УДК 517. 956.32+517.984

Метод Фурье и построение обобщенного решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения[1]

И. С. Ломов (Москва, Россия)
lomov@cs.msu.ru

При минимальных условиях на правую часть волнового уравнения построено обобщенное решение смешанной задачи. Решение представлено в виде ряда из метода Фурье, найдена его сумма. Приведен вид обобщенного решения смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, резольвентный метод, обобщенная задача.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284..

The Fourier method and the construction of the generalized solution of the mixed problem for the inhomogeneous wave equation[1]

I. S. Lomov (Moscow, Russia)
lomov@cs.msu.ru

Under minimal conditions, a generalized solution of the mixed problem is constructed on the right side of the wave equation. The solution is presented as a series from the Fourier method, its sum is found. The form of a generalized solution of a mixed problem for an inhomogeneous telegraphic equation is given.

Keywords: mixed problem, wave equation, resolvent method, generalized problem..

Acknowledgements: The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the implementation of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under Agreement No. 075-15-2022-284..

Введение. Рассматривается следующая смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,\infty)\}, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u_x(0,t) + a_1 u(0,t) + b_1 u(1,t) = 0,$$

$$U_2(u) \equiv u_x(1,t) + a_2 u(0,t) + b_2 u(1,t) = 0,\ t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

где коэффициенты $a_i, b_i, i = 1, 2,$ — произвольные комплексные числа, а комплекснозначная функция $f(x,t) \in \mathcal{L}(Q_T)$, суммируемая функция, $Q_T = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T)\}$, $T > 0$ — произвольно зафиксированное число. Будем называть функцию $f(x,t)$ локально суммируемой в полуполосе Q.

Отметим, что задача (1)–(3) при $f(x,t) = 0$, ненулевых потенциале и начальной функции, была исследована в работе [1]. Найдены необходимые и достаточные условия существования сильного решения задачи. Применен метод А.П. Хромова, основаннный на использовании подхода А.Н. Крылова для ускорения сходимости рядов Фурье и на идее Л. Эйлера по работе с расходящимися рядами. Для исследования неоднородной задачи (1)–(3) этот метод применить не удается. Будет использована другая схема, предложенная В.В. Корневым и А.П. Хромовым.

1. Задаче (1), (2) поставим в соответствие дифференциальный оператор L, действующий в пространстве $\mathcal{L}^2(0,1)$:

$$L: \quad ly = -y''(x), x \in (0,1), \quad U_j(y) = 0, j = 1, 2, \tag{4}$$

где U_j — краевые формы (2). Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор.

Выпишем формальный ряд из метода Фурье, отвечающий задаче (1)–(3) (см. [2]):

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\Big[\int\limits_0^t \big(R_\lambda f(\cdot,\tau)\big)\frac{\sin\varrho(t-\tau)}{\varrho}d\tau\Big]d\lambda, \tag{5}$$

$x \in [0,1], t \geqslant 0$. Здесь $R_\lambda\big(f(\cdot,\tau)\big)$ означает, что оператор R_λ применяется к функции $f(x,\tau)$ по переменной x (τ — параметр), $\lambda = \varrho^2$, $\mathrm{Re}\varrho \geqslant 0$, γ_n — образ в λ–плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\varrho : \ |\varrho - \pi n| = \delta\}$, число $\delta > 0$ и достаточно мало, число $r > 0$ достаточно велико и зафиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \geqslant n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все контуры γ_n при $n \geqslant n_0$ находятся вне круга радиуса $|\lambda| = r$, а остальные собственные значения — внутри этого круга.

Для вывода формулы (5) использован резольвентный подход, связанный с методом Коши–Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты по спектральному параметру. Он имеет преимущество по сравнению с традиционным методом разделения переменных, поскольку не требует ни уточнения асимптотики собственных значений, ни информации о кратности спектра или о наличии присоединенных функций. Вид контуров интегрирования в формуле (5) может быть и иным. Главное здесь, что все собственные значения оператора (4) находятся в объединении областей, охватываемых этими контурами.

Решение задачи (1)–(3) называем *сильным*, если оно удовлетворяет условиям (2), (3) в обычном смысле, а уравнению (1) — почти всюду в области Q.

Теорема 1 ([2], теорема 1). *Если* $u(x,t)$ *— сильное решение задачи* (1)–(3), *причем дополнительно выполняется условие единственности* $u_{tt}(x,t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ *при любом* $T > 0$, *то оно единственно и находится по формуле* (5), *в которой ряд справа при любом зафиксированном* $t \geqslant 0$ *сходится абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$.

Теорема 1 говорит о том, что формальный ряд (5) и смешанная задача (1)–(3) тесно связаны. Расширим понятие этой связи.

Правая часть равенства (5) имеет смысл для любой функции $f(x,t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ при любых $T > 0$. В этом случае будем говорить, что выражение (5) также является формальным решением смешанной задачи (1)–(3), понимаемой чисто формально. Будем называть ее *обобщенной смешанной задачей.*

Таким образом, мы сначала определяем формальное решение (5), которое теперь выглядит как реальный объект (несмотря на то, что ряд (5), вообще говоря, расходящийся), и заключаем, что он соответствует новой смешанной задаче (обобщенной) (1)–(3). То есть и здесь мы устанавливаем связь смешанной задачи с рядом (5).

Наша цель: доказать, что для всех значений $(x,t) \in Q$ ряд (5) сходится для любой функции $f(x,t)$ из указанного класса. Этот ряд мы и назовем *обобщенным решением* (обобщенной) смешанной задачи (1)–(3).

Для того чтобы выяснить, какой вид имеет сумма ряда (5), заметим следующее: $\varrho^{-1}\sin\varrho(t-\tau) = \int_0^{t-\tau}\cos\varrho\eta\, d\eta$, применим новую аксиому для расходящихся рядов [1] $\int\sum = \sum\int$, где $\int$ — определенный интеграл, тогда ряд (5) можно записать следующим образом:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\Big[\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\tau}\big(R_\lambda f(\cdot,\tau)\big)\cos\varrho\eta\, d\eta d\tau\Big]d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau} Z_0\big(x,\eta,f(\cdot,\tau)\big)d\eta,$$

где $Z_0\big(x,\eta,f(\cdot,\tau)\big)$ — формальное решение задачи (1)–(3) в случае однородного уравнения (1), с начальной функцией $\varphi(x) = f(x,\tau)$, τ —

параметр. За сумму ряда Z_0 примем следующее выражение [1]:

$$Z_0\big(x, \eta, f(\cdot, \tau)\big) = \frac{1}{2}\big[\tilde{f}(x+\eta, \tau) + \tilde{f}(x-\eta, \tau)\big],$$

где $\tilde{f}(\eta, \tau)$ есть продолжение по η функции $f(\eta, \tau)$ с отрезка $[0,1]$ на всю прямую. Тогда имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} \big[\tilde{f}(x+\eta,\tau) + \tilde{f}(x-\eta,\tau)\big]\,d\eta = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{6}$$

Теперь правая часть равенства (6) определена при всех $(x,t) \in (-\infty,\infty) \times [0,\infty)$.

Припишем сумму (6), вообще говоря, расходящемуся ряду (5). Если функция $f(x,t)$ достаточно гладкая, то ряд (5) есть сильное решение задачи (1)–(3).

2. Теорема 2. *Пусть функция $f(x,t)$ — локально суммируема в полуполосе Q. Тогда при любом зафиксированном числе $t \geqslant 0$ ряд* (5) *сходится к функции $u(x,t)$, определяемой формулой* (6), *равномерно по x на любом отрезке $[a,b] \subset (0,1)$. При этом на всем отрезке $[0,1]$ имеет место следующая оценка скорости сходимости ряда* (5) *к функции* (6):

$$\Big\| S_n(x,t) - \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta \Big\|_{\mathcal{L}^2(0,1)} \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

где через $S_n(x,t)$ обозначена n–я частичная сумма ряда (5).

В дальнейшем будет построено обобщенное решение задачи (1)–(3) с ненулевым суммируемым потенциалом, зависящем от двух переменных, и с ненулевой начальной функцией, суммируемой на отрезке $[0,1]$. Это решение можно получить одним из двух методов, предложенных А.П. Хромовым, — секвенциальным или аксиоматическим методами [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238.

[2] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731.

[3] *Ломов И. С.* Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 11. –С. 1471–1483.