

**МАТЕМАТИКА.
МЕХАНИКА**

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 19

Саратов

Издательство Саратовского университета

2017

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

Математика. Механика : сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Сарат.
М34 ун-та, 2017. – Вып. 19. – 140 с. : ил.

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. Представлены исследования по алгебре, геометрии, дискретной математике, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории приближений, математической экономике, биомеханике, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я :

Г. В. Хромова, доктор физ.-мат. наук (главный редактор),
Ю. А. Блинков, доктор физ.-мат. наук (зам. главного редактора),
Д. В. Прохоров, доктор физ.-мат. наук,
А. П. Хромов, доктор физ.-мат. наук,
Г. Н. Белосточный, доктор техн. наук,
Ю. В. Матвеева, канд. физ.-мат. наук (отв. секретарь)

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

УДК 519.853

В. В. Абрамова, С. И. Дудов

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ ПСЕВДОРАССТОЯНИЯ ДО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

1. Рассмотрим функцию следующего вида:

$$\varphi(x) \equiv \min_{y \in \Omega} f(y - x), \quad (1)$$

где Ω – выпуклое замкнутое множество из конечномерного действительного пространства \mathbb{R}^p , $f(x)$ – выпуклая конечная на \mathbb{R}^p функция, имеющая единственную точку минимума $x^* = 0_p = (0, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$. В частном случае, когда функция $f(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы, функция (1) выражает расстояние от точки x до множества Ω и уже этим интересна для приложений.

Цель статьи – исследование свойств функции (1). Отметим сразу, что нижние лебеговы множества функции $f(x)$, как это вытекает из требования к ней, являются ограниченными выпуклыми замкнутыми множествами. А кроме того, выпуклый компакт $Q(x) = \Omega \cap \{y \in \mathbb{R}^p : f(y-x) \leq \varphi(x)\}$ при любом $x \in \mathbb{R}^p$ в то же время является «псевдопроекцией» точки x на множество Ω , то есть представлен в виде

$$Q(x) = \{z \in \Omega : f(y - x) = \varphi(x)\}.$$

Далее используем обозначения:

\overline{A} , $int A$, $co A$ – замыкание, внутренность, выпуклая оболочка множества A соответственно;

$K(z, \Omega)$ – конус возможных направлений множества Ω в точке $z \in \Omega$, K^+ – конус, сопряженный к конусу K ; $\partial f(x)$ – субдифференциал выпуклой функции $f(\cdot)$ в точке x .

2. Докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Функция $\varphi(x)$ является выпуклой и конечной на \mathbb{R}^p , а её субдифференциал в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}^p$ можно представить в виде*

$$\partial\varphi(x_0) = -\{\partial f(z - x_0) \cap K^+(z, \Omega)\}, \quad (2)$$

где z – любая точка из множества $Q(x_0)$.

Доказательство.

1) Пусть x_1 и x_2 произвольно выбранные точки и $y_1 \in Q(x_1), y_2 \in Q(x_2)$. Поскольку $y_i \in \Omega, i = \overline{1, 2}$ и Ω – выпуклое множество, то $\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 \in \Omega$ и поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) &= \min_{y \in \Omega} f(y - \alpha x_1 - (1 - \alpha)x_2) \leq f(\alpha(y_1 - x_1) + \\ &+ (1 - \alpha)(y_2 - x_2)) \leq \alpha f(y_1 - x_1) + (1 - \alpha)f(y_2 - x_2) = \\ &= \alpha\varphi(x_1) + (1 - \alpha)\varphi(x_2), \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

2) Теперь докажем справедливость формулы (2). Напомним [1, гл. 2, § 3], что субдифференциалом выпуклой на \mathbb{R}^p функции $f(x)$ в точке x называется множество

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^p : f(y) - f(x) \geq \langle v, y - x \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^p\}. \quad (3)$$

Известно [2, гл. 1, § 5], что для выпуклой конечной функции $f(\cdot)$ субдифференциал $\partial f(x)$ является выпуклым компактом.

Выберем произвольно вектор $g \in \mathbb{R}^p$, последовательность $\alpha_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, точки $y_k \in Q(x_0 + \alpha_k g), k = 1, 2, \dots$ и точку $z \in Q(x_0)$.

Из определения (3) вытекает

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \alpha_k g) &= f(y_k - x_0 - \alpha_k g) = f(z - x_0 + y_k - z - \alpha_k g) \geq \\ &\geq f(z - x_0) + \max_{v \in \partial f(z - x_0)} \langle v, y_k - z - \alpha_k g \rangle \geq \\ &\geq \varphi(x_0) + \max_{v \in \partial f(z - x_0) \cap K^+(z, \Omega)} \langle v, y_k - z - \alpha_k g \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $y_k \in \Omega$, то из выпуклости множества Ω следует $y_k - z \in K(z, \Omega)$ и поэтому $\langle v, y_k - z \rangle \geq 0$ для $v \in K^+(z, \Omega)$. А тогда из (4) получаем

$$\varphi(x_0 + \alpha_k g) \geq \varphi(x_0) + \alpha_k \max_{v \in -\{\partial f(z - x_0) \cap K^+(z, \Omega)\}} \langle v, g \rangle. \quad (5)$$

Поскольку выпуклая конечная функция дифференцируема по любому направлению в любой внутренней точке области определения [2, гл. 1, § 4], то из (5) следует

$$\begin{aligned}\varphi'(x_0, g) &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [\varphi(x_0 + \alpha g) - \varphi(x_0)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k^{-1} [\varphi(x_0 + \alpha_k g) - \varphi(x_0)] \geq \\ &\geq \max_{v \in -\{\partial f(z-x_0) \cap K^+(z, \Omega)\}} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^p.\end{aligned}\quad (6)$$

В то же время [2, гл. 1, § 5] имеем

$$\varphi'(x_0, g) = \max_{v \in \partial \varphi(x_0)} \langle v, g \rangle, \quad \forall g \in \mathbb{R}^p. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что из (6)–(7) вытекает включение

$$-\{\partial f(z-x_0) \cap K^+(z, \Omega)\} \subset \partial \varphi(x_0). \quad (8)$$

Таким образом, осталось доказать, что на самом деле в (8) имеет место знак равенства. Предположим противное, то есть существует точка $v_0 \in \partial \varphi(x_0)$ и при этом

а) $v_0 \notin -K^+(z, \Omega)$. Тогда проектируем (в евклидовой норме) точку v_0 на конус $-K^+(z, \Omega)$ и пусть элемент $v_1 \in -K^+(z, \Omega)$ такой, что

$$\|v_0 - v_1\| = \min_{v \in -K^+(z, \Omega)} \|v_0 - v\|.$$

По свойству проекции выполняется

$$\langle v_0 - v_1, w - v_1 \rangle \leq 0, \quad \forall w \in -K^+(z, \Omega). \quad (9)$$

Так как $v_1 \in -K^+(z, \Omega)$ и конус $-K^+(z, \Omega)$ является выпуклым, то

$$v_1 - K^+(z, \Omega) \subset -K^+(z, \Omega). \quad (10)$$

Тогда из (9)–(10) следует

$$\langle v_0 - v_1, w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in K^+(z, \Omega). \quad (11)$$

И поскольку конус возможных направлений [2, гл. 1, § 3] является замкнутым, то из (11) получаем

$$v_2 = v_0 - v_1 \in K^{++}(z, \Omega) = \overline{K}(z, \Omega) = K(z, \Omega). \quad (12)$$

Это, как следует из определения конуса возможных направлений [2, гл. 1], означает, что элемент v_2 представим в виде $v_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k$, где $w_k \in \gamma(z, \Omega) = \{w \in \mathbb{R}^p : \exists \alpha_w > 0, z + \alpha w \in \Omega, \forall \alpha \in (0, \alpha_w)\}$. Следовательно, мы можем выбрать последовательность $\alpha_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ так, что

$$z + \alpha_k w_k \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Известно [2, гл. 1, § 5], что выпуклая конечная функция является липшицевой на ограниченном множестве. Поэтому, используя (13), имеем

$$\varphi(x_0 + \alpha_k v_2) \leq f(z + \alpha_k w_k - x_0 - \alpha_k v_2) \leq f(z - x_0) + \alpha_k L \|w_k - v_2\|, \quad (14)$$

где L – константа Липшица для функции $f(\cdot)$ в некоторой окрестности точки $z - x_0$.

С другой стороны, подставляя в (9) в качестве $w = 2v_1$ и $w = 0_p$, получаем $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$ и тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \alpha_k v_2) &\geq \varphi(x_0) + \alpha_k \max_{v \in \partial \varphi(x_0)} \langle v, v_2 \rangle \geq \varphi(x_0) + \alpha_k \langle v_0, v_2 \rangle = \\ &= \varphi(x_0) + \alpha_k \|v_2\|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку $f(z - x_0) = \varphi(x_0)$, $w_k \rightarrow v_2$ при $k \rightarrow \infty$ и $v_2 \neq 0_p$, то (15) при достаточно больших индексах k противоречит (14).

б) $v_0 \notin -\partial f(z - x_0)$. Тогда по теореме отделимости [3, гл. 1, §1. 9] существуют вектор $g_0 \neq 0_p$ и $a > 0$ такие, что

$$\langle v_0, g_0 \rangle - a \geq \max_{v \in -\partial f(z - x_0)} \langle v, g_0 \rangle. \quad (16)$$

Используя (16), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \alpha g_0) &\leq f(z - x_0 - \alpha g_0) = f(z - x_0) + \alpha \max_{v \in \partial \varphi(z - x_0)} \langle v, -g_0 \rangle + \\ &+ o(\alpha, g_0) \leq \varphi(x_0) + \alpha \langle v_0, g_0 \rangle - \alpha a + o(\alpha, g_0), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\alpha^{-1} o(\alpha, g_0) \rightarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$.

С другой стороны, учитывая $v_0 \in \partial \varphi(x_0)$, имеем

$$\varphi(x_0 + \alpha g_0) \geq \varphi(x_0) + \alpha \langle v_0, g_0 \rangle,$$

что при достаточно малых $\alpha > 0$ противоречит (17).

Теорема доказана.

Из формулы (2) вытекает

Следствие

- 1) Если $x_0 \in \text{int} \Omega$, то $\partial \varphi(x_0) = \{0_p\}$.
- 2) Если x_0 – граничная точка множеств Ω , то

$$\partial \varphi(x_0) = -\{\partial f(0_p) \cap K^+(x_0, \Omega)\}.$$

Замечание. Формула (2) является обобщением формулы субдифференциала функции расстояния до выпуклого множества, полученной

в [4]. Отметим также другую форму представления субдифференциала функции расстояния, полученную в [1, гл. 2, § 3, п. 4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980.
2. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981.
3. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2004.
4. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Мат. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530–542.

УДК 517.518.83

К. В. Беличенко, В. М. Соболев

СИНК-АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ RFID МЕТОК

В данной работе рассматривается прогнозирование времени начала рабочего дня сотрудника с помощью синк-аппроксимации (операторов Уиттекера) на основе данных, полученных с RFID меток сотрудника.

В настоящее время на многих предприятиях вводится гибкий график рабочего времени для комфорта сотрудника, вследствие чего повышается его работоспособность. Предполагается, что на предприятии функционирует пропускная система с помощью электронных пропусков (RFID карт) и при этом разработана система сбора и анализа данных о проходах сотрудника через турникет. Внутренние возможности данного приложения позволяют легко строить графики и диаграммы по полученной информации. Графические выкладки легче воспринимать и легче анализировать полученную информацию.

Данная система может быть доработана компонентом со следующими функциями:

1. Изменение рабочего времени сотрудника.
2. Учет опозданий при расчете премий.

Первый пункт доработок предполагает в себе использование метода синк-аппроксимации. На основе текущих данных о проходе через турникет всех сотрудников организации отслеживается количество опозданий по организации. Если сотрудник систематически опаздывает на работу (количество опозданий больше среднего числа по организации), выдвигается предложение о сдвиге начала рабочего дня. Данный метод помогает

корректировать гибкий график работника и отслеживать соблюдение сотрудником данного графика.

В построении графиков используется формула операторов Уиттекера:

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \\ = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n l_{k,n}(x) f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Привлекательность данного метода исходит из того, что от приближаемой функции не требуется ничего, кроме непрерывности на отрезке $[0, \pi]$, а информация о функции может быть ограничена только её значениями в узлах $k\pi/n$. В настоящее время проблема синк-аппроксимации функций достаточно фундаментально исследована, что позволяет успешно изучать и применять данную методику к анализу данных для бизнеса.

Второй пункт доработок также учитывает данные о времени прихода на работу сотрудника. Ежедневно считается время опозданий, и к этим данным применяется синк-аппроксимация, строится график по сотруднику. Преимущество данного метода в том, что если, к примеру, один сотрудник всегда приходил вовремя, но потом в результате экстренно возникшей ситуации опоздал на большое количество времени, то значение интеграла от синка будет меньше, чем у того, кто опаздывает каждый день, но на небольшие промежутки времени, поскольку график пересекает ось абсцисс в местах своих колебаний, в результате чего значение интеграла будет меньше. Задача менеджера сводится к тому, чтобы установить некую норму значения интеграла по синкам для сотрудников и проводить взыскания при её превышении.

В качестве примера построен график (рисунок) с опозданием двух сотрудников за апрель (20 рабочих дней).

Как видно на графике, смоделирована ситуация, при которой один сотрудник опаздывал до 30 минут на постоянной основе, другой сотрудник приходил всегда вовремя, но в один из дней опоздал на 4 часа.

В результате подсчета интеграла от синка для каждого сотрудника получилось, что оценка первого сотрудника равна 375.2290, второго — 235.1868. Если бы в качестве показателя опозданий бралось среднее время опозданий за период, то оценка сотрудников оказалась бы равной, что некорректно. Однако, благодаря использованию аппроксимации, данная проблема легко решается.

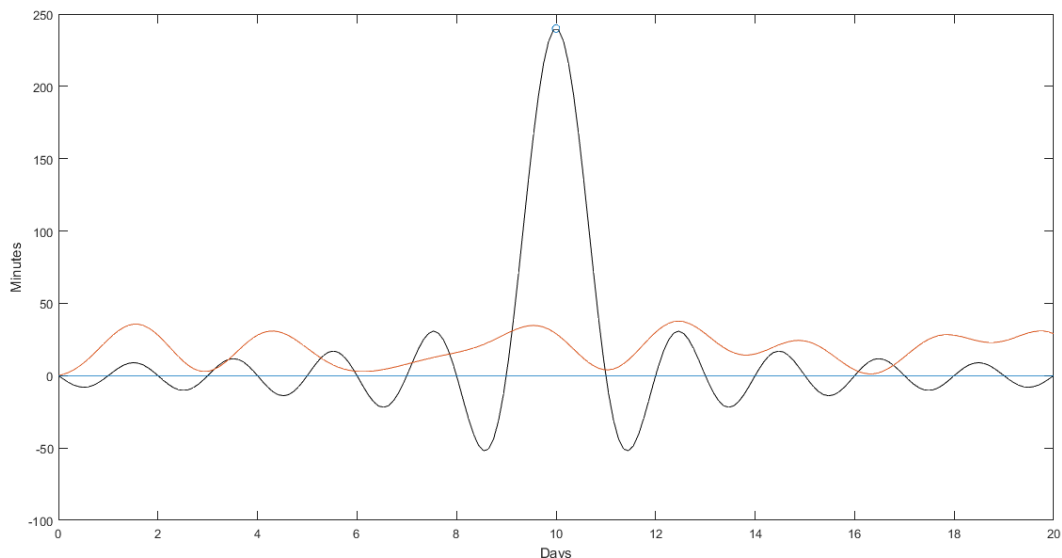


График опозданий сотрудника

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Беличенко К. В., Соболев В. М.* Учет рабочего времени сотрудника с помощью технологий RFID // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : сб. материалов V Междунар. молодежной науч.-практ. конф. : в 2 т. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. Т. 2. С. 318–321.
2. *Трынин А. Ю.* Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 124–127.

УДК 517.984

Н. П. Бондаренко

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ТИПА СВЁРТКИ

Рассмотрим интегро-дифференциальную систему Дирака следующего вида:

$$By' + \int_0^x M(x-t)y(t) dy = \lambda y, \quad (1)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

где λ — спектральный параметр, $p(x) \in L_2(0, \pi)$, $(\pi - x)q(x) \in L_2(0, \pi)$. Обозначим через L краевую задачу для системы (1) с краевыми условиями $y_1(0) = y_1(\pi) = 0$. В работе решается следующая **обратная задача**: по заданному спектру задачи L построить функции p и q .

Наиболее полные результаты в теории обратных спектральных задач получены для *дифференциальных* операторов Штурма–Лиувилля и Дирака (см. монографию [1] и список литературы в ней). *Интегро-дифференциальные* операторы являются нелокальными и требуют особых методов исследования. В работе [2] получено решение обратной задачи для интегродифференциального уравнения Штурма–Лиувилля. В статье [3] изучена обратная задача для системы Дирака вида (1) в симметричном случае, когда $M(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ -q(x) & p(x) \end{pmatrix}$, $(\pi - x)p(x) \in L_2(0, \pi)$, $(\pi - x)q(x) \in L_2(0, \pi)$. В данной работе мы развиваем подход [2, 3] для исследования обратной задачи для системы Дирака вида (1) в частном несимметричном случае, в котором для восстановления функций p и q достаточно одного спектра.

Обозначим через $S(x, \lambda)$ решение системы (1) при начальных условиях

$$S_1(0, \lambda) = 0, \quad S_2(0, \lambda) = -1.$$

Для решения $S(x, \lambda)$ существует оператор преобразования:

$$S(x, \lambda) = S_0(x, \lambda) + \int_0^x K(x, \xi) S_0(\xi, \lambda) d\xi, \quad (2)$$

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, \quad S_0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix}.$$

Собственные значения краевой задачи L совпадают с нулями характеристической функции $\Delta(\lambda) := S_1(\pi, \lambda)$, которая согласно (2) представляема в виде

$$\Delta(\lambda) = \sin \lambda \pi + \int_0^\pi (K_{11}(\pi, \xi) \sin \lambda \xi - K_{12}(\pi, \xi) \cos \lambda \xi) d\xi. \quad (3)$$

Подстановка решения (2) в систему (1) дает интегральные уравнения относительно $K_{lm}(x, \xi)$, $l, m = 1, 2$. Составляя и решая эти уравнения, можно показать, что функции

$$w_1(\xi) = -\frac{d}{d\xi} K_{12}(\pi, \pi - \xi), \quad w_2(\xi) := -K_{11}(\pi, \pi - \xi) \quad (4)$$

принадлежат $L_2(0, \pi)$ и удовлетворяют соотношениям вида

$$w_1(\xi) = p(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^n \left(\frac{b_{nj}^{(1)}(\pi - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} (p^{*j} * q^{*(n-j)})(\xi) + \right. \\ \left. + (p^{*j} * q^{*(n-j)} * R_{n-1,j}^{(1)}(\pi - \xi, \tau))(\xi) \right), \quad (5)$$

$$w_2(\xi) = (\pi - \xi)q(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left(\frac{b_{nj}^{(2)}(\pi - \xi)^n}{n!} (p^{*j} * q^{*(n-j)})(\xi) + \right. \\ \left. + (p^{*j} * q^{*(n-j)} * R_{nj}^{(2)}(\pi - \xi, \tau))(\xi) \right). \quad (6)$$

Здесь используются обозначения

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - \tau)g(\tau) d\tau, \quad f^{*n} = \underbrace{f * f * \dots * f}_n,$$

символ τ обозначает переменную интегрирования в свёртках,

$$R_{nj}^{(k)}(\xi, \tau) = \sum_{s=1}^{n-1} a_{njs}^{(k)} \frac{\xi^s}{s!} \frac{\tau^{n-1-s}}{(n-1-s)!}, \quad n \in \mathbb{N}, j = \overline{0, n}, k = 1, 2,$$

коэффициенты $a_{njs}^{(k)}$ и $b_{nj}^{(k)}$ могут быть непосредственно вычислены и удовлетворяют оценке

$$\sum_{j=0}^n \left(\sum_{s=0}^{n-1} |a_{njs}^{(k)}| + |b_{nj}^{(k)}| \right) < C4^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

с некоторой константой C .

Равенства (5)–(6) можно рассматривать как систему нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций p и q . Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Система (5)–(6) при любых $w_1, w_2 \in L_2(0, \pi)$ имеет единственное решение p, q , такое что $p(x) \in L_2(0, \pi)$, $(\pi - x)q(x) \in L_2(0, \pi)$.

При помощи представления (3) для характеристической функции получен следующий результат.

Теорема 2. Спектр краевой задачи L представляет собой счётное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ следующего вида:

$$\lambda_k = k + \varkappa_k, \quad \{\varkappa_k\} \in l_2, \quad \{k(\varkappa_k + \varkappa_{-k})\} \in l_2. \quad (7)$$

Опираясь на теорему 1, мы показали, что условия на собственные значения (7) являются не только необходимыми, но и достаточными, доказали единственность и получили конструктивный алгоритм решения исследуемой обратной задачи. Основным результатом работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3. *Для любой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ вида (7) существуют единственные (с точностью до значений на множестве меры нуль) функции $p(x)$ и $q(x)$, такие что $p(x) \in L_2(0, \pi)$, $(\pi - x)q(x) \in L_2(0, \pi)$ и $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ является спектром соответствующей краевой задачи L .*

Функции p и q могут быть построены по следующему **алгоритму**.

1. По заданной последовательности $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ построить функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda - \lambda_0) \prod_{k \neq 0} \frac{\lambda_k - \lambda}{k} \exp\left(\frac{\lambda}{k}\right).$$

2. Используя представление (2), найти функции $K_{11}(\pi, \xi)$ и $K_{12}(\pi, \xi)$ при помощи обратного преобразования Фурье.

3. Построить функции w_1, w_2 по формулам (4).

4. Решить систему (5)-(6) и найти p и q .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №17-11-01193).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.
2. Buterin S. A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results in Mathematics. 2007. Vol. 50, № 3–4. P. 73–181.
3. Bondarenko N., Buterin S. On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum // Results in Mathematics. Published online. 2016 June. P. 1–9.

О МНОГООБРАЗИИ ГРУППОИДОВ ОТНОШЕНИЙ С ОПЕРАЦИЕЙ ДЕСКРИПЦИИ СОВМЕСТНЫХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Настоящая работа представляет собой продолжение исследований, предпринятых в ряде статей [1–5], автором которых является Д. А. Бредихин (в том числе и в статье, представленной в этом сборнике), посвященных изучению различных классов группоидов бинарных отношений.

Алгебры, элементами которых являются бинарные отношения, называются алгебрами отношений. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения. Основы алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены А. Тарским [6]. В настоящее время теория алгебр отношений является существенной составной частью алгебраической логики и современной общей алгебры. При рассмотрении алгебр отношений одной из важных задач является изучения их свойств, выразимых с помощью тождеств, что естественно приводит к рассмотрению многообразий, порожденных различными их классами.

Как правило, операции алгебр отношений задаются с помощью формул логики предикатов 1-го порядка. Такие операции называются логическими. Это позволяет классифицировать операции над отношениями по виду задающих их формул. Важным классом операция над отношениями является класс диофантовых операций. Операция называется *диофантовой* [7, 8] (в другой терминологии – примитивно-позитивной [9]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции допускают описание с помощью графов специального вида – двухполюсников (см. [1, 9]).

В алгебре преимущественно рассматриваются бинарные операции. Это естественно приводит к необходимости изучения алгебр отношений с одной бинарной операцией, то есть группоидов отношений. Мотивацию подобного рода исследований, а также некоторые результаты в этом направлении можно найти в [1–5].

Классификация двухполюсников, задающих бинарные диофантовые операции, приведена в [1]. Они представляют собой двух рёберные графы с двумя выделенными точками – входом и выходом двухполюсника.

Отметим, что изучение свойств этих операций в логике предикатов играют роль, в чём-то схожую с ролью двухместных булевых функций в логике высказываний.

Предметом нашего рассмотрения будет следующая бинарная операция $*$ над отношениями $\rho, \sigma \subseteq U \times U$, определяемая следующей формулой:

$$\rho * \sigma = \{(u, v) \in U \times U : (\exists w)(w, w) \in \rho \wedge (w, w) \in \sigma\}.$$

Интерес к этой операции, в частности, объясняется и тем, что её результат $\rho * \sigma$ равен универсальному отношению, если отношения ρ и σ имеют общую неподвижную точку, и равен пустому множеству \emptyset , в противном случае. По этой причине назовём эту операцию *дескриптором совместных неподвижных точек* отношений.

Обозначим $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subseteq\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр) изоморфных алгебрам (упорядоченным теоретико-множественным включениям \subseteq алгебрам) отношений с операциями из Ω .

Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subseteq\}$) – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subseteq\}$).

Теорема 1. *Группоид (A, \cdot) принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$(1) \quad xy = yx, \quad (2) \quad (xy)^2 = xy, \quad (3) \quad (xy)y = xy, \\ (4) \quad x^2y = xy, \quad (5) \quad (xy^2)z = x(y^2z).$$

Теорема 2. *Упорядоченный группоид (A, \cdot, \leq) принадлежит многообразию $Var\{*, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(5), тождеству*

$$(6) \quad xy \leq x^2.$$

Доказательство теорем основывается на описании эквациональных теорий алгебр отношений с диофантовыми операциями [10].

При этом следует отметить, что нахождение конечного базиса тождеств для конкретных классов группоидов бинарных является самостоятельной задачей, решение которой существенным образом использует индивидуальные свойства рассматриваемых операций и не сводится к стандартной проверке некоторых условий.

Доказательство разбито на ряд лемм. Некоторые из этих лемм формулируются ниже.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ – множество индивидуальных переменных и Ξ – множество всех термов группоида над алфавитом X .

Лемма 1. *Для любого терма $p \in \Xi$ либо $p \in X$, либо p представим в виде $(\dots(x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4}))\dots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$.*

Всякому терму p может быть сопоставлен двухполюсник $G(p)$ (см. [10]). В работе находится строение двухполюсников соответствующих

термам группоида отношений с рассматриваемой операцией. На основании этого описания доказываются следующие леммы.

Лемма 2. *Предположим, что существует гомоморфизм двухполюсника $G(q)$ в двухполюсник $G(p)$, где $p, q \notin X$. Тогда тождество $p \leq pq$ принадлежит эквациональной теории класса $R\{*, \subseteq\}$.*

Лемма 3. *Предположим, что существует гомоморфизмы двухполюсника $G(q)$ в двухполюсник $G(p)$ и двухполюсника $G(p)$ в двухполюсник $G(q)$, где $p, q \notin X$. Тогда тождество $p = pq$ принадлежит эквациональной теории класса $R\{*\}$.*

Далее с использованием основного результата из [10] показывается, что всякое тождество, принадлежащее эквациональной теории класса $R\{*\}$ ($R\{*, \subseteq\}$), является следствием тождеств (1) – (5), (1) – (6), что завершает доказательство достаточности условий теорем. Необходимость условий устанавливается непосредственными вычислениями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bredikhin D. A* On relation algebras with general superpositions // *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*. 1994. Vol. 54. P. 11–124.
2. *Bredikhin D. A* On Varieties of Groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // *Semigroup Forum*. 1992. Vol. 44. P. 87–92.
3. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 93–98.
4. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений диофантовыми операциями // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2. С. 28–34.
5. *Bredikhin D. A* On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification // *Algebra Univers.* 2015. Vol. 73. P. 73–89.
6. *Tarski A.* On the calculus of relations // *J. Symbolic Logic*. 1941. Vol. 4. P. 73–89.
7. *Бредихин Д. А.* О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // *Сиб. мат. журн.* 1997. № 1. С. 29–41.
8. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // *Докл. РАН*. 1998. Т. 360. С. 594–595.
9. *Böner F., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // *Contributions to general algebras*. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
10. *Bredikhin D. A* The equational theory of algebras of relations with positive operations // *Rus. Math. (Izv. Vuzov. Matem.)*. 1993. № 3. С. 23–30.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРУППОИДОВ ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру, называемую *алгеброй отношений*. Основы алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены А. Тарским [1].

Операции над отношениями, как правило, задаются формулами логики предикатов первого порядка. Такие операции называются логическими. Важным классом логических операций является класс диофантовых операций. Операция называется *диофантовой* [2, 3] (в другой терминологии – примитивно-позитивной [4]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования.

Предметом нашего рассмотрения будут алгебры отношений с одной бинарной диофантовой операцией, то есть *группоиды отношений*. Мотивация подобного рода исследований, а также некоторые результаты в этом направлении можно найти в статьях [5–9].

Обозначим $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subseteq\}$) как класс алгебр (упорядоченных алгебр) изоморфных алгебрам (упорядоченным теоретико-множественным включениям \subseteq алгебрам) отношений с операциями из Ω .

Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subseteq\}$) – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subseteq\}$).

Сосредоточим внимание на следующих бинарных операциях $*$ и \bullet над отношениями $\rho, \sigma \subseteq U \times U$, определяемых формулами:

$$\rho * \sigma = \{(u, v) \in U \times U : (\exists w)(u, u) \in \rho \wedge (u, w) \in \sigma\},$$

$$\rho \bullet \sigma = \{(u, v) \in U \times U : (\exists w)(w, v) \in \rho \wedge (v, v) \in \sigma\},$$

а также теоретико-множественных операций пересечения \cap и объединения \cup отношений.

Группоидом (A, \cdot) называют универсальную алгебру с одной бинарной операцией.

Упорядоченным группоидом (A, \cdot, \leq) назовем группоид (A, \cdot) с заданным на множестве A отношением порядка \leq , согласованным с операцией группоида. Это означает, что $x \leq y$ влечет $xz \leq yz$ и $zx \leq zy$. Основные результаты работы сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 1. Класс $R\{*\}$ образует многообразие. группоид (A, \cdot) принадлежит классу $R\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:

$$(1) x(xy) = xy, \quad (2) (xy)y = xy, \quad (3) x^2y = xy, \quad (4) xy^2 = yx^2,$$

$$(5) (xy)z = (xz)y, \quad (6) x(yz) = y(xz), \quad (7) (xy^2)z = x(y^2z).$$

Теорема 2. Класс $R\{*, \subseteq\}$ образует квазимногообразие и не является многообразием. Упорядоченный группоид (A, \cdot, \leq) принадлежит многообразию $Var\{*, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(7), тождеству

$$(8) xy \leq x^2.$$

Упорядоченный группоид (A, \cdot, \leq) принадлежит классу $R\{*, \subseteq\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(8), квазитождеству

$$(9) x \leq y^2 \rightarrow x \leq yx.$$

Теорема 3. Класс $R\{*, \cap\}$ образует многообразие. Алгебра (A, \cdot, \wedge) типа (2, 2) принадлежит классу $R\{*, \cap\}$ тогда и только тогда, когда (A, \wedge) – полурешетка и (A, \cdot, \wedge) удовлетворяет тождествам (1)–(7) и тождествам

$$(10) (x \wedge y)^2 = x^2 \wedge y^2 = x^2 y^2, \quad (11) x(y^2 \wedge z) = (xy^2)z, \quad (12) x \wedge xy^2x = x \wedge y^2,$$

$$(13) (xy)(y \wedge z) = x(y \wedge z), \quad (14) (x \wedge y)(yz) = (x \wedge y)z.$$

Теорема 4. Алгебра (A, \cdot, \vee) типа (2, 2) принадлежит многообразию $Var\{*, \cup\}$ тогда и только тогда, когда (A, \vee) – полурешетка и (A, \cdot, \vee) удовлетворяет тождествам (1)–(8) и тождествам

$$(15) x(y \vee z) = xy \vee xz, \quad (16) (x \vee y)z = xz \vee yz, \quad (17) xy \vee x^2 = xy.$$

Теорема 5. Алгебра (A, \cdot, \vee, \wedge) типа принадлежит многообразию $Var\{*, \cup, \cap\}$ тогда и только тогда, когда (A, \vee, \wedge) – дистрибутивная

решетка и (A, \cdot, \vee, \wedge) удовлетворяет тождествам (1)–(7), (10)–(14) и (15)–(16).

Результаты для операции \bullet формулируются двойственным образом.

Доказательство теорем основывается на описании эквациональных и квазиэквациональных теорий алгебр отношений с диофантовыми операциями (см. [2]).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 4. P. 73–89.
2. *Бредихин Д. А.* О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. № 1. С. 29–41.
3. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
4. *Böner F., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
5. *Bredikhin D. A.* On Varieties of Groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87–92.
6. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. Vol. 54. P. 11–124.
7. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 93–98.
8. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений диофантовыми операциями // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2. С. 28–34.
9. *Bredikhin D. A.* On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification // Algebra Univers. 2015. Vol. 73. P. 73–89.

УДК 514.76

А. В. Букушева

ПРОДОЛЖЕННЫЕ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ С МЕТРИКОЙ ЧИГЕРА–ГРОМОЛА

На распределении D многообразия M с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ с помощью ассоциированной связности определяется и исследуется почти контактная метрическая структура, называемая продолженной почти контактной метрической структурой с метрикой Чигера–Громола.

В 1972 году Чигер и Громол [1] предложили конструкцию метрического тензора, определяемого на касательном расслоении риманова многообразия. Нечетным аналогом касательного расслоения является распределение D почти контактной метрической структуры

$(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Так же, как и расслоение TM , касательное расслоение TD , благодаря заданию связности над распределением [2–4] расщепляется в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений. На многообразии D , тем самым, естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, называемая продолженной почти контактной метрической структурой.

Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $n=2m+1$, с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением почти контактной метрической структуры, ортогональное ему распределение $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ называется оснащением распределения D .

Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$. Тензорное поле t типа (p, q) , заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η . Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте [5–7] имеет вид: $t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви–Чивита тензора: $g : \vec{\nabla}, \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$.

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви–Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид [6]: $\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c$, $\tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}$, $\tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b - \varphi_a^b$, $\tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0$, где $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

Назовем допустимую тензорную структуру, сохраняющую постоянными компоненты в некотором адаптированном базисе, интегрируемой допустимой тензорной структурой.

Теорема 1. Допустимая почти комплексная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда почти контактная метрическая структура почти нормальна [6].

Внутренняя связность ∇ (см. [5–7]) определяет дифференцирование допустимых тензорных полей. Так, например, для допустимой почти комплексной структуры выполняется равенство $(\nabla_{\vec{x}})\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$.

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером тензором кривизны Схоутена [8]. Тензор Схоутена называется тензором кривизны внутренней связности.

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения D , а распределение D в случае обращения в нуль тензора Схоутена – распределением нулевой кривизны.

В работах [2–7] развита техника, позволяющая перейти от внутренней связности ∇ , осуществляющей параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых многообразия M к ассоциированной связности ∇^A , позволяющей переносить произвольные векторы вдоль произвольных кривых многообразия. Тензор кривизны K ассоциированной связности связан с тензором кривизны Схоутена с помощью следующего равенства:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})P(\vec{y}, \vec{z}) - \eta(\vec{y})P(\vec{x}, \vec{z}).$$

Здесь $P(\vec{x}, \vec{y})$ – допустимое тензорное поле с компонентами $P_{bc}^a = \partial_n \Gamma_{bc}^a$.

Определим на распределении D почти контактной метрической структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ риманов метрический тензор \tilde{g} типа Чигера–Громола и тензорное поле J типа (1,1) с помощью равенств

$$\tilde{g}_{(x,\vec{p})}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = g_x(\vec{x}, \vec{y}), \quad \tilde{g}_{(x,\vec{p})}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = \frac{1}{1+2t}(g_x(\vec{x}, \vec{y}) + g_x(\vec{x}, \vec{p})g_x(\vec{y}, \vec{p})),$$

$$\tilde{g}_{(x,\vec{p})}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \tilde{g}_{(x,\vec{p})}(\vec{x}^v, \vec{u}) = \vec{0},$$

$$J\vec{x}_{(x,\vec{p})}^h = \tau\vec{x}^v - \frac{1}{1+\tau}g_x(\vec{x}, \vec{p})\vec{p}^v, \quad J\vec{x}_{(x,\vec{p})}^v = -\frac{1}{\tau}\vec{x}^h - \frac{1}{\tau(1+\tau)}g_x(\vec{x}, \vec{p})\vec{p}^h,$$

$$J\vec{u} = \vec{0}, \quad \vec{u} = \partial_n,$$

где $t = \frac{1}{2}g_{\pi(\vec{p})}(\vec{p}, \vec{p})$, $\tau = \sqrt{1+2t}$.

Теорема 2. *Риманово многообразие D с метрикой \tilde{g} , оснащенное тензором J , является почти контактным метрическим многообразием со структурой $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$.*

Основным результатом статьи является

Теорема 3. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ – контактная метрическая структура. Тогда продолженная почти контактная метрическая структура $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ с метрикой типа Чигера–Громола почти нормальна тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.*

Доказательство теоремы опирается на структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d}R_{bad}^c\partial_{n+c}, \quad [\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n\Gamma_{ad}^c\partial_{n+c}, \quad [\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c\partial_{n+c},$$

где $\varepsilon_a = \partial_n - \Gamma_a^n\partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c}\partial_{n+b}$ [4].

Используя структурные уравнения, получаем инвариантные представления для скобок Ли базисных векторных полей распределения D :

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p}\}^v, \quad [\vec{x}^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x}, \vec{p})\}^v,$$

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}} \vec{y})^v, \quad [\vec{x}^v, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^v.$$

Полученные разложения для скобок Ли используются для доказательства того, что условие

$$\tilde{N}_J = N_J + 2(d\lambda \circ J) \otimes \vec{u} = 0$$

эквивалентно обращению в нуль тензора Схоутена, что и завершает доказательство теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Cheeger J., Gromoll D. On the structure of complete manifolds of non-negative curvature // Ann. of Math. 1972. Vol. 96. P. 413–443.
2. Буккушева А. В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 247–251.
3. Буккушева А. В. Применение Wolfram Language для выделения специальных классов почти контактных метрических структур // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : ИЦ «Наука», 2016. С. 105–107.
4. Буккушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 10–14.
5. Галаев С. В. N -продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Математика. 2017. № 3. С. 15–23.
6. Галаев С. В. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3 (337). С. 632–640.
7. Галаев С. В. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдоэрмитовой структурой // Вестн. Башкирского ун-та. 2016. Т. 21, вып. 3. С. 551–555.
8. Вагнер В. В. Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. № 5. С. 173–255.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРЫ ЦЕЛОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ТОРАХ

В работах [1–3] рассматриваются модели целых алгебраических торов. Одной из важных задач этой теории является изучение образующих алгебры целозначных регулярных функций. Для многих классов алгебраических торов в работах [4–9] получено описание образующих этих алгебр.

В нашей работе использован другой подход для изучения свойств алгебр целозначных функций на алгебраических торах.

Пусть k – поле p -адических чисел, O – кольцо целых p -адических чисел, T – алгебраический k -тор. Мы будем изучать алгебру

$$A = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O\},$$

где U_k – максимальная компактная подгруппа группы $T(k)$.

В работе [4] доказано, что A имеет бесконечное число образующих в случае, если тор $T \simeq \mathbb{G}_m$.

Теорема 1. Пусть $T \simeq \mathbb{G}_m$ – разложимый тор. Тогда

$$A = O[t, t^{-1}, H_1(t), \dots, H_k(t), \dots],$$

где многочлены $H_k(t) = \frac{1}{p^{\alpha_k}} \prod_{i=1, (i,p)=1}^{p^{k-1}-1} (t-i)$ и $\alpha_k = \frac{p^k-1}{p-1}$.

Для доказательства теоремы мы строим многочлены $\tilde{H}_k(t)$, удовлетворяющие следующим свойствам:

1) $\deg \tilde{H}_k = k$, 2) $\tilde{H}_k \in A$, 3) существует $t_k \in O^*$ такое, что $\tilde{H}_k(t_k) \in O^*$ и 4) $H_k = \tilde{H}_{\varphi(p^k)}$.

Образующие H_1, \dots, H_k, \dots являются аналогами базисов Малера [10] для случая p -адических чисел. Там же (см. [10]) показано, что многие свойства алгебр целозначных функций удобно изучать, используя базисы Ван дер Пута.

Определение. Пусть $x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j p^j \in \mathbb{Q}_p$, $a_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ и только конечное число $a_j \neq 0$ при $j \leq 0$, то p -адической целой частью x называется $[x]_p = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j p^j$, множество $x_n = p^n [p^{-n}x]_p$

($n \in \{0, 1, \dots\}$) называется стандартной последовательностью, которая сходится к x .

Для элементов $x \in O$ и неотрицательного целого m мы определяем отношение $\triangleleft: m \triangleleft x$ означает, что m совпадает с одним из чисел x_0, x_1, \dots . Определим функции e_0, e_1, \dots следующим образом:

$$e_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \triangleleft x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (x \in O, n \in 0, 1, \dots).$$

Теорема 2. Функции $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$, $(i, p) = 1$ являются образующими алгебры A . Для любой $f \in A$ имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{m=0, (m,p)=1}^{\infty} a_m e_m(x),$$

где $a_m = f(m) - f(m_-)$ и коэффициенты a_m делятся на p^s , где $s = [\log_p m]$

Доказательство. Для натурального $m = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s$, $m_- = a_0 + a_1 p + \dots + a_{s-1} p^{s-1}$. Из определения функции e_n имеем:

$$f(m) = \sum_{n \triangleleft m} a_n, \quad f(m_-) = \sum_{n \triangleleft m_-} a_n,$$

то есть $a_m = f(m) - f(m_-)$. Причем, так как f являются многочленами, то a_m делится на $a_s p^s$, а разложение для $f(x)$ следует из непрерывности функции $f(x)$.

Работа А. М. Водолазова выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-01-00152)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kunyvskii V. E., Moroz B. Z., Voskresenskii V. E.* On integral models of an algebraic torus // Max-Planck-Institut für Mathematik. Preprint Series. 2001. Vol. 12. P. 23.
2. *Воскресенский В. Е., Фомина Т. В.* Целые структуры в алгебраических торах // Изв. РАН. Сер. Математика. 1995. Т. 59, № 5. С. 3–18.
3. *Popov S. Yu., Voskresenskii V. E.* Galois lattices and reduction of algebraic tori // Communications of Algebra. 2001. № 9. P. 213–223.
4. *Водолазов А. М.* Целые модели разложимых алгебраических торов бесконечного типа // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. № 1. С. 11–19.
5. *Водолазов А. М., Королева О. А.* Алгебры целозначных функций квазиразложимых торов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 20–22.

6. *Водолазов А. М.* Алгебры целозначных функций для алгебраических торов малой размерности // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 9–12.

7. *Водолазов А. М.* Алгебры целозначных функций для квазиразложимых торов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. № 5. С. 3–7.

8. *Водолазов А. М.* Алгебры целозначных функций для разложимых алгебраических торов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 20–23.

9. *Водолазов А. М.* Кольцо целозначных многочленов для алгебраических торов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. № 7. С. 122–129.

10. *Schikhof W. H.* Ultrametric calculus. Cambridge University Press., 1984.

УДК 517.518.8

И. Ю. Выгодчикова, Е. М. Фарвазетдинова

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИНИМАКСНОГО ПОДХОДА

В работе представлены методы аппроксимации параметров динамического процесса, обоснованные применением двух оптимизационных задач. Для этих целей применены два минимаксных критерия аппроксимации. Приведены алгоритмические процедуры и результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие целесообразность использования каждой из рассмотренных моделей для аппроксимации процессов экономической динамики.

1. Критерии аппроксимации. Математическую модель динамического процесса из диапазонов $[y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \leq y_{1,k}$, $k = \overline{0, N}$, заданных в узлах t_k сетки $T = \{t_0 < \dots < t_N\}$, представим в виде полинома степени n : $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$. Рассмотрим критерии аппроксимации для диапазонов ряда и многомерных данных, составленных из границ диапазонов.

Для первого (интервального) случая [1], в качестве критерия аппроксимации используется максимум из расстояний Хаусдорфа между диапазонами ряда $[y_{1,k}; y_{2,k}]$ и значениями полинома в узлах t_k сетки $T = \{t_0 < \dots < t_N\}$ [2]:

$$\rho(A) = \max_{k \in \overline{0, N}} \max \{y_{2,k} - p_n(A, t_k); p_n(A, t_k) - y_{1,k}\} \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (1)$$

Для второго случая в качестве критерия аппроксимации используется максимум из квадратичных функций [2]:

$$C(A) = \max_{k \in \overline{0, N}} c(A, t_k) \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \quad (2)$$

где $c(A, t_k) = (y_{2,k} - p_n(A, t_k))(p_n(A, t_k) - y_{1,k})$.

Если $y_{1,k} = y_{2,k}$ для всех $k = \overline{0, N}$, то задача (2) сводится к известной задаче П. Л. Чебышёва. Если это не так, задачи (1) и (2) имеют принципиально отличные друг от друга методы решения.

Целью исследования является развитие методологии аппроксимации динамического процесса с использованием минимаксного подхода.

2. Теоретические сведения. В [2, 3] приводятся свойства решения задач (1) и (2), необходимые для построения алгоритма. Обозначим $\rho^* = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$, $m = \max_{k \in \overline{0, N}} \frac{(y_{2,k} - y_{1,k})}{2}$. $\sigma = \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$ (базис).

Теорема 1 [3]. Для того чтобы вектор $A^* \in R^{n+1}$ являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы было справедливо хотя бы одно из условий: (а) $\rho(A^*) = m$; (б) для некоторого базиса $\sigma \subset T$ для $i=0$ или $i=1$ выполняются соотношения

$$h_i(\sigma) = \begin{cases} y_{2,j_k} - p_n(A_0(\sigma), t_{j_k}), & \text{если } (k+i) - \text{чётно,} \\ -y_{1,j_k} + p_n(A_1(\sigma), t_{j_k}), & \text{если } (k+i) - \text{нечётно,} \end{cases}$$

$k = \overline{0, n+1}$, $A^* = A_i(\sigma)$, $\rho(A^*) = h_i(\sigma)$. При этом $\rho^* = \rho(A^*)$.

Теорема 2 [3]. Для того чтобы задача (1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (б) теоремы 1 или условие (а) с требованием существования во множестве $M = \{t_k \in T : y_{2,k} - y_{1,k} = 2m\}$ не менее чем $(n+1)$ элементов.

Теорема 3 [2]. Пусть $A \in R^{n+1}$, $C(A) > 0$. Для того чтобы A был решением задачи (2), необходимо, чтобы для некоторого σ выполнялось условие: если $j_k \in R_1(A)(R_2(A))$, то $j_{k+1} \in R_2(A)(R_1(A))$, $k = \overline{0, n}$, где $I(A) = \{k = \overline{0, N} : C(A) = c(A, t_k)\}$, $R_1(A) = \{k \in I(A) : p_n(A, t_k) \in (-\infty; y_{1,k}) \cup ((y_{1,k} + y_{2,k})/2; y_{2,k})\}$, $R_2(A) = \{k \in I(A) : p_n(A, t_k) \in (y_{1,k}; (y_{1,k} + y_{2,k})/2) \cup (y_{2,k}; +\infty)\}$.

Далее считаем $A = (a_0, a_1)$, $n = 1$.

3. Метод решения задачи (1) для частного случая (n=1). Базисом будет множество $\sigma = \{t_{j_0} < t_{j_1} < t_{j_2}\} \subset T$. Из теорем 1, 2 вытекает следующая процедура решения задачи (1).

Шаг 1. Ищем решение в предположении, что оно единственно и $\rho^* = m$. Для q_0 и q_1 , $q_0 \neq q_1$ и таких, что $y_{2,q_0} - y_{1,q_0} = y_{2,q_1} - y_{1,q_1} = 2m$, вычисляем: $a_1 = \frac{y_{2,q_1} + y_{1,q_1} - y_{2,q_0} - y_{1,q_0}}{2(t_{q_1} - t_{q_0})}$, $a_0 = \frac{(y_{2,q_0} + y_{1,q_0})t_{q_1} - (y_{2,q_1} + y_{1,q_1})t_{q_0}}{2(t_{q_1} - t_{q_0})}$,

и проверяем, выполняется ли для всех $k = 0, \dots, N$ неравенство: $\max \{a_0 + a_1 t_k - y_{1,k}, y_{2,k} - a_0 - a_1 t_k\} \leq m$. Если это так, то (a_0, a_1) – решение задачи, и алгоритм завершается. Иначе переходим к шагу 2.

Шаг 2. Ищем решение в предположении, что оно единственно и $\rho^* > m$. Осуществляем перебор базисов и на каждом из них вычисляем $a_1^0 = \frac{y_{2,j_2} - y_{2,j_0}}{t_{j_2} - t_{j_0}}$, $a_0^0 = \frac{1}{2}(y_{2,j_0} + y_{1,j_1} - a_1^0(t_{j_0} + t_{j_1}))$, $h_0 = y_{2,j_0} - a_0^0 - a_1^0 t_{j_0}$, и $a_1^1 = \frac{y_{1,j_2} - y_{1,j_0}}{t_{j_2} - t_{j_0}}$, $a_0^1 = \frac{1}{2}(y_{1,j_0} + y_{2,j_1} - a_1^1(t_{j_0} + t_{j_1}))$, $h_1 = a_0^1 + a_1^1 t_{j_0} - y_{1,j_0}$. Выбираем $\beta = 0$ или $\beta = 1$ такое, что $\max \{h_0, h_1\} = h_\beta$.

Если для всех $k = 0, 1, \dots, N$ выполняется неравенство $\max \{a_0^\beta + a_1^\beta t_k - y_{1,k}, y_{2,k} - a_0^\beta - a_1^\beta t_k\} \leq h_\beta$, то (a_0^β, a_1^β) – единственное решение задачи, и алгоритм завершается. Если решение не получено, а базисы исчерпаны, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Остаётся проанализировать ситуацию неединственности. Имеем [3], $\rho^* = m$ и существует единственное $q_0 : y_{2,q_0} - y_{1,q_0} = 2m$. Два решения можно найти, следуя процедуре. Берём i от 0 до $N : i \neq q_0$ и вычисляем

$$a_1^1 = \frac{2y_{1,i} + 2m - y_{1,q_0} - y_{2,q_0}}{2(t_i - t_{q_0})}, \quad a_0^1 = \frac{(y_{1,q_0} + y_{2,q_0})t_i - 2(m + y_{1,i})t_{q_0}}{2(t_i - t_{q_0})},$$

$$a_1^2 = \frac{2y_{1,i} - 2m - y_{1,q_0} - 2y_{2,q_0}}{2(t_i - t_{q_0})}, \quad a_0^2 = \frac{(y_{1,q_0} + y_{2,q_0})t_i + 2(m - y_{2,i})t_{q_0}}{2(t_i - t_{q_0})}.$$

Если $a_0^1 + a_1^1 t_k - y_{1,k} \leq m$, $y_{2,k} - a_0^1 - a_1^1 t_k \leq m$, то (a_0^1, a_1^1) – решение, если $a_0^2 + a_1^2 t_k - y_{1,k} \leq m$, $y_{2,k} - a_0^2 - a_1^2 t_k \leq m$, то (a_0^2, a_1^2) – решение. Алгоритм завершается.

4. Метод решения задачи (2) для частного случая (n=1). Берём произвольно базис $\sigma = \{t_{j_0} < t_{j_1} < t_{j_2}\} \subset T$. Приведём процедуру решения задачи (2).

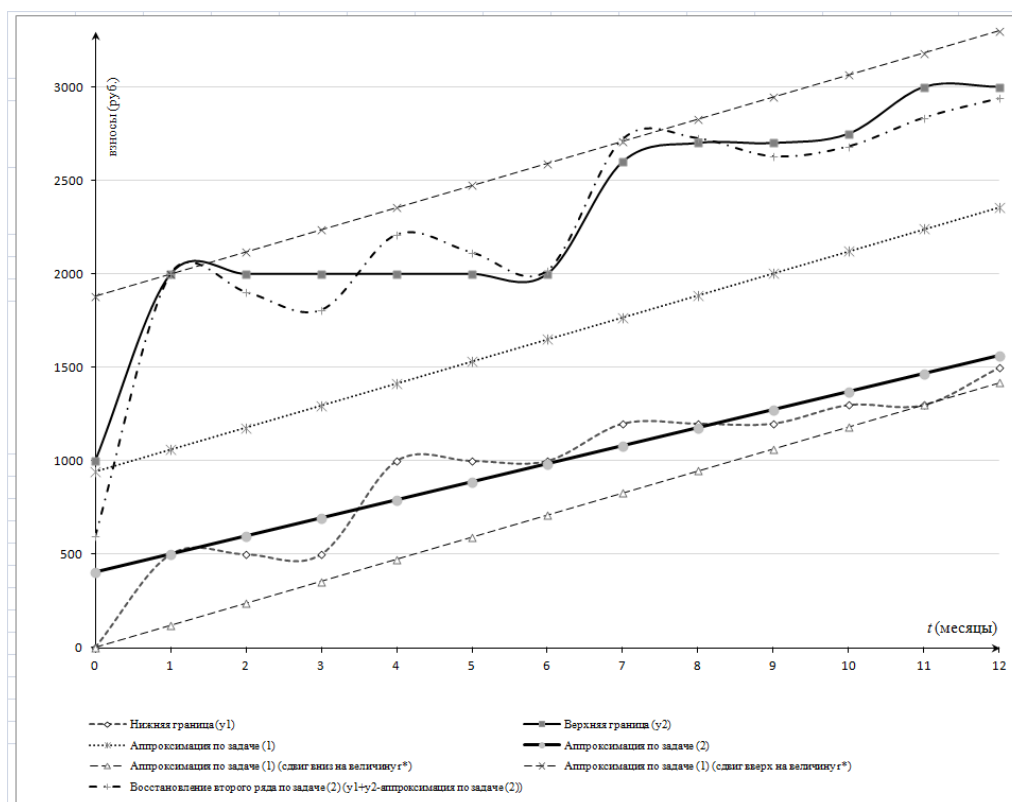
Шаг 1. Решаем относительно коэффициентов a_0, a_1 и h систему алгебраических уравнений $\xi_k \in \{-1, 1\} : (p(a_0, a_1, t_k))^2 - p(a_0, a_1, t_k)(y_{1,k} + y_{2,k}) + y_{1,k}y_{2,k} - (-1)^{\xi_k}h = 0$, $k = 0, 1, 2$.

Шаг 2. Из решений текущей системы, для которых выполняется равенство $c(a_0, a_1) = |h|$, выбираем решения с минимальным значением $|h|$, и все полученные коэффициенты запоминаем. Берём новый базис и переходим к шагу 1. Если базисы исчерпаны, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Среди кандидатов на оптимальность выбираются коэффициенты (a_0, a_1) с минимальным значением $c(a_0, a_1)$.

Применим эти критерии аппроксимации для оценки динамики взносов с использованием задач (1) и (2), соответственно.

5. **Вычислительный эксперимент.** Результаты эксперимента на основе моделей аппроксимации (1) и (2) ($n=1$) представлены на рисунке.



Критерии аппроксимации для оценки взносов

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-06-00582) и РГНФ (проект № 17-32-00050).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Орлов А. И. Основные идеи статистики интервальных данных // Политематический сетевой электронный науч. журн. Кубанского гос. аграрного ун-та. 2013. № 94. С. 55–70.
2. Выгодчикова И. Ю. О приближении двузначной функции алгебраическим полиномом // Изв. вузов. Математика. 2016. № 4. С. 8–13.
3. Выгодчикова И. Ю. Минимаксный метод моделирования многозначных динамических рядов в экономике Математика. Саратов, 2017. 116 с.

О ГЕОМЕТРИИ ПРОДОЛЖЕННЫХ ПОЧТИ АР-СТРУКТУР

Вводится понятие почти АР-многообразия. Показано, что определяемая в более ранних работах автора продолженная почти контактная метрическая структура задает на распределении контактного метрического многообразия структуру почти АР-многообразия. Доказывается, что продолженная почти АР-структура является АР-структурой тогда и только тогда, когда она нормальна.

1. Почти АР-многообразия являются обобщением SQS-многообразия — квази-сасакиевы многообразия, удовлетворяющего дополнительным условиям. Значительное внимание квазисасакиевым многообразиям уделено в работах В. Ф. Кириченко и его учеников [1]. Среди квазисасакиевых структур $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ таких, что $\text{gkd}\eta = 2p$, $2p \leq 2m$, $2p \neq 0$, наиболее близко примыкают к сасакиевым структурам SQS-структуры. Интересным примером SQS-структур являются структуры (продолженные почти контактные метрические структуры), естественным образом возникающие на распределениях нулевой кривизны сасакиевых многообразий, т. е. на распределениях сасакиевых многообразий с нулевым тензором кривизны Схоутена. Продолженные почти контактные метрические структуры введены в работах [2, 3]. Изучению обобщений продолженных почти контактных метрических структур посвящены работы [2–7]. Понятие тензора кривизны оснащенного неголономного многообразия введено Схоутеном (Schouten) и ван Кампеном (van Kampen) [8]. Впоследствии заданный Схоутеном и ван Кампеном тензор был назван В.В. Вагнером [9] тензором Схоутена. Тензор Схоутена назван в работе тензором кривизны распределения D многообразия M с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$.

2. Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M . Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Предположим, что на M задана почти контактная метрическая структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, где φ — тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом или допустимой почти комплексной структурой, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо)

риманова метрика. Предположим, что $\text{rk } d\eta = 2p$, $0 \leq 2p \leq 2m$. Хорошо известно, что ядро формы $\omega = d\eta$ является интегрируемым распределением, которое в дальнейшем будем обозначать символом K .

Пусть $P : TM \rightarrow D$, $Q : TM \rightarrow D^\perp$, $h : TM \rightarrow L$, $v : TM \rightarrow L^\perp$ — проекторы, определяемые разложением $TM = L \oplus L^\perp \oplus D^\perp = D \oplus D^\perp$, где $L^\perp = K \cap D$, а L — ортогональное ему распределение в D .

Предложение 1. *Распределение L^\perp интегрируемо.*

Многообразие M с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ назовем почти АР-многообразием, если распределение L инвариантно относительно действия эндоморфизма φ и имеет место равенство $d\eta(\vec{x}, \vec{y}) = \Omega(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(L)$. Если при этом распределение $\tilde{L} = L \oplus D^\perp$ — интегрируемо, то почти АР-многообразие будем называть АР-многообразием. Квази-сасакиево многообразие, являющееся одновременно АР-многообразием, называется специальным квази-сасакиевым многообразием (SQS-многообразием).

Пример АР-многообразия. Пусть $M = \mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$, (∂_α) — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η , полагая, $\eta = dx^3 + x^2 dx^1$. Очевидно, что $\eta(\partial_3) = 1$, $\eta(\partial_2) = \eta(\partial_4) = \eta(\partial_5) = \eta(\vec{e}_1) = 0$, где $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3$. Структуру риманова многообразия на M определим, считая базис $(\vec{e}_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$ ортонормированным. И наконец, положим $\varphi \vec{e}_1 = \partial_2$, $\varphi \partial_4 = \partial_5$, $\varphi \partial_2 = -\vec{e}_1$, $\varphi \partial_5 = -\partial_4$, $\varphi \partial_3 = 0$.

Пример почти АР-многообразия. Пусть $M = \mathbb{R}^5$, (∂_α) — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η , полагая, $\eta = dx^3 + x^2 dx^1$. Пусть далее $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3 - x^2 \partial_5$. Зададим на M метрический тензор g , полагая, что векторы $(2\vec{e}_1, 2\partial_2, 2\partial_3, 2\partial_4, 2\partial_5)$ образуют ортонормированный базис. Имеем: $L = \text{Span}(\vec{e}_1, \partial_2)$, $L^\perp = \text{Span}(\partial_4, \partial_5)$. Учитывая равенство $[\vec{e}_1, \partial_2] = \partial_3 + \partial_5$, заключаем, что распределение $\tilde{L} = L \oplus D^\perp$ не интегрируемо и, тем самым, многообразие M не является АР-многообразием. Зададим φ обычным образом: $\varphi \vec{e}_1 = \partial_2$, $\varphi \partial_4 = \partial_5$, $\varphi \partial_2 = -\vec{e}_1$, $\varphi \partial_5 = -\partial_4$, $\varphi \partial_3 = 0$. Отметим, что $d\eta(\vec{e}_1, \partial_2) = \Omega(\vec{e}_1, \partial_2) = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, нами определена почти АР-структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, обладающая свойством нормальности, как и структура из предыдущего примера.

Теорема 1. *Пусть ∇ — внутренняя симметричная связность с тензором кривизны Схоутена $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Тогда, для всех $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ и $\vec{p} \in D$ имеют место следующие равенства:*

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p}\}^v, [\vec{x}^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x}, \vec{p})\}^v,$$

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}} \vec{y})^v, [\vec{x}^v, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^v.$$

Определим на распределении D контактного метрического многообразия M продолженную почти контактную метрическую структуру $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, полагая

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}),$$

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0,$$

$$J\vec{x}^h = (\varphi\vec{x})^h, J\vec{x}^v = (\varphi\vec{x})^v, J(\vec{u}) = \vec{0}, \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D), \vec{u} = \partial_n = \vec{\xi}^h.$$

Предложение 2. Почти контактная метрическая структура $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ является структурой почти AP -многообразия.

Назовем структуру $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ продолженной почти AP -структурой.

Предложение 3. Продолженная почти AP -структура является структурой AP -многообразия тогда и только тогда, когда тензор Схоттена равен нулю.

Теорема 2. Продолженная почти AP -структура является AP -структурой тогда и только тогда, когда она нормальна.

Доказательство. Найдем условия, при которых

$$\tilde{N}_J = N_J + 2(d\lambda \circ J) \otimes \vec{u} = 0.$$

Используя (1)–(4), получаем следующее:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_J(\vec{x}^h, \vec{y}^h) &= (\tilde{N}_\varphi(\vec{x}, \vec{y}))^h + (R(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y})\vec{p} + \varphi R(\varphi\vec{x}, \vec{y})\vec{p} + \\ &\quad + \varphi R(\vec{x}, \varphi\vec{y})\vec{p} - (R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p})^v, \end{aligned}$$

$$\tilde{N}_J(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = ((\nabla_{\vec{x}} \varphi)(\varphi\vec{y}) - (\nabla_{\varphi\vec{x}} \varphi)(\vec{y}))^v, \tilde{N}_J(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = 0,$$

$$\tilde{N}_J(\vec{x}^h, \vec{\xi}^h) = (\varphi P(\varphi\vec{x}, \vec{p}) - P(\vec{x}, \vec{p}))^v.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб. 2002. Т. 193, №8. С. 71–100.

2. Буккушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Механика. Математика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 10–14.

3. *Галаев С. В.* Почти контактные метрические пространства с N -связностью // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 258–263.

4. *Букушева А. В.* Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 247–251.

5. *Галаев С. В.* N -продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Математика. 2017. № 3. С. 15–23.

6. *Галаев С. В.* Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3 (337). С. 632–640.

7. *Галаев С. В.* Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сб. 2016. Т. 17. № 3(59). С. 53–63.

8. *Schouten J., van Kampen E.* Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // Math. Ann. 1930. № 103. P. 752–783.

9. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та. 1941. № 5. С. 173–255.

УДК 517.54

В. Г. Гордиенко, С. А. Голохвастова

ОБ ЭКСТРЕМУМЕ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА В КЛАССЕ S^M

Обозначим через S^M , $M > 1$, класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad (1)$$

удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < M$, $z \in E$.

В работе [1] рассмотрен линейный функционал $L(\alpha, \beta, f) = \operatorname{Re}(a_4 + \alpha a_3 + \beta a_2)$ в классе S^M для M близких к 1. Там, в частности, доказано утверждение о том, что если $(\alpha, \beta) \in l = \{\alpha \leq -2, \beta = -1\}$, то существует константа $M(\alpha, \beta) > 1$ такая, что для всех $M \in (1, M(\alpha, \beta))$ и $f \in S^M$ выполняется неравенство

$$L(\alpha, \beta, f) \leq L(\alpha, \beta, f_\lambda^M), \quad \lambda = 1/2 + 3/4\alpha.$$

Функция f_λ^M отображает круг E на круг радиуса M с двумя разрезами вдоль отрезка $[-M, M]$, зависящими от λ . Известно [2], что функции $f \in S^M$, отображающие круг E на круг радиуса M с не более чем двумя кусочно аналитическими разрезами, представимы в виде $f(z) = Mw(z, \log M)$, где

$$w(z, t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \dots) \quad (2)$$

является интегралом обобщённого дифференциального уравнения Лёвнера:

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad 0 \leq t \leq \log M, \quad (3)$$

с непрерывными функциями $u_k = u_k(t)$, $k = 1, 2$ и постоянными числами $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Для функции f_λ^M имеем $u_1 = \pi$, $u_2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda$.

В предлагаемой работе, используя алгоритм работ [3, 4], мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Существует $M(-3, -1) = 2.82037\dots$ такое, что для всех $M \in (1, M(-3, -1))$ и $f \in S^M$ выполняется неравенство*

$$L(-3, -1, f) \leq L(-3, -1, f_{1/4}^M).$$

Доказательство. Совершим замену переменной $t \rightarrow 1 - e^{-t}$, и обозначим $a_k(t) = x_{2k-3}(t) + ix_{2k-2}(t)$, $k = 2, \dots, 4$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z в равенстве (3), после произведённой замены получим управляемую систему дифференциальных уравнений. Последнее уравнение этой системы будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_5(t) = & -2 \sum_{k=1}^2 \lambda_k \left[(2x_3 + (2x_1 - 6)x_1 - x_2^2 - 1) \cos u_k + \right. \\ & + (2x_4 + 2(x_1 - 3)x_2) \sin u_k + (t - 1)(3(x_1 - 1) \cos 2u_k + \\ & \left. + 3x_2 \sin 2u_k + (t - 1)^2 \cos 3u_k) \right], \\ & x_5(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 - 1/M. \end{aligned} \quad (4)$$

Следуя принципам оптимизационного формализма, введём вектор множителей Лагранжа $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_5)^T$ и запишем функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H(t, x, \Psi, u, \lambda) = & -2 \sum_{k=1}^2 \lambda_k \left[\cos u_k \Psi_1 - \sin u_k \Psi_2 + \right. \\ & + (2(x_1 \cos u_k + x_2 \sin u_k) - (t - 1) \cos 2u_k) \Psi_3 - (2(x_1 \sin u_k - x_2 \cos u_k) - \\ & - (t - 1) \sin 2u_k) \Psi_4 + ((2x_3 + (x_1 - 6)x_1 - x_2^2 - 1) \cos u_k + \\ & \left. + 2(x_4 + (x_1 - 3)x_2) \sin u_k - 3(t - 1)((x_1 - 1) \cos 2u_k + x_2 \sin 2u_k) + \right. \end{aligned} \quad (5)$$

$$+(t-1)^2 \cos 3u_k) \Psi_5 \Big],$$

где $u = (u_1, u_2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $x = (x_1, \dots, x_5)^T$ удовлетворяет системе (4), а $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_5)^T$, $\Psi_5 = 1$, удовлетворяет сопряжённой системе дифференциальных уравнений и условиям трансверсальности $\Psi_j(1 - 1/M) = 0$, $j = 1, \dots, 4$.

Оптимальная управляющая функция $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, соответствующая экстремальной функции $f^* \in S^M$ в (5), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [5]:

$$\max_{u, \lambda} H(t, x, \Psi, u, \lambda) = H(t, x^*, \Psi^*, u^*, \lambda), \quad 0 \leq t \leq 1 - 1/M,$$

где (x^*, Ψ^*) является решением системы (4) и сопряжённой системы с $u = u^*$ в их правых частях. Следовательно, при положительных значениях λ_1, λ_2 каждая из координат u_1^*, u_2^* является корнем уравнения

$$H_{u_k}(t, x, \Psi, u, \lambda^k) = 0, \quad k = 1, 2,$$

где $x = x^*$, $\Psi = \Psi^*$, а λ^k — это один из векторов (1,0) или (0,1). Наличие двух различных на $[0, 2\pi)$ значений u_1^*, u_2^* координат оптимального управления u^* характеризует оптимальный скользящий режим. Поскольку мы рассматриваем значения M , близкие к 1, то можно считать, что вектор начальных данных сопряжённой системы имеет нулевые координаты. Полагая $\psi_2(0) = \alpha_1, \psi_4(0) = \alpha_2$, сохраняя при этом оптимальный скользящий режим, мы рассмотрим все возможные вариации функции $f_{1/4}^M$ в окрестности точки $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$. Следовательно, задача поиска числа $M(-3, -1)$ сводится к поиску локального максимума функции $F^M(\alpha)$, $F^M : (\psi(0), \lambda) \rightarrow x_5(1 - 1/M)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ в точке $\alpha = 0$.

Из (4) непосредственной подстановкой проверяем, что

$$\left[\frac{d(x_5)_{\alpha_j}}{dt} \right]_{\alpha=0} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Значит, $(x_5)_{\alpha_j}(1 - 1/M)|_{\alpha=0} = F_{\alpha_j}^M(0) = 0$, $j = 1, 2$. Следовательно, для всех $M > 1$ выполняются необходимые условия локального экстремума функции $F^M(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$. Поэтому остается лишь проверить достаточное условие экстремума функции F^M , зависящей от двух координат вектора α , которое заключается в том, что при $\alpha = 0$ квадратичная форма, порождённая квадратной матрицей $\Delta = \Delta(M)$ с элементами $(x_5)_{\alpha_j \alpha_l}(1 - 1/M)$, $j, l = 1, 2$, отрицательно определена. Численное интегрирование систем дифференциальных уравнений данной задачи приводит к значению $M(-3, -1) = 2.82037\dots$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Prokhorov D., Vasileva Z. Linear extremal problems for univalent functions close to identity // Bull. Soc. et Lettre. Lodz, 1995. Vol. XLV. P. 11–17.
2. Прохоров Д. В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659–1667.
3. Прохоров Д. В., Гордиенко В. Г. Определение границы в локальной гипотезе Хажинского–Тамми // Изв. вузов. Математика. 2008. № 9. С. 59–68.
4. Гордиенко В. Г., Самсонова К. А. Определение границы в локальной гипотезе Хажинского–Тамми для пятого коэффициента // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4. ч. 1. С. 5–13.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимального управления. М. : Наука, 1969. 308 с.

УДК 517.51

Е. В. Гудошникова

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ

В теории линейных положительных операторов хорошо известны операторы Саса–Миракьяна [1–2]:

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

которые в силу теорем П. П. Коровкина [3] сходятся к тождественному для любой $f \in BC$, причем имеет место неравенство (см., например [4]):

$$|M_n(f; x) - f(x)| \leq 2(1 + \sqrt{x}) \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ – модуль непрерывности функции f .

В работе [5] рассматривались операторы

$$L_n(f; x) = \sum_{k \geq \max\{0; (1-\mu_n)\}} f\left(\frac{t_k}{n}\right) \frac{(nx)^{t_k}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho_n} + \mu_n\right)} \frac{e^{-nx}}{\rho_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

где $t_k = \frac{k}{\rho_n} + \mu_n - 1$, $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности положительных чисел такие, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^2 n = \infty, \quad \rho_n \leq \ln(n\varepsilon), \quad 1 \leq \mu_n \leq \frac{n\varepsilon}{\ln(n\varepsilon)}. \quad (3)$$

При $\rho_n = \mu_n = 1$ последовательность (2) превращается в (1).

Было доказано, что последовательность операторов $L_n(f; x)$ сходится к тождественному для любой $f \in BC$, причем

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \text{const}(1 + \sqrt{x}) \omega(f; \max\{\frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{1}{\rho_n \sqrt{n}}\}).$$

Рассмотрим операторы

$$H_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{t_k}{n}\right) \frac{(nx)^{\frac{k}{\rho_n}}}{\Gamma(\frac{k}{\rho_n} + \mu_n)} \phi(x; \mu_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0, \quad (4)$$

где t_k , ρ_n и μ_n , как и выше, $\phi(x; \mu_n) = \left(E_{\rho_n}((nx)^{1/\rho_n}; \mu_n)\right)^{-1}$,

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{\rho} + \mu)} - \text{функция типа Миттаг-Леффлера [6].}$$

Также при $\rho_n = \mu_n = 1$ последовательность (4) превращается в (1) (но не в (2)). Идея рассмотреть такие операторы возникла при изучении дробного дифференцирования.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (3). Тогда для любой $f \in BC$ последовательность операторов $H_n(f; x)$ сходится к тождественному.

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы Коровкина. Очевидно, что $H_n(f; x)$ — линейный положительный оператор и

$$H_n(1; x) = 1. \quad (5)$$

Имеет место утверждение (см. [5], лемма 2.6): найдется номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$, для всех $x \geq \varepsilon$

$$1 - \delta_n(x) \leq \frac{(nx)^{\mu_n - 1}}{\rho_n e^{nx} \phi(x; \mu_n)} \leq 1 + \delta_n(x), \quad (6)$$

где $\delta_n(x) = \frac{c_0}{nx \min(1; \rho_n^2)}$, $c_0 = 14 \cdot 2^{1/3} + \frac{1}{2} + \frac{14}{\pi \sin \frac{\pi}{12}}$.

Так как

$$H_n(t; x) = x \cdot \frac{(nx)^{\mu_n - 2}}{\rho_n e^{nx} \phi(x; \mu_n - 1)} \frac{\rho_n e^{nx} \phi(x; \mu_n)}{(nx)^{\mu_n - 1}},$$

применяя неравенство (6), получим

$$x \cdot \frac{1 - \delta_n(x)}{1 + \delta_n(x)} \leq H_n(t; x) \leq x \cdot \frac{1 + \delta_n(x)}{1 - \delta_n(x)}. \quad (7)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} H_n(t^2; x) &= \frac{\phi(x; \mu_n)}{n^2 \phi(x; \mu_n - 2)} + \frac{\phi(x; \mu_n)}{n^2 \phi(x; \mu_n - 1)} = \\ &= x^2 \cdot \frac{(nx)^{\mu_n - 3}}{\rho_n e^{nx} \phi(x; \mu_n - 2)} \frac{\rho_n e^{nx} \phi(x; \mu_n)}{(nx)^{\mu_n - 1}} + \frac{x}{n} \cdot \frac{(nx)^{\mu_n - 2}}{\rho_n e^{nx} \phi(x; \mu_n - 1)} \frac{\rho_n e^{nx} \phi(x; \mu_n)}{(nx)^{\mu_n - 1}}, \end{aligned}$$

применяя неравенство (6), получим

$$\left(x^2 + \frac{x}{n}\right) \frac{1 - \delta_n(x)}{1 + \delta_n(x)} \leq H_n(t^2; x) \leq \left(x^2 + \frac{x}{n}\right) \frac{1 + \delta_n(x)}{1 - \delta_n(x)}, \quad (8)$$

Из (5), (7), (8) следует, что последовательность операторов H_n удовлетворяет теореме Коровкина, следовательно, приближает непрерывную функцию.

Более того, имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3). Тогда для любой $f \in BC$ найдется номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$, для всех $x \geq \varepsilon$

$$\left| H_n(f; x) - f(x) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{n} \min(1; \rho_n)} \cdot \left(1 + \frac{2x + 3}{\sqrt{nx}}\right). \quad (9)$$

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Применяя функцию Стеклова и ее свойства (см., например, [7]), получим

$$\begin{aligned} |H_n(f; x) - f(x)| &\leq \|f - f_h\| H_n(1; x) + \|f'_h\| H_n(|t - x|; x) + \|f - f_h\| \leq \\ &\leq \omega(f; h) \left(2 + \frac{1}{h} H_n(|t - x|; x)\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим:

$$k_1 = [\rho_n(nx - \mu_n + 1)], \quad a_n = \sum_{k=0}^{k_1} \left(x - \frac{t_k}{n}\right) v_k(x) \quad (\text{если } k_1 < 0, \text{ то } a_n(x) = 0);$$

$$k_2 = [\rho_n(nx - \mu_n + 2)] + 2, \quad b_n = \sum_{k=k_2}^{\infty} \left(\frac{t_k}{n} - x\right) v_k(x)$$

$$c_n = \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} \left|x - \frac{t_k}{n}\right| v_k(x) \quad (\text{если } k_1 + 1 > k_2 - 1, \text{ то } c_n(x) = 0).$$

Применяя леммы работы [5], получим оценки:

$$a_n(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{1 - \delta_n} \frac{[\rho_n] + 1}{\rho_n \sqrt{\pi n}}, \quad b_n(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{1 - \delta_n} \frac{[\rho_n] + 1}{\rho_n \sqrt{\pi n}}, \quad c_n(x) \leq \frac{(\rho_n + 1)(\rho_n + 2)}{(1 - \delta_n) n \rho_n^2 \sqrt{\pi n x}}.$$

Подставляя эти оценки в (10), после некоторых преобразований получим утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Миракьян Г. М.* Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов $e^{-nx} \sum_{k=0}^n c_{k,n} x^k$ // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. С. 201–205.
2. *Szasz O.* Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval // J. Res. Nat. Bur. Standards, Sect. B. 1950. Vol. 45. P. 239–245.
3. *Коровкин П. П.* О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 6. С. 961–964.
4. *Xiehua Sun.* On the simultaneous approximation of functions and their derivatives by the Szasz–Mirakyan operator // Journal of Approximation Theory. 1988. Vol. 55, iss. 3. P. 279–288.
5. *Гудошникова Е. В.* Приближение операторами типа Саса–Миракьяна и Баскакова с весовыми множителями : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1996
6. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. : Наука, 1966.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977.

УДК 517.984

Л. С. Ефремова, В. А. Юрко

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ НА А-ГРАФАХ

Исследуется обратная спектральная задача для несамосопряженных пучков дифференциальных операторов второго порядка, заданных на компактных А-графах с произвольным числом циклов при стандартных условиях склейки во внутренних вершинах и краевых условиях в граничных вершинах. Основное внимание уделено наиболее важной нелинейной обратной задаче восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений (потенциалов) при условии, что структура графа известна априори. Для этой обратной задачи доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура построения решения. При этом используется развитие идей метода спектральных отображений [1]. Отметим, что некоторые классы обратных задач для интегродифференциальных операторов сводятся к изучению дифференциальных операторов и пучков операторов на А-графах.

Рассмотрим компактный связный граф G в \mathbf{R}^l с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_s\}$, множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ и с отображением σ , которое каждому ребру $e_j \in \mathcal{E}$ ставит в соответствие упорядоченную пару (возможно равных) вершин: $\sigma(e_j) := [u_{2j-1}, u_{2j}]$, $u_j \in \mathcal{V}$. Вершины

$u_{2j-1} =: \sigma^-(e_j)$ и $u_{2j} =: \sigma^+(e_j)$ называются *начальной* и *конечной* вершинами ребра e_j , соответственно. Будем говорить, что ребро e_j *выходит* из u_{2j-1} и *заканчивается* в u_{2j} . Точки $U := \{u_j\}_{j=\overline{1,2s}}$ называются *концевыми точками* для \mathcal{E} . Каждая вершина $v \in \mathcal{V}$ порождает класс эквивалентности (который обозначается тем же символом v): $v = \{u_{j_1}, \dots, u_{j_\nu}\}$ так, что $v = u_{j_1} = \dots = u_{j_\nu}$.

Другими словами, множество концевых точек U распадается на m классов эквивалентности v_1, \dots, v_m . Число концевых точек в классе v_k называется *валентностью* вершины v_k и обозначается $val(v_k)$.

Вершина $v_k \in \mathcal{V}$ называется *граничной*, если $val(v_k) = 1$. Остальные вершины называются *внутренними*. Пусть $\mathcal{V}_0 = \{v_1, \dots, v_p\}$ – граничные вершины, а $\mathcal{V}_1 = \{v_{p+1}, \dots, v_m\}$ – внутренние вершины. Ребро e_j называется *граничным*, если одна из его концевых точек принадлежит \mathcal{V}_0 . Остальные ребра называются *внутренними*. Условимся, что $\mathcal{E}_0 = \{e_1, \dots, e_p\}$ – граничные ребра и $v_k \in e_k$ при $k = \overline{1, p}$. Пусть l_j – длина ребра e_j . Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка u_{2j-1} соответствует $x_j = 0$, а конечная точка u_{2j} соответствует $x_j = l_j$.

Цепочка ребер $b_k = \{b_{k1}, \dots, b_{k, \eta_k}\}$, $b_{kj} \in \mathcal{E}$ называется *циклом*, если она образует замкнутую кривую. Точка $w_k := \sigma^-(b_{k1})$ называется начальной точкой цикла b_k . Если $\eta_k = 1$ (т.е. цепочка состоит только из одного ребра), то цикл называется *граничным*. Каждый цикл b_k параметризуется параметром $t_k \in [0, L_k]$, причем начальная точка w_k соответствует $t_k = 0$. Занумеруем ребра следующим образом: $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_r\}$ – так называемые *простые* ребра (они не являются частью циклов), $\mathcal{E}_2 = \{e_{r+1}, \dots, e_s\}$ – ребра, которые образуют множество циклов $B := \{b_k\}_{k=\overline{1, N}}$. Элементы множества $E := \mathcal{E}_1 \cup B$, $E := \{E_k\}_{k=\overline{1, r+N}}$ (т.е. простые ребра и циклы) называются *а-ребрами*. А-ребро $E_k \in E$ называется *примыкающим* к вершине $v \in \mathcal{V}$, если $v \in E_k$. Через $R(v, G)$ обозначим множество а-ребер графа G , которые примыкают к вершине v .

Предположим, что если $b_k, b_j \in B$, $k \neq j$ и $b_k \cap b_j \neq \emptyset$, то $b_k \cap b_j = v \in \mathcal{V}_1$, т.е. любые два цикла могут иметь не более одной общей точки. Такие графы называются А-графами.

Пусть для определенности $p > 1$ (случай $p = 0$ и $p = 1$ требуют небольших изменений; см. замечание в конце статьи). Возьмем в качестве корня граничную вершину v_p . Соответствующее ребро e_p назовем *корневым ребром*. Для определенности условимся, что если $e_j \in \mathcal{E}_1$ – простое ребро, то точка u_{2j} лежит ближе к корню, чем u_{2j-1} , и если $b_k \in B$

– цикл, то начальная точка w_k лежит ближе к корню, чем остальные точки цикла b_k .

Зафиксируем $E_k \in E$. Наименьшее число ω_k a -ребер между корневым ребром и E_k (включая E_k) называется *порядком* E_k . Порядок корневого ребра равен нулю. Число $\omega := \max_{E_k \in E} \omega_k$ называется порядком графа G . Через $\mathcal{E}^{(\mu)}$, $\mu = \overline{0, \omega}$, обозначим множество a -ребер порядка μ . Например, $\mathcal{E}^{(1)}$ – множество a -ребер, примыкающих к корневному ребру.

Рассмотрим цикл $b_k = \{b_{k1}, \dots, b_{k, \eta_k}\} \in B$. Если мы немного сдвинем начальную точку w_k в точку $w_k^0 \notin G$ (не меняя положения других концевых точек b_k и не меняя длины b_k), то вместо b_k мы получим так называемый "разомкнутый цикл" $b_k^0 = \{b_{k1}^0, b_{k2}, \dots, b_{k, \eta_k}\}$, где b_{k1}^0 – простое граничное ребро, а w_k^0 – граничная вершина. Через G^k обозначим граф с "разомкнутым циклом" b_k^0 вместо b_k .

Интегрируемая функция Y на G может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1, s}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, l_j]$ определена на ребре e_j . Обозначим

$$Y_{|u_{2j-1}} := y_j(0), \quad Y_{|u_{2j}} := y_j(l_j), \quad \partial Y_{|u_{2j-1}} := y_j'(0), \quad \partial Y_{|u_{2j}} := -y_j'(l_j).$$

Если $v \in \mathcal{V}$, то $Y|_v = 0$ означает, что $Y_{|u_j} = 0$ для всех $u_j \in v$. Let $Q = \{q_j\}_{j=\overline{1, s}}$ and $P = \{p_j\}_{j=\overline{1, s}}$ be complex-valued functions on G ; they are called the potentials. Assume that $q_j(x_j) \in L(0, l_j)$, $p_j(x_j) \in AC[0, l_j]$. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на G :

$$y_j''(x_j) + (\rho^2 + \rho p_j(x_j) + q_j(x_j))y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in [0, l_j], \quad (1)$$

где $j = \overline{1, s}$, ρ - спектральный параметр, функции y_j, y_j' , $j = \overline{1, s}$, абсолютно непрерывны на $[0, l_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки (УС) в каждой внутренней вершине $v_\xi \in \mathcal{V}_1$:

$$Y_{|u_i} = Y_{|u_j} \text{ при всех } u_i, u_j \in v_\xi, \quad \sum_{u_i \in v_\xi} \partial Y_{|u_i} = 0. \quad (2)$$

УС (2) называются стандартными условиями. В электрических сетях они выражает закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей – баланс напряжений и т.д. Зафиксируем цикл $b_k \in B$ с начальной точкой $w_k \in U$. Если (2) выполняется для множества $U \setminus \{w_k\}$, то такие условия называются w_k -УС.

Рассмотрим краевую задачу $L_0(G)$ для уравнения (1) на G с УС (2) во внутренних вершинах \mathcal{V}_1 и с условиями Дирихле в граничных вершинах \mathcal{V}_0 :

$$Y_{|v_j} = 0, \quad j = \overline{1, p}. \quad (3)$$

Отметим, что обратный оператор, соответствующий этой краевой задаче, является интегродифференциальным оператором второго порядка.

Рассмотрим также краевые задачи $L_k(G)$, $k = \overline{1, p-1}$, для уравнения (1) при УС (2) и при граничных условиях

$$\partial Y|_{v_k} = 0, \quad Y|_{v_j} = 0, \quad j = \overline{1, p} \setminus k.$$

Таким образом, $L_k(G)$ получается из $L_0(G)$ заменой условия Дирихле в вершине $v_k = \sigma^-(e_k)$ на условие Неймана в v_k .

Обозначим $\Lambda_k = \{\rho_{kn}\}$, $k = \overline{0, p-1}$ – собственные значения (с учетом их кратностей) задачи $L_k(G)$.

Пусть $L_\nu^\xi(G)$, $\xi = \overline{1, N}$, $\nu = 0, 1$ – краевая задача для уравнения (1) с w_ξ -УС и с граничными условиями:

$$\partial^\nu Y|_{w_\xi} = 0, \quad Y|_{v_j} = 0, \quad j = \overline{1, p},$$

где $\partial^0 Y := Y$, $\partial^1 Y := \partial Y$. Обозначим $\Lambda_\nu^\xi = \{\rho_{\nu n}^\xi\}$ – собственные значения (с учетом их кратностей) задачи $L_\nu^\xi(G)$. Обратная задача формулируется следующим образом.

Обратная задача 1. Даны спектры Λ_k , $k = \overline{0, p-1}$, и Λ_ν^ξ , $\xi = \overline{1, N}$, $\nu = 0, 1$, построить потенциалы P и Q на G .

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1.

Теорема 1. Задание Λ_k , $k = \overline{0, p-1}$, и Λ_ν^ξ , $\xi = \overline{1, N}$, $\nu = 0, 1$, однозначно определяет Q и P .

Используя метод спектральных отображений, мы также получаем конструктивную процедуру решения обратной задачи 1.

Замечание 1. Пусть $p \leq 1$ (i.e. $p = 0$ или $p = 1$). Тогда обратная задача ставится следующим образом: даны спектры Λ_ν^ξ , $\xi = \overline{1, N}$, $\nu = 0, 1$, построить потенциалы P и Q на G . При $p = 1$ все рассуждения и результаты остаются верными; в частности, процедура построения потенциалов P и Q остается той же. При $p = 0$ требуется одно изменение, а именно нужен другой выбор корневого ребра. В данном случае граф G имеет по крайней мере один граничный цикл. Для определенности пусть b_N – граничный цикл. Тогда берем b_N в качестве корневого ребра.

Замечание 2. Аналогичные результаты верны и для интегродифференциальных пучков, являющихся возмущением дифференциального пучка интегральным вольтерровым оператором.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 17-11-01193).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP. Utrecht, 2002. 250 p.

УДК 517.95, 517.984

В. В. Корнев, А. П. Хромов

СХОДИМОСТЬ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО МЕТОДУ ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим простейшую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, T], \quad T > 0; \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

при минимальном требовании

$$f(x, t) \in L(Q).$$

Теорема. Ряд формального решения задачи (1) – (2) по методу Фурье

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^t \alpha_n(\tau) \sin n\pi x \sin n\pi(t - \tau) d\tau \quad (3)$$

сходится в любой точке $(x, t) \in Q$ и для его суммы справедлива формула

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \Phi(\eta, \tau) d\eta, \quad (4)$$

где $\alpha_n(\tau) = \int_0^1 f(\xi, \tau) \sin n\pi\xi d\xi$, $\Phi(\eta, \tau)$ – 2-периодическая по η на всей оси, нечетная на $[-1, 1]$ и $\Phi(\eta, \tau) = f(\eta, \tau)$ при $\eta \in [0, 1]$.

Доказательство. (Это доказательство дополняет доказательство, приведенное в [1]).

Зафиксируем произвольную точку $(x, t) \in Q$. Как показано в [1], соотношение (3) можно записать в виде

$$u(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \psi_N(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где

$$\psi_N(\tau) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(\tau) \left(-\frac{1}{n\pi} \right) (\cos n\pi(x + t - \tau) - \cos n\pi(x - t + \tau)), \quad (6)$$

причем почти при всех $\tau \in [0, t]$ $\Phi(\cdot, \tau) \in L[0, 1]$ и существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(\tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \frac{1}{2} \Phi(\eta, \tau) d\eta. \quad (7)$$

Обоснуем, что в (5) можно перейти к пределу под знаком интеграла (тогда на основании (7) теорема будет доказана).

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \left(-\frac{1}{n\pi} \right) \cos n\pi\eta &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi\eta \int_0^1 \left(\int_0^{\xi} \Phi(s, \tau) ds \right) \cos n\pi\xi d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 (\Phi_0(\xi, \tau) - c_0) \cos n\pi\xi d\xi \cdot \cos n\pi\eta + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\Phi_0(\xi, \tau) - c_0) d\xi, \end{aligned}$$

где $\Phi_0(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\eta} \Phi(s, \tau) ds$, $c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_0(\xi, \tau) d\xi$.

Следовательно, этот ряд есть ряд Фурье функции $\Phi_1(\eta, \tau) = \Phi_0(\xi, \tau) - c_0$ по 2-периодической системе $\{\cos n\pi\eta, \sin n\pi\eta\}_{n=0}^{\infty}$. Если записать его частичные суммы с помощью ядра Дирихле $D_N(u) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}$ и учесть (6), то получим

$$\psi_N(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1 \left(\frac{u}{\pi} + b, \tau \right) D_N(u) du - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1 \left(\frac{u}{\pi} + a, \tau \right) D_N(u) du, \quad (8)$$

где $b = x + t - \tau$, $a = x - t + \tau$

Запишем $\Phi_1(\eta, \tau)$ в виде суммы двух монотонных (по η) функций

$$\Phi_1(\eta, \tau) = \Phi_1^+(\eta, \tau) + \Phi_1^-(\eta, \tau),$$

где $\Phi_1^+(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\eta \Phi_+(s, \tau) ds - c_0$, $\Phi_1^-(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\eta \Phi_-(s, \tau) ds$,

Φ_+ , Φ_- – соответственно неотрицательная и неположительная части функции $\Phi(s, \tau)$. (Эти рассуждения надо проводить отдельно для вещественной и мнимой части функции $f(x, t)$).

Оценим первый интеграл в (8) (второй аналогично).

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1 \left(\frac{u}{\pi} + b, \tau \right) D_N(u) du \right| &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1^+ \left(\frac{u}{\pi} + b, \tau \right) D_N(u) du \right| + \\ &+ \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1^- \left(\frac{u}{\pi} + b, \tau \right) D_N(u) du \right|. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя вторую теорему о среднем ([2, с. 19]) к первому интегралу в правой части (9), имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1^+ \left(\frac{u}{\pi} + b, \tau \right) D_N(u) du \right| &\leq |\Phi_1^+(-1 + b, \tau)| \left| \int_{-\pi}^{\xi} D_N(u) du \right| + \\ &+ |\Phi_1^-(1 + b, \tau)| \left| \int_{\xi}^{\pi} D_N(u) du \right|. \end{aligned}$$

Как известно, (см. [2, с. 108, 114]),

$$D_n(u) = \frac{\sin nu}{u} + O(1) \text{ и } \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin nu}{u} du \right| < 2\pi$$

при любых α, β, n .

Кроме того,

$$|\Phi_1^+(\pm 1 + b, \tau)| = \left| \frac{1}{2} \int_0^{\pm 1+x+t-\tau} \Phi_+(s, \tau) ds - c_0 \right| \leq c_1 \int_0^1 |f(s, \tau)| ds,$$

где c_1 не зависит от x, t и τ .

Аналогично оценивается второй интеграл в правой части (9).

В силу этих оценок из формулы (8) следует, что

$$|\psi_N(\tau)| \leq c \int_0^1 |f(s, \tau)| ds, \quad (10)$$

где c не зависит от N и τ .

Правая часть (10) является суммируемой на $[0, t]$ функцией от τ . Поэтому из (5) с учетом (7) по теореме Лебега о предельном переходе получаем формулу (4).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корнев В. В., Хромов А. П. Об одной смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 27–30.

2. Барн Н. К. Тригонометрические ряды. М. : Физматлит, 1961.

УДК 517.984

О. А. Королева

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА СТОРОНАХ КВАДРАТА, ВПИСАННОГО В ЕДИНИЧНЫЙ КВАДРАТ

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt. \quad (1)$$

Обозначим:

$A_1(x, t) = A(x, t)$, если $\{0 \leq t \leq 1/2 - x, 0 \leq x \leq 1/2\}$,

$A_2(x, t) = A(x, t)$, если $\{1/2 + x \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1/2\}$,

$A_3(x, t) = A(x, t)$, если $\{0 \leq t \leq -1/2 + x, 1/2 \leq x \leq 1\}$,

$A_4(x, t) = A(x, t)$, если $\{3/2 - x \leq t \leq 1, 1/2 \leq x \leq 1\}$,

$A_5(x, t) = A(x, t)$, если $\{1/2 - x \leq t \leq 1/2 + x, 0 \leq x \leq 1/2\}$ и $\{-1/2 + x \leq t \leq 3/2 - x, 1/2 \leq x \leq 1\}$.

Будем предполагать, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x, t)$, ($i = 1, \dots, 5$) непрерывны в своих областях, ($k + l \leq 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1$). $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x, t)$, ($i = 1, \dots, 5$) непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем

$$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a,$$

$$\begin{aligned} A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) &= b, \\ A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) &= c, \\ A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) &= d, \end{aligned}$$

где a, b, c, d – постоянные.

То есть ядро $A(x, t)$ может иметь скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.

В работе изучаются работы оператора (1). Для него доказывается аналог теоремы Жордана–Дирихле.

В пространстве вектор–функций рассматривается оператор

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x, t)g(t) dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (2)$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & A(x, \frac{1}{2} - t) & A(x, \frac{1}{2} + t) & 0 \\ A(\frac{1}{2} - x, t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2} - x, 1 - t) \\ A(\frac{1}{2} + x, t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2} + x, 1 - t) \\ 0 & A(1 - x, \frac{1}{2} - t) & A(1 - x, \frac{1}{2} + t) & 0 \end{pmatrix}.$$

В [1] доказывается, что (1) эквивалентно (2).

Теорема 1. Для оператора B^{-1} справедливо представление

$$\begin{aligned} B^{-1}z(x) &= Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + \\ &+ a_3(x)z(x) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(x, t)z(t) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

$$Sz(0) + Tz\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t) dt = 0, \quad (4)$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, $a'_3(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы–функции, каждая компонента матрицы $a(x, t)$ имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x, t)$, S, T – некоторые постоянные матрицы 4×4 .

Находится резольвента оператора A :

Теорема 2. Если R_λ существует, то $R_\lambda f = v(x)$,

где $v(x) = z_1(x)$, при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, и $v(x) = z_3(x - \frac{1}{2})$, при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, (5)
 z_1, z_3 – первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (3), (4).

Также доказывается обратное утверждение:

Теорема 3. Если λ таково, что однородная краевая задача для (3), (4) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (5).

Основной результат:

Теорема 4. Если $f(x) \in \bar{\Delta}_A$, где $\bar{\Delta}_A$ – замыкание по норме $C[0, 1]$ области значений оператора A и $f(x) \in V[0, 1]$, то

$$\|f(x) - S_r(f, x)\|_\infty \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Королева О. А. Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 6–13.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С КОНЕЧНООПРЕДЕЛЁННЫМ ПРАВИЛОМ ВЫБОРА

Иерархические игры – это модели конфликтных ситуаций с неравноправными участниками, в которых рассмотрение ведётся с точки зрения первого (управляющего) игрока, на основе его информации о выборе и интересах партнёра. В иерархических играх исследуется оптимальное поведение первого игрока и вычисляется его наибольший гарантированный результат при различных предположениях об его информированности [1–4]. В настоящей работе наибольший гарантированный результат вычисляется для специального вида информированности первого игрока, а именно конечноопределённого правила выбора, который содержит в себе, как частные случаи, некоторые виды информированности, исследовавшиеся ранее.

Определение. Иерархической игрой называется система $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$, где X – множество стратегий первого игрока, Y – множество стратегий второго игрока, $F : X \times Y \rightarrow R$ – функция выигрыша первого игрока, $\mu : 2^{X \times Y} \rightarrow 2^{X \times Y}$ и обладающее свойствами

$$\forall T \subset X \times Y \quad \mu(T) \neq \emptyset, \quad \mu(T) \subset T$$

– правило выбора, с помощью которого задаётся информированность первого игрока об интересах второго.

Для упрощения изложения будем считать множества X и Y конечными.

Определение. *Наибольший гарантированный результат первого игрока в иерархической игре обозначается $\gamma(\Gamma)$ и определяется равенством*

$$\gamma(\Gamma) = \max_x \min_{y:(x,y) \in \mu(\{x\} \times Y)} F(x, y).$$

Первый игрок может организовывать обмен информацией о выборах между игроками (строить различные расширения игры). В [5] показано, что универсальным оптимальным (для любых μ) является расширение Γ_τ , в котором первый игрок предлагает второму выбрать любую точку из множества $T \in \tau$, где τ – система подмножеств $X \times Y$, обладающих свойством $\forall y \exists x (x, y) \in T$. Наибольший гарантированный результат в таком расширении вычисляется по формуле

$$\gamma(\Gamma_\tau) = \max_{T \in \tau} \min_{(x,y) \in \mu(T)} F(x, y). \quad (1)$$

Вычисление (1) – это экстремальная задача на системе подмножеств с ограничениями. Рассмотрим класс правил выбора, для которых данная задача сводится к экстремальной задаче на исходных множествах.

Определение. *Правило выбора μ называется конечноопределённым, если его можно задать в виде*

$$\mu(T) = \{(x, y) \in T : S(\varphi(T), x, y)\},$$

где $\varphi : 2^{X \times Y} \rightarrow R^m$, S – предикат, определённый на $R^m \times X \times Y$, причём отображение φ обладает свойствами

$$\begin{aligned} & \forall T_1, T_2 \quad (\varphi(T_1) = \varphi(T_2) \ \& \ T_1 \subset T_2 \implies \\ & \implies \forall T_1 \subset T \subset T_2 \quad \varphi(T) = \varphi(T_1) = \varphi(T_2), \\ & \forall \{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \quad (\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \varphi(T_{\lambda_1}) = \varphi(T_{\lambda_2})) \implies \\ & \implies \forall \lambda \in \Lambda \quad \left(\varphi(T_\lambda) = \varphi \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda \right) \right). \end{aligned}$$

Замечание. Множества T_1 и T_2 будем называть эквивалентными, если выполняется равенство $\varphi(T_1) = \varphi(T_2)$.

Простейший пример конечноопределённого правила выбора – правило μ , определяемое равенством

$$\mu(T) = \left\{ (x', y') \in T : G(x', y') = \max_{(x,y) \in T} G(x, y) \right\}. \quad (2)$$

В данном случае $m = 1$, $\varphi(T) = \max_{(x,y) \in T} G(x, y)$,

$$S(r, x, y) \iff G(x, y) = r.$$

Теорема. Если правило выбора μ является конечноопределённым и каждое множество включает в себя эквивалентное конечное подмножество, содержащее не более k элементов, то справедливо равенство

$$\gamma(\Gamma_\tau) = \max_{l \in L_\tau} l, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} L_\tau = \{ & l : \exists \bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}) (\forall j = 1, \dots, k) P(\bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}), x_j, y_j, l) \& \\ & \& \forall y \exists x P(\bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}), x, y, l), \\ P(\bar{r}, (\bar{x}, \bar{y}), x, y, l) \iff & ((\varphi(\{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k), (x, y)\})) = \bar{r} \& \\ & \& (F(x, y) \geq l \text{ или } \neg S(\bar{r}, x, y))), \\ (\bar{x}, \bar{y}) = & ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)) \}. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем, что любой результат $l \in L_\tau$ гарантирован первому игроку. Пусть $l \in L_\tau$. Определим множество T равенством

$$\begin{aligned} T = \{ & (x, y) : \varphi(\{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k), (x, y)\}) = \bar{r} \& \\ & \& (F(x, y) \geq l \text{ или } \neg S(\bar{r}, x, y)), \end{aligned}$$

где \bar{r} и (\bar{x}, \bar{y}) – те вектора, существование которых вытекает из принадлежности l к L_τ . Вследствие определений L_τ и T множество T содержит все точки $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ и принадлежит τ . Следовательно, для любой точки $(x, y) \in T$ условия $\neg S(\bar{r}, x, y)$ и $(x, y) \notin \mu(T)$ равносильны и справедливо соотношение

$$\forall (x, y) \in T (F(x, y) \geq l \text{ или } (x, y) \notin \mu(T)),$$

то есть выполняется неравенство $\inf_{(x,y) \in \mu(T)} F(x, y) \geq l$.

Таким образом, результат l гарантирован первому игроку. Можно показать, что большего результата первый игрок гарантировать не может. Доказательство теоремы завершено.

Следствие. Если первый игрок точно знает функцию выигрыша второго игрока G , то есть верно равенство (2), то его наибольший гарантированный результат может быть вычислен по формуле (3), где

$$L_\tau = \{l : \exists (x', y') (F(x', y') \geq l \text{ или } (x', y') \notin \mu(T))\}$$

$$\forall y \exists x (G(x, y) \leq G(x', y') \& (F(x, y) \geq l \text{ или } G(x, y) < G(x', y'))).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с противоположными интересами. М. : Наука, 1976. 326 с.
2. *Кукушкин Н. С., Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. 325 с.
3. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры с неопределенными факторами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 21–24.
4. *Горелов М. А.* Иерархические игры с неопределенными факторами // Управление большими системами. М. : ИПУ РАН, 2016. Вып. 59. С. 6–22.
5. *Шолло И. А.* Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1983. 42 с.

УДК 517.96; 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассматривается волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

при условиях

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

где комплексная $q(x) \in L_2[0, 1]$.

В [1] резольвентным подходом в методе Фурье, базирующимся на применении метода Коши–Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора, порождаемого соответствующей спектральной задачей, для случая $q(x) \in C[0, 1]$ было получено классическое решение задачи (1)–(3) при минимальных требованиях гладкости на $\psi(x)$. Теперь у нас $\psi(x)$ удовлетворяет более слабым требованиям и $q(x) \in L_2[0, 1]$. Приводимые ниже результаты усиливают соответствующие результаты для $q(x) \in C[0, 1]$ в [2].

1. Здесь считаем, что $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ($W_2^1[0, 1] = \{f(x) \mid f'(x) \text{ абсолютно непрерывна на } [0, 1] \text{ и } f'(x) \in L_2[0, 1]\}$).
Формальное решение, как и в [1], представим в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (4)$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (5)$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi - R_\lambda^0 \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр), $Ly = -y'' + q(x)y$ при условиях $y(0) = y(1) = 0$; $r > 0$ фиксировано и таково, что все собственные значения оператора L при $|\lambda_n| > r$ – простые и попадают по одному в области с границами γ_n , являющиеся образами окружностей $\{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$ ($\delta > 0$ и достаточно мало), $\lambda = \rho^2$, $Re \rho \geq 0$, $n \geq n_0$; $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L_0 , который есть L при $q(x) = 0$.

Обозначим через $z_1(x, \rho)$ и $z_2(x, \rho)$ решения уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z_1(0, \rho) = 1$, $z_1'(0, \rho) = 0$, $z_2(0, \rho) = 0$, $z_2'(0, \rho) = 1$.

Теорема 1. [1, теорема 1] *Имеют место формулы*

$$\begin{aligned} R_\lambda f &= z_2(x, \rho)(f, z_1) - v(x, \rho)(f, z_2) - (M_\rho f)(x), \\ R_\lambda^0 f &= z_2^0(x, \rho)(f, z_1^0) - v^0(x, \rho)(f, z_2^0) - (M_\rho^0 f)(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где $v(x, \rho) = \frac{z_2(x, \rho)z_1(1, \rho)}{z_2(1, \rho)}$, $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$, $M_\rho f = \int_0^x M(x, t, \rho)f(t) dt$,

$M(x, t, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(t, \rho) & z_2(t, \rho) \\ z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \end{vmatrix}$, $v^0(x, \rho)$, $z_1^0(x, \rho)$, $z_2^0(x, \rho)$, M_ρ^0 – те же, что и $v(x, \rho)$, $z_1(x, \rho)$, $z_2(x, \rho)$, M_ρ , но взяты для оператора L_0 .

Так как первое и третье слагаемые в (6) есть целые функции по λ , то из (5) и (6) по теореме вычетов получаем

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\psi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \sin n\pi t.$$

Лемма 2. Ряд $u_0(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его суммы имеет место формула

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau) d\tau,$$

где $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ при $x \in [0, 1]$, $\tilde{\psi}(x) = -\tilde{\psi}(-x)$, $\tilde{\psi}(x+2) = \tilde{\psi}(x)$.

Из леммы 2 так же, как и теорема 1 из [2], получается

Теорема 2. Функция $u_0(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3), когда уравнение (1) с $q(x) = 0$ выполняется почти всюду (п. в.).

Для исследования ряда $u_1(x, t)$ обозначим

$$a_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} J(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

где $J(x, \rho) = [v(x, \rho) - v^o(x, \rho)](\psi, z_2) + v_1^o(x, \rho)(\psi, z_2 - z_2^o)$.

Тогда

$$u_1(x, t) = \sum_n u_{1n}(x, t), \quad (7)$$

где $u_{1n}(x, t) = a_n(x, t)$ и суммирование ведется по $n = 0, n_0, n_0 + 1, \dots$ и γ_0 есть $|\lambda| = r$.

Лемма 3. Ряды $\sum u_{1n,t}^{(j)}(x, t)$, ($j = 0, 1, 2$), $\sum u_{1n,x}^{(j)}(x, t)$, ($j = 0, 1$) сходятся абсолютно и равномерно в $Q_T = [0, 1] \times [-T, T]$ при любом $T > 0$. На основании леммы 3 получается

Лемма 4. Функция $u'_{1x}(x, t)$ абсолютно непрерывна по x и п. в. по x и t из Q_T справедливо $u''_{1x^2}(x, t) = q(x)u(x, t) + d(x, t)$, где

$$d(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \lambda J(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda$$

и ряд $d(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T .

Из (4) с помощью теоремы 2 и лемм 3, 4 получается

Теорема 3. Если $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$, то сумма ряда $u(x, t)$ формального решения задачи (1)–(3) является классическим решением этой задачи, когда уравнение (1) выполняется п. в.

2. Пусть теперь $\psi(x) \in L_2[0, 1]$. Представление (4) формального решения сохраняется.

Лемма 5. Ряд $u_0(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его суммы имеет место формула

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x - t) - \Phi(x + t)], \quad (8)$$

где $\Phi(x) = \int_x^1 \psi(\tau) d\tau$ при $x \in [0, 1]$, $\Phi(x) = \Phi(-x)$, $\Phi(x + 2) = \Phi(x)$. Кроме того, существует $u'_{0t}(x, 0)$ для п.в. $x \in [0, 1]$ и

$$u'_{0t}(x, 0) = \psi(x). \quad (9)$$

Доказательство формулы (8) получается на основании леммы 1, а для доказательства (9) следует использовать формулу (8) и взять x из множества

$$\{x | x \in (0, 1), \Phi'(x) \text{ конечна}\}.$$

Лемма 6. Ряд $u_1(x, t)$ и ряд, получающийся из него почленным дифференцированием по t , сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$.

Из формулы (4) на основании лемм 5 и 6 и теоремы равносходимости для операторов L и L_0 получаем

Лемма 7. Сумма ряда $u(x, t)$ удовлетворяет условиям (2) и $u(x, 0) = 0$; $u(x, t)$ абсолютно непрерывна по t ; п.в. на $[0, 1]$ существует $u'_t(x, 0)$ и $u'_t(x, 0) = \psi(x)$.

Пусть $\psi_h(x)$ – та же, что и $\psi(x)$ в теореме 3 и $u_h(x, t)$ – решение задачи (1)–(3) для такой $\psi_h(x)$. Тогда из оценки $\max_{Q_T} |u(x, t)| \leq C_T \|\psi\|_2$ (постоянная C_T зависит только от T и $\|\cdot\|_2$ – норма в $L_2[0, 1]$), следующей из (4), леммы 5 и формулы (7), получаем

Теорема 4. Если $\psi(x) \in L_2[0, 1]$ и $\|\psi_h - \psi\|_2 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то $u_h(x, t)$ сходится к $u(x, t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x, t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3).

3. И в случае, когда $\psi(x) \in L[0, 1]$, формальное решение берем в виде (4). Аналогично приведенным в п.2 получаются следующие результаты.

Лемма 8. Ряд $u_0(x, t)$ сходится равномерно в Q_T , для его суммы справедлива формула (8) и выполняется оценка $\max_{Q_T} |u_0(x, t)| \leq \|\psi\|_1$, а ряд $u_1(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и $\max_{Q_T} |u_1(x, t)| \leq C_T \|\psi\|_1$, где $\|\cdot\|_1$ – норма в $L[0, 1]$.

Пусть $\psi_h(x)$ и $u_h(x, t)$ – те же, что и в п. 2.

Теорема 5. Если $\psi(x) \in L[0, 1]$, то сумма ряда $u(x, t)$ формально-го решения задачи (1)–(3) удовлетворяет условиям (2) и $u(x, 0) = 0$. Кроме того, если $\|\psi_h - \psi\|_1 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то $u_h(x, t)$ сходится к $u(x, t)$ равномерно в Q_T при любом $T > 0$, т.е. $u(x, t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3).

Таким образом, если в задаче (1)–(3) $\psi(x) \in L[0, 1]$, то обобщенное решение обладает более слабыми по сравнению со свойствами обобщенного решения, когда $\psi(x) \in L_2[0, 1]$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курдюмов В. П., Хромов А. П. Обоснование метода Фурье для волнового уравнения при минимальных требованиях на исходные данные // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 32–36.

2. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О решении одной смешанной задачи для волнового уравнения с нулевой начальной функцией // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 37–41.

УДК 519.2+519.8

А. Л. Лукашов, К. А. Федорова

ОБ ОДНОМ ТОЧНО РЕШАЕМОМ ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ РЫНКА С ТРЕМЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ АКЦИЯМИ

В работах С. Альбеверио и В. Стебловской [1–2] известная многомерная модель Блэка-Шоулза (см., например, [3]) была обобщена на случай, когда цены акций коррелируют между собой. В частности, там приведены условия (далее – (A), (E), (N)), обеспечивающие отсутствие арбитражных возможностей и полноту для такой модели.

Одно из условий (A) требует невырожденности матриц, элементами которых являются дисконтированные цены акций, то есть значения векторного случайного процесса, который и требуется найти путем решения уравнений модели. Таким образом, проверка выполнимости условий теоремы Альбеверио – Стебловской является нетривиальной задачей, и в [1–2] был приведен лишь один пример ее решения (для модели рынка с двумя взаимодействующими акциями). Цель данной статьи – построить в явном виде трехмерную модель полного рынка и получить ее аналитическое решение.

Для удобства формулировок мы приведем уравнения рассматриваемой модели для дисконтированных цен акций Z_t :

$$dZ_t = (A_t - r_t I)Z_t dt + \sum_{j=1}^n B_t^j Z_t d\beta_t^j. \quad (1)$$

Рассмотрим следующие условия для стохастического процесса:

(E) A_t и B_t^j прогрессивно измеримы и такие, что решение (1) существует и единственно на интервале $[0, T]$ для каждого начального вектора $x_0 \in R^n$, постоянного или независимого от β_t^i , $0 \leq t \leq T$.

(A) Линейное алгебраическое уравнение

$$\sum_{j=1}^n \eta_t^j B_t^j Z_t = F_t \quad (2)$$

для R^n -значного процесса η_t , $0 \leq t \leq T$, имеет прогрессивно измеримое решение (для почти всех $t \in [0; T]$) для каждого решения Z_t уравнения (1) и каждого R^n -значного измеримого процесса F_t , $0 \leq t \leq T$.

(N) Решение η_t уравнения (2) удовлетворяет условию Новикова:

$$E \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \|\eta_u\|^2 du \right) \right\} < \infty, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Теорема [1-2]

При выполнении условий (A), (E), (N) модель (1) – безарбитражная и полная.

Пример. Рассмотрим случай $n = 3$, $r_t \equiv r$, $B_t^j \equiv B^j$, $j = 1, 2, 3$; A_t – диагональная и B^j , $j = 1, 2, 3$ – нижние треугольные матрицы, причем $b_j^{11} = b_j^{22} = b_j^{33} \equiv b_j$, $j = 1, 2, 3$.

Тогда условия теоремы выполнены, если

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1^{21} & b_2^{21} & b_3^{21} \\ b_1^{31} & b_2^{31} & b_3^{31} \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1^{21} & b_2^{21} & b_3^{21} \\ b_1^{32} & b_2^{32} & b_3^{32} \end{pmatrix} = 0.$$

Более того, решение уравнения (1) может быть записано как

$$\tilde{S}_t^1 = \Phi_{0,t}^{\beta*} x_0^1$$

$$\tilde{S}_t^2 = \Phi_{0,t}^{\beta^*} (x_0^2 - x_0^1 t (b_1 b_1^{21} + b_2 b_2^{21} + b_3 b_3^{21}) + x_0^1 (b_1^{21} \beta_t^{1*} + b_2^{21} \beta_t^{2*} + b_3^{21} \beta_t^{3*})) ,$$

$$\tilde{S}_t^3 =$$

$$\Phi_{0,t}^{\beta^*} (x_0^3 - x_0^2 t (b_1 b_1^{31} b_1^{31} + b_2 b_2^{31} b_2^{31} + b_3 b_3^{31} b_3^{31}) + x_0^2 (b_1^{31} \beta_t^{1*} + b_2^{31} \beta_t^{2*} + b_3^{31} \beta_t^{3*})) ,$$

где

$$\Phi_{s,t}^{\beta^*} = \exp \left\{ \left(r - \frac{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}{2} \right) (t - s) + Q_t \right\} ,$$

$$Q_t = b_1 (\beta_t^{1*} - \beta_s^{1*}) + b_2 (\beta_t^{2*} - \beta_s^{2*}) + b_3 (\beta_t^{3*} - \beta_s^{3*}) ,$$

β_t^{j*} – винеровские процессы относительно мартингальной меры P^* для Z_t , $Z_t = \frac{1}{b_t} S_t$, и S_t совпадает с \tilde{S}_t вплоть до времени первого прохода нуля $T_0^i = \inf \{0 \leq t \leq T : \tilde{S}_t^i = 0\}$, $\tilde{S}_0 = x_0 \in \mathbb{R}^3$, $x_0^i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство проводится методом из [1–2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Albeverio S., Steblovskaya V. A.* A model of financial market with several interacting assets. Complete market case. *Fin. and Stoch.* 2002. Vol. 6, iss. 53. P. 383-396.
2. *Albeverio S., Steblovskaya V. A.* Financial Market with Interacting Assets. Pricing Barrier Options. *Fin. and Stoch.* 2002.
3. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М. : Мир, 2004. 406 с. (Серия : Лучший зарубежный учебник)

УДК 519.2+519.8

А. Л. Лукашов, В. А. Федосеева

ОБ ОДНОМ УТВЕРЖДЕНИИ ИЗ РАБОТЫ РЮШЕНДОРФА «ON UPPER AND LOWER PRICES IN DISCRETE-TIME MODELS»

В работе [1] была рассмотрена следующая модель рынка с дискретным временем: на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ цена акции в n -й момент времени задана по формуле

$$X_n = X_0 \prod_{k=1}^n Y_k, \quad 1 \leq n \leq N,$$

где (Y_k, A_k) – стохастическая последовательность и Y_k ограничено $0 \leq a_k \leq Y_k \leq b_k$. Пусть B_n – облигации с постоянными процентными ставками $r_i \geq 0$, $a_i \leq 1 + r_i \leq b_i$,

$$B_n = B_0 \prod_{k=1}^n (1 + r_k).$$

Капитал портфеля ценных бумаг $\pi = (\beta, \gamma)$, где $\beta = (\beta_n)$ и $\gamma = (\gamma_n)$ и β_n, γ_n являются F_{n-1} измеримыми при всех $n \geq 0$, определяется по формуле $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \geq 0}$ с $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n X_n$ [2].

Через $Z = Y_a^b$ обозначим выметание случайной величины Y , распределение которой задано формулами

$$P(Y_a^b = a) = \frac{1}{b-a} E 1_{[a,b]}(Y)(b-Y),$$

$$P(Y_a^b = b) = \frac{1}{b-a} E 1_{[a,b]}(Y)(Y-a),$$

$$P(Y_a^b = b) = \frac{1}{b-a} E 1_{[a,b]}(Y)(Y-a).$$

Основной целью работы [1] являлось нахождение верхней и нижней цен европейского опциона покупки $f_N = f(X_1, \dots, X_N) \geq 0$, где f – выпуклая функция переменных X_1, \dots, X_N . Ключевую роль в получении формулы верхней цены играло следующее утверждение.

Утверждение 1 (сравнительная лемма) (см. [1]). Пусть $Q \in \mathcal{P}(P)$ – произвольная эквивалентная мартингальная мера для (X_n) . Тогда

$$E_Q f(X_1, \dots, X_N) \leq E_Q f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_N),$$

где $\tilde{X}_n = \prod_{i=1}^n \tilde{Y}_i$, (\tilde{Y}_i) – независимые с распределениями $Q^{\tilde{Y}_i} = Q^{(Y_i) \binom{a_i}{b_i}}$.

В этом же утверждении была приведена формула подсчета величины $E_Q(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_N)$, соответствующей N -шаговой модели Кокса–Росса–Рубинштейна $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_N$.

Цель данной статьи – показать, что эта формула неверна и привести ее исправленную формулировку.

Утверждение 2. В предположениях утверждения 1 справедлива формула

$$E_Q f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_N) = \sum_{k=0}^N \sum_{T \subset \{1, \dots, N\}} \prod_{l \in T} q_l^* \prod_{l \notin T} p_l^* f(X_*^{k,T}), \quad (1)$$

где $X_*^{k,T} = (c_1, \dots, c_N)$, $c_j = \prod_{i=1}^j d_i$ и $d_i = \begin{cases} a_i, & i \in T \\ b_i, & i \notin T \end{cases}$, $p_k^* = \frac{1-a_k}{b_k-a_k}$ и $q_k^* = \frac{b_k-1}{b_k-a_k}$.

Доказательство повторяет доказательство утверждения 1 из [1]. Ключевой шаг математической индукции виден на примере перехода от последнего, N -го шага к предыдущему, $(N-1)$ -му:

$$E_Q f(X_1, \dots, X_{N-2} \tilde{Y}_{N-1}, X_{N-2} \tilde{Y}_{N-1} c_N) =$$

$$= p_{N-1}^* E_Q f(X_1, \dots, X_{N-2} b_{N-1}, X_{N-2} b_{N-1} c_N) + \\ + q_{N-1}^* E_Q f(X_1, \dots, X_{N-2} a_{N-1}, X_{N-2} a_{N-1} c_N), \text{ где } c_N \in \{a_n, b_N\}. \quad (2)$$

В работе [1] приведена следующая формула:

$$E_Q f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_N) = \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{T \subset \{1, \dots, N\} \\ |T|=k}} \prod_{k \in T} q_k^* \prod_{k \notin T} p_k^* f\left(\prod_{k \in T} a_k \prod_{k \notin T} b_k\right), \quad (3)$$

где $p_k^* = \frac{1-a_k}{b_k-a_k}$ и $q_k^* = \frac{b_k-1}{b_k-a_k}$.

Нетрудно видеть, что для $f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2$ и $a_1 = 0, a_2 = 0, b_1 = 2, b_2 = 3$ формула (1) в полном согласии с формулой (2) дает значение $E_Q(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = 8$, в то время как правая часть формулы (3) равна 5.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ruschendorf L.* On Upper and Lower Prices in Discrete-Time Models // Тр. МИАН. Стохастическая финансовая математика : сб. статей. М. : Наука, 2002. С. 143–148.
2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики : в 2 т. Т. 2. Теория. М. : ФАЗИС, 1998. 544 с.

УДК 519.172.1

С. Ф. Лукомский, Н. Е. Комиссарова

ОБ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ N-ВАЛИДНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Пусть p -простое и $G = \{x = (\dots, 0, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots) : x_\nu = \overline{0, p-1}\}$ – локально-компактная группа Виленкина [1].

Построение ступенчатых вейвлетов на группах Виленкина сводится к построению так называемого N -валидного дерева [2]. При малых значениях p и N построение такого дерева не представляет труда и может быть осуществлено перебором. При этом при фиксированных значениях p и N в результате перебора получаются все N -валидные деревья. Мы приведём алгоритм построения N -валидного дерева без перебора.

Определение. Пусть T -дерево с заданным направлением от корня ко множеству узлов $GF(p^s)$. Дерево T будем называть N -валидным, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

- a) Узлами дерева являются элементы $\bar{\alpha} \in GF(p^s)$.
- b) Корень дерева T – $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

с) Для любого $j = 0, 1, \dots, N - 1$ множество вершин T_j уровня j есть множество $\{\mathbf{0}\}$.

d) Всякий путь $(\bar{\alpha}_k \rightarrow \bar{\alpha}_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\alpha}_{k+N-1})$ длины $N - 1$ встречается в дереве T только один раз.

Например, для $p = s = N = 2$ мы можем построить дерево

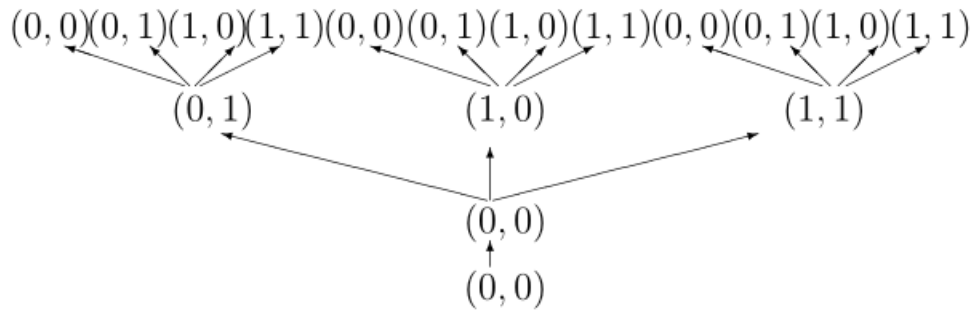


Рис. 1. N -валидное дерево T

Далее мы представим метод построения N -валидных деревьев для любых N, s, p . Сначала построим *основное дерево* T_B наименьшей высоты.

Пусть $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{p^s-1}$ — элементы конечного поля $GF(p^s)$, и $\bar{\alpha}_0 = (0, 0, \dots, 0)$. Мы строим основное дерево T_B следующим образом.

1. Выберем путь $(\bar{\alpha}_0 \rightarrow \bar{\alpha}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\alpha}_0)$ длины $N - 1$. Этот путь содержит N узлов $\bar{\alpha}_0$ и уровень последней вершины — $N - 1$.
2. Соединим все элементы $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{p^s-1}$ с последней вершиной. Получим дерево высоты $H = N$, в котором всякий путь длины $N - 1$ представлен не более одного раза. Но в этом дереве представлены не все пути длины $N - 1$. Полученное дерево показано на рис. 2.

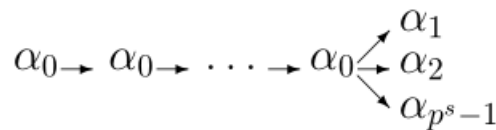


Рис. 2. Дерево после 2 шагов

3. Теперь соединим все элементы $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{p^s-1}$ с каждым узлом $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{p^s-1})$ уровня N , получим дерево высоты $H = N + 1$. Такое дерево изображено на рис. 3. После $(N + 1)$ -го получим N -валидное дерево T_B наименьшей высоты.

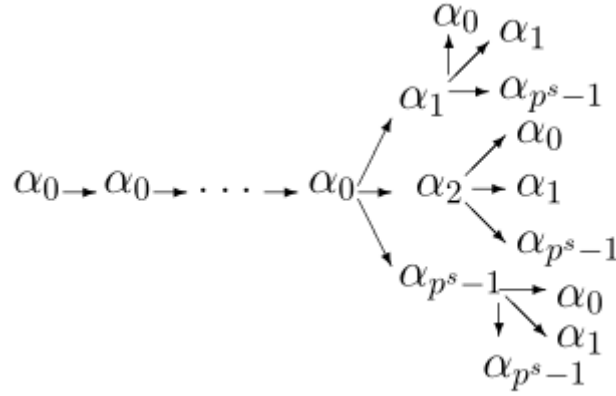


Рис. 3. Дерево после 3 шагов

Для получения других N -валидных деревьев введем понятие *основного шага* следующим образом.

1. Пусть T — N -валидное дерево. Возьмем поддереву $T_{j(N-1+\nu), N-1+\nu}$ с узлом $\alpha_{j(N-1+\nu)}^{(N-1+\nu)}$, $\nu \geq 1$, уровня $N - 1 + \nu$ в качестве корня (см. рис. 3 и 4).

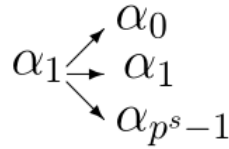


Рис. 4. Поддерево

2. Выбираем путь

$$\alpha_{j(\nu)}^{(\nu)} = \alpha_{j(N-1+\nu-N+1)}^{(N-1+\nu-N+1)} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{j(N-1+\nu-1)}^{(N-1+\nu-1)} \rightarrow \alpha_{j(N-1+\nu)}^{(N-1+\nu)}$$

длины $N - 1$, заканчивающийся в этом узле.

3. Находим путь длины $N - 2$, который заканчивается листом $\alpha = \alpha_{j(N-1+\nu-1)}^{(N-1+\nu-1)}$ и совпадает с путём

$$\alpha_{j(N-1+\nu-N+1)}^{(N-1+\nu-N+1)} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{j(N-1+\nu-1)}^{(N-1+\nu-1)}.$$

4. Переместим поддерево $T_{j(N-1+\nu), N-1+\nu}$ к листу $\alpha = \alpha_{j(N-1+\nu-1)}^{(N-1+\nu-1)}$ (рис. 5).

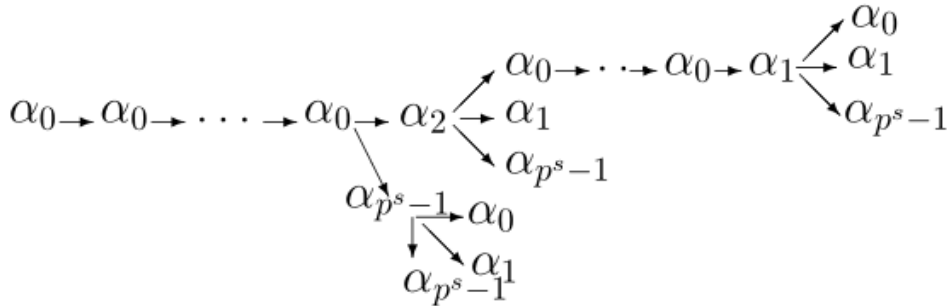


Рис. 5. Дерево после перемещения

Если исходное дерево N -валидное, то после осуществления основного шага мы снова получим N -валидное дерево. Таким образом, применяя базовый алгоритм к основному дереву конечное число раз, мы будем получать разные N -валидные деревья.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П., Лукомский С. Ф., Сидоров С. П., Терёхин А. П. Новые методы аппроксимации в задачах действительного анализа и в спектральной теории. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. 304 с.
2. Lukomskii S. F., Berdnikov G. S. N -Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Intern. Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. Vol. 13, № 5. World Scientific Publishing Company, Published online: 17 September 2015.

УДК 517.518+519.583

А. В. Макаров, С. И. Дудов

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, ЗАДАННОГО ДВУМЯ СЕГМЕНТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ПОЛНОМИАЛЬНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИЕЙ

Рассматривается задача равномерного приближения многозначного отображения, заданного декартовым произведением двух сегментных функций, полиномиальной вектор-функцией. Сформулированные необходимые и достаточные условия решения являются обобщением результата С. И. Зуховицкого – М. Г. Крейна для приближения непрерывной вектор-функции.

1. Пусть $T \subset R$ – ограниченное замкнутое множество; $f(t) = [f_1(t), f_2(t)]$, $g(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ – сегментные функции, заданные на T непрерывными функциями $f_i(t), g_i(t)$, причём $f_1(t) \leq f_2(t), g_1(t) \leq g_2(t)$ для $t \in T$; $\Phi(\cdot) : T \rightarrow 2^{R^2}$ – многозначное отображение со значениями $\Phi(t) = f(t) \times g(t) \subset R^2$. Рассмотрим задачу

$$\max_{t \in T} \max_{v \in \Phi(t)} \|v - \Pi_n(A, t)\| \longrightarrow \min_{A=(A_1, A_2) \in R^{2n+2}}. \quad (1)$$

Здесь $\Pi_n(A, t) = (P_n(A_1, t), P_n(A_2, t)) \in R^2$, где $P_n(A_i, t) = a_{0i} + a_{1i}t + \dots + a_{ni}t^n$ – алгебраический полином степени n , $A_i = (a_{0i}, a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in R^{n+1}$ – вектор его коэффициентов, $i = \overline{1, 2}$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Очевидно, задача (1) является одним из возможных обобщений задачи о равномерном приближении непрерывной вектор-функции полиномиальной вектор-функцией (см., напр. [1]) в двумерном случае. Цель заметки – получить необходимое и достаточное условие решения задачи (1).

Отметим сразу, что задача (1) в силу специфики задания многозначного отображения $\Phi(t)$ легко редуцируется к эквивалентной ей задаче

$$\varphi(A) \equiv \max_{t \in T} \{F(A_1, t) + G(A_2, t)\} \longrightarrow \min_{A=(A_1, A_2) \in R^{2n+2}}, \quad (2)$$

где

$$F(A_1, t) = \max \left\{ (P_n(A_1, t) - f_1(t))^2, (P_n(A_1, t) - f_2(t))^2 \right\},$$

$$G(A_2, t) = \max \left\{ (P_n(A_2, t) - g_1(t))^2, (P_n(A_2, t) - g_2(t))^2 \right\}.$$

2. Нетрудно видеть, что функции $F(A_1, t)$ и $G(A_2, t)$ являются выпуклыми и конечными на R^{n+1} функциями по A_1 и A_2 соответственно. Следовательно, и функция $\varphi(A)$ является выпуклой и конечной на R^{2n+2} . Получим формулу её субдифференциала.

Используя субдифференциальное исчисление для выпуклых функций ([2, гл. 1, п. 5]) и учитывая неравенства $f_1(t) \leq f_2(t)$, $g_1(t) \leq g_2(t)$, можно записать следующие формулы субдифференциалов функций $F(A_1, t)$ и $G(A_2, t)$ по A_1 и A_2 соответственно:

$$\begin{aligned} \partial_{A_1} F(A_1, t) = & \\ \left\{ \begin{array}{l} 2(P_n(A_1, t) - f_1(t))(1, t, \dots, t^n), \\ \quad \text{если } |P_n(A_1, t) - f_1(t)| > |P_n(A_1, t) - f_2(t)|, \\ 2(P_n(A_1, t) - f_2(t))(1, t, \dots, t^n), \\ \quad \text{если } |P_n(A_1, t) - f_1(t)| < |P_n(A_1, t) - f_2(t)|, \\ 2[P_n(A_1, t) - f_2(t), P_n(A_1, t) - f_1(t)](1, t, \dots, t^n), \\ \quad \text{если } |P_n(A_1, t) - f_1(t)| = |P_n(A_1, t) - f_2(t)|; \end{array} \right. & (3) \end{aligned}$$

$$\partial_{A_2} G(A_2, t) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(P_n(A_2, t) - g_1(t))(1, t, \dots, t^n), \\ \quad \text{если } |P_n(A_2, t) - g_1(t)| > |P_n(A_2, t) - g_2(t)|, \\ 2(P_n(A_2, t) - g_2(t))(1, t, \dots, t^n), \\ \quad \text{если } |P_n(A_2, t) - g_1(t)| < |P_n(A_2, t) - g_2(t)|, \\ 2[P_n(A_2, t) - g_2(t), P_n(A_2, t) - g_1(t)](1, t, \dots, t^n), \\ \quad \text{если } |P_n(A_2, t) - g_1(t)| = |P_n(A_2, t) - g_2(t)|. \end{array} \right. \quad (4)$$

Теперь отметим, что по теореме Моро – Рокафеллара ([3, гл. 2]) для выпуклой функции $H(A, t) = F(A_1, t) + G(A_2, t)$ имеет место

$$\begin{aligned} \partial_A H(A, t) &= \partial_A F(A_1, t) + \partial_A G(A_2, t) = (\partial_{A_1} F(A_1, t), 0_{n+1}) + \\ &+ (0_{n+1}, \partial_{A_2} G(A_2, t)) = (\partial_{A_1} F(A_1, t), \partial_{A_2} G(A_2, t)). \end{aligned} \quad (5)$$

Выпуклая по A функция $H(A, t)$, как и функции $F(A_1, t)$ и $G(A_2, t)$, является непрерывной по t . Поэтому, используя известный факт из выпуклого анализа ([4, гл. 4, п. 4.2]), можно записать следующую формулу субдифференциала для функции $\varphi(A) = \max_{t \in T} H(A, t)$:

$$\partial \varphi(A) = \overline{co} \{ \partial_A H(A, t) : t \in Q(A) \}, \quad (6)$$

где $Q(A) = \{ t \in T : \varphi(A) = H(A, t) \}$.

Нетрудно показать, что множество $\{ \partial_A H(A, t) : t \in Q(A) \}$ является замкнутым, и, следовательно, знак замыкания можно снять.

В итоге мы показали, что справедлива

Теорема 1. *Функция $\varphi(A)$ является выпуклой и конечной на R^{2n+2} , а для её субдифференциала имеет место формула*

$$\partial \varphi(A) = co \{ \partial_A H(A, t) : t \in Q(A) \}, \quad (7)$$

где $\partial_A H(A, t)$ определяется через (3)–(5). Здесь $co(B)$ – выпуклая оболочка множества B .

3. Теперь мы можем сформулировать критерий решения задачи (2).

Теорема 2. *Для того чтобы вектор $A^* = (A_1^*, A_2^*) \in R^{2n+2}$ являлся решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\max_{t \in Q(A^*)} \left\{ \max_{v_1 \in \partial_{A_1} F(A_1^*, t)} \langle v_1, A_1 \rangle + \max_{v_2 \in \partial_{A_2} G(A_2^*, t)} \langle v_2, A_2 \rangle \right\} \geq 0, \quad (8)$$

$$\forall A_1, A_2 \in R^{n+1},$$

где $\partial_{A_1}F(A_1, t)$ и $\partial_{A_2}G(A_2, t)$ определены в (3) и (4). **Доказательство.** Действительно, в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [2, гл. 1]

$$\begin{aligned} \varphi(A^*) &= \min_{A \in R^{2n+2}} \varphi(A) \Leftrightarrow \varphi'(A^*, A) \equiv \\ &\equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [\varphi(A^* + \alpha A) - \varphi(A^*)] \geq 0, \\ &\forall A_1, A_2 \in R^{2n+2}. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом для производной по направлениям выпуклой функции $\varphi(A)$ справедлива формула [2, гл. 1]

$$\varphi'(A^*, A) = \max_{v \in \partial \varphi(A^*)} \langle v, A \rangle. \quad (10)$$

Теперь утверждения теоремы следует из (9)–(10) и формулы субдифференциала функции $\varphi(A)$, выражаемого с помощью формул (3)–(5). Теорема доказана.

Замечание. Если $f_1(t) \equiv f_2(t) = f(t)$, $g_1(t) \equiv g_2(t) = g(t)$ для $t \in T$, то $\partial_{A_1}F(A_1, t) = 2(P_n(A_1, t) - f(t))(1, t, \dots, t^n)$ и $\partial_{A_2}G(A_2, t) = 2(P_n(A_2, t) - g(t))(1, t, \dots, t^n)$. Тогда соотношение (8) принимает вид

$$\max_{t \in Q(A^*)} \{(P_n(A_1^*, t) - f(t))P_n(A_1, t) + (P_n(A_2^*, t) - g(t))P_n(A_2, t)\} \geq 0,$$

$$\forall A_1, A_2 \in R^{n+1},$$

то есть получаем критерий решения задачи равномерного приближения вектор-функции $(f(t), g(t)) \in R^2$ двумерной полиномиальной функцией $(P_n(A_1, t), P_n(A_2, t))$ в форме А. Н. Колмогорова (см. [1]).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зуховицкий С. И., Крейн М. Г. Замечание об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А. Н. Колмогорова // УМН. 1950. Т. 5, вып. 1(35). С. 217–229.
2. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981.
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974.

НЕСТАНДАРТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КОНЕЧНЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП

Разработанный в [1] нестандартный подход к теории псевдомногообразий позволяет характеризовать псевдомногообразия (т.е. HSP_{fin} -замкнутые классы) конечных алгебраических систем в терминах тождеств нестандартного языка УИП над счетным алфавитом X , рассматривать такие классы алгебраических систем, как нестандартные многообразия и исследовать их с помощью модифицированных методов универсальной алгебры. Так, при изучении классов алгебраических Ω -систем одной из основных составляющих концепции многообразия является возможность использования свободных объектов для характеристики многообразий. Свободный объект многообразия \mathbf{K} над множеством X может быть построен как фактор Ω -алгебры $W = W_{\Omega}(X)$ Ω -слов над X по вполне инвариантной конгруэнции, порожденной тождествами класса \mathbf{K} с $|X|$ переменными. Этот подход при исследовании псевдомногообразий конечных алгебраических Ω -систем можно естественно модифицировать с помощью методов нестандартного анализа [2], которые позволяют построить в работе [3] свободный объект $F_{\mathbf{K}}(X)$ псевдомногообразия \mathbf{K} над множеством X как фактор нестандартного расширения *W алгебры $W = W_{\Omega}(X)$ по инвариантной нестандартной конгруэнции на *W . В общем случае этот объект $F_{\mathbf{K}}(X)$ является топологической алгебраической Ω -системой, содержащей важную информацию об элементах псевдомногообразия \mathbf{K} .

В этой статье описывается нестандартное строение свободных объектов над классами конечных упорядоченных полугрупп, а также используется терминология теории полугрупп из [4] и нестандартной универсальной алгебры из [3]. Пусть X – множество, $W = W(X)$ – полугруппа слов над алфавитом X и *W – нестандартное расширение полугруппы W [5]. Для элементов $u, v \in {}^*W$ выражения вида $u \leq v$ называются нестандартными тождествами. Будем говорить, что тождество $u \leq v$ выполняется в упорядоченной полугруппе S для отображения $\theta : X \rightarrow S$ и писать $S \models_{\theta} u \leq v$, если ${}^*\theta(u) \leq_S {}^*\theta(v)$ для канонического гомоморфизма ${}^*\theta : {}^*W \rightarrow S$.

Пусть X – упорядоченное множество, \mathbf{K} – класс конечных упорядоченных полугрупп и Φ – множество нестандартных тождеств. Равномерная упорядоченная полугруппа $F_{\mathbf{K}}(X, \Phi)$ вместе с монотонным отображением $i : X \rightarrow F_{\mathbf{K}}(X, \Phi)$ называется свободной \mathbf{K} -системой над X ,

определяемой тождествами Φ , если $F_{\mathbf{K}}(X, \Phi)$ топологически порождается множеством $i(X)$ и для любой полугруппы $S \in \mathbf{K}$ и любого монотонного отображения $\theta : X \rightarrow S$, удовлетворяющего условию $S \models_{\theta} \Phi$, существует равномерно непрерывный гомоморфизм $\varphi : F_{\mathbf{K}}(X, \Phi) \rightarrow S$ такой, что $\varphi \circ i = \theta$.

Для полугруппы $S \in \mathbf{K}$, монотонного отображения $\theta : X \rightarrow S$ и его расширений $\theta : W(X) \rightarrow S$, ${}^*\theta : {}^*W(X) \rightarrow S$, удовлетворяющих условию $S \models_{\theta} \Phi$, обозначим $\zeta_{S, \theta} = \{(u, v) \in {}^*W^2 : {}^*\theta(u) \leq_S {}^*\theta(v)\}$. Положим

$$Z(\mathbf{K}, X, \Phi) = \bigcap \{\zeta_{S, \theta} : S \in \mathbf{K} \theta : X \rightarrow S S \models_{\theta} \Phi\},$$

$$E(\mathbf{K}, X, \Phi) = Z(\mathbf{K}, X, \Phi) \cap Z^{-1}(\mathbf{K}, X, \Phi).$$

Теорема 1. Пусть X – упорядоченное множество, \mathbf{K} – SP_{fin} -замкнутый класс конечных упорядоченных полугрупп, Φ – множество нестандартных тождеств. Тогда фактор-полугруппа ${}^*W(X)/E(\mathbf{K}, X, \Phi)$ вместе с отношением порядка $Z(\mathbf{K}, X, \Phi)/E(\mathbf{K}, X, \Phi)$ является топологически X -порожденной компактной хаусдорфовой топологической упорядоченной полугруппой, которая вместе с каноническим отображением $i : X \rightarrow {}^*W(X)/E(\mathbf{K}, X, \Phi)$ формирует свободную \mathbf{K} -систему $F_{\mathbf{K}}(X, \Phi)$ над X , определяемую тождествами Φ .

Более того, если \mathbf{K} – псевдомногообразие упорядоченных полугрупп, то любая X -порожденная упорядоченная полугруппа S принадлежит \mathbf{K} , тогда и только тогда, когда S является непрерывным гомоморфным образом системы $F_{\mathbf{K}}(X)$.

Теорема 2. Пусть \mathbf{J}_1 – псевдомногообразие конечных полурешеток с единицей, $X = (X, \rho)$ – упорядоченное топологическое пространство с нестандартной топологией $\rho \subset X \times {}^*X$, $\Phi = \{x \leq y : (x, y) \in \rho \cup \rho^{-1}\}$ и $\xi_{\rho} = \bigcap \{\varepsilon : \varepsilon - \text{конгруэнция конечного индекса на } W(X) \text{ и } \rho \subset {}^*\varepsilon\}$.

Тогда свободная \mathbf{J}_1 -система над пространством X $F_{\mathbf{J}_1}(X) = {}^*W(X)/E(\mathbf{J}_1, X)$ изоморфна полурешетке всех ξ_{ρ} -насыщенных гиперконечных подмножеств нестандартного расширения *X с операцией объединения.

Пусть S и T – упорядоченные полугруппы и $\varphi : T^1 \rightarrow \text{End } S$ – монотонный гомоморфизм. Полупрямым произведением упорядоченных полугрупп S, T называется упорядоченная полугруппа $S * T$ с базисным множеством $S \times T$, отношением порядка \leq и бинарной операцией \cdot , определяющимися по формулам:

$$(s_1, t_1) \leq (s_2, t_2) \iff s_1 \leq_S s_2 \wedge t_1 \leq_T t_2, (s_1, t_1) \cdot (s_2, t_2) = (s_1 + t_1 s_2, t_1 t_2),$$

где используется аддитивное обозначение для операции полугруппы S и $t_1 s_2 = \varphi(t_1)(s_2)$. Для псевдомногообразий конечных упорядоченных полугрупп \mathbf{K} и \mathbf{M} символом $\mathbf{K} * \mathbf{M}$ обозначается псевдомногообразие, порождаемое всеми полупрямыми произведениями $S * T$ упорядоченных полугрупп $S \in \mathbf{K}$ и $T \in \mathbf{M}$.

На основе нестандартного подхода к псевдомногообразиям можно получить нестандартное описание свободных объектов над полупрямыми произведениями псевдомногообразий конечных упорядоченных полугрупп и исследовать связанных с этой операцией задачи теории конечных упорядоченных полугрупп.

Теорема 3. Пусть \mathbf{K}, \mathbf{M} – псевдомногообразия конечных упорядоченных полугрупп, X – упорядоченное равномерное пространство, $A = {}^*W(X)/E(\mathbf{M}, X)$ и $B = {}^*W(A \times X)/E(\mathbf{K}, A \times X)$. Тогда отображение $\lambda(x) = ((1, x), x)$, $(x \in X)$ определяет топологический мноморфизм свободной $\mathbf{K} * \mathbf{M}$ -системы над пространством X $F_{\mathbf{K} * \mathbf{M}}(X)$ в полупрямое произведение $B \otimes A$.

Теорема 4. Пусть X – множество, \mathbf{K} – псевдомногообразие конечных упорядоченных полугрупп и

$$\xi = Z(\mathbf{J}_1, F_{\mathbf{K}}(X) \times X).$$

Тогда свободная $\mathbf{J}_1 * \mathbf{K}$ -система над множеством X $F = F_{\mathbf{J}_1 * \mathbf{K}}(X)$ изоморфна полугруппе всех $(\xi(C), [u])$ таких, что

$$C = \{(1, x_1), ([x_1], x_2), \dots, ([x_1 x_2 \dots x_{n-1}], x_n)\}, [u]$$

есть класс эквивалентности $E(\mathbf{K}, X)$, определяемый словом $u = x_1 x_2 \dots x_n \in {}^*W(X)$ и

$$(\xi(C), [u]) \leq_F (\xi(C_1), [u_1]) \iff \xi(C_1) \subset \xi(C) \wedge [u] \leq_{F_{\mathbf{K}}} [u_1].$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Molchanov V. A. Nonstandard characterization of pseudovarieties // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33. P. 533–547.
2. Альбеверио С., Фенстад Й., Хезг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М. : Мир, 1990.
3. Molchanov V. A. Nonstandard free objects over pseudovarieties of finite algebraic systems // Contributions to General Algebra 16, Proceedings of the Dresden Conference. 2004. (AAA68) and the Summer School 2004. Verlag Johannes Heyn. Klagenfurt, 2005. P. 145–154.
4. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М. : Мир, 1985.

РАСПОЗНАВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Введение. Эффективный поиск образов в тексте играет важную роль при анализе Интернет-трафика, поиске сигнатур антивирусной программой и в других прикладных задачах.

В типичной задаче распознавания образов в тексте задаются текст x и множество образов $\{y_1, y_2, \dots\}$, которое часто определяется регулярным выражением. В данной работе рассматривается задача распознавания регулярных выражений с помощью конечных автоматов и полугрупп переходов автомата. Для обоих подходов разработана программная реализация на языке программирования C# и проведено их сравнение.

Регулярные выражения. Пусть X — произвольный алфавит, X^* — множество всех слов над X . Для языков K, L над алфавитом X определим следующие операции: $K + L = \{u \mid u \in K \vee u \in L\}$ — сложение языков K и L , $KL = \{uv \mid u \in K \wedge v \in L\}$ — конкатенация языков K и L , $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$ — итерация языка L , $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$ — позитивная итерация языка L .

Регулярные выражения над алфавитом X и представляемые ими языки рекурсивно определяются следующим образом:

- 1) \emptyset — регулярное выражение, представляющее пустое множество;
- 2) пустое слово ε — регулярное выражение, представляющее множество $\{\varepsilon\}$;
- 3) для любого $x \in X$: x — регулярное выражение, представляющее множество $\{x\}$;
- 4) если p и q — регулярные выражения, представляющие множества P и Q соответственно, то $(p + q), pq, p^*$ являются регулярными выражениями, представляющими множества $P + Q, PQ, P^*$ соответственно [1].

Язык называется *регулярным*, если его можно представить регулярным выражением.

Конечные автоматы. *Недетерминированным конечным автоматом (НКА)* называется пятерка $A = (S, X, \delta, s_0, F)$, где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями автомата*, X — конечное непустое множество *входных сигналов*,

$\delta : S \times (X \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow P(S)$ — функция переходов, определяющая поведение автомата ($P(S)$ — множество подмножеств множества S), $s_0 \in S$ — начальное состояние, $F \subseteq S$ — множество заключительных состояний [1].

Для любого входного символа $x \in X$ определим бинарное отношение $\delta_x = \{(s, t) \in S \times S \mid t \in \delta(s, x)\} \subset S \times S$ и для слова $w = x_1x_2 \dots x_m \in X^*$ — бинарное отношение $\delta_w = \delta_{x_1}\delta_{x_2} \dots \delta_{x_m}$. Тогда множество $S(A) = \{\delta_w \mid w \in X^*\}$ с операцией композиции бинарных отношений является *полугруппой переходов автомата A* [2].

Говорят, что слово w *допускается* НКА $A = (S, X, \delta, s_0, F)$, если $\delta_w(s_0) \cap F \neq \emptyset$. Множество слов $L(A)$, допускаемых автоматом A , называют *языком, распознаваемым автоматом A* .

Согласно теореме Клини [2] множество всех регулярных языков совпадает с множеством всех языков, распознаваемых конечными автоматами. Согласно [1] асимптотическая сложность построения НКА по регулярному выражению длины n составляет $O(n)$.

Детерминированным конечным автоматом (ДКА) называется НКА $(S, X, \delta, s_0, \{s_f\})$, в котором нет ε -переходов и по каждому входному символу можно перейти только в одно состояние.

Алгоритм детерминизации автомата подробно изложен в [3], его сложность пропорциональна произведению размера получаемого ДКА на сложность функции нахождения достижимых состояний, т.е. в худшем случае сложность составляет $O(2^n)$, где n — число состояний исходного НКА.

Регулярный язык L может быть представлен несколькими различными автоматами, среди которых есть автомат с минимальным числом состояний. Такой автомат называется *минимальным автоматом* для L .

Алгоритм минимизации [3] автомата $A = (S, X, \delta, s_0, F)$ состоит в удалении недостижимых состояний и в поиске такого разбиения множества состояний S'_1, S'_2, \dots, S'_p , для которого при всех $1 \leq i \leq p$ выполняется условие: если для любых двух состояний $s, t \in S$ верно, что $s, t \in S'_i \subset S$, то для любого входного сигнала $x \in X$ верно, что $\delta_x(s), \delta_x(t) \in S'_i$. Асимптотическая сложность этого алгоритма равна $O(n^2k)$, где n — число состояний исходного автомата, k — число входных сигналов.

Поиск образов в тексте. Классический подход к распознаванию регулярных выражений с помощью конечных автоматов заключается в следующем: по данному регулярному выражению строится НКА, по нему строится эквивалентный ему ДКА, который впоследствии минимизируется. Асимптотическая сложность такого метода в худшем случае

составляет $O(2^n k)$, где n — число состояний НКА, k — мощность множества входных сигналов. Далее, если дан текст $v = x_1 x_2 \dots x_m$, то будем рассматривать все подслова $w = x_i x_{i+1} \dots x_j$ текста v при $1 \leq i \leq m$, $i \leq j \leq m$. Тогда если $\delta_w(s_0) = s_f$, где s_0, s_f — начальное и заключительное состояния минимального автомата, то соответственно найден образ w . Тогда общая сложность поиска образов классическим подходом равна $O(2^n k + \frac{m(m-1)}{2})$.

Рассмотрим другой подход. По данному регулярному выражению будем строить НКА A . Тогда если дан текст $v = x_1 x_2 \dots x_m$, то вычисляется δ_w для всех подслов $w = x_i x_{i+1} \dots x_j$ текста v (при $1 \leq i \leq m$, $i \leq j \leq m$). Если $\delta_w(s_0) \cap F \neq \emptyset$, то соответственно найден образ w . Асимптотика этого метода существенно зависит от того, как реализовано умножение бинарных отношений. В худшем случае сложность такого метода распознавания составляет $O(mn^2 + \frac{m(m-1)}{2})$, где n — число состояний НКА.

Для рассмотренных подходов осуществлена программная реализация на языке $C\#$. Она позволяет распознавать регулярные выражения любым из выбранных способов: как на основе классического подхода, так и на основе полугруппы переходов автомата.

Заключение. Проведенные исследования и результаты экспериментального тестирования позволяют сравнить эффективность подходов к распознаванию регулярных выражений. Показано, что асимптотическая сложность классического подхода к распознаванию регулярных выражений превышает сложность подхода на основе полугруппы переходов автомата.

Экспериментальное тестирование программы проводилось на различных регулярных выражениях. С увеличением длины регулярного выражения время поиска образов в тексте классическим методом значительно превышает время поиска с помощью полугруппы переходов автомата. В частности, поиск URL-адресов на основе полугруппы переходов автомата выполнялся за 1,06 с, а классическим подходом — за 2 мин 3,67 с. Поиск адресов электронной почты с помощью полугрупп переходов выполнялся за 1,23 с, тогда как классический подход отработал за 1 мин 33,36 с. Тестирование производилось на компьютере с процессором AMD A10-6700 APU 3,70 ГГц.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М. : Мир, 1979.
2. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М. : Мир, 1985.

УДК 513.6

С. И. Небалуев, В. В. Кривобок

О ДЕЙСТВИЯХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В теории толерантных пространств, начиная с работ ее родоначальника Зимана [1], активно применяются методы алгебраической топологии [2]. В алгебраической топологии и ее приложениях одним из важнейших инструментов являются действия фундаментальных групп топологических пространств на различные множества, группы и т. п. [3]. В случае толерантных пространств подобные действия фундаментальных групп этих пространств также имеют место. Начнем с расслоенных толерантных пространств [4] и толерантных накрытий [5].

Определение 1. *Расслоенным толерантным пространством называется набор*

$$\xi = ((E, \bar{\tau}), (B, \tau), (F, \vartheta), p),$$

в котором $(E, \bar{\tau})$, (B, τ) , (F, ϑ) – толерантные пространства, называемые пространством расслоения, базой расслоения и общим слоем соответственно, а $p : (E, \bar{\tau}) \rightarrow (B, \tau)$ – толерантное отображение, называемое проекцией. При этом для каждой точки $x \in B$ и соответствующей толерантной звезды $\bar{x} = \tau \langle x \rangle = \{x' \in E \mid x' \tau x\}$ имеется толерантный гомеоморфизм

$$\varphi_{\bar{x}} : \tau \langle x \rangle \times F \rightarrow p^{-1}(\tau \langle x \rangle),$$

удовлетворяющий условию $p \circ \varphi_{\bar{x}} = pr_1$, где pr_1 – проекция на первый сомножитель прямого произведения.

Определение 2. Пусть $\xi = (E, B, F, p)$ – расслоенное толерантное пространство и G – некоторая группа толерантных гомеоморфизмов слоя (F, ϑ) на себя. Группа G называется структурной группой расслоенного толерантного пространства ξ , если для каждого слоя $p^{-1}(x)$ имеется совокупность $\Phi(x) = \{\varphi\}$ толерантных гомеоморфизмов $\varphi : F \rightarrow p^{-1}(x)$, на которую транзитивно действует справа группа G по формуле

$$(\forall g \in G) (\forall \varphi \in \Phi(x)) \varphi \cdot g = \varphi \circ g \in \Phi(x);$$

при этом должно выполняться условие

$$x_2 \in \tau < x_1 > \implies \varphi_{x_1} | (\{x_2\} \times F) \in \Phi(x_2).$$

Определение 3. Толерантное отображение $p : (\overline{X}, \overline{\tau}) \rightarrow (X, \tau)$ называется толерантным накрытием, если для любой точки $x \in X$ выполняются следующие условия:

$$1. p^{-1}(\tau < x >) = \bigcup_{y \in p^{-1}(x)} \overline{\tau} < y >;$$

$$2. \text{ если } y_1, y_2 \in p^{-1}(x) \text{ и } y_1 \neq y_2, \text{ то } \overline{\tau} < y_1 > \cap \overline{\tau} < y_2 > = \emptyset;$$

3. $(\forall y \in p^{-1}(x)) p : \overline{\tau} < y > \rightarrow \tau < x >$ – толерантный гомеоморфизм.

Определение 4. Толерантным расслоением (в смысле Гуревича) называется толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \rightarrow (B, \tau)$ такое, что любая толерантная гомотопия в базе расслоения (B, τ) поднимается по начальным условиям в пространство расслоения $(E, \overline{\tau})$.

Теорема 1. Пусть $p : (\overline{X}, \overline{\tau}) \rightarrow (X, \tau)$ – толерантное накрытие с линейно связными (X, τ) и $(\overline{X}, \overline{\tau})$, тогда фундаментальная группа $\pi(X)$ базы накрытия действует на накрывающем пространстве $(\overline{X}, \overline{\tau})$ в каждом слое $p^{-1}(x)$, и это действие в каждом слое транзитивно. Если же толерантное пространство $(\overline{X}, \overline{\tau})$ односвязно, то есть имеет тривиальную фундаментальную группу, то действие $\pi(X)$ на $(\overline{X}, \overline{\tau})$ является свободным.

Теорема 2. Пусть $p : (\overline{X}, \overline{\tau}) \rightarrow (X, \tau)$ – толерантное накрытие с линейно связными пространствами (X, τ) и $(\overline{X}, \overline{\tau})$ и пусть $x_0 \in X$ – произвольная точка базы, тогда система $\xi = (\overline{X}, X, p^{-1}(x_0), p)$ является расслоенным толерантным пространством, допускающим в качестве структурной группы фундаментальную группу $\pi(X, x_0)$.

Теорема 3. Если $p : (E, \overline{\tau}) \rightarrow (B, \tau)$ – толерантное расслоение (в смысле Гуревича), в котором база (B, τ) и слой $(F = p^{-1}(b_0), \overline{\tau})$ являются линейно связными, то фундаментальная группа $\pi(B, b_0)$ базы (B, τ) действует на группах гомологий $H(F) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n(F)$ слоя $(F, \overline{\tau})$.

Замечание. Так как толерантные накрытия, как и любые проекции в расслоенных толерантных пространствах, являются толерантными расслоениями (в смысле Гуревича) (см. [5, 4]), то условия в теоремах 1 и 3 различаются тем, что для толерантного накрытия p слой $p^{-1}(x_0) \subset \overline{X}$

над точкой $x_0 \in X$ дискретен и не является линейно связным. Тем не менее действие $\pi(X, x_0)$ на множестве $p^{-1}(x_0)$ индуцирует действие $\pi(X, x_0)$ на нулевой группе гомологий $H_0(p^{-1}(x_0))$, так как точки из $p^{-1}(x_0)$ свободно поражают эту группу гомологий. И поскольку $H_n(p^{-1}(x_0)) = 0$ для $n > 0$, то можно считать, что определено действие группы $\pi(X, x_0)$ на группах гомологий $H(p^{-1}(x_0)) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n(p^{-1}(x_0))$, как и в теореме 3.

Фундаментальная группа $\pi(X, x_0)$ толерантного пространства (X, τ) является частным случаем высших гомотопических групп $\pi_n(X, x_0)$ при $n = 1$ (подробности см. в [6]). Имеет место следующее утверждение

Теорема 4. Пусть (X, τ) – линейно связное толерантное пространство, тогда система толерантных гомотопических групп

$$\{\pi_n(X, x_0) | x_0 \in X\}$$

является локальной системой групп (см. [3]) толерантного пространства (X, τ) для любого натурального $n \in \mathbb{N}$, что, в частности, означает, что фундаментальная группа $\pi(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ действует на группах $\pi_n(X, x_0)$.

Заметим, что группа $\pi(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ действует на себя внутренними автоморфизмами сопряжения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zeeman E. S. The topology of brain and visual perception. Englewood Cliffs. NJ : Preice-Hall, 1962. P. 240–256.
2. Небалуев С. И. Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов, 2006.
3. Ху Сы-цзян. Теория гомотопий. М., 1964.
4. Небалуев С. И. Расслоенные толерантные пространства // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 3. С. 79–93.
5. Небалуев С. И. Фундаментальная группа толерантного пространства и толерантные накрытия // Чебышевский сб. Тула, 2004. Т. 5, вып. 1. С. 144–152.
6. Небалуев С. И. Высшие гомотопические группы толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2003. Вып. 2. С. 15–30.

О ГИПОТЕЗЕ ЗИМАНА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В работе [1] Зиман (в соавторстве с Бьюнеманом) высказал гипотезу, смысл которой состоит в том, что для описания работы зрительного анализатора, например человека, как и при работе с данными приближенных измерений и приближенных вычислений, следует использовать толерантные пространства, и при этом можно ограничиться толерантными пространствами с дискретно устроенными базисными множествами, что не должно привести к существенным упущениям. Хорошей иллюстрацией идеи Зимана является тот факт, что мы наблюдаем непрерывную картинку на экране дисплея, несмотря на то что картинка нарисована конечным числом пикселей на экране и воспринимается конечным числом клеток в сетчатке глаза. Свою идею Зиман сформулировал на строгом математическом языке в виде следующего утверждения.

Гипотеза Зимана. Пусть $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \vartheta)$ — инъективное толерантное отображение такое, что $f^{-1} : (Im f, \vartheta) \rightarrow (X, \tau)$ — толерантное отображение. Пусть f удовлетворяет условию

$$(\forall y \in Y) \quad (\exists x \in X) \quad y \vartheta f(x). \quad (1)$$

Тогда толерантное отображение f индуцирует изоморфизм групп гомологий

$$f_* : H(X) \cong H(Y). \quad (2)$$

Зиман предложил называть отображение f , которое инъективно, в обе стороны толерантно и удовлетворяет условию (1), толерантным гомеоморфизмом. Нам представляется более уместным назвать такое отображение всюду плотным толерантным вложением [2], а толерантным гомеоморфизмом следовало бы назвать биективное отображение, толерантное в обе стороны.

Как отметил Зиман, его гипотеза в сформулированном виде неверна, что подтверждается легкими контрпримерами (см. [2]). Но несмотря на этот факт, идея Зимана является многообещающей и побуждает искать дополнительные условия, которые обеспечивают гомологическую эквивалентность всюду плотных толерантных вложений. Наиболее интересным, конечно же, является случай, когда пространство (Y, ϑ) вместе с

множеством его классов толерантности является бесконечным (например, континуальным), а пространство (X, τ) является конечным. Этот случай изучался в работе [2], и именно к этому случаю применим термин «дискретизация». Если же пространство (Y, ϑ) само является конечным, то речь идет не о дискретизации, а о минимизации числа точек, необходимых для сохранения глобальной геометрической структуры. Заметим при этом, что если бы ставилась задача выполнить лишь условие (2), то можно было бы воспользоваться методами дискретной теории Морса, разработанной Р. Форманом [3]. Однако, мы полагаем, в след за Зиманом, что условие (1) является существенным, так как, говоря неформально, условие (1) требует сохранения в пространстве (X, τ) информацию о «размере» пространства (Y, ϑ) с точностью до толерантности.

Приведем теорему, содержащую утверждение гипотезы Зимана для толерантного пространства (Y, ϑ) с конечным числом классов толерантности, а, тем самым, для любого конечного толерантного пространства (Y, ϑ) .

Рассмотрим толерантное пространство (Y, ϑ) с конечным множеством классов толерантности $L = \{L_i | i = \overline{1, m}\}$, что автоматически выполняется, если (Y, ϑ) конечно. Пусть (Y_L, ϑ_L) — присоединенное безъядерное толерантное пространство, элементами которого будут ядра отношения ϑ , а толерантность ϑ_L определяется ϑ -толерантностью представителей (см. [2]). Пространство (Y_L, ϑ_L) в этом случае будет конечным. В каждом ядре $\check{y} \in Y_L$ зафиксируем ровно по одному представителю $y \in Y$ и определим отображение $f : (Y_L, \vartheta_L) \rightarrow (Y, \vartheta)$:

$$(\forall \check{y} \in Y_L) \quad f(\check{y}) = y,$$

где y — фиксированный представитель ядра \check{y} .

Теорема 1. *При принятых выше предположениях и обозначениях отображение $f : (Y_L, \vartheta_L) \rightarrow (Y, \vartheta)$ является всюду плотным толерантным вложением, удовлетворяющим условию (1), и являющимся гомологической эквивалентностью:*

$$f_* : H(Y_L) \cong H(Y).$$

Эта теорема верна и без предположения конечности L , но практический интерес она представляет именно в этом случае, и, дополнительно, при больших ядрах. Для произвольного множества классов L теорема 1 интересна тем, что в ее доказательстве имеются указания на целый класс функций f , удовлетворяющих свойствам из гипотезы Зимана.

Определение 1. Подпространство $(R, \vartheta) \subset (Y, \vartheta)$ назовем простым (одношаговым) толерантным ретрактором толерантного пространства (Y, ϑ) , если вместе с вложением $i : (R, \vartheta) \subset (Y, \vartheta)$ имеется толерантное отображение $r : (Y, \vartheta) \rightarrow (R, \vartheta)$ такое, что

$$r \circ i = \mathbb{I}_R, \quad F : i \circ r \sim \mathbb{I}_Y,$$

где F — простая (одношаговая) толерантная гомотопия, у которой гомотопирующий отрезок имеет вид $I_1 = \{0, 1\}$ (см. [2–4]).

Теорема 2. Пусть толерантное отображение $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \vartheta)$ имеет вид $f = i \circ g$, где $i : (R, \vartheta) \subset (Y, \vartheta)$, (R, ϑ) — некоторый простой толерантный ретракт пространства (Y, ϑ) , $g : (X, \tau) \rightarrow (R, \vartheta)$ — произвольный толерантный гомеоморфизм. Тогда отображение f является всюду плотным толерантным вложением, индуцирующим изоморфизм групп гомологий

$$f_* : H(X) \cong H(Y).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зиман Э., Бьюнеман О. Толерантные пространства и мозг // На пути к теоретической биологии. М. : Мир, 1970. С. 134–144.
2. Небалюев С. И. Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2006. 112 с.
3. Forman R. A discrete Morse Theory for cell complexes // Geometry, Topology and Physics for Raoul Bott / ed. S. T. Yau. International Press, 1955. P. 112–125.
4. Небалюев С. И., Кляева И. А. Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 3. С. 92–105.
5. Небалюев С. И., Сусин М. Н. Толерантное расслоение путей и теорема Гуревича для толерантных пространств // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 41–44.

УДК 519.7

В. Е. Новиков

ВЕДУЩИЕ ПРИЗНАКИ В ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ КОНЦЕПТА

В работе вводится понятие ведущего признака концепта, который в задаче распознавания концепта позволяет с наибольшей вероятностью

выявить, является ли выбранный объект представителем указанного концепта. А также дан способ вычисления ведущих признаков по заданному контексту.

Формальный контекст это тройка $\mathbb{K} = (G, \{M_i\}, \rho)$, где G — конечное множество *объектов*, $|G| \geq 2$, $\{M_i\}$ — семейство конечных множеств атрибутов с множеством индексов $1 \leq i \leq n$, $|M_i| \geq 2$, ρ — некоторое $(n+1)$ -арное отношение. Если $(g, m_1, \dots, m_n) \in \rho$, то говорим, что объект g по атрибуту 1 имеет значение m_1 , по атрибуту 2 — значение m_2 , по системе атрибутов $(1, 2)$ — значение (m_1, m_2) , и т.д.

Множество объектов $A \subset G$, обладающих общностью значений некоторых атрибутов, называется *концептом* в контексте \mathbb{K} . При этом случайно выбранный объект $g \in G$ с вероятностью $p_A(g) = |A|/|G|$ будет являться представителем концепта A .

Задача распознавания образов [1] в общем случае имеет два этапа. Этап обучения, или этап классификации объектов по указанным признакам. И второй этап — собственно распознавание отдельного объекта, т.е. установление, является ли взятый объект представителем указанного класса объектов, или вычисление, с какой вероятностью взятый объект может оказаться представителем указанного класса объектов.

В случае приложения формального концептуального анализа к задаче распознавания образов этап классификации равносильен построению эталонного контекста с использованием различных методов минимизации и оптимизации. Например, метода изотонных отображений с целью сохранения наиболее существенной информации об объектах [2], или методов минимизации контекста по числу атрибутов и числу объектов с сохранением концептуальной решётки [3]. А этап собственного распознавания отдельного объекта равносильен тому, чтобы по набору значений некоторых атрибутов этого объекта определить, является ли данный объект представителем указанного концепта или с какой вероятностью данный объект может быть представителем указанного концепта.

Пусть $A \subset G$ является концептом по атрибуту j в контексте \mathbb{K} , тогда $\widehat{\rho}_j(A) = B$ будет являться множеством значений атрибута j , которыми обладают все объекты из A . Пусть установлено, что объект $g_0 \in G$ обладает значением $b_0 \in B$ атрибута j . Значение b_0 называется *ведущим признаком* по атрибуту j для концепта A , если для любого объекта $g \in G$, обладающим любым другим значением $b \in B$ атрибута j , объект g_0 является представителем концепта A с меньшей вероятностью, чем объект g . Аналогично определяется *кортеж ведущих признаков* по атрибуту $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, а в случае однозначного контекста *ведущих атрибутов* и

кортеж ведущих атрибутов. С точки зрения распознавания объекта g_0 представителем концепта A ведущий признак указывает, какое значение атрибута j надо проверить у объекта g_0 , при котором g_0 с наибольшей вероятностью окажется представителем концепта A .

Естественно встаёт задача вычисления ведущих значений атрибута j указанного концепта по эталонному контексту. Для её решения определим функцию плотности $f_j : B \rightarrow \mathbb{N}$ атрибута j по правилу

$$f_j(b) = |\widehat{\rho}_0(b)|,$$

где $|\widehat{\rho}_0(b)|$ — мощность множества $\widehat{\rho}_0(b) = \{g | g \text{ обладает значением } b \text{ атрибута } j\}$.

Теорема. *Множество ведущих признаков $B^* \subset B$ по атрибуту j для концепта A контекста \mathbb{K} не пусто и равно*

$$B^* = \{b | f_j(b) = \min_{c \in B} f_j(c)\}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горелик А. Л., Скрипкин В. А. Методы распознавания. М. : Высш. шк., 1984.
2. Новиков В. Е. Изотонные отображения в однозначном контексте // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 51–53.
3. Новиков В. Е. Минимизация однозначного контекста // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : ИЦ «Наука», 2012. С. 233–236.

УДК 519.95

С. И. Поликарпов

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНЕЧНОГО ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО АВТОМАТА КОМПОЗИЦИЙ ПРОСТЕЙШИХ АВТОМАТОВ

В статье рассматривается метод представления конечного детерминированного автомата Мили в виде композиции простейших автоматов. Это достигается путём разложения геометрического образа исходного автомата в конечный ряд Фурье–Уолша по системе функций Уолша и сопоставления каждой из этих функций автомата, геометрический образ которого совпадает с данной функцией.

Конечный детерминированный автомат определяется на основе функциональных связей четырех множеств: S (множество состояний),

X (множество входных сигналов), Y (множество выходных сигналов) и бесконечного множества $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ (множество абстрактных моментов времени).

Конечным детерминированным автоматом Мили называется совокупность пяти объектов

$$A = (S, X, Y, \delta, \lambda),$$

где S , X и Y – конечные непустые множества, а δ и λ – отображение вида

$$\delta : S \times X \rightarrow S \quad \text{и} \quad \lambda : S \times X \rightarrow Y,$$

со связью элементов множеств S , X и Y в абстрактном времени $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ уравнениями:

$$s(t+1) = \delta(s(t), x(t))$$

$$y(t) = \lambda(s(t), x(t)), t \in T.$$

Отображения δ и λ называются функцией переходов и функцией выходов автомата A соответственно.

В. А. Твердохлебов предложил представлять автоматы геометрическими образами в специальных словарных геометриях и исследовал свойства геометрических образов [1, 2]. На содержательном уровне геометрический образ можно считать ломаной линией.

Рассмотрим инициальный автомат Мили $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ с начальным состоянием s_0 , геометрический образ которого является периодическим с периодом $N = 2^n$ ($n = 3$ для простоты). Обозначим первые N входных сигналов $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Пусть $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $y(0) = 3$; $y(1) = 1$; $y(2) = 0$; $y(3) = 4$; $y(4) = 4$; $y(5) = 2$; $y(6) = 1$; $y(7) = 4$;

Функции Уолша можно определить через функции Радемахера. Функция Радемахера i -го порядка определяется следующим образом [3]:
 $r_i(x) = (-1)^{x_i} = \cos \pi x_i$, где $x_i = 0, 1$ есть i -й разряд двоичного представления переменной x .

Функции Уолша в форме Пэли - это действительные функции, определяемые как произведение степеней функций Радемахера:

$pal(p, x) = [r_1(x)]^{p_n} [r_2(x)]^{p_{n-1}} \dots [r_n(x)]^{p_1}$, где p_i – разрядные коэффициенты в двоичном представлении числа p , тогда

$$\begin{aligned}
 pal(0, x) &= 1, \\
 pal(1, x) &= r_1(x), \\
 pal(2, x) &= r_2(x) \\
 pal(3, x) &= r_1(x)r_2(x), \\
 pal(4, x) &= r_3(x), \\
 pal(5, x) &= r_1(x)r_3(x), \\
 pal(6, x) &= r_2(x)r_3(x), \\
 pal(7, x) &= r_1(x)r_2(x)r_3(x).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Функции Уолша обладают следующими свойствами:

1. Функции Уолша – периодические с периодом $N = 2^n$.
2. Система функций Уолша является ортогональной на множестве точек $x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$:

$$\sum_{x=0}^{N-1} pal(a, x)pal(b, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \neq b \\ N, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

3. Поскольку на интервале определения $N = 2^n$ в систему функций Уолша входит N ортогональных функций, то она является полной.

Заменим геометрический образ γ_{s_0} исходного автомата его разложением в ряд по системе функций Уолша:

$$F(x) = \sum_{p=0}^{N-1} c_p pal(p, x), \tag{2}$$

при этом значения суммы ряда в точках $0, 1, \dots, 7$ точно совпадают со значениями геометрического образа, а коэффициенты c_p можно подсчитать, используя свойство ортогональности функций Уолша:

$$c_p = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} pal(p, x)F(x). \tag{3}$$

Получим:

$$c_0 = \frac{19}{8}; c_1 = -\frac{3}{8}; c_2 = \frac{1}{8}; c_3 = -\frac{1}{8}; c_4 = -\frac{3}{8}; c_5 = -\frac{1}{8}; c_6 = \frac{11}{8}; c_7 = \frac{1}{8}.$$

Каждая базисная функция системы (1) является N -периодической и принимает лишь два значения: 1 или -1, тогда эти функции можно рассматривать как геометрические образы $\gamma_p(x)$ некоторых автоматов. А по

этим геометрическим образом однозначно восстанавливаются автоматы A_0, \dots, A_{N-1} . Функции выходов автоматов A_0, \dots, A_{N-1} определяются формулами:

$$\lambda_p(s_0, x) = pal(p, x), \text{ где } p = 0, \dots, N - 1, \quad (4)$$

а функции переходов могут быть произвольными. Такие автоматы A_0, \dots, A_{N-1} с тем же множеством $X, Y = \{-1, 1\}$ и произвольным множеством состояний и любыми функциями переходов будем называть простейшими.

Так как для этих автоматов $Y = \{-1, 1\}$, то эти автоматы легко строятся, и изучать их свойства гораздо удобнее.

Таким образом, базисные автоматы $0, \dots, N-1$ получены разложением в ряд Фурье – Уолша геометрического образа γ_{s_0} исходного автомата и выделением в этом ряде соответствующих этим автоматам компонент.

Композиция простейших автоматов A_0, \dots, A_{N-1} , где элемент \sum определяется равенством

$$\lambda_{\sum}(s_0, x) = \sum_{p=0}^{N-1} c_p pal(p, x), \quad (5)$$

задает автомат, эквивалентный исходному автомату.

В геометрическом образе автомата функциональная зависимость представлена как автоматное отображение, то есть отображение с изменяющимся параметром (изменяющимся состоянием). Это позволяет каждую функцию $pal(p, x)$ преобразовывать в автомат A_p с конкретным множеством состояний. Следовательно, в рассматриваемой композиции все компоненты – автоматы, и результат композиции – автомат.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Твердохлебов В. А.* Основные свойства геометрических образов автоматов // Проблемы точной механики и управления : сб. науч. тр. 2004. С. 187–192. Саратов : Копипринтер СГТУ, 2004. С. 187–192.
2. *Твердохлебов В. А., Епифанов А. С.* Представление автоматных отображений геометрическими структурами. Саратов : НЦ «Наука», 2013.
3. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М. : Сов. радио, 1975.
4. *Поликарпов С. И.* Представление автомата рядом Фурье в задачах диагностирования и управления // Информационные технологии в науке, производстве и социальной сфере: сб. науч. тр. Саратов : Научная книга, 2005.
5. *Поликарпов С. И.* Представление конечного автомата рядом по системе функций Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 45–47.

О ПЕРМАНЕНТАХ И ТЕОРЕМЕ ФРОБЕНИУСА – КЁНИГА

В 1812 году два выдающихся французских математика Жак Филипп Мари Бине и Огюстен Луи Коши получили схожие результаты по теории детерминантов. Во избежание споров о приоритете в один и тот же день 30 ноября 1812 года в Институте Академии Франции они сделали доклады о своих исследованиях и опубликовали их в одновременно вышедших 16-й и 17-й тетрадях журнала Политехнической школы [1, 2]. В своих мемуарах Бине без доказательств и общих формул привёл некоторые тождества для перманентов матриц небольших размеров, а Коши ввел понятие «перманента» как «перманентной симметрической функции».

Считается, что именно эти мемуары дали толчок развитию теории определителей и перманентов.

В 1865 году Дж. Хорнер в работе, посвященной связи определителей с перманентами матриц 3-го порядка [3], назвал перманенты «контерминантами», а Дж. Хэммонд в 1879 году — «альтернирующими детерминантами» [4]. Сам термин «перманент» появился только в 1882 году в работе Томаса Мюира «О классе перманентных симметрических функций» [5], посвященной свойствам перманента, подобным свойствам определителя квадратных матриц (см. также [6]).

Подробное описание истории детерминантов можно найти в статье [7].

Бурное развитие теории перманентов с конца XIX века по настоящее время связано, прежде всего, с работами Ф. Фробениуса и Д. Кёнига, посвященными целочисленным и неотрицательным матрицам и их приложениям к матричной комбинаторике [6, 8, 9]. Известная теорема Фробениуса – Кёнига описывает строение матрицы над различными полукольцами, перманент которой равен нулю. Доказательство теоремы Фробениуса – Кёнига можно найти, например, в [6] для неотрицательных матриц. Его можно дословно повторить и для случая матриц с элементами из булева полукольца $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$, в котором

$$1 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1, \quad 0 + 0 = 0,$$

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0.$$

Теорема 1 (Фробениус — Кёниг). *Перманент квадратной матрицы над двухэлементной булевой алгеброй \mathbf{B}_2 равен нулю тогда и*

только тогда, когда в результате перестановок строк или столбцов этой матрицы можно получить нулевую подматрицу размера $s \times t$ с условием $s + t = n + 1$.

В этой статье мы приводим формулировку и доказательство эквивалентного аналога теоремы Фробениуса – Кёнига, сопоставляющего строение квадратной $(0, 1)$ -матрицы, перманент которой равен нулю, с матрицами, перманенты которых отличны от нуля.

Определение 1. Пусть элементы квадратной матрицы A принадлежат некоторому полукольцу. Обозначим её элементы, расположенные в i строчке и j столбце через A_j^i . Перманент квадратной матрицы A определяется по формуле

$$\text{Per}A = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P} (A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \dots A_n^{\lambda_n}),$$

где P – группа подстановок строчных индексов матрицы A .

Определение 2. Скалярным произведением строки A на столбец B назовем AB . Скалярным произведением строки A на строку B назовем AB^T . Скалярным произведением столбца A на столбец B назовем $A^T B$. Скалярным произведением столбца A на строку B назовем $A^T B^T = BA$.

Теорема 2. Для квадратной $(0, 1)$ -матрицы B размера $n \times n$ выполняется равенство $\text{Per}B = 0$ тогда и только тогда, когда для любой квадратной $(0, 1)$ -матрицы A с перманентом $\text{Per}A = 1$ в матрице B' , элементы которой получаются заменой 0 на 1 и наоборот, можно выбрать t столбцов, а в матрице A – s столбцов таких, что $s + t = n + 1$ и скалярное произведение каждого из выбранных в B' столбцов на каждый из выбранных столбцов в A равно 1. Такое же утверждение верно для строк матрицы A и строк матрицы B , а также столбцов матрицы A и строк матрицы B и наоборот.

Доказательство. Докажем необходимость. Рассмотрим неравенство $AX \leq B$. Тогда

$$\text{Per}A \cdot \text{Per}X \leq \text{Per}(AX) \leq \text{Per}B$$

для любого решения X . Поэтому из равенств $\text{Per}B = 0$, $\text{Per}A = 1$ следует, что $\text{Per}X = 0$. Известно, что $X = (A^T B)'$ есть наибольшее решение неравенства $AX \leq B$ и, т.к. $\text{Per}X = 0$, то к нему применима теорема 1 Фробениуса – Кёнига. Это значит, что в результате перестановок строк или столбцов матрицы $A^T B'$ можно получить подматрицу размера $s \times t$, состоящую только из единиц, причем $s + t = n + 1$. Пусть эти перестановки P_1 и P_2 совершены и получена матрица $P_1 A^T B' P_2$. Здесь теми

же символами обозначены перестановочные матрицы P_1 и P_2 , полученные из единичной матрицы соответствующими перестановками столбцов или строк. Тогда $P_1 A^T B' P_2 = (A P_1^T)^T (B' P_2)$ содержит $s \times t$ -подматрицу, состоящую только из единиц. Допустим, что эта подматрица занимает первые s строк и первые t столбцов. Получаем, что произведение каждой из первых s строк матрицы $(A P_1^T)^T$ на каждый из t первых столбцов матрицы $B' P_2$ дает 1. Тогда скалярное произведение каждого из первых s столбцов матрицы $A P_1^T$ с каждым из t первых столбцов в матрице $B' P_2$ равно 1. Следовательно, проводя обратные перестановки столбцов в матрицах $A P_1^T$ и $B P_2$, получаем, что в матрице A существует по крайней мере s столбцов, скалярное произведение которых с каждым из некоторой совокупности t столбцов матрицы B' равно 1. При этом $s + t = n + 1$.

Аналогичное утверждение верно и для строк матрицы A и строк матрицы B , а также столбцов в матрице A и строк в матрице A , и наоборот. Это следует из того, что перманенты сохраняются при транспонировании матриц.

Докажем достаточность. В качестве матрицы, перманент которой равен 1, возьмём единичную матрицу, то есть $A = E$. Тогда по условию теоремы $E^T B' = E B' = B'$ содержит подматрицу размера $s \times t$, причем $s + t = n + 1$, состоящую из единиц. Тогда B содержит подматрицу размера $s \times t$, состоящую из нулей, что по теореме Фробениуса – Кёнига даёт $Per B = 0$.

Теорема 3. *Каковы бы ни были булевы $(0, 1)$ -матрицы A и B размера $n \times n$, для которых $Per A = 1$ и $Per B = 0$, всегда найдутся s столбцов в матрице A и t столбцов в матрице B , причем $s + t = n + 1$, что каждый из выбранных в матрице A столбцов отличен от каждого из выбранных столбцов в матрице B . Такое же утверждение верно для строк матрицы A и строк матрицы B , а также столбцов матрицы A и строк матрицы B и наоборот.*

Доказательство. Выберем s столбцов в A и t столбцов в B со свойствами, описанными в теореме 2. Так как скалярные произведения каждого из выбранных s столбцов в A на каждый из выбранных t столбцов в B' равны 1, то в каждом из выбранных столбцов в матрице A обязательно есть совпадение единиц, по крайней мере, в одной строке каждого из выбранных столбцов в матрице B' . Тогда в каждом из выбранных s столбцов в матрице A обязательно есть отличие, по крайней мере одним элементом, с каждым из t выбранных столбцов матрицы B .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Binet J. P. M.* Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application a des considérations géométriques // J. de l'École Polytechnique. 1812. Cah. 16. P. 280–302.
2. *Cauchy A. L.* Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir qui deux valeurs égales et de signes contraires par suit des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment // De l'École Polytechnique. 1812. 10. Cah. 17. P. 29–112.
3. *Horner J.* Notes on determinants // Quart. J. Math. 1865. Vol. 8. P. 157–162.
4. *Hammond J.* Questtion 6001 // Educ. Times. 1879. Vol. 32. 179 p.
5. *Muir Th.* On a class of permanent symmetric functions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1882. Vol. 11. P. 409–418.
6. *Минк Х.* Перманенты / пер. с англ. В.Е. Тараканова. М. : Мир, 1982. 212 с.
7. *Поплавский В. Б.* Об определителях матриц над полями, кольцами и полукольцами // Вестн. МГАДА. Сер. Философские, социальные и естественные науки. 2011. № 5 (11). С. 160–167.
8. *Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторика неотрицательных матриц. М. : ТВП, 2000. 448 с.
9. *Brualdi R. A., Ryser H. J.* Combinatorial matrix theory. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. 39. Cambridge University Press, 1991. 367 p.

УДК 517.984

Д. В. Поплавский, В. А. Юрко

ОБ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Исследуются обратные спектральные задачи для интегро-дифференциальных операторов первого порядка на конечном интервале. Установлены свойства спектральных характеристик и доказана теорема единственности для этого класса нелинейных обратных задач. Отметим, что обратные спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов изучены достаточно подробно (см. монографию [1] и библиографию в ней). Обратные задачи для интегродифференциальных операторов и других классов нелокальных операторов являются более трудными для исследования. Некоторые аспекты теории обратных спектральных задач для интегро-дифференциальных операторов рассмотрены в [2–4] и других работах.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\ell y := iy'(x) + \int_0^x M(x, t)y(t) dt = \lambda y(x), \quad x \in [0, \pi], \quad (1)$$

где $M(x, t)$ – непрерывная функция. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ – решение уравнения (1) с условием $\varphi(0, \lambda) = 1$. Тогда справедливо представление (см. [1]):

$$\varphi(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x) + \int_0^x K(x, t) \exp(-i\lambda t) dt, \quad (2)$$

где $K(x, t)$ – непрерывная функция и $K(x, 0) = 0$.

Наряду с ℓ рассмотрим оператор $\tilde{\ell}$ того же вида, но с другим ядром $\tilde{M}(x, t)$. Условимся, что везде в дальнейшем, если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к ℓ , $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{\ell}$.

Пусть $\{\nu_n\}$ – собственные значения (с учетом кратностей) краевой задачи $Q = Q(M)$ для уравнения (1) с условием $y(\pi) = 0$.

Теорема 1. Пусть функции $M(x, t)$ и $\tilde{M}(x, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} M(x, t) &= M_0(x, t) + P(x, t)R(x - t), \\ \tilde{M}(x, t) &= M_0(x, t) + P(x, t)\tilde{R}(x - t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $M_0(x, t), P(x, t), R(x), \tilde{R}(x)$ – непрерывные функции и

$$B(x) := \int_0^x P(\pi - t, x - t) dt \neq 0, \quad 0 < x \leq \pi.$$

Если $\nu_n = \tilde{\nu}_n$ при всех n , то $R(x) \equiv \tilde{R}(x)$ for $x \in [0, \pi]$.

Доказательство. Собственные значения $\{\nu_n\}$ краевой задачи Q совпадают с нулями целой функции $\Delta(\lambda) := \varphi(\pi, \lambda)$. Используя (2) и теорему Адамара, получаем, что задание нулей $\{\nu_n\}$ однозначно определяет функцию $\Delta(\lambda)$. При условиях теоремы это дает $\varphi(\pi, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}(\pi, \lambda)$.

Пусть функция $z(x, \lambda)$ является решением уравнения

$$\ell^* z := -iz'(x, \lambda) + \int_x^\pi M(t, x)z(t, \lambda) dt = \lambda z(x, \lambda) \quad (4)$$

при условии $z(\pi, \lambda) = 1$. Умножим соотношение $\tilde{\ell}\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \lambda\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ на $z(x, \lambda)$, а затем вычтем соотношение (4), умноженное на $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$, и проинтегрируем по x :

$$\int_0^\pi z(x, \lambda) dx \int_0^x (M(x, t) - \tilde{M}(x, t))\tilde{\varphi}(x, \lambda) dt = i(\tilde{\varphi}(\pi, \lambda) - z(0, \lambda)). \quad (5)$$

В частности, это дает $\varphi(\pi, \lambda) \equiv z(0, \lambda)$. Отметим, что функция $w(x, \lambda) := z(\pi - x, \lambda)$ удовлетворяет соотношениям

$$iw'(x, \lambda) + \int_0^x M(\pi - t, \pi - x)w(t, \lambda) dt = \lambda w(x, \lambda), \quad w(0, \lambda) = 1.$$

Используя (5), получаем

$$\int_0^\pi z(x, \lambda) dx \int_0^x (M(x, t) - \tilde{M}(x, t)) \tilde{\varphi}(x, \lambda) dt \equiv 0. \quad (6)$$

Из (3) и (6) вытекает, что

$$\int_0^\pi z(x, \lambda) dx \int_0^x P(x, t)(R(x - t) - \tilde{R}(x - t)) \tilde{\varphi}(x, \lambda) dt \equiv 0. \quad (7)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi z(x, \lambda) dx \int_0^x P(x, t)(R(x - t) - \tilde{R}(x - t)) \tilde{\varphi}(x, \lambda) dt = \\ &= \int_0^\pi z(x, \lambda) dx \int_0^x P(x, x - t)(R(t) - \tilde{R}(t)) \tilde{\varphi}(x, \lambda) dt = \\ &= \int_0^\pi (R(t) - \tilde{R}(t)) dt \int_t^\pi P(x, x - t) z(x, \lambda) \tilde{\varphi}(x, \lambda) dx = \\ &= \int_0^\pi (R(\pi - x) - \tilde{R}(\pi - x)) dx \int_0^x P(\pi - t, x - t) w(t, \lambda) \tilde{\varphi}(x - t, \lambda) dt, \end{aligned}$$

то из (7) следует, что

$$\int_0^\pi (R(\pi - x) - \tilde{R}(\pi - x)) \psi(x, \lambda) dx \equiv 0, \quad (8)$$

где

$$\psi(x, \lambda) := \int_0^x P(\pi - t, x - t) w(t, \lambda) \tilde{\varphi}(x - t, \lambda) dt. \quad (9)$$

В силу (2) имеем

$$\begin{aligned} w(x, \lambda) &= \exp(-i\lambda x) + \int_0^x K_1(x, t) \exp(-i\lambda t) dt, \\ \tilde{\varphi}(x, \lambda) &= \exp(-i\lambda x) + \int_0^x K_2(x, t) \exp(-i\lambda t) dt, \end{aligned}$$

где $K_j(x, t)$ – непрерывные функции. Подставляя в (9), вычисляем

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= B(x) \exp(-i\lambda x) + \\ &+ \int_0^x P(\pi - t, x - t) dt \int_0^t K_1(t, \tau) \exp(-i\lambda(x - t + \tau)) d\tau + \\ &+ \int_0^x P(\pi - t, x - t) dt \int_0^{x-t} K_2(x - t, \xi) \exp(-i\lambda(x + \xi)) d\xi + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^x P(\pi-t, x-t) dt \int_0^t K_1(t, \tau) \exp(-i\lambda\tau) d\tau \int_0^{x-t} K_2(x-t, \xi) \exp(-i\lambda\xi) d\xi,$$

и следовательно,

$$\psi(x, \lambda) = B(x) \exp(-i\lambda x) + \int_0^x G(x, t) \exp(-i\lambda t) dt,$$

где $G(x, t)$ – непрерывная функция. Подставляя вышеприведенное выражение в (8), получаем

$$\int_0^\pi (R(\pi-x) - \tilde{R}(\pi-x)) \left(B(x) \exp(-i\lambda x) + \int_0^x G(x, t) \exp(-i\lambda t) dt \right) dx \equiv 0,$$

или

$$\int_0^\pi \exp(-i\lambda x) \left(B(x)(R(\pi-x) - \tilde{R}(\pi-x)) + \int_x^\pi G(t, x)(R(\pi-t) - \tilde{R}(\pi-t)) \right) dx \equiv 0.$$

Поэтому

$$B(x)(R(\pi-x) - \tilde{R}(\pi-x)) + \int_x^\pi G(t, x)(R(\pi-t) - \tilde{R}(\pi-t)) \equiv 0,$$

и, следовательно, $R(x) \equiv \tilde{R}(x)$. Теорема 1 доказана.

Пусть заданы непрерывные функции $P_j(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $j = \overline{1, p}$, $p \leq \infty$ такие, что

$$\int_0^x P_j(\pi-t, x-t) dt \neq 0, \quad 0 < x \leq \pi.$$

Пусть

$$M(x, t) = M_0(x, t) + \sum_{j=1}^p P_j(x, t) R_j(x-t),$$

$$\tilde{M}(x, t) = M_0(x, t) + \sum_{j=1}^p P_j(x, t) \tilde{R}_j(x-t),$$

где $R_j(x)$, $\tilde{R}_j(x)$ – непрерывные функции, и при $p = \infty$ ряды сходятся равномерно по x и t . Пусть $\{\nu_{nk}\}$ ($k = \overline{1, p}$) – собственные значения краевых задач $Q_k := Q(M_k)$ и пусть $\{\tilde{\nu}_{nk}\}$ – собственные значения краевых задач $\tilde{Q}_k := Q(\tilde{M}_k)$, где

$$M_k(x, t) = M_0(x, t) + \sum_{j=1}^k P_j(x, t) R_j(x-t),$$

$$\tilde{M}_k(x, t) = M_0(x, t) + \sum_{j=1}^k P_j(x, t) \tilde{R}_j(x - t),$$

Следующее утверждение является следствием теоремы 1.

Теорема 2. Если $\nu_{nk} = \tilde{\nu}_{nk}$ при всех n и $k = \overline{1, p}$, то $M(x, t) \equiv \tilde{M}(x, t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №17-11-01193).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Freiling G. and Yurko V. A. Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications. NOVA Science Publishers. N. Y., 2001.
2. Юрко В. А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 5. С. 134–146.
3. Kuryshova Yu. An inverse spectral problem for differential operators with integral delay // Tamkang J. Math. 2011. Vol. 42, № 3. P. 295–303.
4. Buterin S. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results in Mathematics. 2007. Vol. 50. P. 173–181.

УДК 501.1

А. В. Попович

ОБ АЛГЕБРАХ ОТНОШЕНИЙ С ДОМИНО ОПЕРАЦИЯМИ

В работе находится базис тождеств многообразий, порожденных классами алгебр отношений с операцией умножения отношений и унарными домино операциями.

Пусть $Rel(X)$ — множество всех бинарных отношений, заданных на U . Множество отношений $\Phi \subseteq Rel(U)$, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую *алгеброй отношений*. Обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω , и пусть $Var\{\Omega\}$ — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

Важным классом операций над отношениями является класс диофантовых операций. Операция называется диофантовой [1, 2], если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования.

К числу диофантовых относятся операции умножения \circ и пересечения \cap отношений, унарные операции обращения $^{-1}$, проектирования, цилиндрификации, двойной цилиндрификации, рефлексивной цилиндрификации и двойной рефлексивной цилиндрификации, а также используемые в модальной логике домино операции [3, 4].

Базис тождеств многообразия, порожденного классом полугрупп бинарных отношений с дополнительной операцией двойной рефлексивной цилиндрификации, найден в [5]. А базис тождеств многообразия, порожденного классом полугрупп бинарных отношений с одной домино операцией, найден в [6]. Эквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в [7, 8].

Целью данной работы является нахождение базиса тождеств многообразия, порожденного операцией умножения отношений \circ и унарными домино операциями ∇_1, ∇_2 , определяемыми следующим образом. Для всяких отношения $\rho, \sigma \in Rel(U)$ положим:

$$\begin{aligned}\rho \circ \sigma &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists w)(u, w) \in \rho \wedge (w, v) \in \sigma\}, \\ \nabla_1(\rho) &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists w)(w, u) \in \rho\} = pr_2\rho \times U, \\ \nabla_2(\rho) &= \{(u, v) \in U \times U : (\exists w)(v, w) \in \rho\} = U \times pr_1\rho,\end{aligned}$$

где $pr_1\rho = \{u \in U : (\exists w)(u, w) \in \rho\}$ и $pr_2\rho = \{v \in U : (\exists w)(w, v) \in \rho\}$ — первая и вторая проекции отношения ρ соответственно.

Основным результатом работы является следующая теорема, в которой находится базис тождеств многообразия $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2\}$.

Теорема 1. *Алгебра $(A, \cdot, *, *)$ типа $(2, 1, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2\}$, если и только если она удовлетворяет тождествам:*

$$\begin{aligned}(xy)z &= x(yz), \quad (xx^*)^* = x^{**}, \quad (x^*x)^* = x^{**}, \quad (x^*)^2 = x^*, \quad (x^*)^2 = x^*, \\ x^*y^* &= x^*y^{**}, \quad x^*y^* = x^{**}y^*, \quad x^{**}y^* = y^{**}x^*, \quad x^*y^{**} = y^*x^{**}, \\ (xy^*)^2 &= xy^*, \quad (x^*y)^2 = x^*y, \quad (xy^{**})^* = x^{**}y^*, \quad (x^{**}y)^* = x^*y^{**}, \\ xy^{**} &= xx^*y^{**}, \quad x^{**}y = x^{**}y^*y, \quad (xy^*)^* = (yx^*)^*, \quad (x^*y)^* = (y^*x)^*, \\ (xy)^*x^* &= (xy)^*, \quad (xy)^* = y^*(xy)^*, \quad (xy)^*y^* = (xy)^*, \quad (xy)^* = x^*(xy)^*, \\ x^*y &= x^*y^*y, \quad xy^* = xx^*y^*, \quad xy(xy)^* = xyy^*, \quad (xy)^*xy = x^*xy, \\ x^*yz^* &= x^*(yz^*)^*, \quad x^*yz^* = (x^*y)^*z^*, \\ (xy^*z)^* &= z^*xy^*, \quad (xy^*z)^* = y^*zx^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{**} &= x^{**}, & (x^*y(z^*w)^*)^* &= (x^*y(z^*w)^*)^*, & ((xy^*)^*zw^*)^* &= ((xy^*)^*zw^*)^*, \\
(x^*yzw^*)^* &= (zw^*)^*(x^*y)^*, & x^* &= x^{***}, & x^* &= x^{***}, \\
xy^* &= (xy^*)^{**}, & x^*y &= (x^*y)^{**}.
\end{aligned}$$

Пусть Ξ – множество всех термов алгебры $(A, \cdot, *, *)$ типа $(2,1,1)$, Λ – множество непустых слов над алфавитом $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$.

Доказательство теоремы основывается на результатах работ [6 - 9] и на следующей центральной лемме.

Лемма 1. *Для любого терма $p \in \Xi$ существуют $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \xi_0 \in \tilde{\Lambda}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \xi_1, \dots, \xi_n \in \Lambda$ ($n \geq 0$) такие, что $\alpha_0 = \odot$, если $\beta_0 = \odot$ и $\xi_0 = \odot$, если $\gamma_0 = \odot$, и*

$$p \cong p_{in}q_1^* \dots q_n^*p_{out},$$

где $p_{in} = \alpha_0\beta_0^*$, либо $p_{in} = (\gamma_0^*\xi_0)^*$, $p_{out} = \gamma_0^*\xi_0$, либо $p_{out} = (\alpha_0\beta_0^*)^*$; $q_i = (\xi_i\gamma_i^*)^*\alpha_i\beta_i^*$, либо $q_i = \gamma_i^*\xi_i(\beta_i^*\alpha_i)^*$, причем $q_i \neq \odot$ ($\forall i = 1, \dots, n$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бредихин Д. А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
2. Бредихин Д. А. О квазигождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
3. Venema Y. Many-dimansional modal logic Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 1989.
4. Kuhn S. The domino relations: flattening a two-dimensional logic // Journal of Philosophical Logic, 1989. Vol. 18. С. 173–195.
5. Бредихин Д. А., Попович А. В. О многообразии полугрупп отношений с операцией рефлексивной двойной цилиндрификации // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 13–22.
6. Bredihin D. A. On partially ordered semigroups of relations with domino operations // Semigroup Forum. 2016. Vol. 92, № 1. P. 198–213.
7. Bredihin D. A., Andreka H. The Equational Theory of Union-free Algebras of Relations // Alg. Univers. 1994. Vol. 33. P. 516–532.
8. Бредихин Д. А. Эквиациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. Математика. 1993. Т. 1. С. 23–30.
9. Bredihin D. A. On Relation Algebra with General Superpositions // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. 1991. Vol. 54. P. 111–124.

СИТУАЦИИ ТРАНЗИТИВНОГО РАВНОВЕСИЯ В ИГРАХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Для антагонистических игр с упорядоченными исходами вводится один тип ситуаций равновесия — транзитивное равновесие, являющееся обобщением понятия седловой точки. Основным результатом работы является теорема 1, устанавливающая связь между ситуациями транзитивного равновесия игры с упорядоченными исходами и седловыми точками некоторого класса антагонистических игр с функциями выигрыша.

Антагонистическая игра с упорядоченными исходами является простейшей моделью принятия решения по качественным критериям [1, 2]. Формально она может быть задана в виде набора

$$G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle, \quad (1)$$

где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, A — множество исходов, ω — отношение (частичного) порядка на A , $F : X \times Y \rightarrow A$ — функция реализации. Предполагается, что всегда $|X| \geq 2$, $|Y| \geq 2$, $|A| \geq 2$. В классе игр с упорядоченными исходами важнейшим принципом оптимальности является принцип равновесия [3].

Определение 1. Ситуация (x_0, y_0) в игре G с упорядоченными исходами вида (1) называется *седловой точкой*, если для всех $x \in X$, $y \in Y$ имеет место

$$F(x, y_0) \leq^{\omega} F(x_0, y_0) \leq^{\omega} F(x_0, y).$$

Определение 2. Ситуация $(x_0, y_0) \in X \times Y$ называется *ситуацией транзитивного равновесия* в игре G с упорядоченными исходами вида (1), если нет таких стратегий $x \in X$, $y \in Y$, для которых выполнено

$$F(x, y_0) >^{\omega} F(x_0, y).$$

Непосредственно из определений 1 и 2 следует, что всякая седловая точка является также ситуацией транзитивного равновесия, однако обратное утверждение не имеет места. Таким образом в классе антагонистических игр с упорядоченными исходами понятие ситуации транзитивного равновесия является обобщением понятия седловой точки.

Пусть задана игра G с упорядоченными исходами вида (1) и некоторое отображение $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}$ множества исходов игры G в действительные числа \mathbf{R} . Тогда мы можем определить антагонистическую игру G_{φ} с

функциями выигрыша, где $G_\varphi = \langle X, Y, \varphi \circ F \rangle$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1. Пусть ситуация $(x_0, y_0) \in X \times Y$ является седловой точкой в игре G_φ , где $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}$ — строго изотонное отображение упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в \mathbf{R} . Тогда (x_0, y_0) является ситуацией транзитивного равновесия в игре G .

В случае, когда множество исходов A конечно или счетно, справедлив и обратный результат, а именно верно следующее утверждение.

2. Пусть ситуация $(x_0, y_0) \in X \times Y$ является ситуацией транзитивного равновесия в игре G . Тогда существует такое строго изотонное отображение $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}$, при котором (x_0, y_0) будет седловой точкой в игре G_φ .

Доказательство. 1. Предположим, что ситуация (x_0, y_0) не является ситуацией транзитивного равновесия в игре G , то есть существуют такие стратегии $x_1 \in X$ и $y_1 \in Y$, что $F(x_1, y_0) >^\omega F(x_0, y_1)$. Так как отображение φ строго изотонно, имеем $\varphi(F(x_1, y_0)) > \varphi(F(x_0, y_1))$. С другой стороны, учитывая, что (x_0, y_0) является седловой точкой в игре G_φ , получаем при любых $x \in X$ и $y \in Y$ двойное неравенство:

$$\varphi(F(x, y_0)) \leq \varphi(F(x_0, y_0)) \leq \varphi(F(x_0, y)). \quad (2)$$

Полагая в (2) $x = x_1$ и $y = y_1$, приходим к неравенству $\varphi(F(x_1, y_0)) \leq \varphi(F(x_0, y_1))$, что противоречит полученному выше. Утверждение 1 теоремы 1 установлено. Для доказательства утверждения 2 нам потребуется ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1 (о продолжении линейного доупорядочения). Пусть $\langle A, \omega \rangle$ — произвольное упорядоченное множество. Тогда линейное доупорядочение любого упорядоченного подмножества упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ может быть продолжено до линейного доупорядочения всего множества A .

Лемма 2. Рассмотрим произвольное упорядоченное множество $\langle A, \omega \rangle$ и пусть $B, C, \subseteq A$ — такие два его подмножества, что для всех $b \in B$ и $c \in C$ выполнено $\neg(b >^\omega c)$. Тогда существует такое линейное доупорядочение $\bar{\omega}$ порядка ω , что $b <^{\bar{\omega}} a <^{\bar{\omega}} c$ для любых $b \in B \setminus C$, $a \in B \cap C$, $c \in C \setminus B$.

Лемма 3. Рассмотрим произвольное упорядоченное множество $\langle A, \omega \rangle$, в котором мощность множества A не выше счетной.

1. Пусть $B, C, \subseteq A$ — такие два подмножества множества A , что для всех $b \in B$ и $c \in C$ выполнено $\neg(b \geq^\omega c)$. Тогда существует строго изотонное отображение $\psi : A \rightarrow \mathbf{R}$, для которого $\psi(b) < \psi(c)$ при всех

$b \in B$ и $c \in C$ (такое отображение называется *строго отделяющимся* подмножеством B от подмножества C).

2. Предположим, что для всех $b \in B$ и $c \in C$ выполнено $\neg(b >^\omega c)$. Тогда существует строго изотонное отображение $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$, для которого $\varphi(b) \leq \varphi(c)$ при всех $b \in B$ и $c \in C$ (такое отображение называется *отделяющим* подмножество B от подмножества C).

Перейдем к доказательству утверждения 2 теоремы 1. Предположим, что ситуация $(x_0, y_0) \in X \times Y$ является ситуацией транзитивного равновесия в игре G . Положим $B = \{F(x, y_0) : x \in X\}$, $C = \{F(x_0, y) : y \in Y\}$. Тогда условие $\neg(b >^\omega c)$ выполнено для всех $b \in B$, $c \in C$, и, используя п. 2 леммы 3, получаем, что существует строго изотонное отображение φ упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в действительную прямую \mathbf{R} , для которого выполняется $\varphi(F(x, y_0)) \leq \varphi(F(x_0, y))$ при всех $x \in X$ и $y \in Y$. Полагая в последнем неравенстве $x = x_0$, а затем $y = y_0$, приходим к двойному неравенству:

$$\varphi(F(x, y_0)) \leq \varphi(F(x_0, y_0)) \leq \varphi(F(x_0, y)),$$

которое означает, что ситуация (x_0, y_0) является седловой точкой в антагонистической игре G_φ с функцией выигрыша $\varphi \circ F$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В. В. Принятие решений по качественным критериям. Математические модели. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2013. 284 с.

2. Розен В. В. Математические модели многокритериальной оптимизации по качественным критериям // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : ИЦ «Наука», 2012. С. 266–268.

3. Rozen V. V. Equilibrium points in games with ordered outcomes // Contribution to game theory and management. St. Petersburg University, 2010. P. 368–386.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

ОБ n -КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ n -ГО ПОРЯДКА

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок $L(\lambda)$,

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{j+s \leq n} p_{js} \lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (1)$$

$$\sum_{j+s \leq \kappa_{i0}} \alpha_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (2)$$

$$\sum_{j+s \leq \kappa_{i0}} \alpha_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(0) + \sum_{j+s \leq \kappa_{i1}} \beta_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n}, \quad (3)$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\kappa_{i0}, \kappa_{i1} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \leq l \leq n-1$.

Отметим, что краевые условия (2)–(3) в случае $2l < n$ не являются полураспадающимися.

Далее используем, не повторяя в данном тексте, известные определения собственных и присоединенных функций или кратко корневых функций (к. ф.), n -кратной полноты к. ф. из [1–2].

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место n -кратная полнота к. ф. этого пучка в $L_2[0, 1]$.

Основополагающей по этой проблеме является работа [3], в которой была сформулирована теорема об n -кратной полноте к. ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением (д.в.) со специальной главной частью

$$\ell(y, \lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в [4] в случае аналитических коэффициентов д. в. и в [5] в случае суммируемых коэффициентов. Случай произвольной главной части д. в. был рассмотрен в [6–7]. Детальное исследование вопроса об n - и m -кратной полноте к. ф. пучка $L(\lambda)$, д. в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся, проведено в [8].

Предположим, что корни $\omega_\alpha = r_\alpha \exp i\psi_\alpha$, $\alpha = \overline{1, n}$, характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js} \omega^j = 0$ д. в. (1) простые, отличны от нуля и лежат на η лучах ($1 \leq \eta \leq n$), исходящих из начала. Будем считать при $\nu_0 = 0$, $\nu_\eta = n$

$$0 \leq \psi_{\nu_0+1} = \dots = \psi_{\nu_1} < \dots < \psi_{\nu_{\eta-1}+1} = \dots = \psi_{\nu_\eta} < 2\pi. \quad (4)$$

Для пучка (1)–(3) общего вида не выполняются, вообще говоря, основные предположения (см. [8]), а именно, что существует прямая d , проходящая через начало, не содержащая ω -корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше $n-l$, а также, что краевые условия являются полураспадающимися.

Пусть $v \in [0, 2\pi)$ есть любое число, для которого существуют перестановка $\sigma (= \sigma(v)) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и число

$h(=h(v)) \in \{0, 1, \dots, n\}$ такие, что

$$\Re(e^{iv}\omega_{\sigma_1}) < \dots < \Re(e^{iv}\omega_{\sigma_h}) < 0 < \Re(e^{iv}\omega_{\sigma_{h+1}}) < \dots < \Re(e^{iv}\omega_{\sigma_n}). \quad (5)$$

Множество таких v обозначим через Υ (это все числа из $[0, 2\pi)$ за исключением решений уравнений $\Re(e^{iv}\omega_i) = \Re(e^{iv}\omega_j)$, $i \neq j$ и $\Re(e^{iv}\omega_j) = 0$, $j = \overline{1, n}$). Таких точек – конечное число, и между ними перестановка σ и число h не меняются.

Пусть крайевые условия (3) упорядочены так, что при $s_0 = l$, $s_{r+1} = n$ справедливы соотношения:

$$\chi_{s_0+1} = \dots = \chi_{s_1} < \chi_{s_1+1} = \dots = \chi_{s_2} < \dots < \chi_{s_r+1} = \dots = \chi_{s_{r+1}}, \quad (6)$$

где обозначено $\chi_i = \varkappa_{i1} - \varkappa_{i0}$, $i = \overline{1, n}$.

Для $v \in \Upsilon$ пусть $\gamma(= \gamma(v))$, $\delta(= \delta(v))$ есть такие индексы, что

$$s_\gamma + 1 \leq h + 1 \leq s_{\gamma+1}, \quad s_\delta + 1 \leq n - h + 1 \leq s_{\delta+1}. \quad (7)$$

Считаем, что $\gamma = 0$, $\delta = r + 1$ при $h = 0$ и $\gamma = r + 1$, $\delta = 0$ при $h = n$.

Обозначим $[s]_+ = \max\{s, 0\}$, $\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}$ и положим для того же v и $j = \overline{1, n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}} \alpha_{i\nu s} \omega_{\sigma_j}^\nu, \quad i = \overline{1, n}, \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i1}} \beta_{i\nu s} \omega_{\sigma_j}^\nu, \quad i = \overline{l+1, n};$$

$$a_1 = \det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{1, l}}, \quad a_2 = \det(a_{ij})_{i=\overline{1, l}}^{j=\overline{n-l+1, n}},$$

$$b_1 = \det(a_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{l+1, n}}, \quad b_2 = \det(a_{ij})_{i=\overline{l+1, n}}^{j=\overline{1, n-l}},$$

$$A = \begin{vmatrix} (a_{ij})_{i=\overline{1, s_\gamma}}^{j=\overline{1, h}} & (0)_{i=\overline{1, s_\gamma}}^{j=\overline{h+1, n}} \\ (a_{ij})_{i=\overline{s_\gamma+1, n}}^{j=\overline{1, h}} & (b_{ij})_{i=\overline{s_\gamma+1, n}}^{j=\overline{h+1, n}} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} (0)_{i=\overline{1, s_\delta}}^{j=\overline{1, h}} & (a_{ij})_{i=\overline{1, s_\delta}}^{j=\overline{h+1, n}} \\ (b_{ij})_{i=\overline{s_\delta+1, n}}^{j=\overline{1, h}} & (a_{ij})_{i=\overline{s_\delta+1, n}}^{j=\overline{h+1, n}} \end{vmatrix}.$$

Введем для того же v условия:

$$\begin{aligned} a) & a_1 \neq 0, \quad b_1 \neq 0 \text{ при } h < l; & b) & A \neq 0 \text{ при } h \geq l; \\ c) & a_2 \neq 0, \quad b_2 \neq 0 \text{ при } h > n - l; & d) & B \neq 0 \text{ при } h \leq n - l. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае $1 \leq l \leq n - 1$ обозначим

$$c_{ij}^\circ = \sum_{\beta+s=\varkappa_{i0}} \alpha_{i\beta s} \omega_j^\beta, \quad i = \overline{1, l}, \quad j = \overline{1, n},$$

и рассмотрим линейную алгебраическую систему:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{\circ} d_j^{\circ} = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (9)$$

относительно вектора $(d_1^{\circ}, \dots, d_n^{\circ})^T$.

Пусть $(d_{s1}^{\circ}, d_{s2}^{\circ}, \dots, d_{sn}^{\circ})^T$, $s = \overline{1, n-l}$ – базис пространства решений системы (5).

Составим матрицы

$$D_j^{\circ} = \begin{pmatrix} d_{1, \nu_{j-1}+1}^{\circ} & \cdots & d_{1, \nu_j}^{\circ} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{n-l, \nu_{j-1}+1}^{\circ} & \cdots & d_{n-l, \nu_j}^{\circ} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, \eta}.$$

В [9] получена следующая теорема о полноте к.ф. при $l = 0$:

Теорема 1. Пусть $l = 0$ и при некотором $v \in \Upsilon$ выполняются условия (4)–(8). Тогда система к.ф. этого пучка n -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum_{i=1}^n [n-1-\kappa_i]_+$ в случае, если порядок хотя бы одного краевого условия (2)–(3) больше $n-1$, и с нулевым дефектом, в противном случае.

Оказывается, что случае $1 \leq l \leq n-1$ справедлива теорема:

Теорема 2. Пусть $1 \leq l \leq n-1$, при некотором $v \in \Upsilon$ выполняется условия (4)–(8), система (9) является системой полного ранга и $\text{rank } D_j^{\circ} = \nu_j - \nu_{j-1}$, $j = \overline{1, \eta}$. Тогда система к.ф. этого пучка n -кратно полна в $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum_{i=l+1}^n [n-1-\kappa_i]_+$, в случае, если порядок хотя бы одного краевого условия (2)–(3) больше $n-1$ и с нулевым дефектом, в противном случае.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
3. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
4. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов : дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973.
5. Шкаликов А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функциональный анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.
6. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z. 1984. Vol. 188. P. 55–68.

7. Тихомиров С. А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1987.

8. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994.

9. Рыжлов В. С. n -кратная полнота корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами n -го порядка // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 59–62.

УДК 517.518.85

А. Ю. Трынин

О ПРИНЦИПЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ НА КЛАССЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе изучаются аппроксимативные свойства операторов, впервые предложенные в [1 и 2], вида

$$\begin{aligned} L_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n \operatorname{sinc}(nx - k\pi) f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^n l_{k,n}(x) f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\operatorname{sinc} t := \frac{\sin t}{t}$. Обозначим $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathcal{N}$. Некоторое представление о полученных необходимых и достаточных условиях поточечной и равномерной сходимости этих интерполяционных процессов, их обобщений и модификаций на отрезке $[0, \pi]$ можно получить, например, ознакомившись с результатами работ [1–5]. К сожалению, более подробное описание результатов в этом направлении не позволяет редакционная политика сборника.

Определение. Будем говорить, что для интерполяционного процесса синк-аппроксимаций (1) в окрестности $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ имеет место принцип δ -локализации на классе функций $\mathbb{F}(x_0, \delta_1, \delta_2)$ в точке $x_0 \in [0, \pi]$, если для любых функций $f \in \mathbb{F}(x_0, \delta_1, \delta_2)$, $g \in \mathbb{F}(x_0, \delta_1, \delta_2)$, совпадающих в δ -окрестности точки x_0 : $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \cap [0, \pi]$, имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f, x_0) - L_n(g, x_0) = 0. \quad (2)$$

Будем также говорить, что для интерполяционного процесса синк-аппроксимаций (1) имеет место принцип локализации на классе функций \mathbb{F} , если $\mathbb{F} \subset \bigcap_{\substack{x_0 \in [0, \pi]; \\ \delta_1 > 0, \delta_2 > 0}} \mathbb{F}(x_0, \delta_1, \delta_2)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для интерполяционного процесса синк-аппроксимаций (1) имеет место принцип локализации на классе непрерывных функций на отрезке $[0, \pi]$.

Доказательство. Положив $q_\lambda \equiv 0$, сначала убедимся, что интерполяционный процесс [4, п.1.8] в случае задачи Коши [4, п.1.5] представляет собой процесс вида (1). Затем возьмём две произвольные, непрерывные на $[0, \pi]$ функции f_1 и f_2 . Обозначим $f \equiv f_1 - f_2$. После чего выберем функцию $\varepsilon(\lambda)$ как в соотношении [4, п.2.4]. Если функции f_1 и f_2 совпадают в δ -окрестности точки x_0 , то

$$\sum_{k: x_{k,n} \in O_\delta(x_0)} l_{k,n}(x) f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0.$$

Теперь утверждение теоремы получаем из [4, предложение 10] и [4, § 4.36].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трынин А. Ю. Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа–Штурма–Лиувилля // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 10-й Саратов. зимн. шк. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2000. С. 140–141.
2. Трынин А. Ю. Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика. : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 124–127.
3. Trynin A. Yu., Sklyarov V. P. Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampling Theory in Signal and Image Processing. 2008. Vol. 7, № 3. P. 263–270.
4. Трынин А. Ю. Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Vol. 200, № 11. P. 61–108.
5. Трынин А. Ю. Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Сер. Математика. 2008. № 6. С. 66–78.

ОБ ЭПИМОРФИЗМАХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ ПОЛУАВТОМАТОВ

В настоящей работе рассматриваются так называемые гиперграфические полуавтоматы, т.е. автоматы без выходных сигналов, у которых множества состояний наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа, сохраняющейся функциями переходов. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как многообразие таких алгебраических систем охватывает, в частности, автоматы, у которых множества состояний являются плоскостями (например, проективными или аффинными). В работе описывается строение эпиморфизмов универсальных гиперграфических полуавтоматов.

Напомним [1], что гиперграфом называется система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество вершин гиперграфа и L — семейство некоторых подмножеств X , именуемых ребрами гиперграфа. Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p — произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p -определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p + 1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа принадлежат не более чем одному его ребру.

Например, эффективный гиперграф с 1-определимыми ребрами — это гиперграф, ребра которого образуют нетривиальное разбиение множества вершин без одноэлементных классов. С другой стороны, как проективная плоскость, так и аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами, вершинами которых являются точки этих плоскостей, а ребрами — соответствующие прямые (см., например, [2]).

Пусть $H = (X, L)$ — гиперграф. Согласно [1] путем из вершины x_1 в вершину x_{n+1} называется последовательность $x_1, l_1, x_2, l_2, x_3, \dots, l_n, x_{n+1}$, где x_1, x_2, \dots, x_{n+1} — различные вершины, за исключением, быть может, первой и последней, l_1, \dots, l_n — различные ребра и $x_i, x_{i+1} \in l_i$, для $i = \overline{1, n}$. Гиперграф называется связным, если любые две его различные вершины соединены путем.

Гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ в гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$ называется отображение f множества X в множество X_1 , которое смеж-

ные в гиперграфе H вершины переводит в смежные вершины гиперграфа H_1 , т.е. выполняется свойство

$$(\forall r \in L)(\exists r' \in L_1)(f(r) \subset r').$$

Гомоморфизм $f : H \longrightarrow H_1$ называется сюръективным гомоморфизмом или эпиморфизмом, если образом множества вершин X гиперграфа H является все множество вершин X_1 гиперграфа H_1 , т.е. $f(X) = X_1$.

Гомоморфизм гиперграфа H в себя называется эндоморфизмом H . Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\text{End}H$.

В настоящей работе под гиперграфическим полуавтоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов [3] $A = (X, S, \delta)$, множество состояний которого X наделено такой структурой гиперграфа $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов δ_s является эндоморфизмом H . Например, для любого гиперграфа H алгебраическая система $A = (H, \text{End}H, \delta)$ с функцией $\delta(\varphi, x) = \varphi(x)$, где $(\varphi, x) \in \text{End}H \times X$, является гиперграфическим полуавтоматом, который обозначается $\text{Atm}(H)$ и называется универсальным гиперграфическим полуавтоматом.

Пусть $A = (H, S, \delta)$ и $A_1 = (H_1, S_1, \delta_1)$ — гиперграфические полуавтоматы. Эпиморфизмом полуавтомата A на полуавтомат A_1 называется пара отображений $\pi = (f, g)$, где $f : H \longrightarrow H_1$, $g : S \longrightarrow S_1$ — такие эпиморфизмы гиперграфов и полугрупп соответственно, что для любых $x \in X$, $s \in S$ выполняется равенство $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), g(s))$. Если $f : H \longrightarrow H_1$, $g : S \longrightarrow S_1$ — изоморфизмы гиперграфов H , H_1 и полугрупп S , S_1 соответственно, то эпиморфизм $\pi = (f, g)$ называется изоморфизмом полуавтомата A на полуавтомат A_1 .

Используя результат работы [4, теорема 2], можно доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть $\text{Atm}(H)$ — универсальный гиперграфический полуавтомат над связным гиперграфом с p -определимыми ребрами $H = (X, L)$, $\text{Atm}(H_1)$ — универсальный гиперграфический полуавтомат над эффективным гиперграфом с p_1 -определимыми ребрами $H_1 = (X_1, L_1)$, f — отображение X в X_1 и g — отображение $\text{End}H$ в $\text{End}H_1$. Тогда пара отображений $\pi = (f, g)$ в том и только том случае является эпиморфизмом $\text{Atm}(H)$ на $\text{Atm}(H_1)$, если $g = f^2$ и $\pi = (f, g)$ — изоморфизм $\text{Atm}(H)$ на $\text{Atm}(H_1)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Bretto A. Hypergraph theory. An Introduction. Cham : Springer, 2013. 133 p.

2. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М. : Мир, 1970. 161 с.
3. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 192 с.
4. Хворостухина Е. В. О гомоморфизмах полугрупп эндоморфизмов гиперграфов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 70–75.

УДК 317.54

А. А. Хромов

О СКОРОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ УСРЕДНЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В данной работе рассматривается усреднение непрерывных функций функцией Стеклова и решается задача о нахождении скорости сходимости полученных приближений на некоторых заданных классах.

Эта задача хорошо известна в теории приближения периодических функций [1], а также в теории некорректных задач – там она называется задачей Колмогорова–Никольского [2]. А оператор Стеклова является одним из самых известных и востребованных в силу своей простоты и в теоретических, и в прикладных исследованиях.

Рассмотрим $u(x) \in C[0, 1]$ функцию Стеклова

$$S_\alpha u = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} u(t) dt, \quad (1)$$

и величину

$$\Delta_1(S_\alpha, M) = \sup\{\|S_\alpha u - u\|_{C_\varepsilon} : u \in M\}, \quad (2)$$

где M – некоторый класс функций из $C[0, 1]$, $C_\varepsilon = C[0, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon \geq \alpha$.

Эта величина характеризует скорость сходимости функции $S_\alpha u$ к u .

Пусть $M = M_1 = \{u \in C[0, 1] : u = \int_0^x v(t) dt, \|v\|_{L_2} \leq 1\}$.

Лемма. *Справедливо равенство:*

$$\Delta_1(S_\alpha, M_1) = \frac{1}{\alpha} \max_{0 \leq x \leq 1-\varepsilon} \left(\int_x^{x+\alpha} (\alpha - (t-x))^2 dt \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим $Bv = \int_0^x v(t) dt$, $C = S_\alpha B - B$. Из (2) имеем:

$$\Delta_1(S_\alpha, M_1) = \sup\{\|S_\alpha u - u\|_{C_\varepsilon} : u \in M_1\} =$$

$$= \sup\{\|Cv\|_{C_\varepsilon} : \|v\|_{L_2} \leq 1\} = \|C\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon}$$

по определению нормы оператора.

Отсюда получаем:

$$Cv = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} \int_0^t v(\xi) d\xi dt - \int_0^x v(t) dt,$$

откуда следует:

$$Cv = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} (\alpha - (t-x))v(t) dt.$$

Поскольку C – интегральный оператор, то

$$\|C\|_{L_2 \rightarrow C_\varepsilon} = \max_{0 \leq x \leq 1-\varepsilon} \left(\int_0^1 C^2(x, t) dt \right)^{1/2},$$

откуда следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\Delta_1(S_\alpha, M_1) = \sqrt{\frac{\alpha}{3}}.$$

Доказательство вытекает из формулы (3).

Пусть теперь

$$M = M_2 = Lip_K 1/2.$$

Теорема 2. *При $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$ справедливо равенство*

$$\Delta_1(S_\alpha, M_1) = \Delta_1(S_\alpha, M_2).$$

Доказательство. По определению класса $Lip_K 1/2$ выполняется оценка

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^{1/2} \quad (4)$$

для любых $x_1, x_2 \in C[0, 1]$.

Из свойства оператора Стеклова $S_\alpha 1 \equiv 1$ следует представление

$$S_\alpha u - u = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} (u(t) - u(x)) dt.$$

Поскольку $|t - x| = t - x$, то из (4) вытекает оценка

$$|S_\alpha u - u| \leq \frac{K}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} (t - x)^{1/2} dt = \frac{2}{3} K \sqrt{\alpha},$$

$$\Delta_1(S_\alpha, M_2) \leq \frac{2}{3} K \sqrt{\alpha}. \quad (5)$$

Получим оценку снизу.

Очевидно, что

$$\Delta_1(S_\alpha, M_2) \geq \|S_\alpha u_0 - u_0\|_{C_\varepsilon},$$

где $u_0 \in M_2$, а

$$\|S_\alpha u_0 - u_0\|_{C_\varepsilon} \geq |S_\alpha u_0 - u_0|_{x=0}.$$

Возьмем $u_0(x) = K\sqrt{x}$. Очевидно, что $u_0 \in Lip_K 1/2$.

Тогда получаем:

$$|S_\alpha u_0 - u_0|_{x=0} = \frac{K}{\alpha} \int_0^\alpha t^{1/2} dt = \frac{2}{3} K \sqrt{\alpha},$$

и

$$\Delta_1(S_\alpha, M_2) \geq \frac{2}{3} K \sqrt{\alpha}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем равенство

$$\Delta_1(S_\alpha, M_2) = \frac{2}{3} K \sqrt{\alpha},$$

а отсюда и из теоремы 1 – утверждение теоремы.

Замечание. Если вместо (1) мы возьмем левосторонний оператор Стеклова: $\frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x u(t) dt$, то для него будут справедливы теоремы 1 и 2 с заменой $C[0, 1 - \varepsilon]$ на $C[\varepsilon, 1]$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерных приближений функций полиномами. М. : Наука, 1977. 508 с.
2. Хромова Г. В. Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. Академии наук. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

ОБ УРАВНЕНИИ АБЕЛЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Рассматривается модифицированное уравнение Абеля – уравнение Абеля с инволюцией:

$$Au \equiv \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{-(1-\beta)}}{\Gamma(\beta)} u(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $0 < \beta < 1$, $u(x) \in C[0, 1]$, $f(x)$ задана ее среднеквадратичным δ -приближением $f_\delta(x)$. Решается задача нахождения равномерных приближений к точному решению.

В [1] эта задача решена для значений β из интервала $(0, \frac{1}{2})$. В данной работе построен метод, позволяющий получить решение для всего диапазона изменения параметра β .

Обратный оператор для уравнения (1) имеет вид [1]

$$A^{-1}f = \frac{d}{dx} \int_{1-x}^1 \frac{(t - (1-x))^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t) dt.$$

Построим семейство регуляризирующих операторов для уравнения (1) по аналогии с [2] с помощью операторов $S_\alpha^{(2)}$:

$$S_\alpha^{(2)}u = \begin{cases} S_{\alpha 2}^2 u, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ S_{\alpha 12}^2 u, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$S_{\alpha 1}^2 u = \frac{1}{\alpha} \left[\int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} (2\alpha - (x-t))u(t) dt + \int_{x-\alpha}^x (x-t)u(t) dt \right]$$

$$S_{\alpha 2}^2 u = \frac{1}{\alpha} \left[\int_x^{x+\alpha} (t-x)u(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t-x))u(t) dt \right]$$

($S_{\alpha j}^2$ – квадраты операторов Стеклова : левостороннего для $j = 1$ и правостороннего для $j = 2$).

Рассмотрим операторы R_α :

$$R_\alpha f = \begin{cases} R_{\alpha 2} f \equiv S_{\alpha 2}^2 A^{-1} f, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ R_{\alpha 1} f \equiv S_{\alpha 1}^2 A^{-1} f, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (2)$$

Теорема 1. *Операторы $R_{\alpha j}$, $j = 1, 2$, определенные в (2), являются интегральными и имеют вид*

$$R_{\alpha j} f = \alpha^{-2} (1 - \beta)^{-1} (\Gamma(1 - \beta))^{-1} \int_0^1 R_{\alpha j}(x, t) f(t) dt,$$

где

$$R_{\alpha 2}(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 - x - 2\alpha \\ (t - (1 - x) + 2\alpha)^{1 - \beta}, & 1 - x - 2\alpha \leq t \leq 1 - x - \alpha \\ (t - (1 - x) + 2\alpha)^{1 - \beta} - 2(t - (1 - x) + \alpha)^{1 - \beta}, & 1 - x - \alpha \leq t \leq 1 - x \\ (t - (1 - x))^{1 - \beta} - 2(t - (1 - x) + \alpha)^{1 - \beta} + (t - (1 - x) + 2\alpha)^{1 - \beta}, & 1 - x \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$R_{\alpha 1}(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 - x \\ (t - (1 - x))^{1 - \beta}, & 1 - x \leq t \leq 1 - x + \alpha \\ (t - (1 - x))^{1 - \beta} - 2(t - (1 - x) - \alpha)^{1 - \beta}, & 1 - x + \alpha \leq t \leq 1 - x + 2\alpha \\ (t - (1 - x) - 2\alpha)^{1 - \beta} - 2(t - (1 - x) - \alpha)^{1 - \beta} + (t - (1 - x))^{1 - \beta}, & 1 - x + 2\alpha \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Теорема 2. *Операторы R_α , рассматриваемые как операторы из $L_2[0, 1]$ в $L_\infty[0, 1]$, являются регуляризирующими для уравнения (1) при всех значениях параметра β из интервала $(0, 1)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из [2].

(Здесь $\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C_{[0, \frac{1}{2}]}}\}, \|\cdot\|_{C_{[\frac{1}{2}, 1]}}\}$)

Теорема 3. *Для норм операторов R_α справедлива двусторонняя оценка:*

$$C_2 \alpha^{-\frac{1+2\beta}{2}} \leq \|R_\alpha\|_{L_\alpha \rightarrow L_\infty} \leq C_1 \alpha^{-\frac{3}{2}} + O(\alpha^{\frac{3}{2}-2\beta}), \quad (4)$$

где

$$C_1 = (1 - \beta)^{-1} (\Gamma(1 - \beta))^{-1} \sqrt{6}, \quad C_2 = (1 - \beta)^{-1} (\Gamma(1 - \beta))^{-1} (3 - 2\beta)^{-1}.$$

Доказательство. Пользуемся формулой

$$\|R_\alpha\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} = \max\{\|R_{\alpha 2}\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[0, \frac{1}{2}]}, \|R_{\alpha 1}\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[\frac{1}{2}, 1]}\}. \quad (5)$$

Возьмем операторы $R_{\alpha 2}$. Тогда

$$\|R_{\alpha 2}\|_{L_2[0,1] \rightarrow C[0, \frac{1}{2}]} = \alpha^{-2} (1 - \beta)^{-1} (\Gamma(1 - \beta))^{-1} \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} [I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)]^{\frac{1}{2}},$$

где выражение для $I_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, легко получаются из (3).

Далее, делаем замены переменных интегрирования:

$t - (1 - x) + 2\alpha = \tau$ в $I_1(x)$, $t - (1 - x) + \alpha = \tau$ в $I_2(x)$, $t - (1 - x) = \tau$ в $I_3(x)$

Тогда получим, что $I_1(x) \equiv I_3$ из (13) в [2], $I_2(x) \equiv I_2$ из (12) в [2], $I_3(x) \equiv I_1$ из (11) в [2]. Отсюда следует утверждение теоремы 3.

Дальнейшее уточнение оценки (4) возможно лишь при конкретизации значения параметра β .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. А., Хромова Г. В. Регуляризирующее семейство операторов для уравнения Абеля с инволюцией // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 76–78.

2. Хромова Г. В. О равномерных приближениях к решению уравнения Абеля // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 10. С. 1703–1712.

УДК 514.76

Ю. В. Шевцова

ОБОБЩЕННЫЕ БИ-КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ НА КОРАСПРЕДЕЛЕНИЯХ САСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Вводится понятие обобщенной би-контактной структуры на почти контактном метрическом многообразии. Доказывается, что обобщенная би-контактная структура естественным образом возникает на кораспределении сасакиева многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена.

1. Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $\Gamma(TM)$ – модуль гладких векторных полей на M . Многообразие Сасаки-контактное метрическое пространство, удовлетворяющее условию $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма φ . Пусть, далее, ∇ – внутренняя линейная связность, естественным образом определяемая на многообразии M [1, 2].

Допустимое тензорное поле [1, 2], определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$ [3–5], называется тензором кривизны Схоутена.

Обобщенной почти би-контактной структурой на многообразии M назовем тройку $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ эндоморфизмов касательного расслоения, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\varphi_1^2 = \varphi_2^2 = 1 - \eta \otimes \vec{\xi}$,
2. $\varphi_3^2 = -1 + \eta \otimes \vec{\xi}$,
3. $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3$.

Будем говорить, что обобщенная почти би-контактная структура интегрируема, если выполняются условия $N_{\varphi_i} + 2(d\eta \circ \varphi_i) \otimes \vec{\xi} = 0$, $i = 1, 2, 3$. В этом случае будем называть тройку $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ обобщенной би-контактной структурой. Понятие обобщенной би-контактной структуры обобщает понятие би-контактной структуры, определенной в работе [6].

2. В работах [1–5] исследовалась определяемая с помощью внутренней и N -продолженной связностей на распределении D почти контактная метрическая структура, названная продолженной почти контактной метрической структурой. В настоящей статье понятие продолженной почти контактной метрической структуры рассматривается применительно к кораспределению D^* . Кораспределение D^* образовано всеми допустимыми 1-формами: $\lambda \in D^* \leftrightarrow \lambda(\vec{\xi}) = 0$. Введем на кораспределении D^* структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n : a, b, c = 1, \dots, n - 1$) многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, p_\alpha)$ на многообразии D^* , где p_α – координаты допустимого ковектора в кобазисе $(dx^a, \eta = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$, сопряженном базису $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n, \partial_n)$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Пусть, далее, Γ_{ab}^c – коэффициенты внутренней связности ∇ . Поставим каждому допустимому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(D)$, $\vec{x} = x^a \vec{e}_a$ и каждому допустимому ковекторному полю $\lambda \in \Gamma(D^*)$, $\lambda = \lambda_a dx^a$ векторные поля $\vec{x}^h = x^a \vec{e}_a$, $\lambda^v = \lambda_a \partial^a$ соответственно, где $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n + p_b \Gamma_{ac}^b \partial^c$, $\partial^a = \frac{\partial}{\partial p_a}$. На тотальном пространстве D^* векторного расслоения (D^*, π, M) , где $\pi : D^* \rightarrow M$ – естественная проекция, таким образом, возникает гладкое распределение $\tilde{D} = H \oplus V$, где $H = \text{Span}(\vec{e}_a)$, $V = \text{Span}(\partial^a)$. Определим на распределении D^* обобщенную почти би-контактную структуру (J_1, J_2, J_3) , полагая $J_1 \vec{x}^h = (\varphi \vec{x})^v$, $J_1 \vec{x}^v = -(\varphi \vec{x})^h$, $J_2 \vec{x}^h = \vec{x}^v$, $J_2 \vec{x}^v = \vec{x}^h$, $J_3 = J_1 J_2$, $J_1 \partial_n = J_2 \partial_n = J_3 \partial_n = \vec{0}$.

Нетрудно проверить справедливость равенств

1. $J_1^2 = J_2^2 = 1 - \tilde{\eta} \otimes \partial_n$,

2. $J_3^2 = -1 + \tilde{\eta} \otimes \partial_n$,
3. $J_1\varphi_2 = -J_2J_1 = J_3$, где $\tilde{\eta} = \eta \circ \pi_*$.

Теорема 1. *Обобщенная почти би-контактная структура (J_1, J_2, J_3) интегрируема, если тензор Схоутена сасакиевой структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ равен нулю.*

Доказательство теоремы сводится к непосредственной проверке равенств $N_{J_i} + 2(d\tilde{\eta} \circ \varphi_i) \otimes \partial_n = 0$ в случае, когда D является распределением нулевой кривизны. Воспользовавшись структурными уравнениями $[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R_{abe}^c \partial^e$, $[\vec{\varepsilon}_a, \partial^b] = -\Gamma_{ac}^b \partial^c$, $[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = -p_b \partial_n \Gamma_{ac}^b \partial^c$, где $R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e$ – компоненты тензора Схоутена, получаем следующие выражения для компонент тензора Нейенхейса эндоморфизма J :

$$N_j(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = p_c R_{bae}^c \partial^e, N_j(\partial^a, \partial^b) = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R_{bae}^c \partial^e.$$

Что и доказывает теорему.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые N -продолженной связностью // *Мат. заметки. СВФУ.* 2015. Вып. 1. С. 25–34.
2. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические пространства с N -связностью // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2015. Т. 15, вып. 3. С. 258–264.
3. *Букушева А.В.* Применение Wolfram Language для выделения специальных классов почти контактных метрических структур // *Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : ИЦ «Наука»,* 2016. С. 105–107.
4. *Галаев С.В., Шевцова Ю.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые симплектической связностью над распределением // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2015. Т. 15, вып. 2. С. 136–141.
5. *Галаев С.В., Шевцова Ю.В.* Почти контактные кэлеровы пространства, определяемые симплектической связностью над распределением // *Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та,* 2001. Вып. 3. С. 28–31.
6. *B. Cappelletti Montano.* Bi-Legendrian structures and paracontact geometry // *Intern. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 2009. Vol. 6, №3. P. 487–504.

УДК 517.518

А. М. Шеина

О СХОДИМОСТИ ОРТОРЕКУРСИВНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ГЛАДКОЙ СИСТЕМЕ ТИПА ФАБЕРА–ШАУДЕРА

Понятие орторекурсивных разложений (далее – ОРР) было введено Т. П. Лукашенко (см., например, [1, 2]). Орторекурсивные разложения

являются естественным обобщением классических разложений элементов гильбертова пространства в ряды Фурье. Для ОРР остаются справедливыми такие свойства обычных рядов Фурье, как тождество Бесселя, неравенство Бесселя, сходимость к разлагаемому элементу эквивалента равенству Парсеваля.

В статье доказана сходимость ОРР для системы сжатий и сдвигов, порожденной интегралом функции Уолша, к разлагаемому элементу в пространстве $L_2(0, 1)$.

Определение. Пусть \mathcal{H} – гильбертово пространство. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная система элементов с единичной нормой. Для каждого элемента $f \in \mathcal{H}$ определим ОРР следующим образом.

Положим, $\widehat{f}_1 = (f, e_1)$. Если уже определены $\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_{n-1}$, тогда

$$\widehat{f}_n = (r_{n-1}(f), e_n), \text{ где } r_{n-1}(f) = f - \sum_{k=1}^{n-1} \widehat{f}_k e_k.$$

Коэффициенты $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ называются орторекурсивными коэффициентами Фурье элемента f по системе $\{e_n\}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n e_n$ – орторекурсивным рядом Фурье элемента f по системе $\{e_n\}$.

Несложно показать, что если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом, тогда орторекурсивное разложение по этой системе совпадает с классическим разложением в ряд Фурье.

В работе [3] было доказано достаточное условие сходимости ОРР. Сформулируем этот результат.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(x) \in L_2[0, 1]$ такова, что

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \neq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-k}) < \infty,$$

где $\omega_2(\varphi, \delta)$ – интегральный модуль непрерывности в $L_2[0, 1]$. Тогда для любого элемента из $L_2[0, 1]$ орторекурсивное разложение по системе сжатий и сдвигов $\{\varphi_{k,l}(x)\}$ этого элемента сходится к разлагаемому элементу.

Рассмотрим систему сжатий и сдвигов, порожденную гладкой функцией. А именно рассмотрим третью функцию Уолша. Проинтегрировав дважды эту функцию, получим гладкую функцию $\psi(x) = (4I)^2 W_3(x)$,

где $If(x) = \int_0^1 f(t)dt$ — оператор интегрирования. Можно выписать явное представление функции $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \begin{cases} 8x^2, & x \in (0, \frac{1}{4}]; \\ -1 + 8x - 8x^2, & x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]; \\ 8(1 - 2x + x^2), & x \in (\frac{3}{4}, 1]; \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases} \quad (1)$$

Легко проверить, что

$$\|\psi\|_{C[0,1]} = 1, \quad \|\psi\|_{L_2} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{23}{15}}.$$

Можно заметить, что функция $\psi(x)$ является сплайном второй степени. Ранее эта функция была рассмотрена в [4].

Пусть

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\|\psi\|_{L_2}}.$$

Далее построим систему сжатий и сдвигов, порожденную функцией $\varphi(x)$, следующим образом:

$$\varphi_{k,j}(x) = 2^{\frac{k}{2}} \varphi(2^k x + j), \quad k \geq 0, j = 0, \dots, 2^k - 1. \quad (2)$$

Покажем, что орторекурсивное разложение по системе (2) сходится к разлагаемому элементу в пространстве $L_2(0, 1)$. Для этого проверим условия теоремы 1.

Теорема 2. *ОРР любой функции $f \in L_2[0, 1]$ по системе (2), где $\varphi(x)$ задается через (1), сходится к самой функции по норме $L_2[0, 1]$.*

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 1 для системы (2). В силу определения функции $\varphi(x)$ условие

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \neq 0 \quad (3)$$

очевидно.

Проверим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-k}) \quad (4)$$

сходится.

Для этого оценим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{1+h} |\varphi(x) - \varphi(x-h)|^2 dx &= \frac{240}{23} \left(\int_0^h (8x^2)^2 dx + \int_h^{\frac{1}{4}} (8x^2 - 8(x-h)^2)^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+h} ((-1 + 8x - 8x^2) - 8(x-h)^2)^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{4}+h}^{\frac{1}{2}+h} [(-1 + 8x - 8x^2) - (-1 + 8(x-h) - 8(x-h)^2)]^2 dx \right) = \\ &= \frac{240}{69} (8h^2 - 32h^4 + 64h^5) \leq \frac{240}{69} 16h^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для модуля непрерывности имеем

$$\omega_2 = \sup_{h \leq \frac{1}{2^n}} \left(\int_0^{1+h} |\varphi(x) - \varphi(x-h)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \frac{1}{2^n}, \quad C = 16\sqrt{\frac{5}{23}}.$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(C \frac{1}{2^n} \right)^2 = \frac{1}{3} C^2.$$

Тем самым показано, что условия теоремы 1 для системы $\{\varphi_{k,j}\}$ ($k \geq 0$, $j = 0, \dots, 2^k - 1$) выполнены и, следовательно, ОРР по данной системе сходится к разлагаемому элементу в пространстве $L_2(0, 1)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лукашенко Т. П. Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приближения : тез. докл. 10-й Саратов. зимн. шк. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2000. С. 83.
2. Лукашенко Т. П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10.
3. Политов А. В. Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2010. № 3. С. 3–7.
4. Чумаченко С. А. Об одном из аналогов системы Фабера–Шаудера // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 53 / Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения-2016». Казань : Изд-во Казан. мат. о-ва, 2016. Т. 53. С. 163–164.

УДК 539.3

Н. С. Анофрикова, А. С. Бескровный

**ПОСТРОЕНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ
ДЛИННОВОЛНОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ
УРАВНЕНИЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ**

В данной работе для случая двухслойной пластины, выполненной из наследственно-упругих материалов, для описания свойств которых в качестве ядра интегрального оператора используется функция Ржаницына, на основе методики, описанной в [1], выведены двумерные уравнения для асимптотически главных компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) для тангенциального и поперечного приближений.

Рассмотрим бесконечную двухслойную пластину, оба слоя которой выполнены из наследственно-упругих материалов. Введем декартову систему координат (x_1, x_2, z) , совмещающую плоскость Ox_1x_2 со срединной плоскостью пластины и направляющую ось z по нормали к срединной плоскости. Введем обозначения: l — номер слоя ($l = 1, 2$), $\sigma_{ij}^{(l)}$ — напряжения, $u_i^{(l)}$ — перемещения в l -м слое пластины, $2h_l$ — толщина l -го слоя и $2h$ — толщина пластины.

Будем предполагать, что граничные условия на внешних поверхностях и на стыке двух слоев пластины имеют вид, представленный в статье [1].

Приведём точные трехмерные динамические уравнения теории наследственной упругости для пластины. Уравнения движения имеют вид ($i \neq j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ii}^{(l)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ji}^{(l)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{zi}^{(l)}}{\partial z} - \rho_l \frac{\partial^2 u_i^{(l)}}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{i3}^{(l)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{j3}^{(l)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(l)}}{\partial z} - \rho_l \frac{\partial^2 u_3^{(l)}}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ_l — плотность материала слоя, t — время.

Уравнения состояния в интегральной форме для l -го слоя возьмем следующие ($i \neq j = 1, 2, 3$):

$$\frac{1}{2} \tilde{E}_l \left(\frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(l)}}{\partial x_i} \right) = (1 + \tilde{\nu}_l) \sigma_{ij}^{(l)} - \tilde{\nu}_l \left(\sigma_{11}^{(l)} + \sigma_{22}^{(l)} + \sigma_{33}^{(l)} \right) \delta_{ij}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{E}_l = E_l (1 - \Gamma_l^*), \quad \tilde{\nu}_l = \nu_l + \frac{1 - 2\nu_l}{2} \Gamma_l^*. \quad (3)$$

Здесь E_l — мгновенное значение модуля Юнга, ν_l — коэффициент Пуассона, δ_{ij} — символ Кронекера и Γ_l^* — интегральный оператор l -го слоя.

В качестве ядра интегрального оператора будем использовать простейшее и в то же время достаточно общее слабосингулярное ядро Ржаницына, тогда

$$\Gamma_l^* f(t) = k_l \int_0^t \frac{e^{-\beta_l(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1-\alpha_l}} f(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где k_l — параметр вязкости, α_l — параметр сингулярности ($0 < \alpha_l \leq 1$) и β_l — параметр затухания ($\beta_l > 0$) l -го слоя.

Произведем в уравнениях (1), (2) растяжение масштабов независимых переменных по формулам статьи [1].

Введем безразмерные параметры:

$$\beta_l = L^{-1} \eta^{-a} c_{21} \tilde{\beta}_l, \quad k_l = (L \eta^a c_{21}^{-1})^{-\alpha_l} \tilde{k}_l, \quad (5)$$

где a — показатель динамичности, c_{21} — скорость волны сдвига в первом слое, $\eta = hL^{-1} \ll 1$ — относительная полутолщина пластины, L — характерный размер длины.

Будем считать, что дифференцирование и интегрирование по безразмерным переменным не меняет асимптотический порядок неизвестных величин. Остановимся на случае так называемых длинноволновых низкочастотных приближений [2]. Согласно классификации, приведенной в [2], длинноволновые приближения разделяют на тангенциальные и поперечные, соответствующие теориям растяжения и изгиба тонких пластин соответственно.

В случае тангенциальных приближений тангенциальные компоненты вектора перемещений велики по сравнению с его нормальной компонентой ($u_i^{(l)} \gg u_3^{(l)}$, $i = 1, 2$). Показатели изменчивости и динамичности для каждого слоя связаны соотношением $q = a$.

Применяя методику, описанную в статье [1], было установлено, что зависимость компонент НДС пластины от нормальной координаты для

рассматриваемого случая имеет такой же вид, как в случае модели стандартного вязкоупругого тела, а система разрешающих уравнений для асимптотически главных компонент НДС записывается следующим образом ($i \neq j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= 0, \\ [h_1 E_1 F_{12} F_{21} + h_2 E_2 F_{11} F_{22}] \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) &= F_{11} F_{12} S_{ij}, \\ 2 [h_1 E_1 F_{21} (1 - F_{32}^2) + h_2 E_2 F_{22} (1 - F_{31}^2)] \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &+ \\ + 2 [h_1 E_1 F_{21} F_{31} (1 - F_{32}^2) + h_2 E_2 F_{22} F_{32} (1 - F_{31}^2)] \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= \\ = (1 - F_{31}^2) (1 - F_{32}^2) T_i, & \end{aligned}$$

где

$$F_{1l} = 1 + \nu_l + \frac{1 - 2\nu_l}{2} \Gamma_l^*, \quad F_{2l} = 1 - \Gamma_l^*, \quad F_{3l} = \nu_l + \frac{1 - 2\nu_l}{2} \Gamma_l^*. \quad (6)$$

Выражения для перемещений u_i , усилий T_i , S_{ij} и усредненной плотности ρ совпадают с аналогичными из [1].

В случае построения поперечных приближений нормальная компонента вектора перемещений велика по сравнению с его тангенциальными компонентами ($u_3^{(l)} \gg u_i^{(l)}$, $i = 1, 2$). При этом показатели изменчивости и динамичности для каждого слоя связаны соотношением $2q = a + 1$.

Зависимость компонент НДС для рассматриваемого случая имеет такой же вид, как в случае модели стандартного вязкоупругого тела (см. [1]).

С помощью методики, описанной в [1], были получены разрешающие двумерные уравнения относительно перемещений u_i и ω , усилий T_i , S_{ij} , моментов M_i , H_{ij} и перерезывающих сил N_i ($i \neq j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial M_i}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_j} - N_i = 0, \quad \frac{\partial N_i}{\partial x_i} + \frac{\partial N_j}{\partial x_j} - 2\rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0, \\ [h_1 E_1 F_{12} F_{21} + h_2 E_2 F_{11} F_{22}] \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \\ - 2h_1 h_2 (E_1 F_{12} F_{21} - E_2 F_{11} F_{22}) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} = F_{11} F_{12} S_{ij}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left[h_1 E_1 F_{21} (1 - F_{32}^2) + h_2 E_2 F_{22} (1 - F_{31}^2) \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \\
& + 2 \left[h_1 E_1 F_{21} F_{31} (1 - F_{32}^2) + h_2 E_2 F_{22} F_{32} (1 - F_{31}^2) \right] \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \\
& - 2h_1 h_2 \left[E_1 F_{21} (1 - F_{32}^2) - E_2 F_{22} (1 - F_{31}^2) \right] \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2} - \\
& - 2h_1 h_2 \left[E_1 F_{21} F_{31} (1 - F_{32}^2) - E_2 F_{22} F_{32} (1 - F_{31}^2) \right] \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j^2} = \\
& = (1 - F_{31}^2) (1 - F_{32}^2) T_i, \\
& 2h_1 h_2 \left[E_1 F_{21} (1 - F_{32}^2) - E_2 F_{22} (1 - F_{31}^2) \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \\
& + 2h_1 h_2 \left[E_1 F_{21} F_{31} (1 - F_{32}^2) - E_2 F_{22} F_{32} (1 - F_{31}^2) \right] \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \\
& - 2 \left[\frac{h_1}{3} (h_1^2 + 3h_2^2) E_1 F_{21} (1 - F_{32}^2) + \right. \\
& \left. + \frac{h_2}{3} (h_2^2 + 3h_1^2) E_2 F_{22} (1 - F_{31}^2) \right] \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2} - \\
& - 2 \left[\frac{h_1}{3} (h_1^2 + 3h_2^2) E_1 F_{21} F_{31} (1 - F_{32}^2) + \right. \\
& \left. + \frac{h_2}{3} (h_2^2 + 3h_1^2) E_2 F_{22} F_{32} (1 - F_{31}^2) \right] \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j^2} = \\
& = (1 - F_{31}^2) (1 - F_{32}^2) M_i, \\
& h_1 h_2 \left[E_1 F_{12} F_{21} - E_2 F_{11} F_{22} \right] \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \\
& - \left[\frac{2h_1}{3} (h_1^2 + 3h_2^2) E_1 F_{21} F_{12} + \frac{2h_2}{3} (h_2^2 + 3h_1^2) E_2 F_{11} F_{22} \right] \times \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} = F_{11} F_{12} H_{ij}.
\end{aligned}$$

Выражения для двумерных неизвестных величин совпадают с аналогичными, приведенными в [1], а операторы F_{il} определяются формулами (6).

Выведенные приближенные уравнения могут быть использованы для исследования процессов распространения нестационарных волн в конечных, полубесконечных и бесконечных двухслойных наследственно-упругих пластинах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анофрикова Н. С., Вильде М. В. Низкочастотные длинноволновые приближения трехмерных динамических уравнений для случая двухслойной вязкоупругой

2. *Kaplunov Ju. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San-Diego : Academic Press, 1998. 226 p.

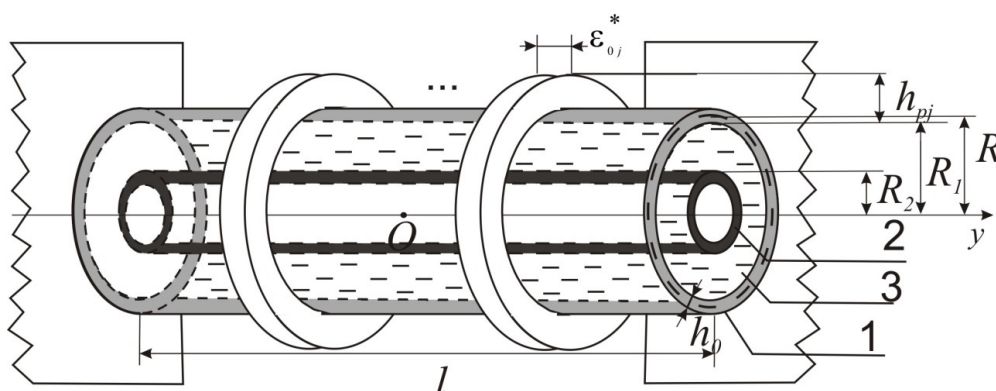
УДК 531.383: 532.516

А. Ю. Блинкова, А. В. Калинина,
Д. В. Кондратов, Е. В. Попова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ РЕБРИСТОЙ ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО ПРОФИЛЯ С УПРУГИМИ ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ ОБОЛОЧКАМИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВИБРАЦИИ

В современных условиях постоянно возрастают требования к режимам эксплуатации современных конструкций в машиностроении. Одно из основных требований – это высокая вибрационная стойкость при относительно небольшом весе конструкций. Высокую вибрационную стойкость можно обеспечить, добавив в механическую систему вязкую жидкость, при этом уменьшая толщину упругих элементов конструкции [1, 2]. Рассмотрим одну из возможных конструкций.

Рассматривается следующая механическая система, представленная на рисунке : 1 – упругая внешняя геометрически нерегулярная оболочка, свободно защемленная на концах; 2 – упругая внутренняя геометрически регулярная оболочка, свободно защемленная на концах; 3 – слой вязкой несжимаемой жидкости, полностью заполняющий пространство между внешней и внутренней оболочками.



Механическая модель системы

Конструкция крепится на некоторую поверхность, к которой приложено переносное виброускорение. Будем предполагать, что вибрация осуществляется по гармоническому закону. Кроме того, сделаем следующие

предположения: упругие перемещения внешней геометрически нерегулярной и внутренней геометрически регулярной оболочек namного толщины слоя жидкости, а также ширина цилиндрической щели кольцевого сечения, образованная двумя оболочками namного меньше, чем внешний радиус у внутренней оболочки и внутренний радиус у внешней оболочки. Радиус срединной поверхности внутренней геометрически регулярной оболочки значительно больше толщин внешней и внутренней оболочек. Также будем пренебрегать тепловыми эффектами.

Внешняя поверхность внешней оболочки трубы представляет собой геометрически нерегулярную оболочку, имеющую ребра жесткости. Высота внешней оболочки трубы изменяется ступенчато. Ребра являются внешними шпангоутами. Крепление геометрически нерегулярной оболочки на торцах имеет свободное опирание.

Математическая модель механической системы, представленной ранее, записывается в виде связанной системы уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности, уравнений динамики внешней упругой геометрически нерегулярной и внутренней геометрически регулярной цилиндрических оболочек и соответствующих граничных условий [3]. Уравнения динамики внешней геометрически нерегулярной оболочки были получены в [4].

Решение полученной задачи гидроупругости осуществляется широко известными методами возмущений [5] в безразмерных переменных, где в качестве малых параметров выбраны относительная толщина поддерживающего слоя жидкости и относительный прогиб внешней упругой ребристой цилиндрической оболочки. При этом решение ищется в виде одночленного разложения по каждому из указанных параметров в предположении гармонического закона вибрации.

Применение методов возмущений позволяет линеаризовать задачу. В результате решения находят выражения для амплитудных и фазовых частотных характеристик прогибов внешней геометрически нерегулярной и внутренней геометрически регулярной оболочек.

Исследование полученных амплитудных и фазовых частотных характеристик позволило определить частоты, на которых происходит максимальный прогиб оболочек. А следовательно, можно производить дальнейшие исследования на возникновение кавитационного эффекта.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект № МД-6012.2016.8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Башта Т. М.* Машиностроительная гидравлика. М. : Машгиз, 1963.

2. Кондратов Д. В., Могилевич Л. И. Возмущающие моменты в поплавковых гироскопах и акселерометрах с упругим корпусом // Авиакосмическое приборостроение. 2003. № 11. С. 3–9.

3. Кондратов Д. В., Кондратова Ю. Н., Могилевич Л. И., Плаксина И. В. Гидроупругость трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации при различных ее закреплениях // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2011. Т. 4, № 1. С. 29–37.

4. Кондратов Д. В., Кондратова Ю. Н., Попов В. С., Плаксина И. В. Задачи гидроупругости для трубы кольцевого сечения с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой при воздействии давления // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 70–76.

5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М. : Мир, 1967.

УДК 532.526.2

В. С. Кожанов, С. Г. Косов

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ УЧЕБНОЙ И ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ С АЭРОДИНАМИЧЕСКИМИ ПРОФИЛЯМИ

Разработана информационная система для автоматизации работы с аэродинамическими профилями (АП). Реализованы функции подбора профиля по его аэродинамическим (АД) характеристикам, генерация 3D-модели профиля, а также построение графиков зависимостей между различными АД характеристиками. Автоматизированы операции по агрегации, хранению и редактированию АД характеристик АП.

1. В связи с развитием исследовательской деятельности в области аэродинамики появилась необходимость в единой расширяемой информационной системе, предоставляющей основную информацию о характеристиках АП и позволяющей получать модель профиля для проведения экспериментальных исследований профиля: испытание на аэродинамических весах, исследования распределения давления, определение границ области перехода пограничного слоя из ламинарного состояния в турбулентное и замер сопротивления профиля путем определения потерь полного напора в среде за крылом.

Разработка подобных информационных систем и баз данных аэродинамических профилей ведется [1, 2], но большинство из них являются лишь хранилищем и не позволяют автоматизировать процесс исследования характеристик профиля и построить его 3D-модель. Разработанная система позволит не только структурировано хранить характеристики аэродинамических профилей и автоматизировать поиск профиля

по характеристикам, но и способна сгенерировать модель профиля, которую можно напечатать на 3D принтере или импортировать в проект OpenFoam для проведения численного моделирования.

Информационная система позволяет заполнять базу данных профилей либо в автоматическом режиме с удаленного информационного ресурса, либо вручную. Начальное заполнение базы производится с ресурса [3].

Модель профиля строится по исходному набору координат, описывающих его контур. Так как часто нет возможности получить в качестве исходных данных достаточное для построения гладкой модели число этих координат, к имеющимся данным применяется алгоритм интерполяции.

Информационная система поддерживает два алгоритма интерполяции: кубический сплайн и кривые Безье.

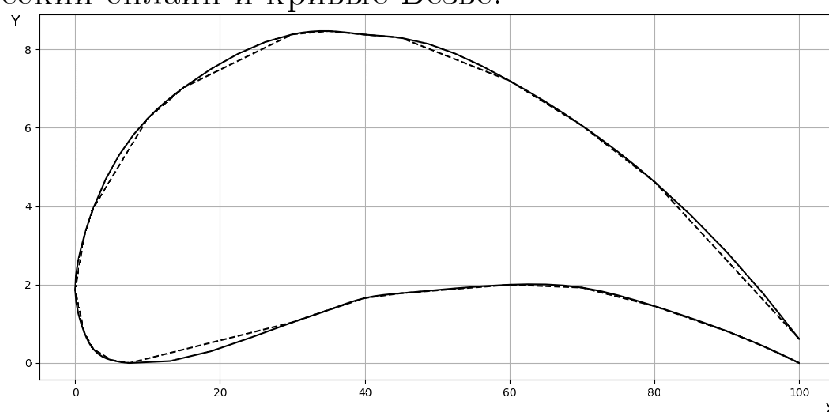


Рис. 1. Сравнение контура профиля до и после интерполяции

На рис. 1 демонстрируется изображение профиля, построенного по исходным точкам (ломаная линия) и с применением интерполяции кубическим сплайном.

2. В качестве хранилища данных используется NoSql база данных – MongoDB. Это связано с тем, что информации об одном профиле может быть больше, чем о другом. Данное решение позволит при дальнейшем развитии информационной системы обойтись без изменения структуры таблиц.

Информационная система имеет клиент-серверную архитектуру, что позволяет осуществлять доступ к ее ресурсам с любого устройства, которое способно работать с протоколом HTTP.

При проектировании системы был применен паттерн MVC, позволивший добиться малой зависимости между различными функциональными модулями. Это направлено на то, чтобы упростить поддержку и дальнейшее развитие системы.

Доступ к данным осуществляется с помощью API информационной системы, основанной на REST. То есть для получения или изменения

данных клиент отправляет серверной части приложения GET или POST запрос, а в ответ получает данные в формате JSON. Архитектура приложения показана на рис. 2.

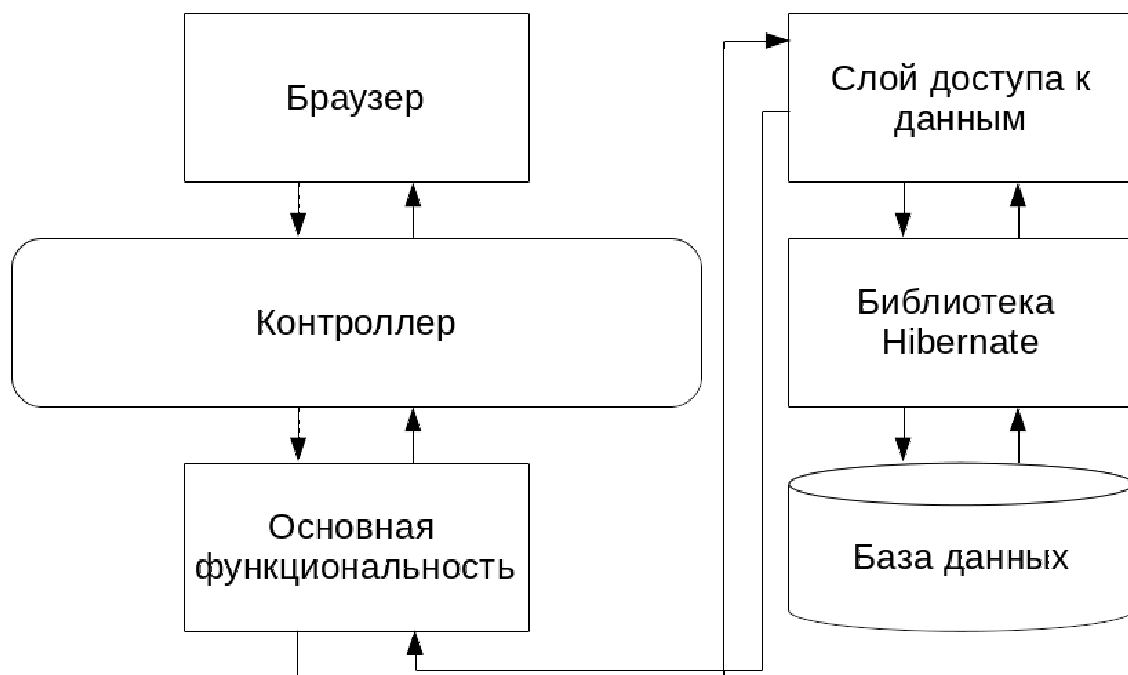


Рис. 2. Общая архитектура приложения

Для предоставления данных пользователю реализован клиент, интегрированный в приложение. Он позволяет осуществлять доступ к основным функциям информационной системы через графический интерфейс. Информация отображается с помощью HTML страниц. На каждой странице есть меню, содержащее список групп профилей (разбиение на группы реализовано по первой букве в названии), информация об статусе авторизации. Информация о профиле может быть представлена двумя способами (страницами):

- список профилей в выбранной группе – на этой странице содержится краткое описание профиля, его изображение, ссылки на скачивание файла с координатами его контура и на страницу подробной информации.
- детальная информация о профиле – здесь пользователь может получить файл в формате STL с 3D моделью профиля, перейти к редактированию информации, а также ознакомиться с графиками зависимостей основных аэродинамических характеристик.

Использование RESTapi позволяет легко реализовывать новые клиенты, расширяющие возможности или изменяющие формат представления информации. Также реализованная информационная система может

быть использована как «ядро», а дополнительный функционал реализуется с помощью отдельных приложений, которые также работают по протоколу HTTP. В итоге будет получено приложение с микросервисной архитектурой, которое легко размещается на независимых серверах, облегчая нагрузку на них.

Информационную систему можно развернуть не только в рамках локальной сети, но и открыть к ней доступ извне.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Pan Qiyuan, Han Zhonghua, Song Wenping.* A Universal Aerodynamic Database Technique for Airfoils Based on XML Data Format and Surrogate Modeling // *Advances in Aeronautical Science and Engineering.* 2013. Vol. 4, № 1. P. 55–63.
2. *Gilbert L., Crouse, Jr.* Development of a comprehensive and consistent airfoil performance database for conceptual design. 6–9 January 2003, Reno, Nevada. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. (AIAA), 2003. P. 2003–1096
3. URL: <http://airfoiltools.com/> (дата обращения: 04.02.2017).

УДК 531.38:629

В. С. Кожанов, Г. Д. Севостьянов

НОВАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАКЛОНА ПРИ ВРАЩЕНИИ СВОБОДНОГО ТЕЛА

Получена математическая модель кинематики вращения летательного аппарата (ЛА) (3-й порядок). Приведены тестовые расчёты.

В [1] нелинейные кинематические уравнения Эйлера приведены к уравнению второго порядка для угла нутации, конечному уравнению для угла собственного вращения и квадратуре для угла прецессии. В [2] такое упрощение сделано для вращения ЛА и качки корабля. В [3, 4] приведены более ранние системы уравнений кинематики тела с неподвижной точкой.

Кинематические уравнения вращения ЛА, разрешенные относительно производных, имеют вид [5, с. 24]:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \quad \dot{\Psi} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta \cdot (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma),\end{aligned}\quad (1)$$

где ([5, с. 17]) ϑ – угол тангажа, Ψ – угол рыскания, γ – угол крена; $\bar{\omega}(t) (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ – известная мгновенная угловая скорость ЛА и её координаты на оси связанной системы $X_k Y_k Z_k$. Основная система $X_g Y_g Z_g$.

Следуя [1], упростим систему. Обозначим:

$$\begin{aligned} \omega_y &= \Omega \sin \chi, \quad \omega_z = -\Omega \cos \chi, \quad \Omega > 0, \\ \Omega^2 &= \omega_y^2 + \omega_z^2, \quad \operatorname{tg} \chi = -\frac{\omega_y}{\omega_z}, \quad \tau = \int_{t_0}^t \Omega(t) dt, \quad f' = \frac{df}{d\tau} = \frac{\dot{f}}{\Omega}, \end{aligned} \quad (2)$$

τ – интегральное время.

Тогда из (1) имеем:

$$\begin{aligned} \Psi' \cos \vartheta &= \sin(\gamma + \chi), \quad \vartheta' = -\cos(\gamma + \chi), \\ \Psi' \sin \vartheta &= \frac{\omega_x}{\Omega} - \gamma'. \end{aligned} \quad (3)$$

Перемножим первое, второе уравнения и $\sin \vartheta$ и учтём третье:

$$-\left(\frac{\omega_x}{\Omega} - \gamma'\right) \cos \vartheta \cos(\gamma + \chi) = \sin \vartheta \sin(\gamma + \chi) \vartheta'.$$

Вычтя из обеих частей $(\gamma' + \chi') \cos \vartheta \cos(\gamma + \chi)$, имеем:

$$\sigma \cos \vartheta \cdot \vartheta' = -[\cos \vartheta \sin(\gamma + \chi)]',$$

где $\sigma(\tau) = \omega_x/\Omega + \chi' = (\varphi_x + \chi)'$ – известная функция. Для функции $s(\tau) = \sin \vartheta$:

$$1 - s^2 - s'^2 = \cos^2 \vartheta \sin^2(\gamma + \chi),$$

поэтому

$$\left(\sqrt{1 - s^2 - s'^2}\right)' = -s', \quad |s| \leq 1,$$

т.е. имеем (см. [2]) уравнение 2-го порядка для $s(\tau)$:

$$s^2 + s'^2 + \left(\frac{s'' + s}{\sigma}\right)^2 = 1, \quad s = \sin \vartheta. \quad (4)$$

Тогда $\vartheta = \arcsin s(\tau)$, из 2-го уравнения (3) $\gamma = -\chi + \arccos \vartheta' + 2\pi m$. Из 1-го уравнения (3) $\Psi' \cos^2 \vartheta = \cos \vartheta \sin(\gamma + \chi) = \pm \sqrt{1 - s^2 - s'^2}$, тогда

$$\Psi = \pm \int_0^\tau \frac{\sqrt{1 - s^2 - s'^2}}{1 - s^2} d\tau + \Psi_0. \quad (5)$$

При дифференцировании (4) распадается на два линейных уравнения.

В пространстве $s_1 s_2 s_3$ ($s_1 = s$, $s_2 = s'$, $s_3 = (s'' + s)/\sigma$) уравнение (4) приводит к единичной сфере ($s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$). Введя сферические координаты $\vartheta, \mu, 1$ на ней для изображающей точки

$$\begin{aligned} s_1 = s &= \sin \vartheta, \quad s_2 = s' = \cos \vartheta \sin \mu, \\ s_3 &= \frac{s'' + s}{\sigma} = \cos \vartheta \cos \mu, \end{aligned} \quad (6)$$

и подставив s в s_2 , получим: $\dot{\vartheta} = \Omega \sin \mu$; после подстановки s и s' в s_3 имеем:

$$\dot{\mu} = -\Omega(\operatorname{tg}\vartheta \cos \mu - \sigma).$$

Из (3) $\vartheta' = -\cos(\gamma + \chi) = \sin \mu$, тогда $\gamma = -\chi + \mu + \pi/2$.

Из последнего уравнения (3)

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{\sin \vartheta}(\omega_x - \dot{\gamma}) = \frac{1}{\sin \vartheta}(\Omega\sigma - \dot{\mu}) = \Omega \frac{\cos \mu}{\cos \vartheta}.$$

Таким образом, имеем систему 3-го порядка для ϑ , μ , γ , Ψ :

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \Omega \sin \mu, & \dot{\mu} &= -\Omega(\operatorname{tg}\vartheta \cos \mu - \sigma), \\ \gamma &= -\chi + \mu + \frac{\pi}{2}, & \dot{\Psi} &= \Omega \frac{\cos \mu}{\cos \vartheta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где Ω , σ , χ – известные функции:

$$\Omega = \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad \sigma = \frac{\omega_x}{\Omega} - \frac{\dot{\omega}_y \omega_z - \omega_y \dot{\omega}_z}{\Omega^3}, \quad \chi = -\operatorname{arctg} \frac{\omega_y}{\omega_z}. \quad (8)$$

Два первых уравнения (для ϑ и μ) можно решать отдельно.

Начальные условия для (1):

$$t = t_0: \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad \Psi = \Psi_0$$

переходят в следующие:

$$t = t_0: \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \mu_0 = \arcsin \frac{\omega_{y0} \sin \gamma_0 + \omega_{z0} \cos \gamma_0}{\Omega_0}, \quad \gamma = \gamma_0, \quad \Psi = \Psi_0.$$

Введя замену $\Phi = \operatorname{tg}\vartheta$, $|\Phi| \leq \infty$, упростим (7):

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \Omega(1 + \Phi^2) \sin \mu, \\ \dot{\mu} &= -\Omega(\Phi \cos \mu - \sigma), \\ \gamma &= -\chi + \mu + \pi/2, \\ \dot{\Psi} &= \Omega \sqrt{1 + \Phi^2} \cos \mu, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Phi_0 = \operatorname{tg}\vartheta_0$; $\vartheta = \operatorname{arctg}\Phi$.

Уравнение (4) имеет бесконечный класс частных аналитических решений (задав $s(\tau)$, определяем $\sigma(\tau)$). При $\sigma = 0$ для s имеем уравнение $s'' + s = 0$, тогда

$$\vartheta = \pm \int_{t_0}^t \Omega t dt + \vartheta_0, \quad \mu = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

При полёте ЛА в вертикальной плоскости $\sigma \equiv 0$ ($\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega_z(t)$, $\gamma = 0, \pi$, $\Psi = \Psi_0$). Тогда $\dot{\vartheta} = \omega_z(t)$.

Тестовые примеры.

а) Если имеем ($n = \text{const}$, $n_1 = \text{const}$)

$$\begin{aligned}\omega_x &= n \sin \vartheta_0 + n_1, \\ \omega_y &= |n \cos \vartheta_0| \cos [n_1(t - t_0) + \gamma_0 - \mu_0], \\ \omega_z &= -|n \cos \vartheta_0| \sin [n_1(t - t_0) + \gamma_0 - \mu_0].\end{aligned}\quad (11)$$

то

$$\begin{aligned}\Omega &= |n \cos \vartheta_0|, \quad \chi = \frac{\pi}{2} - n_1(t - t_0) - \gamma_0, \quad \mu \equiv 0, \\ \sigma &= \frac{n \sin \vartheta_0}{|n \cos \vartheta_0|} = \pm \text{tg} \vartheta_0, \quad \gamma = n_1(t - t_0) + \gamma_0, \quad \vartheta \equiv \vartheta_0, \quad \dot{\Psi} = n,\end{aligned}$$

что соответствует развороту ЛА с вращением около продольной оси (регулярная прецессия).

б) Если в (11) заменить ϑ_0 на β ($|\sin \beta| > |\sin \vartheta_0|$), то

$$\Omega = |n \cos \beta|, \quad \sigma = \frac{n \sin \beta}{|n \cos \beta|} = \pm \text{tg} \beta = \sigma_c.$$

Есть частное решение (4):

$$\sin \vartheta = s = \sin \vartheta_0 + a \sin [|n|(t - t_0)], \quad a = |\text{ctg} \beta| \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \vartheta_0},$$

т.е. получаем прецессию с нутацией.

При $\beta = \beta_1 = \arcsin \sqrt{\sin^2 \vartheta_0}$, $\vartheta_0 > 0$ достигается $\vartheta_* = \pi/2$.

в) При $n_1 = 0$ в (12) имеем вращение ЛА при развороте с креном.

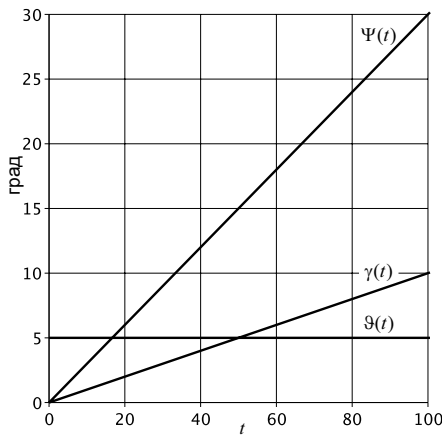


Рис. 1

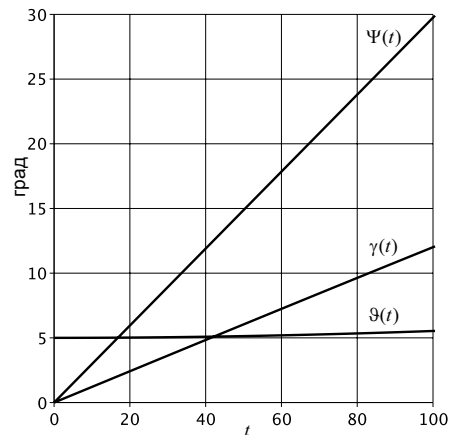


Рис. 2

На рис. 1, 2 представлены расчёты углов вращения ЛА для случаев регулярной и нерегулярной прецессии соответственно при $n = 0.3^\circ$, $n_1 = 0.1^\circ$, $\vartheta_0 = 5^\circ$, $\beta = 9^\circ$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г. Д. О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195–198.
2. Севостьянов Г. Д. К кинематике тела с неподвижной точкой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 141–144.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Кузнецов Е. Б. Об одном подходе к интегрированию кинематических уравнений Эйлера // Журн. выч. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38, № 11. С. 1806–1813.
5. Бочкарёв А. Ф., Андреевский В. В., Белокоп В. М. Аэромеханика самолёта // Динамика полёта : учебник для авиац. вузов; под ред. А. Ф. Бочкарёва и В. В. Андреевского. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1985. 360 с.

УДК 519.6, 629.78

И. А. Панкратов

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РАСЧЁТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

1. Постановка задачи. Предположим, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения космического аппарата (КА) направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Рассмотрим следующую задачу: пусть необходимо перевести орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]:

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = u\frac{r}{c}\mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2}\mathbf{i}_3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const},$$

из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (1)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ?, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \text{vect} \left[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t^*) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left(\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) \right] = \mathbf{0},$$

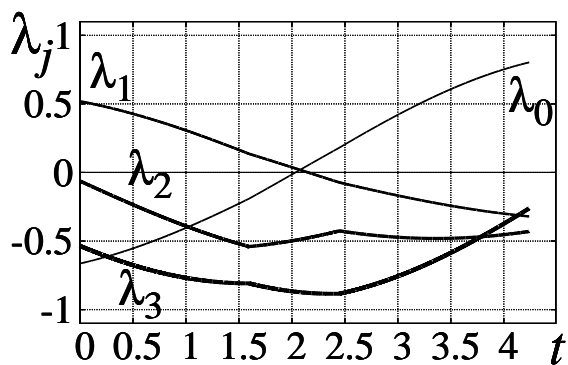
за минимальное время с помощью кусочно-постоянного управления

$$u(t) = \begin{cases} u_{start}, & \text{если } 0 \leq t < t_1, \\ -u_{start}, & \text{если } t_1 \leq t < t_2, \\ \dots \\ u_{start} \cdot (-1)^{k-1}, & \text{если } t_{k-1} \leq t < t_k, \\ \dots \\ u_{start} \cdot (-1)^{M-1}, & \text{если } t_{M-1} \leq t \leq t_M = t^*. \end{cases}$$

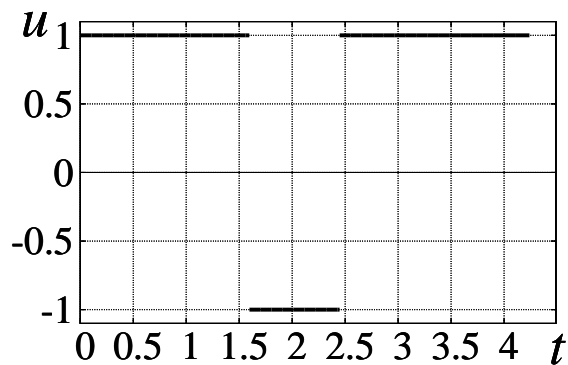
При этом количество участков активного движения КА M полагается заданным. Известно, что в случае быстрогодействия оптимальное управление, найденное с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина, имеет именно такой вид.

Здесь $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат η в инерциальной системе координат X (ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА, а ось η_3 перпендикулярна плоскости орбиты), \circ – символ кватернионного умножения; u – проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА); r – модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА; c – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ центра масс КА); $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; φ – истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); p и e – параметр и эксцентриситет орбиты; $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3$ – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); $u_{start} \in \{-u_{max}, u_{max}\}$ – значение управления на первом участке активного движения КА; $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$ – искомые величины (длительности участков активного движения КА).

2. Алгоритм решения задачи. В работах [2, 3] поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. При этом двухточечная краевая задача решалась численно с помощью оригинального алгоритма, являющегося комбинацией методов Рунге–Кутты, модифицированного метода Ньютона и градиентного спуска. В этой задаче отсутствуют формулы для нахождения неизвестных начальных значений сопряжённых переменных. Необходимо отметить также плохую



a



б

Круговая орбита, ГЛОНАСС : *a* – фазовые переменные; *б* – оптимальное управление

сходимость начальных приближений для значений сопряжённых переменных к тем значениям, которые доставляют нули функциям невязок из-за постоянного попадания в их локальные минимумы, где итерационные методы не дают хороших результатов. В настоящей статье к решению этой задачи применён генетический алгоритм [4]. Данный способ нахождения оптимальных траекторий перелётов КА не требует знания начальных значений сопряжённых переменных.

Далее будем рассматривать случай, когда орбита КА является круговой, при этом $e = 0$, а $r^b = 1$. Отметим, что орбиты спутниковых группировок ГЛОНАСС и GPS близки к круговым.

Отметим основные особенности предлагаемого алгоритма: вместо вещественного числа Δ_k в памяти хранится целое число u_k^{int} (ген); для каждой особи находится по известной формуле [5] значение кватерниона ориентации орбитальной системы координат при $t = t^* = t_M$ с начальными условиями (1) (управление задаётся выбранной хромосомой); производится скрещивание особи с наименьшим значением целевой функции со всеми остальными, в том числе и с самой собой; в качестве оператора скрещивания был выбран метод промежуточной рекомбинации; во время мутации гены всех особей записываются в двоичном виде и с вероятностью $p_{mut} \in (0; 1]$ инвертируется один бит каждого гена.

Отметим, что описанный алгоритм необходимо применять неоднократно для разных начальных популяций. При этом будет получено несколько решений, из которых необходимо выбрать то, которое соответствует переориентации орбиты за меньшее время.

На рисунке приведены результаты решения задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА для случая, когда кватернион конечной ориентации орбиты КА соответствует ориентации орбиты одного

из спутников отечественной орбитальной группировки ГЛОНАСС (отличие ориентаций орбит по угловым переменным составляет единицы градусов).

В дальнейшем предполагается оптимальное количество участков активного движения КА определять в ходе решения задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю. Н., Панкратов И. А.* Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70–73.

2. *Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.

3. *Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.* Численное исследование задачи переориентации орбиты космического аппарата с использованием орбитальной системы координат // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 132–136.

4. *Панченко Т. В.* Генетические алгоритмы. Астрахань : Астраханский университет, 2007. 87 с.

5. *Панкратов И. А., Челноков Ю. Н.* Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84–89.

УДК 519.257

Г. П. Шиндяпин, А. А. Матутин, М. С. Шахрай

К РАСЧЕТУ ЗАВИСИМОСТИ МАКСИМАЛЬНОГО ПОВЫШЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА ОТ ГАЗСОДЕРЖАНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ

Методами нелинейной теории взаимодействия ударных волн (УВ) в газожидкостных средах (ГЖС) [1] установлены границы области рефракции УВ, характеризующиеся возникновением отраженной УВ (в жидкости), определено максимальное повышение давления на невырожденной преломленной УВ (в газе).

1. Режимы рефракции УВ. При падении УВ (рис. 1) относительно малой интенсивности $\varepsilon = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$, ($\varepsilon \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$) под углом α к вертикали на свободную поверхность АФ океана, разделяющую воздух и воду с газосодержаниями γ^+ , γ^- , возникают различные режимы рефракции [2, 3] : RW—рефракция с отраженной УВ; RR—регулярная рефракция с волной разрежения; TNR—twin Neumann ref. с двойной

отраженной УВ; BPR—bound precursor ref. (когда преломленная УВ в т. А вертикальна); LSR—lambda shok ref. (когда преломленная УВ опережает падающую) и др.

Особый интерес представляет режим RW с отраженной УВ AC, когда интенсивность преломленной УВ AD $q^+ = \frac{p_3 - p_0}{p_1 - p_0}$ может превышать интенсивность падающей УВ AB в зависимости от $\varepsilon, \alpha, \gamma$. Относительное газосодержание водной среды [1] $\gamma = \gamma^- = \frac{m_{II}}{m_I}$ (m_{II} — масса пузырьков газа, m_I — масса жидкости пузырьковой газожидкостной среды (ГЖС) при $0 \leq \gamma \leq 10^{-4}$).

При использовании модели гомогенной локально равновесной ГЖС (см. [1]) (с газосодержаниями γ^- для жидкости и $\gamma^+ = \infty$ для газа) были установлены основные параметры для относительно слабых УВ (ρ_0 — плотность, c_0 — скорость звука)

$$\bar{\varepsilon} \ll 1, \bar{\varepsilon} = L_0(\gamma)\varepsilon = R_0(\gamma)P_{10}, P_{10} = \frac{p_1 - p_0}{B_0(\gamma)}, \quad (1)$$

$$B_0(\gamma) = \rho_0(\gamma)c_0^2(\gamma), L_0(\gamma) = \frac{P_0 R_0(\gamma)}{B_0(\gamma)}$$

($R_0(\gamma)$ находится из выражения для скорости элемента УВ $\left(\frac{D_0}{c_0}\right)^2 = 1 + R_0(\gamma)P_{10}$).

2. Условия на фронтах УВ. Для получения общих результатов (уточняющих теорию коротких волн (ТКВ) ($\alpha \sim \bar{\varepsilon}^{1/2}$)) при произвольных углах падения α для режима RW (когда УВ пересекаются в точке А (ξ_A, η_A)) запишем условия на фронтах в автомодельных переменных (см. [1]) $\xi = x/c_0 t, \eta = y/c_0 t, \bar{v}(u, v)$. Условия на фронтах $\xi = \xi(\eta)$ с локальными интенсивностями $P_{ji} = \frac{p_j - p_i}{B_0^\pm}, B_0^\pm = \rho_0^\pm c_0^{\pm 2}$ (i — значение перед фронтом, j — за фронтом), отражающие условия динамической

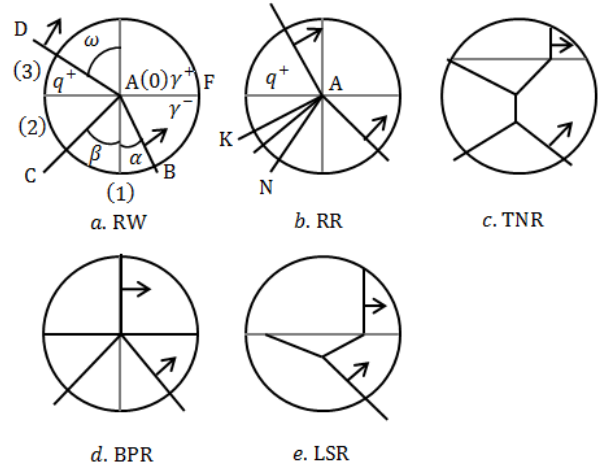


Рис. 1. Режимы рефракции

совместности ($\xi' = d\xi/d\eta$) (в модели Эйлера) (см. [1]):

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i}{\rho_0} \cdot \frac{\left[(\xi - \eta\xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right]^2}{1 + \xi'^2} &= N(P_{ji}); \quad \frac{\rho_i}{\rho_j} = \frac{N(P_{ji}) - P_{ji}}{N(P_{ji})}, \\ P_{ji} &= \frac{\rho_i}{\rho_0} \left[(\xi - \eta\xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right] \cdot \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right), \\ \xi' \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right) &= \frac{v_i}{c_0} - \frac{v_j}{c_0}; \quad N(P_{ji}) = \frac{1 + 2a}{2} \cdot \frac{(d_1 + P_{ji})(d_2 + P_{ji})}{d_3 + P_{ji}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты a, d_1, d_2, d_3 зависят от газосодержания среды γ^+ или γ^- (см. [1]).

Условия совместности течений на свободной поверхности АФ (в верхней и нижней областях) в точке А ($\eta_A^+ = \eta_A^- = 0, x_A/t = c_0\xi_A$) приводят [4] к установлению двух инвариантов (см. рис. 1, $a, p_3 = p_2, v_{3n} = v_{2n}$)

$$(I) : c_0^+ \xi_A^+ = c_0^- \xi_A^-, \quad \text{или} \quad \frac{c_0^+ N^{1/2}(P_{30})}{\cos \omega} = \frac{c_0^- N^{1/2}(P_{10})}{\cos \alpha}. \quad (3)$$

$$(II) : \quad \frac{v^+ - c_0^+ \eta_A^+}{u^+ - c_0^+ \xi_A^+} = \frac{v^- - c_0^- \eta_A^-}{u^- - c_0^- \xi_A^-}. \quad (4)$$

С учетом (I) инварианта (3) второй инвариант (II) (4) примет вид ($\eta_A^+ = \eta_A^- = 0$)

$$c_0^- \xi_A^- = \frac{v_3 u_2 - v_2 u_3}{v_3 - v_2}. \quad (5)$$

Используя точные выражения (2) на фронтах УВ (АВ, АС, АД) для u_2, v_2, u_3, v_3 и выражения $\alpha^\nu = \text{tg } \alpha / \bar{\varepsilon}^{1/2}, \bar{c} = c_0^- / c_0^+, \bar{\rho} = \rho_0^- / \rho_0^+, c_\gamma = \left(1 - \frac{1}{\bar{c}}\right) / \bar{\varepsilon}, \bar{L} = L_0^- / L_0^+$, получим:

$$\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha \left(1 - \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} q^+ \bar{\varepsilon} \right), \quad \xi_A^{-2} = \frac{N(P_{10})}{\cos^2 \alpha} \approx \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{\cos^2 \alpha}. \quad (6)$$

Можно записать (II) инвариант в виде ($P_{30} = q^+ \bar{\rho} \bar{c}^2 P_{10}, P_{21} = (q^+ - 1) P_{10}, N(P_{30}) = 1 + \bar{L} R_0^- q^+ P_{10}, N(P_{21}) = 1 + 2 R_0^- P_{10} + R_0^- P_{21}$)

$$\begin{aligned} (1 + \bar{\varepsilon}) \left[\text{tg } \omega P_{30} - \bar{c}^2 \text{tg } \alpha \left(2 - q^+ + \frac{q^+ - 1}{2 \sin^2 \alpha} q^+ \bar{\varepsilon} \right) P_{10} \right] &= \\ = \cos^2 \alpha \left[q^+ \text{tg } \omega - \text{tg } \alpha \left(2 - q^+ + \frac{q^+ - 1}{2 \sin^2 \alpha} q^+ \bar{\varepsilon} \right) \right] P_{10} P_{30}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение (7) представляет (II) инвариант при произвольных ω ($\omega \geq 0$). Исключая ω из (3), (7), имеем выражение для расчета q^+ в зависимости от α , P_{10} , γ [5].

3. Границы режима RW.

- Граница $\omega = 0$ Из (7) при $\omega = 0$ получим $\left[q^+ - 2 - \frac{q^+ - 1}{2 \sin^2 \alpha} q^+ \bar{\varepsilon} \right] \cdot \left[\bar{c}^2 (1 + \bar{\varepsilon}) - \cos^2 \alpha P_{30} \right] = 0$. Граница $\omega = 0$ реализуется за счет первого множителя

$$\sin^2 \alpha = \frac{q^+(q^+ - 1)}{2(q^+ - 2)} \bar{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \alpha^{\nu^2} = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{\bar{\varepsilon}} = \frac{q^+}{2 \left(\frac{q^+ - 2}{q^+ - 1} \right) - q^+ \bar{\varepsilon}}. \quad (8)$$

Формула (8) уточняет результаты теории коротких волн (ТКВ, используемой при $\alpha \sim \bar{\varepsilon}^{1/2}$).

- Левая граница области RW. Для фронта АС при $\xi' = \text{tg} \beta$, разрешая первое уравнение (2) относительно ξ' и приравнявая нулю подкоренное выражение, получим

$$\cos^2 \alpha = \frac{N^2(P_{10})}{N(P_{21})(N(P_{10} - P_{10})) + 2N(P_{10})P_{10}}. \quad (9)$$

Оценивая порядки величин в (9) (при $c_0^- \approx c_0^+$, $\gamma \sim 10^{-6}$, $P_{10} \sim 10^{-4}$, $P_{21} = (q^+ - 1)P_{10}$), получим (с погрешностью порядка 10^{-3}) уравнение

$$\cos^2 \alpha = \frac{N^2(P_{10})}{N^2(P_{21})} = \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{1 + \bar{\varepsilon} + q^+ \bar{\varepsilon}}, \quad \text{или} \quad \alpha^{\nu^2} = \frac{q^+}{1 + \bar{\varepsilon}}. \quad (10)$$

Формула (10) уточняет результат ТКВ ($\alpha^{\nu^2} = q^+$).

4. Область существования режима RW. На рис. 2 проставлены результаты расчета границ режима RW [5] согласно (10) с режимом TNR и согласно (8) с BPR и LSR; граница $q^+ = 1.0$ с режимами RR и RRW при фиксированных значениях ε (при $\varepsilon = 0.041$). Уравнения (3), (4) для инвариантов (I), (II) при исключении ω приводят к уравнению для интенсивности q^+ (при RW) [4]

$$\bar{c}^2 \frac{N(P_{30})}{P_{30}^2} \left[\frac{P_{10} \sin \alpha}{N^{1/2}(P_{10})} + \frac{P_{21} \sin \beta}{(\rho_1/\rho_0^-)^{1/2} N^{1/2}(P_{21})} \right]^2 = 1 - \frac{N(P_{30})}{\bar{c}^2 N(P_{10})} \cos^2 \alpha. \quad (11)$$

При рефракции RW с невырожденной преломленной УВ AD (при $q^+ \geq 1$) [3], при $c_0^- \approx c_0^+$ ($\gamma \approx \approx 10^{-6}$), значениях $(\bar{\rho}\bar{c})^2 \sim 10^6$ левая часть (11) может быть отброшена и для поля газосодержаний $\gamma = const$ имеем в общем случае уравнение (равенство правой части нулю)

$$2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - q^+/\bar{L} + 1 = 0. \quad (12)$$

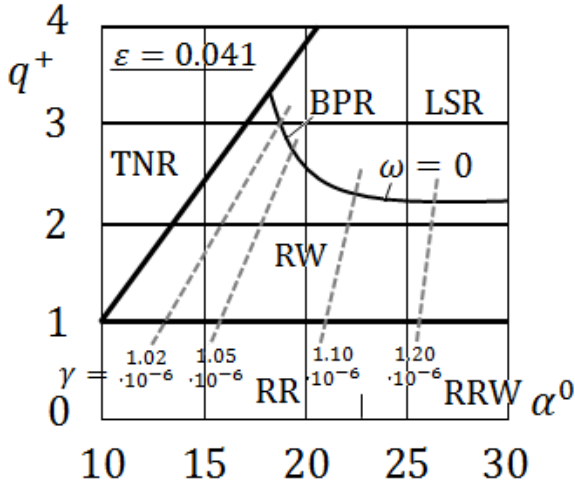


Рис. 2. Область рефракции RW при $\varepsilon = 0.041$

На Рис. 2 на область режима RW нанесено поле газосодержаний (поле кривых $\gamma = const$) согласно (12) при фиксированных значениях интенсивности ε . Как показывают результаты расчетов [5] при различных значениях интенсивности падающей волны ε , максимальные значения параметра q^+ , характеризующего интенсивность преломленной УВ AD и являющимся максимальным для всей области RW, достигается в точке пересечения границ с областями TNR и BPR.

5. Расчет максимального повышения давления при рефракции RW.

Исключая α из (8), (10) имеем в точке пересечения границ RW зависимость

$$\bar{\varepsilon} = \frac{q^+ - 3}{q^{+2} - 1}. \quad (13)$$

(при $q^+ = 3$, $\bar{\varepsilon} = 0$; $q^+ = 4$, $\bar{\varepsilon} = 0.066$)

Зависимость (12) устанавливает связь q^+ от γ и по (10) от α^ν

$$\alpha^{\nu^2} = \frac{q^+(q^{+2} - 1)}{q^{+2} + q^+ - 4}. \quad (14)$$

На Рис. 3 изображены зависимости максимального возрастания давления q^+ от γ и угла падения α от γ в точке пересечения границ области рефракции RW с областями TNR и BPR (см. рис. 2).

Максимальная интенсивность q^+ преломленной УВ АД монотонно растет с возрастанием ε от $q^+ = 3$ при $\varepsilon = 0$; угол наклона α , характеризующий положение точки с $\max q^+$ на линии $\omega = 0$, также возрастет с ростом интенсивности ε .

Приведенные результаты показывают, что при режиме рефракции RW (с отраженной УВ АС) максимальное повышение давления (интенсивность преломленной УВ) может существенно превышать интенсивность падающей УВ.

При переходе к режимам BPR, LSR, TNR, когда преломленная УВ падает вертикально (к свободной поверхности) и уходит вперед (опережая падающую), ее интенсивность падает.

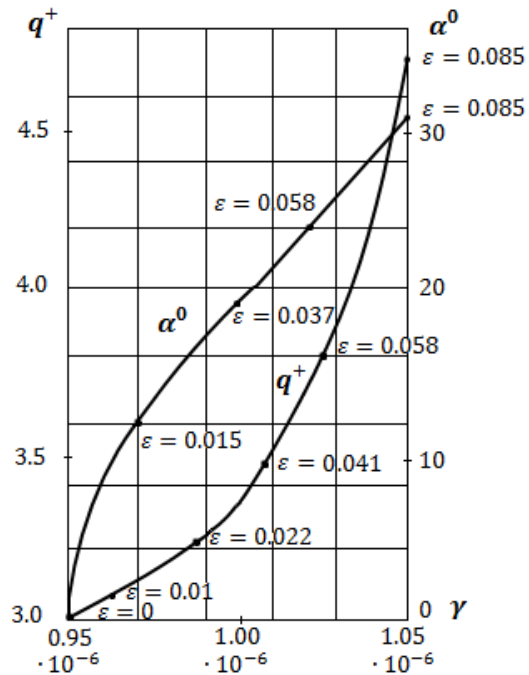


Рис. 3. Зависимость q^+ ; α^0 от γ в точке пересечения границ области RW

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. Henderson L. F., Ma J., Sakurai A., Takayama K. Refraction of shock wave at an air–water interface // Fluid Dynamic Research. 1990. № 5. P. 337–350.
3. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. Возникновение невырожденной ударной волны в воздухе при рефракции ударной волны в океане // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 136–141.
4. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. О законах подобия рефракции ударных волн в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.
5. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А., Баранова Ю. Д. Влияние газосодержания водной среды на границы режимов рефракции ударных волн на поверхности океана // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 141–146.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АБРАМОВА В. В., ДУДОВ С. И. О свойствах функции псевдорасстояния до выпуклого множества	3
БЕЛИЧЕНКО К. В., СОБОЛЕВ В. М. Синк-аппроксимация данных RFID меток	7
БОНДАРЕНКО Н. П. Обратная задача для системы Дирака с интегральным запаздыванием типа свёртки	9
БОНДАРЕНКО И. Е., БРЕДИХИН Д. А. О многообразии группоидов отношений с операцией дескрипции совместных неподвижных точек	13
БРЕДИХИН Д. А. Об одном классе группоидов отношений с диофантовыми операциями	16
БУКУШЕВА А. В. Продолженные почти контактные структуры с метрикой Чигера–Громола	18
ВОДОЛАЗОВ А. М., КОРОЛЕВА О. А. Некоторые свойства алгебры целозначных функций на торах	22
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю., ФАРВАЗЕТДИНОВА Е. М. Об аппроксимации параметров динамического процесса с использованием минимаксного подхода	24
ГАЛАЕВ С. В. О геометрии продолженных почти AP-структур	28
ГОРДИЕНКО В. Г., ГОЛОХВАСТОВА С. А. Об экстремуме одного линейного функционала в классе S^M	31
ГУДОШНИКОВА Е. В. Сходимость последовательности операторов	34
ЕФРЕМОВА Л. С., ЮРКО В. А. Восстановление дифференциальных и интегро-дифференциальных пучков на A-графах	37
КОРНЕВ В. В., ХРОМОВ А. П. Сходимость формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для простейшего неоднородного волнового уравнения	41
КОРОЛЕВА О. А. Аналог теоремы Жордана – Дирихле для интегрального оператора с ядром, имеющим скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат	44
КУЗНЕЦОВА И. А. Иерархические игры с конечноопределённым правилом выбора	46
КУРДЮМОВ В. П., ХРОМОВ А. П. Смешанная задача для волнового уравнения с квадратично суммируемым потенциалом	49
ЛУКАШОВ А. Л., ФЕДОРОВА К. А. Об одном точно решаемом примере модели рынка с тремя взаимодействующими акциями	53

ЛУКАШОВ А. Л., ФЕДОСЕЕВА В. А. Об одном утверждении из работы Рюшендорфа «On Upper and Lower Prices in Discrete-Time Models» . . .	55
ЛУКОМСКИЙ С. Ф., КОМИССАРОВА Н. Е. Об алгоритме построения N -валидных деревьев	57
МАКАРОВ А. В., ДУДОВ С. И. Критерий равномерного приближения многозначного отображения, заданного двумя сегментными функциями, полиномиальной вектор-функцией	60
МОЛЧАНОВ В. А. Нестандартные многообразия конечных упорядоченных полугрупп	64
МОЛЧАНОВ В. А., ФАРАХУТДИНОВ Р. А. Распознавание регулярных выражений с помощью конечных автоматов	67
НЕБАЛУЕВ С. И., КРИВОБОК В. В. О действиях фундаментальных групп толерантных пространств	70
НЕБАЛУЕВ С. И., СЕЦИНСКАЯ Е. В. О гипотезе Зимана для конечных толерантных пространств	73
НОВИКОВ В. Е. Ведущие признаки в задаче распознавания концепта	75
ПОЛИКАРПОВ С. И. Представление конечного детерминированного автомата композиций простейших автоматов	77
ПОПЛАВСКИЙ В. Б. О перманентах и теореме Фробениуса–Кёнига	81
ПОПЛАВСКИЙ Д. В., ЮРКО В. А. Об обратной спектральной задаче для интегро-дифференциальных операторов первого порядка	84
ПОПОВИЧ А. В. Об алгебрах отношений с домино операциями	88
РОЗЕН В. В. Ситуации транзитивного равновесия в играх с упорядоченными исходами	91
РЫХЛОВ В. С. Об n -кратной полноте корневых функций дифференциальных пучков операторов с постоянными коэффициентами n -го порядка	93
ТРЫНИН А. Ю. О принципе локализации синк-аппроксимаций на классе непрерывных функций	97
ХВОРОСТУХИНА Е. В. Об эпиморфизмах универсальных гиперграфических полуавтоматов	99
ХРОМОВ А. А. О скорости аппроксимации при усреднении непрерывных функций	101
ХРОВОВА Г. В. Об уравнении Абеля с инволюцией	104
ШЕВЦОВА Ю. В. Обобщенные би-контактные структуры на кораспределениях сасакиевых многообразий	106
ШЕИНА А. М. О сходимости орторекурсивного разложения по гладкой системе типа Фабера–Шаудера	108

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНОФРИКОВА Н. С., БЕСКРОВНЫЙ А. С. Построение низкочастотных длинноволновых приближений трехмерных уравнений наследственной теории упругости для случая двухслойной пластины	112
БЛИНКОВА А. Ю., КАЛИНИНА А. В., КОНДРАТОВ Д. В., ПОПОВА Е. В. Моделирование гидроупругих колебаний ребристой трубы кольцевого профиля с упругими внешней и внутренней оболочками при воздействии вибрации	116
КОЖАНОВ В. С., КОСОВ С. Г. Разработка автоматизированной информационной системы для поддержки учебной и исследовательской работы с аэродинамическими профилями	118

КОЖАНОВ В. С., СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Новая математическая модель определения наклона при вращении свободного тела	121
ПАНКРАТОВ И. А. Генетический алгоритм расчёта оптимальных перелётов космического аппарата	125
ШИНДЯПИН Г. П., МАТУТИН А. А., ШАХРАЙ М. С. К расчёту зависимо- сти максимального повышения давления при рефракции ударной вол- ны на поверхности океана от газосодержания водной среды	128

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 19

Ответственный за выпуск *Ю. В. Матвеева*
Технический редактор *Т. А. Трубникова*
Корректор *Е. Б. Крылова*
Оригинал-макет подготовила *М. М. Попова*

Подписано в печать 27.12.2017.
Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 8,14 (8,75). Тираж 100 экз. Заказ 3-Т.

Издательство Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета. 410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.