых преобразует граф в ориентированную диаграмму некоторого упорядоченного множества (у-множества). Очевидно, что любая ориентация цикла длины n ($n > 3$) за исключением ориентаций, преобразующих цикл в контур или в почти контур (контур с изменением ориентации одной дуги), преобразуют цикл в ориентированную диаграмму конечного у-множества (S, \leq). Будем называть полученный таким образом орграф $у$ -циклом и обозначать C_S . Представляет интерес задача перечисления всевозможных неизоморфных $у$ -циклов длины n . В [2] рассматриваются аналогичные задачи перечисления помеченных объектов в теории графов.

Рассмотрим $у$ -цикл C_S длины n . Выберем в качестве начальной вершиной произвольный источник v_1 . Пусть он является концом максимальных односторонних частей с длинами a_1 и a_m . Сопоставим $у$ -циклу C_S числовую последовательность $\alpha = a_1, a_2, \dots, a_m$, где a_1, a_2, \dots, a_m - длины последовательных максимальных односторонних частей, $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ и $m \geq 2$. Тогда вершина v_2 , являющаяся концом частей с длинами a_2 и a_1 , будет являться стоком и т.д. Таким образом, последовательности a_1, a_2, \dots, a_m соответствует последовательность чередующихся источников и стоков - v_1, v_2, \dots, v_m . Заметим что m - четно, и количество источников и стоков совпадает. Будем называть последовательность b_1, b_2, \dots, b_m двухшаговым сдвигом последовательности a_1, a_2, \dots, a_m , если $b_1 = a_3, b_2 = a_4, \dots, b_{m-2} = a_m, b_{m-1} = a_1, b_m = a_2$ и зеркальной, если $b_1 = a_m, b_2 = a_{m-1}, \dots, b_m = a_1$.

ТЕОРЕМА. У-цикл C_S изоморфен у-циклу C_T тогда и только тогда, когда или сопоставляемые им последовательности совпадают, или существует набор последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ такой, что α_i - двухшаговый сдвиг или зеркальная по отношению к последовательности α_{i-1} , $1 < i \leq k$, где последовательность α_1 сопоставляется у-циклу C_S , а последовательность α_k сопоставляется у-циклу C_T .

Доказательство. Необходимость. Пусть у-цикл C_S изоморфен у-циклу C_T ($C_S \approx C_T$), и $\alpha_1 = a_1, a_2, \dots, a_m$ - последовательность, сопоставляемая у-циклу C_S , с соответствующей последовательностью источниками и стоками v_1, v_2, \dots, v_m . Так как при изоморфизме $\phi: S \leftrightarrow T$ образами источников v_1, v_3, \dots, v_{m-1} будут источники $\phi(v_1), \phi(v_3), \dots, \phi(v_{m-1})$, а образами стоков v_2, v_4, \dots, v_m - стоки $\phi(v_2), \phi(v_4), \dots, \phi(v_m)$, и если b_1 - длина части с концами $\phi(v_1)$ и $\phi(v_2)$, b_2 - длина части с концами $\phi(v_2)$ и $\phi(v_3), \dots, b_m$ - длина части с концами $\phi(v_m)$ и $\phi(v_1)$, то $b_1 = a_1, \dots, b_m = a_m$. Таким образом, если у-циклу C_T сопоставить последовательность b_1, b_2, \dots, b_m , то необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность $\alpha_1 = a_1, a_2, \dots, a_m$ сопоставляется у-циклу C_S , а последовательность $\alpha_k = b_1, b_2, \dots, b_m$ сопоставляется у-циклу C_T , и v_1, v_2, \dots, v_m - последовательность источников и стоков у-цикла C_S , которая соответствует последовательности a_1, a_2, \dots, a_m . Если $\alpha_1 = \alpha_k$, т.е. $b_1 = a_1; \dots, b_m = a_m$, то очевидно, что у-цикл C_S изоморфен у-циклу C_T .

Пусть b_1, b_2, \dots, b_m - двухшаговый сдвиг последовательности a_1, a_2, \dots, a_m . Так как в последовательности a_1, a_2, \dots, a_m на нечетных местах расположены длины частей, концами которых являются источники v_1, v_3, \dots, v_{m-1} , то, выбрав в качестве начальной вершины любой другой источник, мы можем сопоставить у-циклу C_S последовательность, которая является циклическим сдвигом последовательности a_1, a_2, \dots, a_m на четное число элементов. Выберем в качестве начальной вершины источник v_3 . Тогда у-циклу C_S сопоставится последовательность $a_3, a_4, \dots, a_m, a_1, a_2$. Так как $b_1 = a_3, b_2 = a_4, \dots, b_{m-2} = a_m, b_{m-1} = a_1, b_m = a_2$, то $C_S \approx C_T$.

Пусть b_1, b_2, \dots, b_m - зеркальная по отношению к последовательности a_1, a_2, \dots, a_m . Так как v_1 является концом частей с длинами a_m и a_1 , то последовательность a_m, a_{m-1}, \dots, a_1 может быть сопоставлена тому же у-циклу C_S , если в качестве начальной вершины будет выбран тот же источник v_1 . Соответствующая последовательность источников и стоков в этом случае будет следующей: $v_1, v_m, v_{m-1}, \dots, v_2$. Поскольку $b_1 = a_m, b_2 = a_{m-1}, \dots, b_m = a_1$, то $C_S \approx C_T$.

Пусть существует набор последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ такой, что α_i - двухшаговый сдвиг или зеркальная по отношению к последовательности α_{i-1} , $1 < i \leq k$, где последовательность α_1 сопоставляется y -циклу C_S , а последовательность α_k сопоставляется y -циклу C_T . Так как каждая последовательность α_i является либо двухшаговым сдвигом, либо зеркальной по отношению к последовательности α_{i-1} , $1 < i \leq k$, то y -циклы, которым они сопоставляются, - изоморфны. Следовательно, $C_S \approx C_T$.

Теорема доказана.

Получен алгоритм построения всех неизоморфных y -циклов с n вершинами ($n > 3$), использующий алгоритм разбиения числа n на m частей (m - четно) и алгоритм генерации перестановок этих частей [3]. Аналогичная задача для цепей рассматривалась в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rival I. The diagram //Graphs and orders. 1985. P. 103 - 133.
2. Харари Ф., Палмер Э. Перечисления графов. М.: Мир, 1977.
3. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988.
4. Емельянова О.В. Цепные упорядоченные множества – характеристика и перечисления // Теоретические проблемы информатики и её приложений. 1998. Вып. 2. С. 33 - 37.

УДК 519.853

И. В. Златорунская

О РЕДУКЦИИ ЗАДАЧИ РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НОРМЫ К ЗАДАЧЕ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹

Пусть D - заданный выпуклый компакт из конечномерного действительного пространства R^P , функция $n(x)$ удовлетворяет на R^P аксиомам нормы, $\rho(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} n(x - y)$ - уклонение множества A от множества B в норме $n(\cdot)$, $h(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}$ - расстояние Хаусдорфа между множествами A и B из R^P в норме $n(\cdot)$, $Bn(x, r) = \{y \in R^P \mid n(x - y) \leq r\}$ - шар в норме $n(\cdot)$ с центром в точке x радиуса r . Тогда задачу о равномерной

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00048.

оценке выпуклого компакта шаром нормы $n(\cdot)$ в метрике Хаусдорфа, можно записать в виде

$$h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in R^P, r \geq 0} . \quad (1)$$

Такая задача рассматривалась, видимо впервые, в работе М.С. Никольского и Д.Б. Силина [1] для случая, когда $n(\cdot)$ - евклидова норма.

Обозначим через $R(x) = \max_{y \in D} n(x - y)$ - функцию, выражающую радиус

шара наименьшего объема с центром в точке x , содержащего множество D , $\rho_A(x) = \inf_{y \in A} n(x - y)$ - функцию расстояния от точки x до множества A .

Введем функцию $P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x)$, где $\Omega = \overline{R^P \setminus D}$.

Пользуясь неравенством треугольника можно легко доказать следующий факт.

ЛЕММА 1. Для шаров $Bn(x, R)$ и $Bn(x, r)$ при $R > r$ справедливо выражение

$$\rho(Bn(x, R), Bn(x, r)) = R - r.$$

Пользуясь леммой 1 и известными фактами из выпуклого анализа [2, 3], нетрудно доказать следующие три факта.

ЛЕММА 2. Для уклонения компакта D от шара $Bn(x, r)$ справедливо выражение

$$\rho(D, Bn(x, r)) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \geq R(x), \\ R(x) - r, & \text{если } 0 \leq r < R(x). \end{cases}$$

ЛЕММА 3. Пусть $x \in D$. Для уклонения шара $Bn(x, r)$ от компакта D справедливо выражение

$$\rho(Bn(x, r), D) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq r \leq \rho_\Omega(x), \\ r - \rho_\Omega(x), & \text{если } r > \rho_\Omega(x). \end{cases}$$

ЛЕММА 4. Пусть $x \notin D$. Для уклонения шара $Bn(x, r)$ от компакта D справедливо выражение

$$\rho(Bn(x, r), D) = r + \rho_D(x).$$

Пользуясь леммами 2, 3, 4, можно доказать, что справедлива

ЛЕММА 5. Имеет место равенство

$$\min_{r \geq 0} h(D, Bn(x, r)) = h(D, Bn(x, r_0)) = \frac{1}{2}(R(x) + P(x)),$$

где $r_0 = \frac{1}{2}(R(x) - P(x))$.

Следствием леммы 5 является

ТЕОРЕМА 1. Задача (1) эквивалентна задаче

$$\Phi(x) = R(x) + P(x) \rightarrow \min_{x \in R^P} \quad (2)$$

При этом, если пара (x_0, r_0) является решением задачи (1), то точка x_0 является решением задачи (2), а $r_0 = \frac{1}{2}(R(x_0) - P(x_0))$. И наоборот, если точка x_0 является решением задачи (2), то пара (x_0, r_0) , где $r_0 = \frac{1}{2}(R(x_0) - P(x_0))$, является решением задачи (1). Величина уклонения компакта D от шара $Bn(x_0, r_0)$ равна $h_0(D) = \frac{1}{2}(R(x_0) + P(x_0))$.

Пользуясь свойствами выпуклых функций [2, 3], можно доказать следующий факт.

ЛЕММА 6. Пусть функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ определены и выпуклы соответственно на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$, причем $a < b < c$ и $\psi_1(b) = \psi_2(b)$. Если существует $\alpha_0 \in (0,1)$ такое, что для функции

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & \text{если } t \in [a, b] \\ \psi_2(t), & \text{если } t \in [b, c] \end{cases}$$

выполняется неравенство

$$\psi(\alpha_0 a + (1 - \alpha_0)c) > \alpha_0 \psi(a) + (1 - \alpha_0)\psi(c),$$

то для точки b , представимой в виде

$$b = \beta a + (1 - \beta)c, \quad \beta \in (0,1)$$

выполняется неравенство

$$\psi(b) > \beta\psi(a) + (1 - \beta)\psi(c).$$

Отметим, что функции $R(x)$ и $\rho_D(x)$ являются выпуклыми на R^P , а функция $\rho_\Omega(x)$ - вогнутая на D .

ТЕОРЕМА 2. Функция $P(x)$ является выпуклой конечной на R^P .

Доказательство. Предположим, что функция $P(x)$ не является выпуклой на R^P , т. е. найдутся точки x_1, x_2 и число $\alpha_0 \in (0,1)$ такие, что

$$P(\alpha_0 x_1 + (1 - \alpha_0)x_2) > \alpha_0 P(x_1) + (1 - \alpha_0)P(x_2). \quad (3)$$

Как следует из выпуклости $R(x)$, вогнутости $\rho_\Omega(x)$, а также определения функции $P(x)$, достаточно рассмотреть случаи, когда

- 1) $x_1 \in \text{int } D, x_2 \notin D,$
- 2) $x_1, x_2 \notin D$, но $[x_1, x_2] \cap D \neq \emptyset$.

Остальные случаи тривиальны.

а) Пусть $x_1 \in \text{int } D$ и $x_2 \notin D$, $x_0 \in [x_1, x_2]$ и является граничной точкой множества D . В соответствии с выпуклостью $R(x)$ и вогнутостью $\rho_\Omega(x)$, функция $P(x)$ выпукла на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$. По лемме 6 из неравенства (3) для точки $x_0 = \beta x_1 + (1 - \beta)x_2$, где $\beta \in (0,1)$, имеем

$$P(x_0) > \beta P(x_1) + (1-\beta)P(x_2). \quad (4)$$

Так как $\frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\|x_2 - x_0\|}{\|x_1 - x_0\|}$, то из (4) получаем

$$\frac{P(x_0) - P(x_1)}{\|x_0 - x_1\|} > \frac{P(x_2) - P(x_0)}{\|x_2 - x_0\|}. \quad (5)$$

Из выпуклости функции $P(x)$ на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$ для $g = (x_2 - x_1)/\|x_2 - x_1\|$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} P'(x_0, g) &\equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [P(x_0 + \alpha g) - P(x_0)] \leq \frac{P(x_2) - P(x_0)}{\|x_2 - x_0\|}, \\ P'(x_0, -g) &\leq \frac{P(x_1) - P(x_0)}{\|x_1 - x_0\|}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем

$$P'(x_0, g) < -P'(x_0, -g). \quad (7)$$

Покажем, что на самом деле выполняется

$$P'(x_0, g) \geq -P'(x_0, -g). \quad (8)$$

Действительно, поскольку x_0 - граничная точка выпуклого множества D , то в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [2] существует опорная гиперплоскость π , содержащая точку x_0 , которая отсекает множество D в одно из полупространств. Тогда из определения функции $P(x)$, свойств опорной гиперплоскости и выбора точек x_1 и x_2 следует, что при достаточно малых $\alpha \geq 0$

$$\rho_\pi(x_0 + \alpha g) = \rho_\pi(x_0 - \alpha g), \quad P(x_0 + \alpha g) = \rho_D(x_0 + \alpha g) \geq \rho_\pi(x_0 + \alpha g),$$

$$P(x_0 - \alpha g) = -\rho_\Omega(x_0 - \alpha g) \geq -\rho_\pi(x_0 - \alpha g), \quad \rho_\pi(x_0) = P(x_0) = 0.$$

Отсюда нетрудно получить

$$P'(x_0, g) \geq \rho'_\pi(x_0, g), \quad P'(x_0, -g) \geq -\rho'_\pi(x_0, -g), \quad \rho'_\pi(x_0, g) = \rho'_\pi(x_0, -g). \quad (9)$$

Из (9) следует (8).

Полученное противоречие (7) с (8) говорит о том, что $P(x)$ выпукла на отрезке $[x_1, x_2]$ в рассматриваемом случае.

б) Пусть теперь $x_1, x_2 \notin D$, но $[x_1, x_2] \cap D \neq \emptyset$. Для непрерывной функции $P(x)$ существует точка $x_0 \in [x_1, x_2] \cap \text{int } D$, в которой

$$P(x_0) = \min_{x \in [x_1, x_2]} P(x) < 0 < \min\{P(x_1), P(x_2)\}. \quad (10)$$

Как было показано в пункте а), функция $P(x)$ выпуклая на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$. Из предположения (4) по лемме 6 для точки $x_0 = \beta x_1 + (1-\beta)x_2$, где $\beta \in (0,1)$, следует неравенство

$$P(x_0) > \beta P(x_1) + (1-\beta)P(x_2),$$

которое противоречит (10). Теорема доказана.

Отметим, что функция $\Phi(x)$, как сумма двух выпуклых функций, является выпуклой на R^P . Таким образом мы свели задачу (1) к задаче минимизации выпуклой функции $\Phi(x)$ на всем пространстве R^P .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский М.С., Силин Д.Б. О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Тр. Мат. ин - та им. В.А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 338 - 354.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
3. Демьянов В.Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.

УДК 519.95

И. П. Мангушева

УСЛОВИЯ ВЗАЙМНОЙ ОДНОЗНАЧНОСТИ ОБОБЩЕННОГО АВТОМАТНОГО КОДИРОВАНИЯ

1. Постановка задачи. Рассматривается метод, в котором в качестве преобразователя, осуществляющего кодирование слов в алфавите X в слова в алфавите Y используется конечный детерминированный автомат (КДА) [1, 2, 3].

Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ – КДА Мили, где S, X, Y – множества состояний, входных и выходных символов соответственно, $S = \{s_1, \dots, s_r\}$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, $\delta: S \times X \rightarrow S$, $\lambda: S \times X \rightarrow Y$ – отображения. Работа КДА описывается системой канонических уравнений:

$$\begin{aligned} y(t) &= \lambda(s(t), x(t)), \\ s(t+1) &= \delta(s(t), x(t)), \\ s(1) &= s_1, \quad t=1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где s_1 – начальное состояние, $s(t)$, $x(t)$, $y(t)$ – состояние, входной и выходной символы соответственно на очередном такте t работы автомата. Каждому входному слову $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}$ КДА ставит в соответствие выходное слово

$y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_p}$ согласно расширенным функциям переходов $\bar{\delta}$ и выходов $\bar{\lambda}$:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(s, x_i) &= \delta(s, x_i), \quad s \in S, \quad x_i \in X, \\ \bar{\delta}(s, x_{i_1} \dots x_{i_p}) &= \delta(\bar{\delta}(s, x_{i_1} \dots x_{i_{p-1}}), x_{i_p}), \quad p \geq 2, \\ \bar{\lambda}(s, x_i) &= \lambda(s, x_i), \\ \bar{\lambda}(s, x_{i_1} \dots x_{i_p}) &= \lambda((\bar{\delta}(s, x_{i_1} \dots x_{i_{p-1}}), x_{i_p}), \quad p \geq 2.\end{aligned}$$

Полагают $y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_p} = \bar{\lambda}(s_1, x_{i_1}) \bar{\lambda}(s_1, x_{i_1} x_{i_2}) \dots \bar{\lambda}(s_1, x_{i_1} \dots x_{i_p})$. Это слово и будем считать кодом слова $x_{i_1} \dots x_{i_p}$.

Кодирование, осуществляющееся указанным образом с помощью некоторого КДА, назовем автоматным кодированием (АК), а соответствующий автомат – кодирующим автоматом. Очевидно, что такой вид кодирования можно использовать всякий раз, когда есть требование совпадения длин сообщения и его кода.

В общем случае можно рассматривать преобразователи, осуществляющие замену каждого символа x сообщения словом v в алфавите Y . Множество всех слов в произвольном алфавите Z далее обозначается через Z^* .

Легко показать, что необходимым условием однозначности кодирования произвольным преобразователем на всем множестве входных слов X^* является условие непустоты выходного слова $v = \lambda(s, x)$ для всех $s \in S, x \in X$. Поэтому, решая задачу определения условий взаимной однозначности кодирования множества всех слов X^* , следует ограничиться рассмотрением только таких преобразователей, которые допускают замену символа только непустым словом.

Пусть Y^* – множество всех непустых слов в алфавите Y . Преобразователь $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где $\delta: S \times X \rightarrow S, \lambda: S \times X \rightarrow Y^*$ – функции, будем называть обобщенным конечным детерминированным автоматом (ОКДА), а соответствующее кодирование – обобщенным автоматным кодированием (ОАК).

Поскольку ОКДА осуществляет однозначное отображение X^* в Y^* , то задача взаимной однозначности кодирования при ОАК сводится к задаче однозначности декодирования.

2. Условия однозначности декодирования. Будем говорить, что отображение $\varphi: X \rightarrow Y^*$, где X, Y – конечные алфавиты, обладает свойством префикса, если для любых $x, x' \in X$ слово $\varphi(x)$ не является префиксом слова $\varphi(x')$.

Для кодирующего автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ рассмотрим функции $\lambda_{s_i}: X \rightarrow Y^*$, такие, что $\lambda_{s_i}(x) = \lambda(s_i, x), i = 1, r$. Значения функций образуют строку в таблице выходов автомата, соответствующую состоянию s_i .

Будем говорить, что ОКДА $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ (или ОАК в целом) обладает свойством префикса, если для любого состояния s_i функции λ_{s_i} обладают свойством префикса. Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы ОАК с кодирующим автоматом $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ было однозначно декодируемым, достаточно, чтобы автомат A обладал свойством префикса.

Доказательство. Докажем теорему методом от противного. Пусть существует слово $y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_q}$ в кодирующем алфавите Y , которое декодируется неоднозначно. Не умоляя общности можно считать, что это слово является началом сообщения. Пусть $y_{i_1}\dots y_{i_h}$ – префикс максимальной длины, который декодируется однозначно (в частном случае он может быть пустым словом). В графе ОАК слову $y_{i_1}\dots y_{i_h}$ соответствует путь из начальной вершины s_1 в некоторую вершину s . Последовательность первых компонент меток дуг этого пути являются началом сообщения, код которого – $y_{i_1}\dots y_{i_h}$, и определяется однозначно. Поскольку остальная часть слова $y_{i_{h+1}}\dots y_{i_q}$ декодируется неоднозначно, то из вершины s должно исходить по крайне мере две дуги с метками (x, v) и $(v' x')$, где $x \neq x'$, причем v является префиксом v' . Но тогда соответствующая функция λ_s , как и ОАК в целом, не обладает свойством префикса.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Достаточные условия однозначности декодирования, сформулированные в теореме 1, обобщает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы ОАК с кодирующим автоматом $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ было однозначно декодируемым, достаточно, чтобы автомат A обладал следующим свойством: для произвольного состояния $s \in S$ и любых $x, x' \in X, x \neq x'$, если $\lambda_s(x)$ является префиксом $\lambda_s(x')$, таким, что $\lambda_s(x') = \lambda_s(x)v$ для некоторого $v \in Y^*$, то слово v не является префиксом никакого слова $\lambda_s(x'')$, где $s'' = \delta(s, x), x'' \in X$.

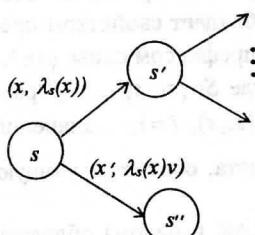
Доказательство проводится методом от противного аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть максимальному однозначно декодируемому префиксу $y_{i_1}\dots y_{i_h}$ слова

$y_{i_1}\dots y_{i_q}$ соответствует путь из начальной вершины s_1 в некоторую вершину s графа ОАК. Поскольку, начиная с символа $y_{i_{h+1}}$, часть кода сообщения декодируется неоднозначно, то из вершины s исходят две дуги с метками $(x, \lambda_s(x))$ и $(x', \lambda_s(x'))$, причем $\lambda_s(x') = \lambda_s(x)v$, где $v \in Y^*$. Пусть $\delta(s, x) = s'$.

В силу условия теоремы через вершину s' не может проходить путь, описывающий тот же

код сообщения, что и путь, проходящий через вершину $s'' = \delta(s, x)$ (рисунок),



так как v не является префиксом ни одной из вторых координат меток дуг, исходящих из s' .

Тем самым теорема доказана.

Очевидно, что условия теорем 1 и 2 могут быть ослаблены, если потребовать их выполнение только для достижимых из начального состояния вершин графа ОАК. Недостижимость означает, что нет сообщения, приводящего к этому состоянию из s_1 .

Найден следующий критерий однозначности декодирования для случая АК.

ТЕОРЕМА 3. Автоматное кодирование с кодирующим автоматом $A=(S, X, Y, \delta, \lambda)$ и начальным состоянием s_1 является однозначно декодируемым тогда и только тогда, когда для любых состояний $s \in S$, достижимых из начального, и любых $x, x' \in X$, $x \neq x'$ для функций выходов автомата A справедливо $\lambda_s(x) \neq \lambda_s(x')$, т.е. элементы в каждой строке таблицы выходов кодирующего автомата попарно различны.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1, т.к. в этом случае для всех достижимых из начального состояний s функции $\lambda_s(x)$ обладают префиксным свойством.

Необходимость легко доказывается методом от противного. Пусть АК является однозначно декодируемым, и для некоторых $s \in S$, $x, x' \in X$, $x \neq x'$ справедливо $\lambda_s(x) = \lambda_s(x')$. Тогда в графе АК из вершины s исходят две различные дуги с одинаковыми вторыми координатами меток: $(x, \lambda_s(x))$ и $(x', \lambda_s(x))$. Рассмотрим в этом графе путь из начальной вершины в вершину s . Ему соответствует некоторое сообщение $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}$ и его код $y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_p}$.

Пусть $\delta(s, x)=s'$, $\delta(s, x')=s''$. Тогда двум продолжениям рассматриваемого пути, ведущим в вершины s' и s'' , соответствуют два различных сообщения $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} x$ и $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} x'$, которые имеют один и тот же код $y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_p}$, $\lambda_s(x)$. Получено противоречие однозначности декодирования.

Тем самым теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.:Наука, 1979.
3. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский. Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980.

СИНХРОНИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Теория экспериментов с автоматами является фундаментом для разработки средств и методов технической диагностики цифровой аппаратуры. Одной из существенных причин, затрудняющих решение задач контроля и диагностирования цифровых устройств, является отсутствие, как правило, информации о начальном, промежуточном или конечном состояниях устройства. Для снятия указанной неопределенности и служат синхронизирующие, установочные и диагностические последовательности, построение которых для автоматов общего вида сопряжено с большой трудоемкостью [1]. В то же время многие реальные системы обладают спецификой, которая позволяет упростить синтез упомянутых последовательностей. В частности, такая ситуация имеет место для линейных дискретных систем [2], что подтверждается результатами, полученными в [3]. В данной работе рассматривались простейшие из нелинейных дискретных систем, так называемые билинейные дискретные системы (БС). Для них были получены условия существования синхронизирующих последовательностей в терминах характеристических матриц БС.

БС \tilde{A} задается над полем $GF(p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$ системой уравнений состояний и выходов соответственно

$$\bar{s}(t+1) = A\bar{s}(t) + \bar{u}(t)B\bar{s}(t) + C\bar{u}(t), \quad (1)$$

$$\bar{y}(t) = D\bar{s}(t) + \bar{u}(t)F\bar{s}(t) + G\bar{u}(t), \quad (2)$$

где A, C, D, G, B, F – характеристические матрицы, $u(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$, $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$, $s(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]^T$ – входной, выходной и вектор состояния соответственно. n -мерное пространство векторов состояний называется пространством состояний БС и обозначается S_n , где $|S_n| = p^n$.

ЛЕММА 1. Пусть задана входная последовательность $\bar{u}(0)\bar{u}(1)\dots\bar{u}(t)$ и пусть $\bar{s}(0)$ – начальное состояние БС \tilde{A} . Тогда конечное состояние БС \tilde{A} , в которое она переходит после подачи данной входной последовательности, вычисляется по формуле

$$\bar{s}(t+1) = \left(\prod_{i=0}^t (A + \bar{u}(t-i)B) \right) \bar{s}(0) + \left(\prod_{i=0}^{t-1} (A + \bar{u}(t-i)B) \right) C\bar{u}(0) + \dots + C\bar{u}(t), \quad (3)$$

Доказательство. Доказательство ведется методом индукции по t . Положим $t=0$ в (1), тогда

$$\bar{s}(1) = A\bar{s}(0) + \bar{u}(0)B\bar{s}(0) + C\bar{u}(0) = (A + \bar{u}(0)B)\bar{s}(0) + C\bar{u}(0),$$

что соответствует (3). Предполагая справедливость соотношения (3) при некотором t , из (1) получим

$$\begin{aligned} s(t+1) &= (A + \bar{u}(t)B) \times \\ &\times \left(\prod_{i=0}^{t-1} (A + \bar{u}(t-i-1)B) \bar{s}(0) + \dots (A + \bar{u}(t-1))C\bar{u}(t-2) + C\bar{u}(t-1) \right) + C\bar{u}(t) = \\ &= \left(\prod_{i=0}^t (A + \bar{u}(t-i)B) \bar{s}(0) + \dots (A + \bar{u}(t))C\bar{u}(t-1) + C\bar{u}(t) \right), \end{aligned}$$

что доказывает (3) для $t+1$.

Входная последовательность называется синхронизирующей (СП) для заданного автомата, если независимо от начального состояния она переводит автомат в одно и то же конечное состояние.

Учитывая (3), это определение можно записать в следующем виде.

Входная последовательность $\bar{u}(0)\bar{u}(1)\dots\bar{u}(t)$ называется синхронизирующей для БС \tilde{A} , если

$$\begin{aligned} \forall \bar{s}_1, \bar{s}_2 \in S_n \quad & \left(\prod_{i=0}^t (A + \bar{u}(t-i)B) \bar{s}_1 + \left(\prod_{i=0}^{t-1} (A + \bar{u}(t-i)B) \right) C\bar{u}(0) + \dots C\bar{u}(t) \right) = \\ &= \left(\prod_{i=0}^t (A + \bar{u}(t-i)B) \bar{s}_2 + \left(\prod_{i=0}^{t-1} (A + \bar{u}(t-i)B) \right) C\bar{u}(0) + \dots C\bar{u}(t) \right). \end{aligned}$$

Перенося в левую часть равенства все выражения, стоящие в правой части, получим

$$\forall \bar{s}_1 \neq \bar{s}_2 \quad \left(\prod_{i=0}^t (A + \bar{u}(t-i)B) (\bar{s}_1 - \bar{s}_2) \right) = [0],$$

где $[0]$ – нулевая матрица (в частности, вектор) соответствующей размерности.

Так как \bar{s}_1, \bar{s}_2 – произвольные не совпадающие между собой состояния из S_n , то и состояние $\bar{s} = \bar{s}_1 - \bar{s}_2$ также может быть любым ненулевым состоянием из S_n . Отсюда следует, что последний предикат эквивалентен предикату

$$\forall \bar{s} \neq [0] \quad \prod_{i=0}^t (A + \bar{u}(t-i)B) \bar{s} = [0]. \quad (4)$$

Исходя из (4), можно доказать следующие утверждения.

ЛЕММА 2. Для того чтобы входная последовательность $\bar{u}(0)\bar{u}(1)\dots\bar{u}(t)$ была СП для БС \tilde{A} необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\prod_{i=0}^t (A + \bar{u}(t-i)B) = [0]$.

ЛЕММА 3.

1. Если характеристическая матрица A БС \tilde{A} является строго верхней (нижней) треугольной матрицей, а B - нулевая, то для БС \tilde{A} существует СП длины $k \leq n$, причем все последовательности длины k и больше являются СП.

2. Если характеристическая матрица A БС \tilde{A} является строго верхней треугольной матрицей, $B = [0, 0, \dots, 0, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n]$ ($b_j \neq 0, j = \overline{i, n}$), то для БС \tilde{A} существует СП длины $k \leq n$ следующего вида: $\bar{u}(t) = [u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 0, \dots, 0]$, $t = \overline{0, k}$, где u_1, u_2, \dots, u_{i-1} могут быть любыми входными сигналами и все последовательности большей длины, первые k членов которых имеют такой вид, будут СП.

ЛЕММА 4. Если входная последовательность вида $\hat{u} = \bar{u}(0), \bar{u}(1), \dots, \bar{u}(k-1)$ является синхронизирующей, то все входные последовательности длины $k+1$, первые k членов которых имеют вид $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \dots, \bar{u}(k-1)$, а следующие члены произвольные, являются СП.

БС с запаздыванием по состоянию задается над полем $GF(p)$ следующей системой уравнений состояний и выходов соответственно

$$\bar{s}(t+1) = A\bar{s}(t) + A_1\bar{s}(t-h) + \bar{u}(t)B\bar{s}(t) + C\bar{u}(t), \quad (5)$$

$$\bar{y}(t) = D\bar{s}(t) + D_1\bar{s}(t-h) + \bar{u}(t)F\bar{s}(t) + G\bar{u}(t), \quad (6)$$

где $A, A_1, D, D_1, C, G, B, F$ – характеристические матрицы, $u(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$, $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$, $s(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]^T$ – входной, выходной и вектор состояния соответственно, h – некоторое целое положительное число.

Опишем БС с запаздыванием в виде билинейной системы без запаздывания, определив соответствующим образом для различных типов БС ее состояние, а затем применим уже полученные результаты.

Состояние данной БС в момент времени t определим как вектор $\bar{z}(t) = (\bar{s}(t-h), \dots, \bar{s}(t))^T$. Тогда состояние, в который она переходит при подаче входного символа $\bar{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$, есть вектор $\bar{z}(t+1) = (\bar{s}(t-h+1), \dots, \bar{s}(t), s(t+1))^T$. Таким образом, если эту БС описывать как БС без запаздывания, то размерность ее состояния есть величина $\tilde{n} = n(h+1)$, а начальное состояние есть $\bar{z}(0) = (\bar{s}(-h), \dots, \bar{s}(-1), \bar{s}(0))^T$, компонентами которого являются заданные начальные условия – состояния БС при $t=-h, -h+1, \dots, -1, 0$. В качестве входного вектора этой БС будем использовать $\hat{u}(t) = (0, \dots, 0, \bar{u}(t))^T$, в качестве выходного $\hat{y}(t) = (0, \dots, 0, \bar{y}(t))^T$, оба вектора размерности \tilde{n} .

С учетом изложенного, если описывать рассматриваемую БС в виде БС без задержки, уравнения состояний и выходов ее примут вид

$$\bar{z}(t+1) = A^* \bar{z}(t) + \hat{u}(t) B^* \bar{z}(t) + C^* \hat{u}(t), \quad (7)$$

$$\hat{y}(t) = D^* \bar{z}(t) + \hat{u}(t) F^* \bar{z}(t) + G^* \hat{u}(t). \quad (8)$$

Матрицы $A^*, B^*, C^*, D^*, F^*, G^*$ имеют блочную структуру. В качестве блоков выступают матрицы размерности $n \times n$. Число «блочных» строк и столбцов в матрице A^*, B^*, D^*, F^* равно $h+1$. Таким образом, это квадратные матрицы размерности \tilde{n} . В матрицах C^*, G^* одна «блочная» строка и $h+1$ столбцов. Размерность этих матриц $n \times \tilde{n}$. Структура этих матриц такова:

$$A^* = \begin{bmatrix} [0] & E_n & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & E_n & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & [0] & \dots & E_n \\ A_1 & [0] & [0] & \dots & A \end{bmatrix}, D^* = \begin{bmatrix} [0] & E_n & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & E_n & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & [0] & \dots & E_n \\ D_1 & [0] & [0] & \dots & D \end{bmatrix}, C^* = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [0] & \dots & C \end{bmatrix},$$

$$G^* = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [0] & \dots & G \end{bmatrix}, B^* = [[0] \ [0] \ \dots \ [0] \ B], F^* = [[0] \ [0] \ \dots \ [0] \ F].$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения (7),(8) с такими характеристическими матрицами задают БС, эквивалентную с точки зрения функционирования БС, описанной уравнениями (5),(6). Это означает, что мы можем применить результаты, полученные выше и получить условия существования синхронизирующих последовательностей в терминах матриц $A^*, B^*, C^*, D^*, F^*, G^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.
2. Гилл А. Линейные последовательностные машины. М.:Наука, 1974.
3. Сперанский Д.В. Синхронизация линейных последовательностных машин //Автоматика и телемеханика. 1996. № 5. С. 141 - 149.

ОПИСАНИЕ СИТУАЦИЙ РАВНОВЕСИЯ В ИГРАХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

I. При построении смешанного расширения игры с упорядоченными исходами порядки, выражающие предпочтения игроков, продолжаются на множество вероятностных мер. В работе [1] в качестве такого продолжения использовалось так называемое каноническое продолжение, которое строится с помощью класса всех изотонных отображений упорядоченного множества в \mathbf{R} . Оказывается, что кроме канонического, существуют другие продолжения, которые осуществляются с помощью конусов изотонных отображений. При выполнении некоторых условий, накладываемых на конусы изотонных отображений, основной результат о существовании ситуаций равновесия в смешанном расширении игры с упорядоченными исходами, а также структура множества ситуаций равновесия сохраняются. Настоящая заметка посвящена изложению данного круга вопросов.

II. Рассмотрим конечное множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, на котором задано отношение (частичного) порядка ω . Пусть \mathbf{R}^A - множество всех отображений из A в \mathbf{R} ; оно рассматривается как евклидово линейное пространство, в котором линейные операции осуществляются покомпонентно, а скалярное произведение задается стандартным способом. Всякое отображение $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}$ может быть записано в виде r -компонентного вектора: $\varphi = (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_r))$. В частности, вероятностная мера μ на A задается в виде $\mu = (\mu(a_1), \dots, \mu(a_r))$, где

$$\mu(a_k) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^r \mu(a_k) = 1.$$

Пусть $C(\omega)$ - множество всех изотонных отображений упорядоченного множества (A, ω) в \mathbf{R} , $K \subseteq C(\omega)$ - некоторый конус. Будем говорить, что конус K аппроксимирует отношение порядка ω , если из условия $(\forall \varphi \in K) \varphi(a_1) \leq^\omega \varphi(a_2)$ следует $a_1 \leq^\omega a_2$.

Через δ обозначим каноническое вложение $A \rightarrow \mathbf{R}^A$, при котором образом элемента $a_i \in A$ является r -компонентный вектор

$$\left(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0\right).$$

Определим на \mathbf{R}^A отношение квазипорядка ω^K условием:

$$\mu \leq^K v \Leftrightarrow (\forall \varphi \in K)(\varphi, \mu) \leq (\varphi, v). \quad (1)$$

ЛЕММА. Для того, чтобы ω^K было отношением порядка на \mathbf{R}^A и каноническое вложение δ осуществляло изоморфное вложение упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в упорядоченное множество $\langle \mathbf{R}^A, \omega^K \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы конус K был телесным (то есть $\dim K = r$) и аппроксимировал отношение порядка ω .

III. Игра n лиц с упорядоченными исходами может быть задана в виде набора объектов

$$G = \langle I, (X_i)_{i \in I}, A, (\omega_i)_{i \in I}, F \rangle, \quad (2)$$

где $I = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i , A – множество исходов, ω_i – отношение порядка на A , выражающее предпочтения игрока i , F – функция реализации

$$F : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow A.$$

Ситуация $x^0 \in \prod_{i \in I} X_i$ называется ситуацией равновесия, если для любых $i \in I$, $x_i \in X_i$ выполняется

$$\neg \left(F(x^0 \| x_i) > \omega_i F(x^0) \right). \quad (3)$$

Смешанным расширением игры G называется игра с упорядоченными исходами

$$\bar{G} = \langle I, (\bar{X}_i)_{i \in I}, \bar{A}, (\bar{\omega}_i)_{i \in I}, \bar{F} \rangle,$$

компоненты которой строятся следующим образом:

- a) \bar{X}_i есть множество вероятностных мер на множестве X_i ;
- b) \bar{A} есть множество вероятностных мер на множестве A ;
- c) \bar{F} есть продолжение функции реализации на множество вероятностных мер.

Если игра G является конечной, то \bar{F} представляет собой отображение множества

$$\prod_{i \in I} \bar{X}_i \text{ в } \bar{A},$$

которое каждому набору

$$(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \prod_{i \in I} \bar{X}_i$$

ставит в соответствие вероятностную меру $\bar{F}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ на A , определенную равенством

$$\bar{F}(\mu_1, \dots, \mu_n)(a) = \sum_{F(i_1, \dots, i_n) = a} \mu_1(i_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(i_n); \quad (4)$$

д) для построения продолжения порядка ω_i на множество вероятностных мер \bar{A} зафиксируем некоторый конус K_i изотонных отображений из $\langle A; \omega_i \rangle$ в \mathbf{R} ($i = 1, \dots, n$). Отношение

$$\omega_i^{K_i} \text{ на } \bar{A}$$

определен равносильностью

$$\mu \leq v \Leftrightarrow (\forall \varphi \in K_i)(\varphi, \mu) \leq (\varphi, v). \quad (5)$$

Положим $K = (K_i)_{i \in I}$. Смешанное расширение игры G , в котором продолжения порядков ω_i ($i = 1, \dots, n$) на множество вероятностных мер \bar{A} определены формулой (5), обозначается через \bar{G}^K .

Основной результат работы представляет следующая

ТЕОРЕМА. Предположим, что для каждого $i \in I$ для конуса K_i выполнены следующие условия:

- 1) конус K_i аппроксимирует отношение ω_i ;
- 2) конус K_i является телесным;
- 3) конус K_i является конечнопорожденным.

Тогда множество $E(\bar{G}^K)$ ситуаций равновесия в игре \bar{G}^K может быть представлено в следующем виде:

$$E(\bar{G}^K) = \bigcup_{\varphi \in \prod_{i \in I} K_i^0} E(G_\varphi), \quad (6)$$

где $K_i^0 = \{\alpha_1 \psi_i^1 + \dots + \alpha_s \psi_i^s : \alpha_1, \dots, \alpha_s > 0\}$, причем $\{\psi_i^1, \dots, \psi_i^s\}$ есть множество образующих конуса K_i ; $E(G_\varphi)$ - множество ситуаций равновесия в смешанных стратегиях игры $G_\varphi = \langle I, (X_i)_{i \in I}, \varphi_i \circ F \rangle$ с функциями выигрышей игроков.

Замечание 1. Ввиду леммы, \bar{G}^K является игрой с упорядоченными исходами и каноническое вложение δ осуществляет изоморфное вложение игры G в игру \bar{G}^K .

Замечание 2. В предположениях теоремы множество ситуаций равновесия $E(\bar{G}^K)$ будет непустым, так как $E(G_\varphi) \neq \emptyset$ по теореме Нэша.

Замечание 3. В случае, когда K_i есть конус всех изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega_i \rangle$ в \mathbf{R} , равенство (6) дает основной результат работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Розен В.В. Смешанное расширение игр с упорядоченными исходами // ЖВМ и МФ. 1976. № 6. С. 1436 - 1450.

УДК 512.532

В. Н. Салий

КВАЗИБУЛЕВЫ СТЕПЕНИ АЛГЕБР И ПОЛУРЕШЁТКИ

Понятие булевой степени алгебры играет важную роль в общей теории алгебраических систем [1]. Близким ее обобщением является следующая конструкция квазибулевой степени алгебры.

Пусть $(L, +, \cdot, 0, 1)$ - полная решетка. Ортогональной системой в L называется подмножество $\{l_i | i \in I\}$ такое, что $l_i \cdot l_j = 0$ при $i \neq j$ и $\sum \{l_i | i \in I\} = 1$. Ортогональная система $\{l_i | i \in I\}$, по определению, независима, если $\sum \{l_j | j \in J\} \cdot \sum \{l_k | k \in K\} = 0$ для любого разбиения $I = J \cup K, J \cap K = \emptyset$. Квазибулева решетка - это полная решетка с дополнениями, в которой каждая ортогональная система независима. Все полные булевые решетки являются квазибулевыми. Примером недистрибутивной (и даже не модулярной) квазибулевой решетки служит пятиугольник N_5 . Известно [2, с. 271], что полная решетка с дополнениями тогда и только тогда будет квазибулевой, когда она допускает \neg -гомоморфизм на полную булеву алгебру, который сохраняет точные верхние грани ортогональных систем и, кроме того, взаимно однозначен в 0 и 1. Такой \neg -гомоморфизм называется каноническим.

Пусть L - квазибулева решетка и (A, F) - алгебра с носителем A и множеством конечномерных операций F . Под L -степенью алгебры A понимается алгебра $(A[L], F)$, где $A[L]$ - множество всех отображений $v : A \rightarrow L$ таких, что $pr_2 v = \{v(a) | a \in A\}$ является ортогональной системой в L , а операции в $A[L]$ определяются формулой

$$f(v_1, \dots, v_n)(a) = \sum \{v_1(a_1) \cdot \dots \cdot v_n(a_n) | f(a_1, \dots, a_n) = a\} \quad (*)$$

для любых $f \in F; a_1, \dots, a_n \in A; v_1, \dots, v_n \in A[L]$ (объединение берется по всем таким наборам (a_1, \dots, a_n) , для которых $f(a_1, \dots, a_n) = a$).

Когда L пробегает класс всех квазибулевых решеток, получаются квазибулевы степени алгебры A . Среди них находятся и все булевые степени этой алгебры, они соответствуют полным булевым решеткам L .

Пусть F не содержит нульарных и состоит не только из унарных операций. Каждая полурешетка (S, \cdot) может рассматриваться как F -алгебра, если положить $f(x) = x$ для унарных и $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ для n -арных ($n > 1$) операций $f \in F$. В этом смысле будем говорить об F -полурешетках.

Идемпотентом в F -алгебре A называется элемент $\alpha \in A$ такой, что $f(\alpha, \dots, \alpha) = \alpha$ для любой операции $f \in F$.

Следующая теорема была анонсирована в [3].

ТЕОРЕМА. Если F -алгебра A имеет хотя бы два идемпотента, то любая F -полурешетка вкладывается в подходящую квазибулеву степень алгебры A .

Доказательство. Пусть (A, F) - алгебра и $\omega, 1$ - некоторые ее идемпотенты. Пусть, далее, S - произвольная F -полурешетка.

Через $Id(S)$ обозначим решетку всех, включая пустой, идеалов полурешетки S . В четырехэлементной булевой алгебре с носителем $B = \{0, l, l', 1\}$ заменим атом l' решеткой $Id(S)$. При этом будем считать, что в полученном множестве $L = \{0, l, l'\} \cup Id(S)$ элемент 0 покрывается элементами l и $\emptyset \in Id(S)$, элемент 1 непосредственно следует за l и $S \in Id(S)$, а между элементами решетки $Id(S)$ сохраняются имеющиеся в ней порядковые соотношения. Так упорядоченное множество L является полной решеткой с дополнениями. Если отождествить все элементы из $Id(S)$, то получается канонический --гомоморфизм решетки L на булеву решетку B . Следовательно, L - квазибулевая решетка.

Построим вложение произвольной F -полурешетки S в квазибулеву степень $A[L]$.

Пусть $s \in S$ и $J(s)$ - главный идеал, порожденный этим элементом в S . Сопоставим элементу s отображение $\varphi(s) = v_s : A \rightarrow L$, полагая $v_s(\omega) = l$, $v_s(1) = J(s)$, $v_s(a) = 0$ при $a \notin \{\omega, 1\}$. Так как $v_s(\omega) \cdot v_s(1) = 0$ и $v_s(\omega) + v_s(1) = 1$, то $v_s \in A[L]$, так что φ отображает S в $A[L]$.

Допустив, что $\varphi(s) = \varphi(t)$, т.е. что $v_s = v_t$ для $s, t \in S$, получаем равенство $J(s) = J(t)$, откуда сразу $s = t$. Таким образом, φ - вложение.

Докажем, что φ - гомоморфизм, т.е. что $v_{f(s_1, \dots, s_n)} = f(v_{s_1}, \dots, v_{s_n})$ для любой n -арной операции $f \in F$ и любых $s_1, \dots, s_n \in S$.

Пусть $n > 1$, т.е. f - не унарная операция. Тогда $f(v_{s_1}, \dots, v_{s_n})(\omega) = \sum \{v_{s_1}(a_1) \cdot \dots \cdot v_{s_n}(a_n) \mid f(a_1, \dots, a_n) = \omega\} = v_{s_1}(\omega) \cdot \dots \cdot v_{s_n}(\omega) = l$, так как, если $(a_1, \dots, a_n) \neq (\omega, \dots, \omega)$, то $v_{s_1}(a_1) \cdot \dots \cdot v_{s_n}(a_n) = 0$. Аналогично

$f(v_{s_1}, \dots, v_{s_n})(t) = v_{s_1}(1) \cdot \dots \cdot v_{s_n}(t) = J(s_1) \cap \dots \cap J(s_n) = J(s_1 \cdot \dots \cdot s_n) =$
 $= J(f(s_1, \dots, s_n)).$ Далее, для $a \notin \{\omega, 1\}$ имеем:
 $f(v_{s_1}, \dots, v_{s_n})(a) = \sum \{v_{s_1}(a_1) \cdot \dots \cdot v_{s_n}(a_n) | f(a_1, \dots, a_n) = a, a \notin \{\omega, t\}\} = 0,$
 так как среди элементов a_1, \dots, a_n найдется $a_i \neq \omega$ и найдется $a_j \neq 1$, и значит,
 $v_{s_i}(a_i) \cdot v_{s_j}(a_j) = 0.$

Итак,

$f(v_{s_1}, \dots, v_{s_n})(\omega) = l, f(v_{s_1}, \dots, v_{s_n})(t) = J(f(s_1, \dots, s_n)), f(v_{s_1}, \dots, v_{s_n})(a) = 0$ при
 $a \notin \{\omega, 1\}$, т.е. $f(v_{s_1}, \dots, v_{s_n}) = v_{f(s_1, \dots, s_n)}$ для n -арных ($n > 1$) операций $f \in F$.

Пусть $f \in F$ - унарная операция. Согласно формуле (*),

$$f(v_s)(a) = \sum \{v_s(x) | f(x) = a\} = v_s(a) + \sum \{v_s(x) | f(x) = a, x \neq a\}.$$

Здесь нужно рассмотреть три случая.

1) $a = \omega$. Так как $f(1) = 1 \neq \omega$ и $v_s(x) = 0$ при $x \notin \{\omega, 1\}$, то

$$f(v_s)(\omega) = v_s(\omega) = v_{f(s)}(\omega),$$
 поскольку $f(s) = s;$

2) $a = 1$. Здесь $f(v_s)(1) = v_s(1) = v_{f(s)}(1);$

3) $a \notin \{\omega, 1\}$. Так как $f(\omega) = \omega$ и $f(1) = 1$, то $f(x) = a$ означает, что $x \notin \{\omega, 1\}$. Тогда $v_s(a) = 0$ и $v_s(x) = 0$ для любого x такого, что $f(x) = a$.
 Значит, $f(v_s)(a) = 0 = v_{f(s)}(a).$

Итак, во всех случаях $f(v_s) = v_{f(s)}$. Теорема доказана.

Решётка L , построенная в доказательстве теоремы, недистрибутивна.

Возможна ли другая конструкция, которая позволила бы вложить полурешётку S в некоторую булеву степень алгебры A ? Следующие соображения дают отрицательный ответ на этот вопрос. Как известно [1], булевые степени алгебры сохраняют ее эквациональную теорию, т.е. все тождества, истинные в алгебре, истинны и во всех ее булевых степенях. Таким образом, если, например, A - левосингулярная полугруппа (т.е. полугруппа левых нулей: $xy = x$), то и любая ее булева степень будет левосингулярной полугруппой. А в такую полугруппу можно вложить только одноэлементную полурешётку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пинус А.Г. Булевые конструкции в универсальной алгебре // УМН. 1992. Т. 41, № 4. С. 145 - 180.
2. Общая алгебра / Под ред. Л.А.Скорнякова. М.: Наука. Т.2. 1991.
3. Салий В.Н. Полурешётки и квазибулевы степени алгебр // Международная алгебраическая конференция памяти Л.М. Глускина. Киев: ИМ НАН Украины, 1997. С. 18 - 19.

ПРОСТЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ АВТОМАТЫ

Автоматом называется тройка $A = (S, X, \delta)$, где S, X — произвольные конечные непустые множества, называемые соответственно множеством состояний и множеством входных сигналов, а $\delta : S \times X \rightarrow S$ — функция переходов автомата A .

Обозначим через δ_p отображение, порожденное словом p :

$$\delta_p : S \rightarrow S, \quad s \mapsto \delta(s, p) \quad (s \in S, p \in X^*).$$

Эквивалентность θ на множестве S называется конгруэнцией автомата A , если она устойчива относительно функции переходов δ в том смысле, что $(\forall s_1, s_2 \in S)(\forall x \in X)((s_1, s_2) \in \theta \Rightarrow (\delta(s_1, x), \delta(s_2, x)) \in \theta)$.

В любом автомате конгруэнциями будут тождественное отношение Δ и универсальное отношение $S \times S$. Автомат A , имеющий больше одного состояния, называется простым, если у него нет конгруэнций, отличных от тождественной и универсальной.

Одной из нерешенных задач теории автоматов является описание простых автоматов. В [1] приводится решение этой проблемы для случая автономных автоматов (автоматов с одним входным сигналом). В данной статье будет приведено решение вышеуказанной проблемы для случая коммутативного автомата.

Автомат $A = (S, X, \delta)$ называется коммутативным, если для любых $s \in S, x_1, x_2 \in X$ выполняется равенство $\delta(s, x_1 x_2) = \delta(s, x_2 x_1)$. Описание подпрямо неразложимых коммутативных автоматов дали Эшик и Имрех [2,3]. Характеристика простых коммутативных автоматов может быть получена в принципе как следствие из их работ. Цель данной статьи — получить непосредственное описание простых коммутативных автоматов. Известно [2], что автомат $A = (S, X, \delta)$ коммутативен тогда и только тогда, когда выполняется равенство $(\forall x \in X)(\forall p \in X^*) \quad (\delta(s, xp) = \delta(s, px))$. (*)

ТЕОРЕМА 1. Сильно связный коммутативный автомат $A = (S, X, \delta)$ является простым тогда и только тогда, когда $|S|$ — простое число и существует $x \in X$, порождающий циклическую перестановку на S .

Доказательство. Необходимость. Пусть сильно связный коммутативный автомат A — простой. Известно [2], что каждый входной сигнал сильно связного коммутативного автомата порождает перестановку на S . Предположим, что никакой $x \in X$ не порождает циклической перестановки на S . Возможны следующие случаи:

a) $(\forall x \in X)(\forall s \in S)(\delta(s, x) = s)$, но тогда A не является сильно связным;

б) существует входной сигнал $x_0 \in X$, порождающий $l > 1$ циклов компоненты $A_{x_0} = (S, \delta_{x_0})$, среди которых хотя бы один не одноэлементный. Множества состояний автомата A , принадлежащих этим циклам будем обозначать через C_i , $1 \leq i \leq l$, при этом $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $1 \leq i \neq j \leq l$.

Пусть $|S| = n$ и $0, 1, \dots, n - 1$ - состояния автомата A . Возможны две ситуации.

$$1. (\exists C_i, 1 \leq i \leq l)(\forall y \in X)(\exists s \in C_i) \left(\delta(s, y) \stackrel{df}{=} t \in C_i \right).$$

Покажем, что в этом случае $(\forall y \in X)(\forall r \in C_i)(\delta(r, y) \in C_i)$, что является противоречием сильной связности автомата A . Действительно, пусть $C_i = \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$, причем $\delta_{x_0} : 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n_1 - 1 \rightarrow 0$. Тогда $(\forall y \in X)(\forall r \in \{0, \dots, n_1 - 1\})$ получаем

$$\begin{aligned} \delta(r, y) = \delta(r - n_1, 1, x_0 y) &= \dots = \delta(s, x_0 \dots x_0 y) \stackrel{(*)}{=} \delta(s, y x_0 \dots x_0) = \\ &= \delta(t, x_0 \dots x_0) \in \{0, \dots, n_1 - 1\}. \end{aligned}$$

$$2. (\forall C_i : 1 \leq i \leq l)(\exists y \neq x_0)(\forall s \in C_i)(\delta(s, y) \notin C_i).$$

Рассмотрим произвольное множество C_m , $1 \leq m \leq l$. Обозначим

$$Y_m = \{y \in X : (\forall s \in C_m)(\delta(s, y) \notin C_m)\}, X_m = X / Y_m.$$

Тогда $(\forall y \in X_m)(\exists s \in C_m)(\delta(s, y) \in C_m)$.

Рассуждая аналогично вышеизложенному, получим

$$(\forall y \in X_m)(\forall s \in C_m)(\delta(s, y) \in C_m).$$

Покажем, что $(\forall y \in Y_m)(\forall s \in C_m)(\delta(s, y) \in C_i)$, для некоторого i .

$$\text{Пусть } C_m = \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}, \text{ причем } \delta_{x_0} : 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n_1 - 1 \rightarrow 0.$$

Рассмотрим произвольный $y \in Y_m$. Пусть $t_0 = \delta(0, y)$. Тогда $\forall i : 1 \leq i \leq n_1 - 1$

$$\begin{aligned} \delta(i, y) &= \delta(i - 1, x_0 y) = \delta(i - 1, y x_0) = \delta(t_{i-1}, x_0) = t_i, \\ t_0 &= \delta(0, y) = \delta(n_1 - 1, x_0 y) = \delta(n_1 - 1, y x_0) = \delta(t_{n_1 - 1}, x_0). \end{aligned}$$

Таким образом, $\{t_0, \dots, t_{n_1 - 1}\} = C_i$.

Следовательно, существует конгруэнция $\theta \neq \Delta$, $\theta \neq S \times S$ автомата A с θ -классами C_1, \dots, C_l . Следовательно, A - не простой. Противоречие.

Итак, существует $x_0 \in X$, порождающий циклическую перестановку на S .

Пусть $|S| = n$ и $1, 2, \dots, n$ - состояния автомата A . Без потери общности, считаем, что функция переходов δ_{x_0} действует следующим образом: $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$.

Докажем, что $|S|$ - простое число. Предположим противное. Тогда $n = |S| = pu$, где p - простое, $u > 1$. Рассмотрим автономную компоненту $A_{x_0} = (S, \delta_{x_0})$ автомата A . Рассмотрим следующие множества состояний:

$$\theta(j) = \{j, j+p, \dots, j+p(u-1)\}, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Очевидно, что они составляют θ -классы некоторой конгруэнции $\theta \neq \Delta$, $\theta \neq S \times S$ автомата A_{x_0} . Покажем, что θ - конгруэнция автомата A . Пусть y - произвольный входной символ из X . Рассмотрим $\theta(l)$, $1 \leq l \leq p$. Покажем, что все состояния класса $\theta(l)$ под действием входного сигнала y перейдут в один и тот же класс эквивалентности θ .

Пусть $\delta(l, y) = t \in \theta(i)$. Тогда для любого j такого, что $1 \leq j \leq u-1$ получим

$$\delta(l+pl, y) = \delta\left(l, \underbrace{x_0 \dots x_0}_p y\right) \stackrel{(*)}{=} \delta\left(l, y \underbrace{x_0 \dots x_0}_p\right) = \delta\left(t, \underbrace{x_0 \dots x_0}_p\right) \in \theta_i.$$

Следовательно, θ - конгруэнция автомата A , $\theta \neq \Delta$, $\theta \neq S \times S$. Противоречие.

Следовательно, $u=1$, $|S|=p$.

Достаточность. Пусть A - сильно связный коммутативный автомат, $|S|$ - простое число и существует входной сигнал $x_0 \in X$, порождающий циклическую перестановку на S . Тогда автономный автомат $A_{x_0} = (S, \delta_{x_0})$ - простой. Следовательно, и A - простой. \square

ТЕОРЕМА 2. Не существует простых не сильно связных коммутативных автоматов с более чем двумя состояниями.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть существует простой коммутативный автомат $A = (S, X, \delta)$, который не является сильно связным и $|S| > 2$.

Обозначим отношение взаимной достижимости на S через θ . Очевидно, что θ является конгруэнцией автомата A . Заметим, что $\theta \neq S \times S$, так как автомат A - не сильно связный. Тогда $\theta = \Delta$.

Положим $s \leq t$ для любых $s, t \in S$ тогда и только тогда, когда состояние t достижимо из состояния s , т.е. когда существует слово $p \in X^*$ такое, что $\delta(s, p) = t$. Очевидно, что введенное отношение является порядком на S .

Пусть $s \in S$ - произвольный минимальный элемент упорядоченного множества (S, \leq) . Тогда, множества $\{s\}$, $S \setminus \{s\}$ образуют θ -классы некоторой конгруэнции $\theta_1 \neq \Delta$, $\theta_1 \neq S \times S$. Следовательно, A - не простой. Противоречие. \square

ТЕОРЕМА 3. Коммутативный автомат $A = (S, X, \delta)$ с более чем двумя состояниями является простым тогда и только тогда, когда он сильно связный, $|S|$ - простое число и существует $x \in X$, порождающий циклическую перестановку на S .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салий В.Н. Универсальная алгебра и автоматы. Саратов, 1988.

2. Esik Z., Imreh B. Subdirectly irreducible commutative automata//Acta Cybernet. 1981. Vol. 5, № 3. P. 251 - 260.

3. Esik Z., Imreh B. Remarks on finite commutative automata// Acta Cybernet. 1981. Vol. 5, № 2. P. 143 - 146.

УДК 519.83

Ю. Н. Сердюкова

СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ С ЗАДАННЫМИ СПЕКТРАМИ

I. Целью настоящей работы является нахождение необходимых, а также достаточных условий, при которых в игре с упорядоченными исходами существует ситуация равновесия по Нэшу с заданными спектрами. Для простоты изложения мы ограничимся случаем игры двух лиц. Такая игра задается в виде системы:

$$G = \langle X, Y, A, \omega_1, \omega_2, F \rangle,$$

где X – множество стратегий первого игрока, Y – множество стратегий второго игрока, A – множество исходов, ω_s – отношение порядка на множестве A , выражающее предпочтение игрока $s = 1, 2$, $F: X \times Y \rightarrow A$ – функция реализации.

Как известно [1] в играх с упорядоченными исходами принцип равновесия реализуется в смешанных стратегиях. Смешанное расширение игры G имеет вид

$$\bar{G} = \langle \bar{X}, \bar{Y}, \bar{A}, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{F} \rangle,$$

где $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{A}$ – множества вероятностных мер на X, Y, A , соответственно, \bar{F} определяется как продолжение F на множество \bar{A} вероятностных мер на A .

В данной статье мы ограничимся случаем, когда множества стратегий X, Y игроков конечны. Полагаем $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $Y = \{1, 2, \dots, m\}$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. В этом случае \bar{X}, \bar{Y} могут быть отождествлены с симплексами S_n, S_m соответствующей размерности; \bar{A} отождествляется с множеством отображений $\mu: A \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющих условию

$$\mu(a) \geq 0, \quad \sum_{a \in A} \mu(a) = 1.$$

Функция реализации F в смешанном расширении игры G определяется равенством:

$$\bar{F}(x, y)(a) = \sum_{F(i, j)=a} x_i y_j,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in S_m$.

Продолжение $\overline{\omega_s}$ порядка ω_s на множество A определяется здесь следующим образом:

$$\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow (\forall \varphi \in C_s)(\varphi, \mu_1) \leq (\varphi, \mu_2),$$

где C_s - некоторый конус изотонных отображений упорядоченного множества (A, ω_s) в \mathbb{R} , удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) семейство C_s аппроксимирует порядок ω_s ,
- 2) C_s содержит k линейно-независимых элементов ($k = |A|$),
- 3) C_s является конечно-порожденным.

В работе [1] показано, что при указанных условиях на конус в игре G существует ситуация равновесия, однако ситуаций равновесия по Нэшу может не быть.

В данной статье находится необходимое, а также некоторые достаточные условия существования ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении конечной игры G .

II. В этом пункте находятся условия, при которых в смешанном расширении игры G существуют ситуации равновесия по Нэшу, имеющие заданный спектр. Для формулировки этих условий нам потребуется ряд понятий и фактов, относящихся к матрицам, элементы которых являются элементами произвольного множества. Матрица M размера $n \times m$ над произвольным множеством A определяется как отображение

$$\lambda : \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow A,$$

при этом $\lambda(i, j) = a_{ij}$.

Определение 1. Матрица M размера $n \times m$ называется *сбалансированной*, если существуют вероятностные вектора

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_n, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in S_m,$$

такие, что для любых $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, m$ выполняется равенство

$$\bar{F}(i, y) = \bar{F}(x, j).$$

Определение 2. Матрица M называется *однородной*, если множества элементов, составляющие каждую строку и столбец, совпадают.

Определение 3. Матрица M размера $n \times n$ называется *обобщенным латинским квадратом* (ОЛК), если всякий ее элемент имеет один и тот же индекс встречаемости для каждой строки и каждого столбца (матрица называется *латинским квадратом*, если для всех элементов индекс встречаемости равен 1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Всякий ОЛК является сбалансированной матрицей.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Всякая сбалансированная матрица является однородной.

Замечание. Существуют сбалансированные матрицы, не являющиеся ОЛК в конечной игре G .

ТЕОРЕМА. Если (x^0, y^0) - ситуация равновесия по Нэшу в игре \bar{G} , то подматрица её матрицы исходов A , полученная ограничением на спектрах $Sp x^0, Sp y^0$ является сбалансированной.

Следствие. Если (x^0, y^0) - ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре G , то подматрица матрицы A , полученная ограничением на спектрах $(Sp x^0, Sp y^0)$, должна быть однородной.

Отсюда следует, что в конечной игре G ситуаций равновесия по Нэшу может не существовать. Например, если в игре G нет ситуаций равновесия в чистых стратегиях и нет нетривиальных однородных подматриц, то в ней ситуаций равновесия по Нэшу заведомо не будет.

Замечание. Указанное в теореме необходимое условие формулируется только в терминах функции реализации, поэтому оно относится ко всем играм с заданной реализацией структурой и не зависит от отношений порядка игроков.

III. Необходимым и достаточным условием того, чтобы ситуация (x^0, y^0) являлась ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре G , является выполнение для всех $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ неравенств

$$\bar{F}(i, y^0) \stackrel{\omega_1}{\leq} \bar{F}(x^0, y^0), \quad \bar{F}(x^0, j) \stackrel{\omega_2}{\leq} \bar{F}(x^0, y^0). \quad (*)$$

Если матрица исходов A имеет сбалансированную подматрицу с балансовыми векторами $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ и $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$, то для того, чтобы ситуация (x^*, y^*) являлась ситуацией равновесия по Нэшу, необходимо проверить выполнение неравенств $(*)$ для $i \in Sp x^*, j \in Sp y^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розен В.В. Описание ситуаций равновесия в играх с упорядоченными исходами //Математика, механика, математическая кибернетика :Сб. науч. тр. Саратов :Изд - во Сарат. ун - та, 1999. С. 128 - 131.

УДК 519.21

Л. Б. Тяпаев

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ АВТОМАТОВ И ИХ НЕОТЛИЧИМОСТЬ

Рассмотрим задачу эквивалентности автоматов, используя их геометрическую модель поведения. Введем необходимые определения.

Автомат определяется как пятерка $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y - конечные непустые множества, называемые соответственно множеством состояний, множеством входных сигналов и множеством выходных сигналов

автомата, а δ, λ - функции вида: $\delta: S \times X \rightarrow S$, $\lambda: S \times X \rightarrow Y$, называемые функциями переходов и выходов соответственно. Автомат называется *ициальным*, если среди его состояний выделено одно $s \in S$, называемое начальным. В дальнейшем ициальный автомат будем обозначать (A, s) .

Под поведением ициального автомата (A, s) понимается множество пар слов вида $\Lambda_A^s = \{(p, q) \mid p \in X^* \& q = \lambda(s, p)\}$, где $s \in S$.

Поведение автомата в целом характеризуется множеством $\Lambda_A = \{(p, q) \mid (\exists s \in S) p \in X^* \& \lambda(s, p) = q\}$.

Поведение (A, s) можно представить точечным образом в ограниченном подмножестве двумерного евклидова пространства

$$\Gamma = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid \tilde{x} \in [1, n+1], \tilde{y} \in [1, m+1]\}, \quad n = |X|, m = |Y|.$$

Считается, что точки пространства изображаются в декартовой системе координат с обычными представлениями о точках, кривых на плоскости и расстоянии между точками.

Под *геометрическим образом* автомата (A, s) понимается множество точек в Γ вида

$$\Omega_A^s = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid (\exists p \in X^*) (\exists q \in Y^*) (\exists \omega = (c_1, c_2, \dots, c_{|p|}) \in V_N) (\exists \xi = (b_1, b_2, \dots, b_{|p|}) \in V_N) :$$

$$\lambda(s, p) = q \& \omega = g(p) \& \xi = h(q) \& \tilde{x} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}} \& \tilde{y} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}\},$$

где $g: X^* \rightarrow V_N$, $h: Y^* \rightarrow V_N$ взаимно однозначные отображения, а $V_N = \bigcup_k V_N^k$, $V_N^k = \{\omega \mid \omega = (i_1, i_2, \dots, i_k), \quad i_j \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$.

Точки множества Ω_A^s поместим на некоторую функциональную кривую. Кривая f называется *функциональной кривой*, если f есть график некоторой непрерывной функции.

Функциональная кривая f определяет *поведение* автомата (A, s) в Γ , если $f \supset \Omega_A^s$.

Поведение автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ с l состояниями в Γ будет определяться семейством кривых $\{f_s^A\}_{s \in S}$, $|S| = l$. Такие кривые будем называть *автоматными*.

Пусть даны автоматы $A = (S_A, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ и $B = (S_B, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$. Состояние $s \in S_A$ *r-неотличимо* от состояния $s' \in S_B$, если для любого $p \in X^{\geq r}$

выполняется $pr_{r \cup |p|}(\lambda_A(s, p)) = pr_{r \cup |p|}(\lambda_B(s', p))$. Неотличимость в этом смысле состояний s и s' обозначим $s \approx s'$. Предположим, что для любого состояния $s \in S_A$ существует r -неотличимое состояние $s' \in S_B$, и обратно, для любого состояния $s' \in S_B$ существует r -неотличимое состояние $s \in S_A$. Говорим в указанной ситуации, что автоматы A и B r -неотличимы. Неотличимость автоматов A и B обозначаем $A \approx B$.

Две кривые называются *конгруэнтными*, если они могут быть получены одна из другой с помощью ортогонального преобразования. Конгруэнтные кривые мы будем называть также *метрически эквивалентными*.

Две кривые называются *аффинно эквивалентными*, если они могут быть получены одна из другой с помощью аффинного преобразования. Кривая f' называется аффинно эквивалентной кривой f , если f' является образом f при каком-нибудь аффинном преобразовании. Совокупность всех кривых, аффинно эквивалентных какой-нибудь определенной кривой f , называется *аффинным классом* кривой f . Понятно, что если кривые f и f' аффинно эквивалентны, то их аффинные классы совпадают.

Справедливо следующее утверждение:

ТЕОРЕМА. Пусть $\{f_s^A\}_{s \in S_A}$, $\{f_s^B\}_{s \in S_B}$ - семейства автоматных кривых, определяющих поведение автоматов $A = (S_A, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$, $B = (S_B, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ в Γ . Если для любой кривой f_s^A , $s \in S_A$ существует метрически эквивалентная в Γ кривая $f_{s'}^B$, $s' \in S_B$, и обратно, для любой кривой $f_{s'}^B$ существует метрически эквивалентная кривая f_s^A , то $A \approx B$.

Доказательство. Ортогональные преобразования подразделяются на два класса преобразований: ортогональные преобразования первого и второго рода. На плоскости каждое ортогональное преобразование первого рода есть либо чистый параллельный перенос, либо чистый поворот вокруг некоторой точки; каждое ортогональное преобразование второго рода есть произведение отражения в некоторой прямой на параллельный перенос в направлении этой прямой (причем этот параллельный перенос может сходиться к тождественному преобразованию).

Если автоматная кривая (функциональная кривая) полностью определена в Γ , то в результате применения к ней ортогонального преобразования получим вновь кривую, полностью лежащую в Γ лишь в случае параллельного переноса исходной кривой вдоль оси ординат, либо поворота на 360° вокруг начала координат, либо отражения в прямой $\tilde{y} = 0$ с последующим параллельным переносом. Все иные ортогональные преобразования приведут

к тому, что образ кривой окажется вне Γ , а, следовательно, этот образ перестанет быть образом автоматной кривой.

При преобразования параллельного переноса вдоль оси ординат кривой, выражаемой уравнением $\tilde{y} = f(\tilde{x})$, получаем кривую, выражаемую уравнением $\tilde{y}' = f(\tilde{x}) + k$, где $k = \text{const}$. В случае поворота, данное преобразование можно представить матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ где } \varphi - \text{угол поворота.}$$

При $\varphi = 360^\circ$ матрица преобразования получает вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При указанных преобразованиях точка (\tilde{x}, \tilde{y}) перейдет в точку (\tilde{x}', \tilde{y}') , так что в случае переноса $\tilde{x}' = \tilde{x}$, $\tilde{y}' = \tilde{y} + k$, в случае поворота $\tilde{x}' = \tilde{x}$, $\tilde{y}' = \tilde{y}$, а при отражении $\tilde{x}' = \tilde{x}$, $\tilde{y}' = -\tilde{y}$. Как было отмечено выше, при отражении кривой f_s^A в прямой $\tilde{y} = 0$ образ преобразования окажется вне Γ . Однако применение преобразования параллельного переноса к полученному образу приведет к тому, что образ кривой f_s^A вновь окажется в Γ .

Поскольку случай поворота является тривиальным, а случай чистого отражения не может привести к образу автоматной кривой, достаточно рассмотреть случай параллельного переноса. Пусть (\tilde{x}, \tilde{y}) - произвольная точка

кривой f_s^A , $s \in S_A$, такая что $\tilde{x} = \sum_{i=1}^l \frac{c_i}{(n+1)^{i-1}}$, $\tilde{y} = \sum_{i=1}^l \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}$, где $l \in Z^+$, $c_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $b_i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Если образ преобразования кривой f_s^A метрически эквивалентен кривой $f_{s'}^B$, $s' \in S_B$, то $\tilde{y}' = \sum_{i=1}^l \frac{b'_i}{(m+1)^{i-1}}$ и $\tilde{y}' = \tilde{y} + k$, где $k \in Z^+$, причём $\tilde{y}' \in [1, m+1]$ (в случае $k \notin Z^+$ точка (\tilde{x}', \tilde{y}') перестает быть точкой геометрического образа автомата).

Имеем $\tilde{y} = \sum_{i=1}^l \frac{b_i}{(m+1)^{i-1}}$. Из равенства $\tilde{y}' = \tilde{y} + k$ следует, что $b'_1 = b_1 + k$, $b'_i = b_i$ для $i = 2, 3, \dots, l$. Сопоставим числу \tilde{y}' слово q над алфавитом Y так, что $\tilde{y}' \mapsto q'$, $q' = y_{b_1+k} y_{b_2} \dots y_{b_l}$, где $y_{v_\mu} \in Y$. Из $\tilde{y} \mapsto q$ получаем $q = y_{b_1} y_{b_2} \dots y_{b_l}$. Сравнивая слова q, q' , приходим к выводу, что $P_{2,|q|}^r q = P_{2,|q|}^r q'$.

Проведя все необходимые рассуждения с кривой $f_{s'}^B$, $s' \in S_B$, окончательно получаем, что для любого состояния $s \in S_A$ существует

2-неотличимое состояние $s' \in S_B$, и обратно, для любого состояния $s' \in S_B$ существует 2-неотличимое состояние $s \in S_A$. Непосредственно из определения неотличимости следует, что $A \overset{2}{\approx} B$. \square

Автору представляется весьма перспективным изучение аффинных классов автоматных кривых с целью исследования неотличимости автоматов.

УДК 512.532

П. М. Хрусталев

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В данной работе исследуется один класс взаимно-однозначных отображений на множестве булевых функций n переменных. Доказывается, что этот класс образует группу относительно композиции, мощность которого равна 2^n . Показывается, что отображения класса сохраняют линейность и самодвойственность булевых функций, а также сохраняют их нелинейность и несамодвойственность. Исследуются ядра отображений класса.

Замена аргумента x_i в булевой функции его отрицанием \bar{x}_i в общем случае изменяет функцию, т.е. $g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$

Выбор i -го аргумента x_i ($1 \leq i \leq n$) определяет отображение $Q_i : F_n \rightarrow F_n$ на множестве F_n п таких отображений:

$$\begin{array}{c} f(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{Q_i} f(\bar{x}_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ f(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{Q_n} f(x_1, \dots, \bar{x}_n). \end{array}$$

Функции $Q_i (f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$, построены из функций $f(x_1, \dots, x_n)$ и, следовательно, сохраняют некоторые свойства последней, иными словами, являются ее приближенными "копиями" (проекциями).

По такой же схеме из полученных функций построим новые:
 $Q_j(Q_i(f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n))) = f(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_n)$, и так далее.

Целью данной статьи является исследование класса всех отображений на множестве F_n , порожденных отображениями Q_1, \dots, Q_n с помощью суперпозиции S .

Для исследования удобен алгебраический подход и другая индексация базовых (порождающих) отображений.

Базовые отображения Q_1, \dots, Q_n будем обозначать $Q_{(0,1,\dots,1)}, \dots, Q_{(1,\dots,1,0)}$ соответственно, элементы класса - $Q_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$, где $\alpha_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq n$, а суперпозицию $S(Q_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}, Q_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}) = Q_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}$ заменим операцией \circ , где $Q_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \circ Q_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} = Q_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}$.

Введя обозначения $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}) = (x_1 \leftrightarrow \alpha_1, \dots, x_n \leftrightarrow \alpha_n)$, исследуем класс $\{Q_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\}$, где $Q_\alpha(f(x)) = f(x^\alpha)$, $(Q_\alpha \circ Q_\beta)(f) = Q_\beta(Q_\alpha(f))$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Класс $\{Q_\alpha\}$ является собственным подклассом класса всех отображений $\{\phi_k\}$ на множестве F_n .

Доказательство. $|\{\alpha\}| = 2^n$, $|\{k\}| = m^m$, где $m = 2^{2^n}$. Поэтому $\{Q_\alpha\} \subset \{\phi_k\}$. \square

Следствие 1. Мощность класса $\{Q_\alpha | \alpha \in \{0,1\}^n\}$ равна 2^n . \square

ТЕОРЕМА 1. Класс $\{Q_\alpha\}$ всех обращений аргументов является группой относительно композиции \circ .

Доказательство. Согласно определению, отображения Q_α всюду определены на множестве F_n .

Покажем, что класс $\{Q_\alpha\}$ замкнут относительно композиции \circ .

$$(Q_\alpha \circ Q_\beta)(f(x)) = Q_\beta(Q_\alpha(f(x))) = Q_\beta(Q_\alpha(f(x^\alpha))) = f((x^\alpha)^\beta) = f(x^\gamma) = Q_\gamma(f(x)),$$

где $\gamma = \alpha \leftrightarrow \beta = \alpha^\beta$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}^n$.

Но так как множество всех двоичных векторов замкнуто относительно операции эквиваленции, т.е. $\gamma = \alpha \leftrightarrow \beta \in \{0,1\}^n$, то класс $\{Q_\alpha\}$, $\alpha \in \{0,1\}^n$, замкнут относительно композиции \circ .

Операция \circ на множестве $\{Q_\alpha\}$ - ассоциативна, поскольку верно, что $Q_\alpha \circ (Q_\beta \circ Q_\gamma) = (Q_\alpha \circ Q_\beta) \circ Q_\gamma$, так как $\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma) = (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma$.

Операция \circ на множестве $\{Q_\alpha\}$ - коммутативна, потому что $Q_\alpha \circ Q_\beta = Q_{(\alpha \leftrightarrow \beta)} = Q_\beta \circ Q_\alpha$.

Следовательно, $(\{Q_\alpha\}, \circ)$ является абелевой полугруппой.

Элемент $Q_1 = Q_{(1, \dots, 1)}$ относительно \circ является нейтральным элементом, так как $Q_\alpha \circ Q_1 = Q_1 \circ Q_\alpha = Q_\alpha$ верно для любого $\alpha \in \{0,1\}^n$, поскольку $\alpha^1 = \alpha \leftrightarrow 1 = 1 \leftrightarrow \alpha = \alpha$, где $\alpha \leftrightarrow 1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \circ (1, \dots, 1) = (\alpha_1 \leftrightarrow 1, \dots, \alpha_n \leftrightarrow 1)$.

Для каждого элемента Q_α полугруппы $\{Q_\alpha\}$ с единицей Q_1 существует обратный элемент $Q_\alpha^{-1} = Q_\alpha$, ибо $Q_\alpha \circ Q_\alpha = Q_{(\alpha \leftrightarrow \alpha)} = Q_1$.

Таким образом, $(\{Q_\alpha\}, \circ)$ - группа. \square

Следствие 2. Если $Q_\alpha \circ Q_\beta = Q_\gamma$, то $Q_\alpha = Q_\beta \circ Q_\gamma$ и $Q_\beta = Q_\alpha \circ Q_\gamma$, где $\gamma = \alpha \leftrightarrow \beta$, $\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma$, $\beta = \alpha \leftrightarrow \gamma$.

Справедливость этого утверждения обусловлена тем, что в группах разрешимы уравнения:

$$\begin{cases} a \circ u = c, u = a^{-1} \circ c; \\ v \circ b = c, v = c \circ b^{-1} \end{cases} \quad \square$$

ТЕОРЕМА 2. Класс линейных функций замкнут относительно любого преобразования из группы $\{Q_\alpha\}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in F_n$ - линейная функция, а значит она представима в виде $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n$.

Тогда функция $Q_\alpha(f(x)) = Q_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}) = a_0 \oplus a_1(x_1 \oplus \alpha_1 \oplus 1) \oplus \dots \oplus a_n(x_n \oplus \alpha_n \oplus 1) = f(x) \oplus c$ есть линейная функция. \square

Следствие 3. Класс нелинейных функций замкнут относительно любого преобразования Q_α .

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 2, с учётом взаимной однозначности отображения Q_α .

ТЕОРЕМА 3. Класс самодвойственных функций замкнут относительно любого отображения Q_α .

Доказательство. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ - самодвойственная функция, то $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Тогда функция $g(x_1, \dots, x_n) = Q_\alpha(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n})$ является самодвойственной, так как $f(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}) = \bar{f}(x_1^{\bar{\alpha}_1}, \dots, x_n^{\bar{\alpha}_n}) = \bar{f}(\bar{x}_1^{\alpha_1}, \dots, \bar{x}_n^{\alpha_n})$.

Из теоремы 3, учитывая, что Q_α - взаимно однозначно, следует, что любая самодвойственная функция имеет образ при отображении Q_α , который не может быть несамодвойственной функцией. Однако Q_α является своим обращением относительно операции \circ (теорема 1). Поэтому образ несамодвойственной функции не может быть самодвойственная функция. Таким образом, имеем:

Следствие 4. Класс несамодвойственных функций замкнут относительно любой операции Q_α обращения аргументов. \square

Отображениями Q_α на множестве F_n порождаются ядерные эквивалентности $\varepsilon_\alpha = \text{Ker } Q_\alpha : f \varepsilon_\alpha g \Leftrightarrow Q_\alpha(f) = Q_\alpha(g)$.

Из того, что $Q_\alpha : F_n \rightarrow F_n$ является взаимно-однозначным отображением, следует, что $(\forall \alpha, \beta)(\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_0)$, где ε_0 - тождественная эквивалентность: $\varepsilon_0 \subseteq F_n^2$, причем $f \varepsilon_0 g \Leftrightarrow f = g$.

Таким образом, классы соответствующего ε_0 разбиения $R_0 = \{f \mid f \in F_n\}$ являются одноэлементными множествами, число которых равно 2^{2^n} . \square

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ В САРАТОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ. Поплавский В.Б.	3
СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ	
АГАФОНОВА Н. Ю., МИХАЙЛОВ В. Н. Интегральные представления решения уравнения Лапласа в составных трехмерных областях	7
АЛЕКСАНДРОВ Е. Л. О методе разделения переменных решения операторных урав- нений	10
ВАСИЛЬЕВ Ю. П. Решение матричной задачи на собственные значения методом Ньютона	12
ВАСИЛЬЕВ Ю. П. Алгоритм распределения поручений	15
ВАХЛАЕВА Л. Ф., ВАХЛАЕВА Т. В. Оценка эффективности и экономичности прямых и итерационных методов решения разностных уравнений	18
ГУРЕВИЧ А. П., ХРОМОВ А. П. Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов	21
ГУСЕВ Г. И. Об изометриях в неархimedовых полях, связанных с рядами Ньютона . .	24
ДУДОВ С. И., ЗЛАТОУРНСКАЯ И. В. К решению одной задачи выпуклого програм- мирования	27
ЕВТЕЕВА Л. А., КЛИМОВ Н. И., СЛАВИНА Ю. В. Асимптотика сумм с функциями Мёбиуса и Эйлера	29
ЕФРЕМОВ И. И. Асимптотика собственных значений индефинитных квазидиффе- ренциальных операторов	32
ИГНАТЬЕВ М. Ю. Линейная эквивалентность и смежные вопросы спектральной те- ории некоторых интегро-дифференциальных операторов дробного порядка с особенностью	35
КЛИМОВ Н. И., КРАЙНОВА О. П. Об оценке сверху для близнецов	38
КОРНЕВ В. В. Решение линейного дифференциального уравнения в кватернионах .	39
КРАВЧЕНКО К. В. Обратная спектральная задача для дифференциальных операто- ров с краевыми условиями общего вида	40
КУДИШИН П. М. О необходимых и достаточных условиях на спектральные данные для дифференциальных операторов с особенностью	44
КУРДЮМОВ В. П. Базисность Рисса собственных и присоединенных функций интег- рального оператора с ядром, имеющим разрывы на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$	48
КУРЫШОВА Ю. В. Обратная спектральная задача для операторов с последействием .	51
ЛУКОМСКИЙ Д. С. Об обратной спектральной задаче для дифференциальных опера- торов с нелинейной зависимостью от спектрального параметра	54
МОЛОДЕНКОВА И. Д. Приложение операторов осреднения к задаче восстановления функций	57
ПЛЕЩАКОВ М. Г. Один контрпример для комонотонного неравенства Джексона . .	59
РЫХЛОВ Н. В. Формула субдифференциала калибровочной функции	62
СИДОРОВ С. П. Одно точное неравенство для линейных положительных операторов.	64

ТЕРЁХИН П. А. Сжатия и сдвиги функции с ненулевым интегралом	67
ТЕРЁХИН П. А. Нормированные билинейные отображения евклидовых пространств	68
ХРОМОВА Г. В. О скорости аппроксимации приближенных решений в методе регуляризации Тихонова	69
ШЕВЦОВ В. И. Уравнения бесконечного порядка в одном квазианалитическом классе функций	72

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНТОНЕНКО Э.В., БЛИНКОВ Ю.А., ИВАНОВ С.С. О собственных значениях с весовой ступенчатой функцией в задачах механики упругих тел	77
БЕЗЛЮДНЫЙ В.В., МОЗЖИЛКИН В.В. Расчет сверхзвукового обтекания гармонически колеблющихся тел	80
БОЛЬМАН Н. Г., САФРОНЧИК А. И. О влиянии шпунтовой завесы на распределение давления в основании перемычки и подтопление территории, примыкающей к водоёму	83
ГУРЬЯНОВ В.М., ГУРЬЯНОВ В.В. Плоские упругие волны конечных деформаций в анизотропных средах	86
КОНТАРЕВ А.А., МАРКУШИН А.Г., САДОВНИЧАЯ Е.В. Алгоритм решения задачи истечения сыпучего материала	88
КРЫСЬКО В.А., ВАХЛАЕВА Л.Ф., ВАХЛАЕВА Т.В. Исследование колебаний и бифуркаций пластинки при неоднородных вдоль стороны краевых условиях под действием продольной нагрузки	93
САПУНКОВ Я.Г. Соотношения между кватернионными и классическими элементами орбиты	95
САПУНКОВА О.М. Пример МГД-течения с двумя характерными скоростями	97
СЕВОСТЬЯНОВ Г.Д. Однопараметрические функции, непрерывные через околовзвуковой скачок уплотнения	100
ЧЕРНОВ И.А. Р-решения трансзвуковых уравнений аэродинамики	102
ШИНДЯПИН Г. П., МЫЛЬЦИН В. Л. Проблемы математического моделирования и классификации ударно-волновых взаимодействий в газах и газожидкостных средах	106

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

БАТРАЕВА И. А. О некоторых свойствах словарных отображений, непредставимых конечными детерминированными автоматами	109
ЕЛИСЕЕВА Е. В. Об избыточности универсальных тестов	112
ЕМЕЛЬЯНОВА О. В. Характеризация и перечисление циклических упорядоченных множеств	114
ЗЛАТОРУНСКАЯ И. В. О редукции задачи равномерной оценки выпуклого компакта шаром произвольной нормы к задаче выпуклого программирования	116
МАНГУШЕВА И. П. Условия взаимной однозначности обобщенного автоматного кодирования	120
ОГНЕВА М. В. Синхронизация билинейных дискретных систем	124
РОЗЕН В. В. Описание ситуаций равновесия в играх с упорядоченными исходами	128
САЛИЙ В. Н. Квазибулевы степени алгебр и полурешётки	131
САМОДУРОВА Л. Б. Простые коммутативные автоматы	134
СЕРДЮКОВА Ю. Н. Ситуации равновесия по Нэшу с заданными спектрами	137
ТЯПАЕВ Л. Б. Геометрическая модель поведения автоматов и их неотличимость	139
ХРУСТАЛЁВ П. М. О преобразованиях булевых функций	143

Издательство Саратовского университета и Астраханской областной научно-исследовательской лаборатории по проблемам кибернетики и информатики приглашают ученых, специалистов, инженеров, студентов, аспирантов, а также всех заинтересованных лиц принять участие в конференции, посвященной проблемам информационных технологий и кибернетики.

Сборник научных трудов

Научный совет по проблемам кибернетики Астраханского государственного технического университета возглавляет профессор А. Г. ЧУМАКОВ. На конференции выступят известные ученые из Астрахани и других городов России, включая профессора О. Н. КИЧЕНОВА, Д. Г. МАЛЫШЕВА, Ю. В. ПОДДЕРЖАНОВА и др. Ученые из Астрахани и Саратова представят свои работы в четырех разделах: «Математика и механика», «Математическая кибернетика», «Информатика и вычислительная техника» и «Прикладные проблемы информатики и кибернетики».

Научное издание

Научное издание «Математика, механика, математическая кибернетика» подготовлено к печати в Издательстве Саратовского университета. Редакторы: О. В. Багаев, Е. А. Митенёва. Художественное оформление: А. В. Завьялов. Технический редактор: Л. В. Агальрова. Корректор: Е. А. Митенёва. Логотип на обложке: Е. В. Завьялов.

Сборник научных трудов

Ответственный за выпуск О. Л. Багаев
Технический редактор Л. В. Агальрова

Корректор Е. А. Митенёва
Логотип на обложке Е. В. Завьялов

Изд. лиц. № 020305 от 19.02.97. Подписано в печать 29.11.99. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 8,60(9,25). Уч.-изд. л. 7,1. Тираж 200 экз. Заказ 97.

Издательство Саратовского университета.

410601, Саратов, Университетская, 42.

Типография Издательства Саратовского университета.

410026, Саратов, Астраханская, 83.