УДК 517.518.8, 517.955

Метрика Хаусдорфа в задачах математической физики с разрывными данными[1]

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

На примере задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности обсуждается вопрос о характере приближения решения к начальному условию в хаусдорфовой метрике. В качестве начального условия выбрана простейшая разрывная функция $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$. Для хаусдорфова расстояния между решением, задаваемым формулой Пуассона, и функцией $u_0(x)$ найдены двусторонняя оценка и асимптотика. Аналогичная модельная задача рассмотрена для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости. Доказаны соответствующие двусторонняя оценка и асимптотика хаусдорфова расстояния.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Коши, уравнение Лапласа, задача Дирихле, формула Пуассона, метрика Хаусдорфа.

Hausdorff metric in problems of mathematical physics with discontinuous data[1]

A. B. Kostin, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

Using the example of the Cauchy problem for the one-dimensional heat equation, we study the problem of approximation of the solution to the initial condition in the Hausdorff metric. The simplest discontinuous function $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$ was chosen as the initial condition. A two-sided estimate and an asymptotics for the Hausdorff distance between the solution given by the Poisson formula and the function $u_0(x)$ are obtained. A similar model problem is considered for the Laplace equation in the upper half-plane. In such a problem, a two-sided estimate and an asymptotics for the corresponding Hausdorff distance are also obtained.

Keywords: heat equation, Cauchy problem, Laplace equation, Dirichlet problem, Poisson formula, Hausdorff metric.

Понятие расстояния между множествами по Хаусдорфу возникло более ста лет назад (см. [1]). Начиная с середины прошлого века метрика Хаусдорфа (кратко, H-метрика) активно используется в теории аппроксимации разрывных функций (см., например, [2], [3]). Потребность в хаусдорфовых приближениях возникает в ситуациях, когда равномерная сходимость или сходимость в L_p к предельной функции отсутствует, а имеет место визуальное сближение графиков как множеств на плоскости. В статье [4] рассматривался наглядный пример аппроксимации в H- метрике функции знака $f(x) = \operatorname{sgn} x$ последовательностью непрерывных функций $g_n(x) = (2/\pi)\operatorname{arctg} nx$ и была получена асимптотика хаусдорфова расстояния

$$H(f,\, g_n) \,=\, \sqrt{\frac{2}{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \qquad n \to \infty.$$

В процессе обсуждения нашего доклада профессор И. В. Тихонов задал вопрос о приближении в H- метрике разрывной функции соответствующим интегралом Пуассона. Часть утверждений, полученных в этом направлении, опубликована на английском языке в [5]. Сейчас мы дадим сжатое изложение основных результатов [5] и наметим вопросы для дальнейшего развития темы.

Напомним, что H- расстоянием между двумя замкнутыми множествами X, Y плоскости Oxy называется величина

$$H(X,Y) \,=\, \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid X \subset U_\varepsilon(Y), Y \subset U_\varepsilon(X)\right\},$$

где ε- окрестность множества X имеет вид

$$U_\varepsilon(X) \,=\, \left\{M \mid \rho(M;X) \leqslant \varepsilon\right\},$$

а расстояние от точки $M = M(x,y)$ до множества X задаётся формулой

$$\rho(M;X) \,=\, \inf\left\{\operatorname{dist}(M,M') \mid M' \in X\right\},$$

в которой

$$\operatorname{dist}(M,M') \,=\, \max\left(|x-x'|, |y-y'|\right)$$

есть расстояние между точками $M(x,y)$ и $M'(x',y')$ плоскости.

Под дополненным графиком функции f будем понимать наименьшее замкнутое множество $F(f)$ плоскости Oxy, содержащее график Γ_f этой функции и являющееся выпуклым относительно оси Oy. Последний термин означает, что вместе с любыми двумя точками $(x,y_1),(x,y_2) \in F(f)$ множеству $F(f)$ принадлежит и вертикальный отрезок, соединяющий точки (x,y_1) и (x,y_2). Хаусдорфовым расстоянием между двумя функциями f и g называется H- расстояние между их дополненными графиками $F(f)$ и $F(g)$, т. е. $H(f,g) \,=\, H(F(f),F(g))$.

Рассмотрим задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности с модельной начальной функцией:

$$u_t \,=\, u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) \,=\, \operatorname{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Классическая формула Пуассона для уравнения теплопроводности после несложных преобразований даст «решение» задачи (1), (2) в виде

$$u(x,t) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x/(2\sqrt{t})} e^{-\eta^2}\, d\eta\,, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{3}$$

Из (3) не вполне ясно, в каком смысле реализуется начальное условие (2). Оказывается, что в такой задаче очень естественной выглядит трактовка (2) как равенства нулю соответствующего предела в H-метрике: $\lim\limits_{t\to 0+} H\big(u(\cdot,t),\operatorname{sgn}\big) = 0$. Действительно, как показано в [5], для хаусдорфова расстояния $H\big(u(\cdot,t),\operatorname{sgn}\big)$ между «решением» $u(x,t)$ и начальной функцией $u_0(x) = \operatorname{sgn} x$ при всех достаточно малых значениях $t > 0$ верна оценка

$$2\sqrt{t\left(\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} - \ln\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)} \;<\; H\big(u(\cdot,t),\operatorname{sgn}\big) \;<\; 2\sqrt{t\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}}\,,$$

влекущая асимптотику

$$H\big(u(\cdot,t),\operatorname{sgn}\big) \;=\; 2\sqrt{t\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}} \;+\; O\left(\sqrt{t\left(\ln\ln\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)}\right)\,, \qquad t \to 0+\,.$$

Тем самым указанное расстояние с известной скоростью стремится к нулю при $t \to 0+$. В то же время, функция (3) не имеет предела при $(x,t) \to (0,0)$ изнутри верхней полуплоскости (множество предельных значений целиком заполняет отрезок $[-1,1]$), что не позволяет понимать начальное условие (2) в привычном смысле.

Близкая картина наблюдается и в задаче Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, когда требуется найти функцию $u(x,y)$ так, чтобы

$$\Delta\, u \;=\; 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) \;=\; \theta(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Здесь в граничном условии стоит функция Хевисайда

$$\theta(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ограниченное «решение» задачи Дирихле (4), (5) в полуплоскости даётся известной формулой Пуассона

$$u(x,y) \;=\; \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\xi$$

и легко упрощается к виду

$$u(x,y) \;=\; \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \qquad x\in\mathbb{R}, \quad y>0. \tag{6}$$

Как в таком случае следует понимать граничное условие (5)? Ведь в точке $(0,0)$ у функции (6) предела изнутри области не существует, а предел

$$\lim_{y\to 0+} u(0,y) \;=\; \frac{1}{2}\neq 0=\theta(0).$$

На помощь снова приходит метрика Хаусдорфа. В статье [5] авторы проверили, что H-расстояние $H\big(u(\cdot,y),\,\theta\big)$ между функцией (6) и функцией Хевисайда стремится к нулю при $y\to 0+$, доказав двустороннюю оценку

$$\sqrt{\frac{y}{2\pi}\left(1+\sqrt{1-\frac{4\pi y}{3}}\right)} \;<\; H\big(u(\cdot,y),\,\theta\big) \;<\; \sqrt{\frac{y}{\pi}}\,, \qquad 0\;<\;y\;\leqslant\;\frac{3}{4\pi}\,,$$

и, как следствие, — асимптотику

$$H\big(u(\cdot,y),\,\theta\big) \;=\; \sqrt{\frac{y}{\pi}}\;+\;O(y\sqrt{y}), \qquad y\to 0+\,.$$

Таким образом, постановка рассматриваемой задачи Дирихле становится разумной, если граничное условие (5) понимать как соответствующий передел в метрике Хаусдорфа, а именно — как $\lim\limits_{y\to 0+} H\big(u(\cdot,y),\,\theta\big)=0$.

В докладе планируется обсудить дальнейшее развитие обозначенных выше вопросов на более широкие классы разрывных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М: ОНТИ, 1937.

[2] *Сендов Б. Х.* Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24, № 5(149). С. 141–178.

[3] *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций // Матем. сб. 1976. Т. 101(143), № 4(12). С. 508–541.

[4] *Костин А. Б., Садекова Е. Х., Шерстюков В. Б.* Два модельных примера приближения разрывных функций гладкими в метрике Хаусдорфа // Системы компьютерной математики и их приложения. 2022. Вып. 23. С. 251–257.

[5] *Kostin A. B, Sherstyukov V. B.* Application of the Hausdorff metric in model problems with discontinuous functions in boundary conditions // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 274, No. 4. P. 511–522.