Министерство науки и высшего образования РФ

ФГБОУ ВО "Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского"

Факультет нелинейных процессов

А.В. Савин, Д.В. Савин

ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ. МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие для студентов 1 курса направлений "Прикладные математика и физика", "Радиофизика", "Информационные системы и технологии"

Саратов 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Установка ЛКМ-4: описание и принципы работы

Установка ЛКМ-4 состоит из основной части и измерительного блока (рис.1). Основная часть установки состоит из основания 1 и прикрепленной к нему стойки 2. На стойке закреплен шкив 3, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, и неподвижная шкала 4, позволяющая определять угол поворота шкива.

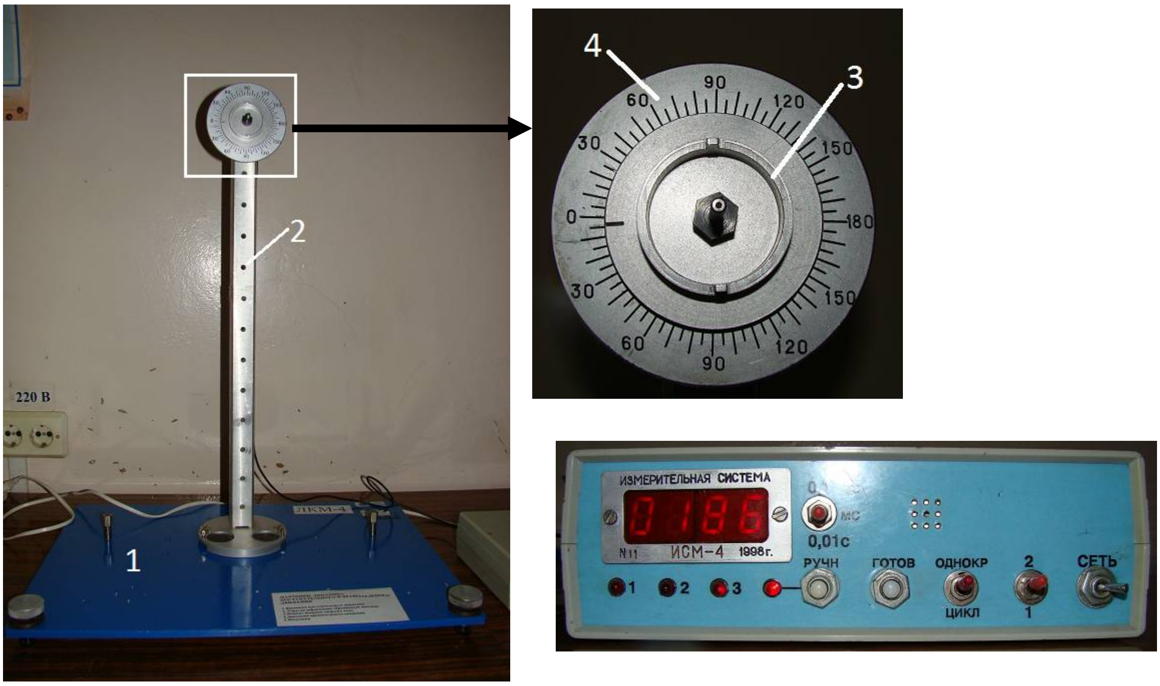


Рис. 1

В состав измерительного блока входит пара светодиод-фотоэлемент, закрепленная на неподвижной шкале так, что шкив перекрывает поток света от светодиода к фотоэлементу (рис. 2). В шкиве сделана прорезь, в момент прохождения которой мимо светодиода свет от него попадает на фотоэлемент. Это приводит к срабатыванию измерительного блока, при этом раздается звуковой сигнал. Прорезь расположена таким образом, что момент срабатывания измерительного блока соответствует нахождению нанесенной на лицевую сторону шкива риски напротив отметки "0" неподвижной шкалы. На цифровой индикатор измерительного блока выводится время между двумя его последовательными срабатываниями в секундах или миллисекундах в зависимости от положения ручки переключения диапазонов, расположенной справа от индикатора.

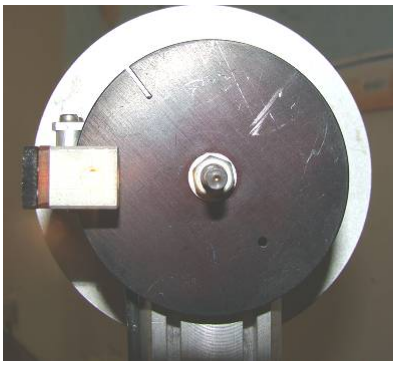


Рис. 2

Измерительный блок имеет два переключателя: "1/2" и "Цикл/Одн.". Если переключатель "1/2" находится в положении "1", то измерительный блок срабатывает при каждом прохождении прорези мимо светодиода; если же в положении "2" – то только при нечетных прохождениях (первом, третьем, пятом и т.п.).

При нахождении переключателя "Цикл/Одн" в положении "Цикл" блок измеряет время между прохождениями прорези мимо светодиода постоянно, выводя результаты на индикатор. В положении "Одн" измеряется только первый интервал времени, и соответствующие показания остаются на индикаторе прибора независимо от дальнейшего движения шкива. Для проведения в этом режиме новых измерений необходимо нажать кнопку "Готов", при этом показания индикатора сбросятся.

Лабораторная работа № 1. Определение ускорения свободного падения при помощи машины Атвуда

Целью работы является исследование движения грузов в машине Атвуда и определение с ее помощью ускорения свободного падения.

Оборудование и материалы: в работе используется установка ЛКМ-4 с измерительным блоком, а также наборы грузов известной массы и подставки для них.

Краткие теоретические сведения

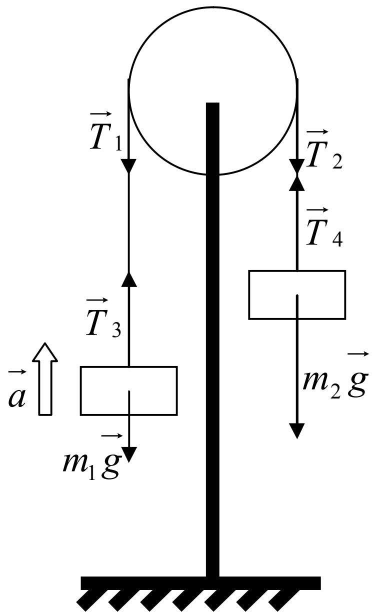


Рис. 1.1.

Рассмотрим два груза массами m_1 и m_2, прикрепленные к концам перекинутой через шкив нити. Действующие на грузы силы изображены на рис. 1.1. Будем считать нить невесомой и нерастяжимой. Вследствие невесомости нити действующая в ней сила натяжения одинакова в любой точке (т.е. T_1=T_3 и T_2=T_4). Вследствие нерастяжимости нити грузы за равное время проходят равные отрезки, следовательно, движутся с одинаковыми по модулю ускорениями.

Будем считать, что массой шкива и трением в его оси можно пренебречь. В этом случае силы натяжения T_1 и T_2 также равны (доказательство этого факта будет приведено ниже). Тогда, записав второй закон Ньютона для каждого из грузов, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} m_2 g - T &= m_2 a, \\ m_1 g - T &= -m_1 a, \end{aligned} \tag{1.1}$$

из которой несложно выразить ускорение свободного падения через ускорение грузов:

$$g = a\frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} \tag{1.2}$$

Таким образом, измерив ускорение, с которым движутся грузы, можно по формуле (1.2) определить ускорение свободного падения.

Для получения более точного результата необходимо учесть наличие конечной массы у шкива. В этом случае силы натяжения левого и правого участка нити уже не равны, а вторые законы Ньютона для грузов необходимо дополнить уравнением, описывающим движение блока:

$$\begin{aligned} &m_2 g - T_2 = m_2 a, \\ &m_1 g - T_1 = -m_1 a, \\ &(T_2 - T_1) R = I\beta, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где I – момент инерции шкива, β – его угловое ускорение, R – радиус той части шкива, на которую намотана нить. Из простых кинематических соображений следует, что $\beta R = a$.

Заметим, что если масса шкива пренебрежимо мала, то его момент инерции также пренебрежимо мал. Поскольку шкив связан с грузами конечной массы, то его ускорение при этом остается конечным, и из третьего уравнения системы (1.3) следует, что разность сил натяжения T_1 и T_2 также будет пренебрежимо мала.

Выражая из (1.3) ускорение свободного падения, получим

$$g = a\frac{m_2 + m_1 + \dfrac{I}{R^2}}{m_2 - m_1}. \tag{1.4}$$

Таким образом, для того, чтобы минимизировать вносимую шкивом погрешность, необходимо выбирать подвешиваемые грузы так, чтобы их суммарная масса была достаточно большой, в этом случаем слагаемым I/R^2 в числителе формулы (1.4) можно будет пренебречь, и она сведется к формуле (1.2). В используемой в работе установке значение момента инерции шкива составляет примерно $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ кг·м^2.

Теперь учтем наличие трения в оси шкива. В этом случае третье уравнение системы (1.3) примет вид

$$(T_2 - T_1) R - M = I\beta, \tag{1.5}$$

где M – момент сил трения, действующих на ось шкива. Решая его совместно с двумя первыми уравнениями (1.3), можно получить:

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \dfrac{I}{R^2}} - \frac{M}{R(m_2 + m_1 + \dfrac{I}{R^2})}. \tag{1.6}$$

В дальнейшем пренебрежем для простоты слагаемым I/R^2 в знаменателе, тогда соотношение (1.6) можно переписать в виде

$$a = gq - A, \tag{1.7}$$

где введены обозначения $q = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}, A = \dfrac{M}{R(m_2 + m_1)}$.

Видно, что зависимость ускорения от величины q является линейной функцией, причем ее угловой коэффициент как раз и является ускорением свободного падения. Таким образом, для определения значения g необходимо построить соответствующий график и определить его угловой коэффициент.

Ход работы

Прикрепите к концам нити крючки и подвесьте на них подставки для грузов. (Масса каждой подставки 50 г, не забывайте учитывать ее при подсчете масс прикрепленных к концам нити грузов.) Перекинув нить через шкив, подберите ее длину так, чтобы один из грузов находился на основании установки, а второй как можно ближе к шкиву. Убедитесь, что при перемещении верхнего груза вниз шкив совершает не менее двух оборотов.

Обратите внимание, что у шкива есть два желобка для намотки нити. Выберите один из них и следите, чтобы в процессе измерений нить оставалась намотанной именно на него. Измерьте его диаметр при помощи штангенциркуля и используйте впоследствии в расчетах.

Упражнение 1. Проверка равноускоренности движения грузов

Разместите на подставках наборы грузов так, чтобы их масса была различной. Включите питание измерительного прибора, переключатель «Цикл/Одн» установите в положение «Одн», переключатель «1/2» установите в положение «1». Переместите более тяжелый груз вниз и расположите шкив так, чтобы сразу после отпускания груза метка прошла через отметку «0». Нажав кнопку «Готов», сбросьте показания прибора. Отпустите грузы и запишите показания прибора. Они соответствуют времени одного оборота шкива t_1. Повторите измерения с тем же набором грузов не менее 5 раз.

Затем переключатель «1/2» переместите в положение «2» и повторите описанные выше измерения. Теперь показания прибора соответствуют времени двух оборотов шкива t_2.

Результаты занесите в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

№	m_1, г	m_1, г	t_1, с	t_2, с	$\langle t_1 \rangle$, с	$\langle t_2 \rangle$, с	Δt_1, с	Δt_2, с	$\langle \Delta t_1 \rangle$, с	$\langle \Delta t_2 \rangle$, с
1										
2										
3										
4										
5										

Вычислите средние значения величин t_1 и t_2 и величину $D = \dfrac{\langle t_2 \rangle^2}{\langle t_1 \rangle^2}$, а также погрешность ее измерения. В случае равноускоренного движения величина D должна быть равна 2 (докажите это самостоятельно).

Повторите описанные выше измерения для другого набора грузов. Сделайте вывод о том, можно ли считать наблюдаемое движение равноускоренным.

Упражнение 2. Определение ускорения свободного падения без учета сил трения.

Методом, описанным в упражнении 1, проведите измерения времени одного оборота шкива для нескольких (2-3) наборов грузов. Для каждого набора проведите измерения не менее 5-ти раз. По времени одного оборота определите ускорение грузов

$$a = \frac{4\pi R}{t^2} \tag{1.8}$$

(получите эту формулу самостоятельно), а затем по формуле (1.4) – ускорение свободного падения. Результаты занесите в таблицу 1.2. Оцените погрешность результата.

Таблица 1.2

№	m_1, г	m_2, г	t, с	$\langle t \rangle$, с	Δt, с	$\langle \Delta t \rangle$, с	a, м/с^2	g, м/с^2
1								
2								
3								
4								
5								

Заметим, что определение ускорения грузов по времени одного оборота шкива имеет существенную случайную погрешность. Это вызвано в основном наличием погрешности в начальном положении шкива. Для уменьшения этой погрешности можно устанавливать шкив так, чтобы в начальном положении метка находилась на отметке «180». В этом случае отсчет времени запустится в тот момент, когда шкив уже сделает пол-оборота. (Подумайте, почему случайная погрешность при этом оказывается меньше.) Теперь, однако, для расчета ускорения нельзя использовать формулу (1.8), поскольку в момент начала отсчета времени шкив не находится в покое. Рекомендуем получить формулу для расчета ускорения в этом случае самостоятельно.

Упражнение 3. Определение ускорения свободного падения с учетом сил трения

Возьмите некоторый набор грузов достаточно большой суммарной массы. Поместите все эти грузы на одну подставку и определите ускорение по методике, описанной в упражнении 2. Перемещая грузы по одному на другую подставку до тех пор, пока массы грузов на подставках не станут равны, определяйте в каждом случае ускорение. По известным массам грузов и моменту инерции шкива вычислите в каждом случае величину q, результаты занесите в таблицу 1.3.

Таблица 1.3

№	m_1, г	m_2, г	q	t_1, с	t_1, с	…	t_5, с	$\langle t \rangle$, с	a, м/с^2
1									
2									
…									

По данным таблицы постройте график зависимости a от q. Проведите на графике прямую линию так, чтобы она проходила как можно ближе к экспериментальным точкам. Определите ускорение свободного падения как угловой коэффициент этой прямой. Сравните результат с полученным в упражнении 2 и с известным значением ускорения свободного падения. Сделайте выводы.

Контрольные вопросы

1. Докажите, что при равноускоренном движении величина D (см. упражнение 1) равна 2.

2. Получите формулы (1.2) и (1.4).

3. Получите формулу, связывающую ускорение грузов со временем одного оборота шкива.

4. Объясните, каким образом можно определить ускорение свободного падения с учетом сил трения.

5. Почему при описанном в упражнении (2) альтернативном способе запуска шкива случайная погрешность измерения времени одного оборота меньше?

Литература

1. Д.В. Сивухин. Курс общей физики, т.1, §§ 3, 11, 32, 33.

2. И.В. Савельев. Курс общей физики, т.1, §§ 9, 10, 14, 38.

Лабораторная работа № 2. Исследование упругих деформаций пружин

Целью работы является исследование явлений, связанных с упругой деформацией пружин

Оборудование и материалы: в работе используется установка ЛКМ-4 с измерительным блоком, а также пружины, наборы грузов известной массы и подставки для них.

Краткие теоретические сведения

Воздействие на твердые тела внешних сил приводит к их деформации, т.е. изменению размеров. Причиной этого является изменение расстояний между атомами кристаллической решетки. Деформация называется *упругой*, если после прекращения действия внешних сил она полностью исчезает, т.е. тело восстанавливает первоначальную форму. В противном случае деформация называется *пластической*.

При малых деформациях упругого тела (далее в качестве такого тела будем рассматривать пружину) зависимость его удлинения x от приложенной силы F описывается законом Гука:

$$F=-kx, \tag{2.1}$$

где k – постоянный коэффициент, называемый жесткостью. Величина k остается постоянной при малых деформациях и является характеристикой данного тела.

Для разных тел, изготовленных из одного материала, жесткость будет различной. Можно, однако, получить характеристику упругих свойств вещества. Для этого, предполагая тело однородным цилиндром, (2.1) следует переписать в виде

$$\frac{F}{S}=-E\frac{x}{l} \tag{2.2}$$

где S – площадь сечения тела в направлении, перпендикулярном линии действия силы, а l – его длина в направлении действия силы. Коэффициент E теперь является характеристикой упругих свойств вещества и называется *модуль Юнга.* Очевидно, что жесткость однородного стержня можно выразить через его модуль Юнга и геометрические размеры; проделайте это самостоятельно.

Существует два основных способа экспериментального определения коэффициента жесткости пружины: статический и динамический.

При *статическом* способе необходимо прикрепить пружину к неподвижному подвесу и, приложив к другому ее концу известную силу (например, подвесив груз известной массы), измерить вызванное действием этой силы удлинение. В этом случае жесткость определяется по очевидной формуле

$$k = \frac{mg}{\Delta x} \tag{2.3}$$

где Δx – удлинение пружины, вызванное грузом массой m.

Динамический метод основан на измерении периода колебаний пружинного маятника. Из известной формулы

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.4}$$

несложно выразить жесткость пружины.

Заметим, что проведение с одной и той же пружиной обоих экспериментов позволяет определить ускорение свободного падения. Действительно, в этом случае уравнения (2.3) и (2.4) образуют систему с двумя неизвестными k и g. Разрешив ее относительно g, получим

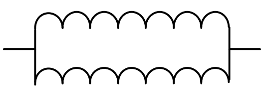
$$g = 4\pi^2 \frac{\Delta x}{T^2} \ . \tag{2.5}$$

Жесткость системы пружин. Пусть имеются две пружины жесткостями k_1 и k_2 соответственно. Их можно соединить параллельно (рис. 2.1а) и последовательно (рис. 2.1б) и рассматривать в дальнейшем как одно упругое тело. При этом суммарная жесткость пружин при параллельном соединении будет определяться как

$$k_{общ} = k_1 + k_2 \tag{6}$$

а при последовательном как

$$\frac{1}{k_{общ}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \tag{7}$$



а)

б)

Рис. 2.1

Рекомендуется самостоятельно получить приведенные формулы. Для этого нужно учесть, что при параллельном соединении пружин одинаковы их удлинения, а при последовательном – силы упругости.

Ход работы

Упражнение 1. Определение коэффициента жесткости пружины статическим методом

Соберите установку так, как показано на рис. 2.2. Измерьте расстояние x_0 от нижней точки подставки под грузы до поверхности стола. Помещая на подставку грузы различной массы, измеряйте расстояние x от нижней точки подставки до стола. Используя формулу (2.3), рассчитайте жесткость пружины по результатам каждого эксперимента, при этом удлинение пружины, очевидно, будет определяться как $\Delta x = x_0 - x$. Проведите измерения, используя не менее пяти различных масс. Результаты измерений занесите в таблицу 2.1. Рассчитайте абсолютную и относительную погрешность измерений.

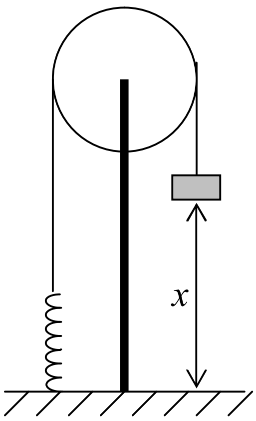


Рис. 2.2

Таблица 2.1

№	m	x	Δx	k	$\langle k \rangle$	Δk	$\langle \Delta k \rangle$
1							
2							
3							
…							

Проделайте аналогичные измерения с другой пружиной. Желательно подобрать пружины так, чтобы их длины в нерастянутом состоянии были примерно одинаковы: это увеличит точность результатов следующего упражнения.

Упражнение 2. Определение коэффициента жесткости системы пружин статическим методом.

Соедините обе использовавшиеся в упражнении 1 пружины последовательно и определите жесткость этой системы аналогично упражнению 1. Используя полученные в упражнении 1 значения жесткости пружин, рассчитай-

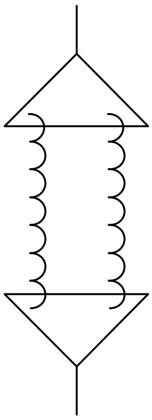


Рис. 2.3

те по формуле (2.7) их суммарную жесткость. Сравните получившиеся результаты.

Соедините те же пружины параллельно, используя специальное приспособление (рис. 2.3). Проделайте аналогичные измерения и вычисления.

Упражнение 3. Определение жесткости пружины динамическим методом

Соберите установку аналогично упражнению 1, сделав 1-2 полных оборота нити вокруг шкива для предотвращения проскальзывания, и подвесьте груз некоторой массы. Отрегулируйте положение шкива так, чтобы риска на нем находилась напротив нулевого деления шкалы. Включите измерительный блок, установив его переключатели в положения "2" и "Цикл". Сместите груз на небольшое расстояние вниз и отпустите. Груз начнет совершать вертикальные колебания, при этом индикатор измерительного блока будет показывать период этих колебаний. Проделайте такие измерения для нескольких (не менее 5-ти) масс грузов, результаты занесите в таблицу 2.2 (при подсчете массы груза не забудьте учесть массу подставки).

Таблица 2.2

№	m	T	T^2
1			
2			
3			
…			

При используемой схеме установки, помимо подвешенного к пружине груза, в движении участвует также и шкив, поэтому период колебаний будет определяться не по формуле (2.4), а по более сложной формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{I}{r^2}}{k}} \tag{2.8}$$

где I и r – момент инерции и радиус шкива соответственно. Поскольку точное измерение момента инерции шкива в рамках настоящей работы провести затруднительно, для определения жесткости пружины следует воспользоваться другим способом. Возведя обе части формулы (2.8) в квадрат, заметим, что зависимость квадрата периода колебаний от массы груза является линейной с угловым коэффициентом $4\pi^2/k$. Таким образом, для определения жесткости пружины необходимо по данным таблицы 2.2 построить график зависимости $T^2(m)$, аппроксимировать его прямой и по ее угловому коэффициенту определить жесткость пружины.

Описанные измерения нужно проделать с обеими использованными при выполнении упражнения 1 пружинами и сравнить полученные значения жесткости с результатами статического метода.

Упражнение 4. Определение ускорения свободного падения

По описанным в предыдущем упражнении причинам определение ускорения свободного падения по формуле (2.5) будет некорректным. Для его определения необходимо записать формулы (2.3) и (2.8) для двух различных значений массы груза m_1 и m_2. Тогда, исключая из уравнений момент инерции шкива и действуя аналогично выводу формулы (2.5), можно получить следующую рабочую формулу:

$$g = 4\pi^2 \frac{\Delta x_1 - \Delta x_2}{T_1^2 - T_2^2} \tag{2.9}$$

где $\Delta x_{1,2}$ и $T_{1,2}$ – удлинения пружины и период колебаний при подвешивании груза соответствующей массы.

Выберите из результатов упражнений 1 и 3 не менее 3-х пар масс грузов для каждой из пружин и вычислите по этим данным значение ускорения свободного падения. Занесите результаты в таблицу 2.3. Сравните их друг с другом и с известным значением g. Сделайте выводы.

Таблица 2.3

№ пружины	m_1	m_2	Δx_1	Δx_2	T_1	T_2	g
1							
1							
1							
…							

Контрольные вопросы

1. Какие деформации называются упругими?

2. Сформулируйте закон Гука. Какова область его применимости?

3. Получите формулы для жесткости параллельно и последовательно соединенных пружин.

4. Как определить коэффициент жесткости пружины статическим методом? динамическим методом?

5. Получите формулу (2.9)

Литература

1. Д.В. Сивухин. Курс общей физики. Т.1, §§73-77

2. И.В. Савельев. Курс общей физики. Т.1, §45, 61–65

Лабораторная работа № 3. Определение момента инерции твердых тел

Целью работы является изучение динамики вращательного движения и определение моментов инерции различных тел.

Оборудование и материалы: в работе используется установка ЛКМ-4 с измерительным блоком, пружины, диск, стержень, грузы.

Краткие теоретические сведения

Момент инерции материальной точки

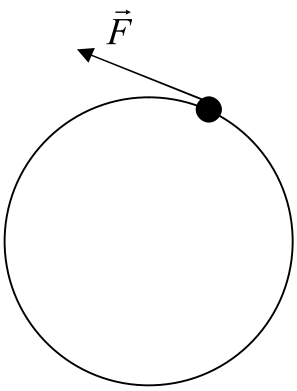


Рис. 3.1

Рассмотрим движение материальной точки массы m по окружности радиуса R под действием силы F, направленной по касательной к окружности (рис. 3.1). Второй закон Ньютона для этой системы (в проекции на касательное к окружности направление) имеет вид

$$F=ma_\tau\ . \tag{3.1}$$

Перейдем от линейного ускорения к угловому

$$a_\tau = R\frac{d\omega}{dt}, \tag{3.2}$$

а также введем в уравнение момент силы, который в данном случае равен

$$M=RF. \tag{3.3}$$

Тогда уравнение (3.1) можно переписать как

$$M = mR^2\frac{d\omega}{dt}. \tag{3.4}$$

Видно, что это уравнение аналогично уравнению (3.1), только вместо линейного ускорения в нем участвует угловое, а вместо силы – момент силы. Величина же mR^2 является "аналогом" массы, характеризуя инертные свойства тела при вращении, и носит название "момент инерции".

Заметим, что (3.4) является частным случаем основного уравнения вращательного движения для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$M = I\frac{d\omega}{dt} \tag{3.5}$$

Таким образом, момент инерции материальной точки, вращающейся вокруг неподвижной оси, равен

$$I=mr^2 \tag{3.6}$$

Момент инерции твердых тел

Для подсчета момента инерции твердого тела конечных размеров необходимо разбить его на бесконечно малые элементы, подсчитать момент инерции каждого из них как момент инерции материальной точки и сложить полученные результаты. Для тел правильной формы такую операцию можно проделать аналитически. Приведем несколько примеров.

Однородный тонкий обруч массы M и радиуса R, вращающийся вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости. В этом случае все точки расположены на одинаковом расстоянии R от оси вращения, поэтому каждая точка массой dm имеет момент инерции $dI=R^2dm$, а момент инерции всего обруча $I=MR^2$.

Однородный диск массы M и радиуса R, вращающийся вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости. Для подсчета момента инерции проще всего разбить диск на концентрические бесконечно тонкие кольца (рис. 3.2). Поскольку диск однородный, масса кольца радиусом r и толщиной dr определяется как $dm=2Mrdr/R^2$, а его момент инерции $dI=2Mr^3dr/R^2$. Тогда момент инерции всего диска

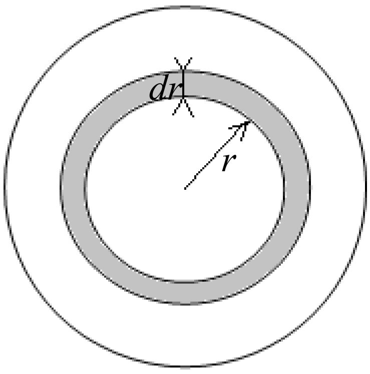


Рис. 3.2

$$I=\int_0^R \frac{2Mr^3dr}{R^2}=\frac{1}{2}MR^2 \tag{3.7}$$

Тонкий однородный стержень массы M и длины L, вращающийся вокруг оси, перпендикулярной к нему и проходящей через его конец. Момент инерции такого стержня равен (получите это самостоятельно)

$$I=\frac{1}{3}ML^2\,. \tag{3.8}$$

Теорема Штейнера-Гюйгенса. Момент инерции твердого тела определяется не только его формой и размерами, но и выбором оси вращения. Теорема Штейнера-Гюйгенса выражается соотношением

$$I=I_0+ma^2 \tag{3.9}$$

где I – момент инерции тела относительно произвольной оси, I_0 – относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, a –

расстояние между этими осями. В ряде случаев теорема Штейнера-Гюйгенса существенно упрощает расчет момента инерции.

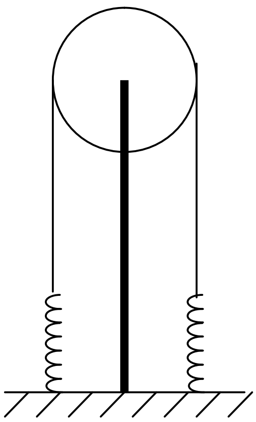


Рис. 3.3

Метод экспериментального определения момента инерции. Используемый в настоящей работе метод экспериментального момента инерции основан на измерении периода крутильных колебаний исследуемого тела под действием упругих сил. Для этого используется изображенная на рис. 3.3 установка.

В положении равновесия силы упругости пружин равны друг другу. При повороте шкива на некоторых малый угол $d\alpha$ одна из пружин растягивается на величину $dx=Rd\alpha$, где R – радиус шкива, а другая сжимается на такую же величину. Соответственно, силы упругости в них изменяются на $dF_1=-k_1 Rd\alpha$ и $dF_2=k_2 Rd\alpha$. Тогда для шкива можно записать основное уравнение динамики вращательного движения в виде

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2}+(k_1+k_2)R^2 d\alpha=0 \qquad (3.10)$$

Из этого уравнения следует, что шкив будет совершать гармонические колебания с частотой

$$\omega=\sqrt{\frac{(k_1+k_2)R^2}{I}}\,. \qquad (3.11)$$

Теперь несложно выразить момент инерции шкива через период колебаний:

$$I=\frac{(k_1+k_2)R^2T^2}{4\pi^2} \qquad (3.12)$$

Ход работы

Упражнение 1. Определение моментов инерции тел правильной формы

Соберите установку так, как показано на рис. 3.3, предварительно определив коэффициенты жесткости используемых пружин, например, статическим методом (см. лабораторную работу № 2).

Для уменьшения проскальзывания нити по шкиву рекомендуется сделать 2-3 полных оборота нити вокруг него. Проследите, чтобы в положении равновесия пружины были растянуты, а отметка на шкиве находилась напротив нулевого деления шкалы. Вследствие наличия трения и разной жесткости пружин при проведении эксперимента шкив постепенно проворачивается и метка уходит в сторону, поэтому необходимо регулярно корректировать положение шкива. Для уменьшения этого эффекта рекомендуется использовать пружины примерно одинаковой жесткости.

Включите измерительный блок, установив переключатели в положения "2" и "Цикл". Потяните за одну из нитей вниз так, чтобы шкив повернулся на небольшой угол, и отпустите ее. Шкив будет совершать колебания, период которых будет отражаться на индикаторе измерительного блока. Проведите измерения не менее 5-ти раз, результаты усредните, рассчитайте момент инерции шкива установки I_0 по формуле (3.12) и погрешность его определения. Оформите результаты измерений в виде таблицы 3.1.

Таблица 3.1

№	T	$\langle T\rangle$	ΔT	$\langle \Delta T\rangle$	I_0	ΔI_0
1						
2						
3						
4						
5						

Прикрепите к шкиву однородный диск и повторите измерения. Чтобы получить момент инерции диска, из полученного значения момента инерции вычтите определенный ранее момент инерции шкива. Измерив массу и размеры диска, рассчитайте его момент инерции. Сравните экспериментальное и теоретическое значение. Результаты занесите в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

№	T	$\langle T\rangle$	ΔT	$\langle \Delta T\rangle$	I	ΔI	$I_{д.\ эксп.}$	$I_{д.\ расч..}$
1								
2								
3								
4								
5								

Проделайте аналогичные измерения для однородного стержня, прикрепив его к оси шкива за середину.

Упражнение 2. Проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса

Прикрепите к оси шкива собранной ранее установки однородный стержень за середину. К концам стержня симметрично относительно его середины прикрепите два *одинаковых* груза массой m каждый. Измерьте расстояние a от центров грузов до центра стержня. Аналогично упражнению 1 определите момент инерции стержня с грузами. Проведите аналогичные измерения для 4-5 значений a. Результаты занесите в таблицу 3.3.

Таблица 3.3.

№	a	T_1	T_2	…	T_5	$\langle T\rangle$	I
1							
2							
…							

По данным таблицы постройте график зависимости момента инерции стержня с грузами от квадрата расстояния $I(a^2)$. Оцените, насколько близка полученная зависимость к прямой. Проведите аппроксимирующую прямую и определите ее угловой коэффициент: в соответствии с теоремой Штейнера-Гюйгенса он должен быть равен суммарной массе грузов (покажите это самостоятельно). Сравните эти значения и сделайте выводы.

Контрольные вопросы

1. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

2. Получите формулы (3.7) и (3.8).

3. Сформулируйте теорему Штейнера-Гюйгенса, приведите пример ее применения.

4. Получите рабочую формулу (3.12)

5. Опишите метод определения момента инерции тел, используемый в работе.

6. Опишите используемый в работе метод проверки теоремы Штейнера-Гюйгенса.

Литература

1. Сивухин Д.В. Курс общей физики, т.1, §§ 30–36.

2. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, §§ 34–40.

Лабораторная работа № 4. Исследование колебаний маятников

Цель работы: изучение колебаний математического и физического маятников.

Оборудование и материалы: в работе используется установка ЛКМ-4 с измерительным блоком, математический и физический маятники.

Краткие теоретические сведения

Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, колеблющаяся в поле силы тяжести на невесомом нерастяжимом подвесе. Получить формулу для периода малых колебаний математического маятника можно, записав уравнение вращательного движения относительно оси подвеса:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi \qquad (4.1)$$

где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения. Предполагая угол отклонения маятника от вертикали φ малым, разложим синус в ряд Тейлора, ограничившись первым членом: $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда уравнение (4.1) может быть преобразовано к уравнению гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (4.2)$$

где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения. Формулу (4.2) можно использовать для экспериментального определения ускорения свободного падения.

Обсудим более подробно вопрос о том, насколько малым должен быть угол отклонения, чтобы колебания можно было считать гармоническими. Для этого учтем следующий член разложения синуса в ряд Тейлора: $\sin\varphi \approx \varphi - \varphi^3/3$. Таким образом, при отбрасывании следующего члена мы вносим относительную погрешность порядка $\varphi^2/3$. Принимая уровень допустимой погрешности за 5%, получаем, что угол отклонения должен быть не более 0,4 рад≈23°. С точностью же 10% колебания можно считать гармоническими вплоть до угла отклонения в 30°.

Если же угол отклонения маятника от вертикали нельзя считать малым, то колебания будут неизохронными, т.е. их период будет зависеть от амплитуды колебаний A. Получить точное аналитическое выражение для этой зависимости через элементарные функции невозможно, однако неплохим приближением служит формула

$$T = T_0(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A}{2}), \tag{4.3}$$

где T_0 – период малых колебаний.

Физический маятник. Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной оси. Уравнение вращательного движения относительно этой оси для тела произвольной формы имеет вид

$$I\ddot{\varphi} = -mgr\sin\varphi \tag{4.4}$$

где I – момент инерции тела относительно оси подвеса, r – расстояние от точки подвеса до центра масс тела. Отсюда несложно получить формулу для периода малых колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}} \tag{4.5}$$

Можно подобрать математический маятник, период колебаний которого совпадет с периодом колебаний физического. Длина такого маятника называется *приведенной длиной* физического маятника. Приравняв формулы (4.5) и (4.2), несложно получить выражение для приведенной длины:

$$l = \frac{I}{mr} \tag{4.6}$$

Приведенную длину можно также определить как расстояние от точки подвеса физического маятника до его *центра качания* – точки, в которой можно сосредоточить всю массу маятника, не изменяя его период.

Если I_0 – момент инерции маятника относительно оси, проходящий через центр масс параллельно оси вращения, то по теореме Штейнера-Гюйгенса, можно записать

$$I=I_0+mr^2 \qquad 4.7)$$

что после подстановки в (4.5) дает

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mr^2}{mgr}} \tag{4.8}$$

Качественный вид графика зависимости периода колебаний от расстояния между осью и центром тяжести r приведен на рис 4.1. При помощи фи-

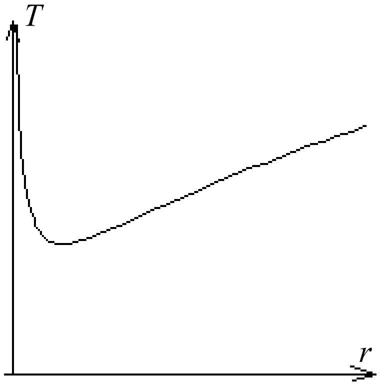


Рис. 4.1

зического маятника можно определить ускорение свободного падения при помощи *метода двух качаний*. Действительно, если значениям r_1 и r_2 соответствуют периоды колебаний T_1 и T_2, то, записав формулы (4.8), несложно получить

$$g = 4\pi^2 \frac{r_1^2 - r_2^2}{T_1^2 r_1 - T_2^2 r_2} \tag{4.9}$$

Еще более простой вид эта формула принимает, если использовать тот факт, что соответствующая зависимость имеет минимум, и выбрать r_1 и r_2, соответствующие равным периодам (T_1=T_2=T_0):

$$g = 4\pi^2 \frac{r_1 + r_2}{T_0^2} \tag{4.10}$$

Этот способ называется *методом приведенной длины*, поскольку выражение в числителе (4.10) и представляет собой приведенную длину маятника (докажите это самостоятельно).

Затухающие колебания. До сих пор мы не учитывали наличие силы трения и рассматривали незатухающие колебания. Учтем теперь затухание, ограничившись самым простым вариантом: действием силы вязкого трения, прямо пропорциональной скорости движения. Тогда уравнение гармонических колебаний примет вид

$$\ddot{x} - 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{4.11}$$

где γ – коэффициент затухания, а ω_0 – частота свободных колебаний. Известно (проверьте подстановкой!), что решение этого уравнения имеет вид

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi) \tag{4.12}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Как правило, коэффициент затухания γ много меньше собственной частоты ω_0, поэтому далее различием между ω и ω_0 пренебрежем.

Тогда затухающие колебания можно рассматривать как гармонические колебания, амплитуда которых уменьшается со временем по экспоненциальному закону (см. рис. 4.)

$$A = A_0 e^{-\gamma t} \tag{4.13}$$

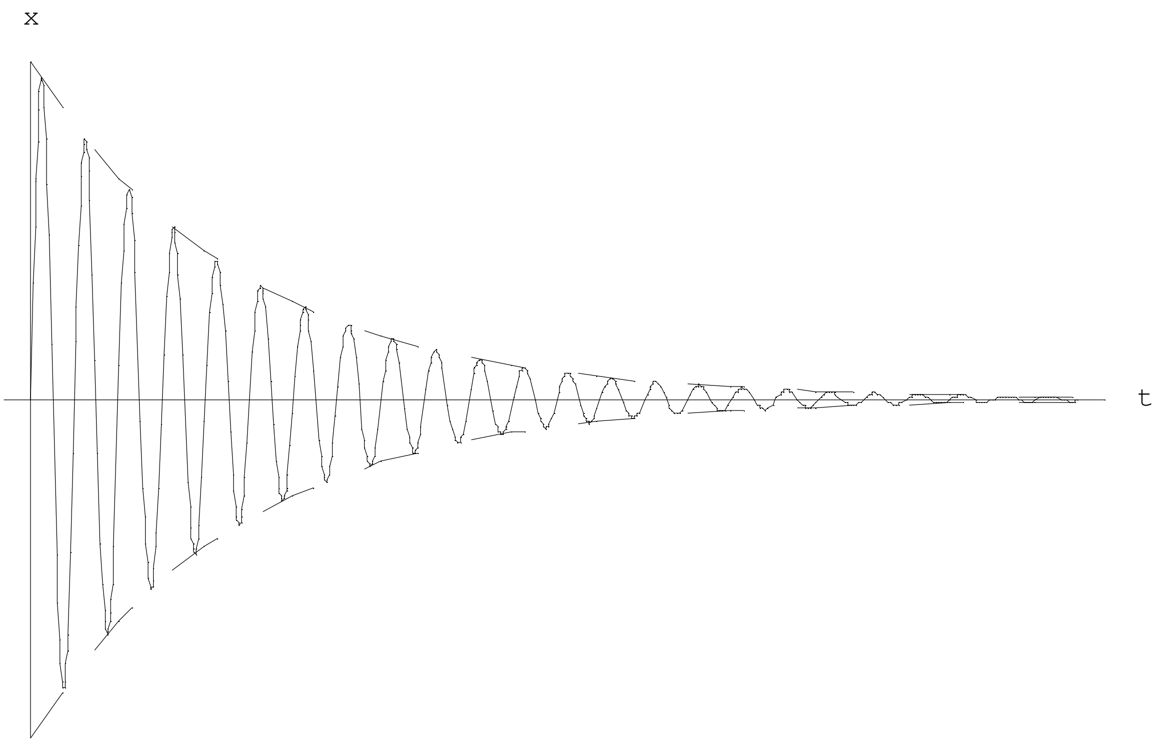


Рис. 4.2

Если в качестве единицы измерения времени принять собственный период колебаний маятника (т.е. сделать замену $t=NT$), то (4.13) примет вид

$$A = A_0 e^{-\delta N} \qquad (4.13)$$

Величина $\delta=\gamma T$ является безразмерной и называется *логарифмическим декрементом затухания*. Ее несложно определить в эксперименте, измерив, за какое число колебаний их амплитуда уменьшится в определенное число раз. С целью уменьшения объема вычислений определяют, как правило, число колебаний N_0, за которое их амплитуда уменьшается в e раз. Тогда логарифмический декремент затухания определяется по формуле

$$\delta=1/N_0 \qquad (4.14)$$

В теории колебаний обычно пользуются понятием *добротности* колебательной системы, определяемой по формуле

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \qquad (4.15)$$

где E и ΔE – энергия колебательной системы и изменение этой энергии за период колебаний соответственно. При слабом затухании ($\delta<<1$) добротность связана с логарифмическим декрементом простым соотношением

$$Q=\pi/\delta \qquad (4.16)$$

(докажите это самостоятельно).

Ход работы

Упражнение 1. Исследование малых колебаний математического маятника

Закрепите математический маятник на шкиве установки. Включите измерительный блок, установив его переключатели в положения "2" и "Цикл". Отклонив маятник на 15-20°, измерьте период его колебаний (при указанных положениях переключателей измерительного блока период колебаний отображается на его индикаторе). Проведите измерения для различных длин подвеса маятника l, результаты занесите в таблицу 4.1.

Таблица 4.1

№	l	T	T^2
1			
2			
3			
…			

По данным таблицы постройте график зависимости квадрата периода колебаний от длины маятника. Проведите прямую линию, аппроксимирующую полученную зависимость, и определите ее угловой коэффициент, а по нему – значение ускорения свободного падения. Сравните полученный результат с известным значением.

Упражнение 2. Исследование неизохронных колебаний математического маятника

Выберите достаточно большое значение длины математического маятника. Задавая различные амплитуды колебания (в интервале от 5° до 90° с шагом 5-10°), определите соответствующие им периоды колебаний. Результаты занесите в таблицу 4.2, приняв в качестве периода малых колебаний T_0 период колебаний при наименьшей амплитуде. Постройте график зависимости T/T_0 от амплитуды колебаний A по экспериментальным данным и в соответствии с формулой (4.3). Обсудите соответствие этих графиков.

Таблица 4.2

№	A	T	T/T_{0} 'эксп.	T/T_{0} 'расч.
1				
2				
3				
…				

Упражнение 3. Исследование колебаний физического маятника

Закрепите на шкиве физический маятник. Аналогично упражнению 1 измерьте период его малых колебаний при различных расстояниях r от точки подвеса до центра тяжести, результаты занесите в таблицу. По данным таблицы постройте график зависимости периода колебаний от r.

Выберите 3-4 пары значений r и по формуле (4.9) рассчитайте ускорение свободного падения для каждой пары.

Проведя на построенном графике горизонтальную прямую, определите по ней значения r, соответствующие выбранному значению периода, и рассчитайте ускорение свободного падения по формуле (4.10). Повторите эту процедуру для 2-3 значений периода. Сравните полученные значения с известным.

Упражнение 4. Исследование затухающих колебаний

Подвесьте физический маятник так, чтобы расстояние от точки подвеса до центра тяжести было максимальным. Закрепите на конце маятника парус, расположив его перпендикулярно маятнику. Отклоните маятник на большой (60–80°) угол и отпустите. Определите число колебаний, за которые амплитуда уменьшится на 5°, 10°, 15° и т.п. В таблицу занесите значение амплитуды колебаний и число колебаний, за которые амплитуда уменьшается до данного значения (начальной амплитуде соответствует 0). По данным таблицы постройте график этой зависимости. Определите по графику число колебаний N_0, за которое амплитуда уменьшается в e раз, и рассчитайте логарифмический декремент затухания и добротность.

Проделайте аналогичные вычисления для случая, когда парус расположен параллельно маятнику. Сравните полученные результаты.

Контрольные вопросы

1. Приведите определение математического и физического маятников.

2. При каком условии реальный маятник можно считать математическим?

3. Что такое приведенная длина физического маятника?

4. Выведите формулу для периода малых колебаний физического маятника, постройте соответствующий график и поясните его ход.

5. Каким образом можно определить ускорение свободного падения при помощи математического маятника? Физического маятника?

6. Что такое добротность колебательной системы и логарифмический декремент затухания?

7. Опишите алгоритм определения добротности маятника в данной работе.

Литература

1. Д.В. Сивухин. Курс общей физики. Т.1, §§39–41

2. И.В. Савельев. Курс общей физики. Т.1, §§61–67

3. Ф. Крауфорд. Волны (БКФ, т.3). Гл. 1,3.

Лабораторная работа № 5. Проверка закона сохранения энергии при помощи пружинной пушки

Целью работы является проверка закона сохранения энергии при помощи пружинной пушки.
Оборудование и материалы: пружинная пушка, математический и физический маятники.

Описание установки

Используемая в работе установка состоит из пружинной пушки и маятника. Пружинная пушка позволяет при помощи сжатой пружины производить выстрел небольшим телом («пулей»). Она состоит из стержня, на который надеваются пружина и пуля, и рычага, позволяющего сжимать пружину. После выстрела пуля попадает в маятник, находящийся первоначально на одной высоте с пушкой.

Для определения жесткости используемых в пушке пружин в установке имеются вертикальные штыри (расположенные слева от пушки) и грузы массой 500 г. Для определения периода колебаний маятника установка оборудована измерительным блоком, аналогичным использованному в установке ЛКМ-4.

Краткие теоретические сведения

Основная задача работы состоит в определении скорости пули, вылетающей из пружинной пушки, по углу отклонения маятника, в который она попадает. Получим формулу, связывающую скорость пули с максимальным углом отклонения маятника от вертикали.

Математический маятник

Пусть пуля массы m, летящая горизонтально со скоростью v, попадает в математический маятник массы M. Считая удар неупругим (маятник покрыт пластилином, и пуля застревает в нем), запишем для него закон сохранения импульса:

$$mv=(m+M)u \qquad (5.1)$$

где u – скорость маятника после удара.

Далее маятник (вместе с застрявшей в нем пулей) отклоняется, при этом его кинетическая энергия переходит в потенциальную. Если l – длина маятника, а h – максимальная высота, на которую он поднимается от начального положения, то можно записать закон сохранения энергии в виде

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh \qquad (5.2)$$

Из геометрических соображений (см. рис. 5.1) высоту h можно выразить через максимальный угол отклонения α: $h=l(1-\cos\alpha)$.

Тогда, проводя преобразования, получаем

$$v = 2\frac{m}{m+M}\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (5.3)$$

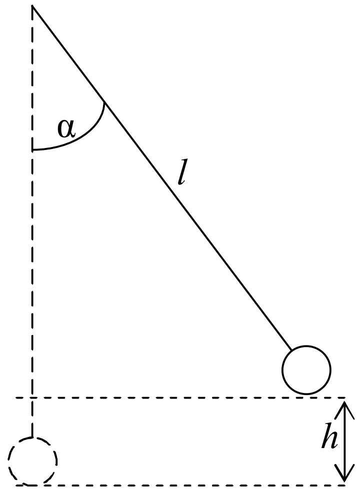


Рис. 5.1

Физический маятник

Пусть теперь пуля попадает не в математический, а в физический маятник. В этом случае записывать закон сохранения импульса нельзя, поскольку разные точки физического маятника приобретают разную скорость, и для столкновения пули и физического маятника необходимо записать закон сохранения момента импульса в виде

$$mvl = I\omega, \qquad (5.4)$$

где I – момент инерции маятника (вместе с пулей) относительно оси подвеса, ω – приобретаемая маятником после соударения угловая скорость.

Далее, аналогично проделанному ранее, записываем закон сохранения энергии для процесса отклонения маятника (при этом необходимо учесть, что h – это вертикальное перемещение *центра масс* маятника, а не его конца).

$$\frac{I\omega^2}{2} = (m+M)gh \qquad (5.5)$$

В результате приходим к формуле

$$v = 2\frac{\sqrt{I(m+M)gH}}{ml}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad (5.6)$$

где H – расстояние от точки подвеса до центра масс маятника.

Для определения момента инерции маятника относительно оси подвеса необходимо измерить период его малых свободных колебаний, в этом случае момент инерции можно определить при помощи формулы (4.5).

Ход работы

Выберите пружину и определите ее коэффициент жесткости статическим методом, используя прилагающиеся грузы и расположенные слева от основной установки штыри.

Наденьте пружину на стержень, закрепив ее в специальном пазу. Подвесьте на штатив математический маятник, отрегулируйте указатель угла поворота так, чтобы он располагался вплотную к маятнику. Запишите его показания α_0.

Зарядите пушку пулей, измерьте по шкале сжатие пружины. Произведите выстрел и измерьте показания указателя угла отклонения α_1. Определите угол отклонения маятника $\alpha=\alpha_1-\alpha_0$. Проведите не менее 5-ти измерений с данными пружиной, пулей и сжатием пружины.

Повторите эти измерения для другого сжатия пружины. Результаты оформите в виде таблицы.

Проведите такие же измерения с другой пулей, а также с другой пружиной.

Подвесьте вместо математического маятника физический и повторите все измерения, *используя те же значения* сжатия пружины. (Предварительно нужно экспериментальным путем определить положение центра масс физического маятника.) Сравните значения скорости пули при одинаковых параметрах, определенные при помощи физического и математического маятников. Обсудите причины их различия (если оно есть).

Для каждой серии измерений рассчитайте потенциальную энергию сжатой пружины и сравните ее с кинетической энергией пули. Обсудите возможные причины расхождения этих величин.

Контрольные вопросы

1. Получите формулу, связывающую скорость пули и максимальный угол отклонения математического маятника.

2. Получите формулу, связывающую скорость пули и максимальный угол отклонения физического маятника.

3. Как экспериментально определить положение центра масс физического маятника?

4. Попадая в маятник, пуля прилипает к нему. Однако в процессе дальнейшего движения она может отвалиться. Как это повлияет на результат измерений?

Литература

1. Д.В. Сивухин. Курс общей физики. §26

Приложение 1

Правила оформления отчета о лабораторной работе

По каждой выполненной лабораторной работе необходимо оформить отчет, придерживаясь следующих правил.

Структура отчета о лабораторной работе

Отчет должен в обязательном порядке включать в себя следующие части: название работы, цель работы, рисунок экспериментальной установки, теоретическую часть, экспериментальную часть и вывод.

В теоретической части необходимо привести краткие сведения об исследуемом в работе явлении, при этом обязательно должны быть указаны основные физические законы, описывающие исследуемое явление, а также выведены рабочие формулы.

В экспериментальной части должен быть описан ход эксперимента, приведены **все** полученные в результате эксперимента данные, описаны использованные способы обработки данных и приведены полученные результаты. Как правило, результаты измерений и расчетов оформляются в виде таблиц. Здесь же должна быть рассчитана погрешность полученных результатов.

Вывод представляет собой краткое изложение основного результата работы. При написании вывода следует придерживаться следующих правил.

1. Вывод (как и вся работа) должен быть написан в безличной форме. Например, следует писать «*в работе было определено ускорение свободного падения при помощи физического маятника*», но не «*в работе мы определили ускорение свободного падения при помощи физического маятника*».

2. Вывод должен соответствовать цели работы. Так, если целью работы была проверка уравнения состояния идеального газа, то в выводе следует писать о том, насколько проведенные эксперименты подтверждают справедливость этого уравнения, а не о том, какие значения давления (температуры и т.п.) были измерены.

3. Вывод должен быть написан так, чтобы его можно было понять, не обращаясь к основному тексту отчета.

4. Вывод должен быть кратким и не должен сводиться к пересказу всех проделанных в работе экспериментов.

5. Если целью работы было определение какой-либо величины, то в выводе должно быть указано полученное значение (с учетом погрешности) и проведено его сравнение с известным (табличным) значением, если это возможно. В случае расхождения измеренного и табличного значений должны быть высказаны гипотезы, позволяющие это расхождение объяснить.

Пример 1. *В работе было определено ускорение свободного падения при помощи физического маятника. Получено значение* $g=(10{,}2\pm0{,}5)$ *м/с*^{2}*, что совпадает с учетом погрешности с известным значением 9,8 м/с*^{2}*.*

Пример 2. *В работе было определено ускорение свободного падения при помощи машины Атвуда. Получено значение* $g=(9{,}2\pm0{,}4)$ *м/с*$^{2.}$ *Несовпадение результата с известным значением 9,8 м/с*^{2} *можно объяснить наличием силы трения в оси блока, что привело к занижению результата.*

6. Если значение одной и той же величины определялось несколькими методами, желательно сделать вывод о том, какой из методов дает лучший результат.

7. Если целью работы было определение какой-либо зависимости, необходимо качественно описать вид полученной зависимости и сравнить его с теоретически предсказанным. Например: «*В работе исследована зависимость периода колебаний математического маятника от его длины. Обнаружено, что период колебаний растет пропорционально корню квадратному из длины, что совпадает с теоретическими предсказаниями. Наблюдаемые в области малых длин отклонения от указанного закона объясняются тем, что в указанной области размеры груза сравнимы с длиной подвеса, поэтому маятник нельзя считать математическим*».

Правила оформления таблиц

Как правило, при выполнении работы проводятся серии однородных измерений (например, периода колебаний маятника при различных длинах). В этом случае полученные результаты необходимо оформлять в виде таблицы. В нее могут быть включены не только результаты прямых измерений, но и рассчитанные на основе этих результатов величины. При этом однотипные результаты размещаются в одном столбце, в первой строке которого должно быть указано обозначение величины с обязательным указанием единицы измерения (если величина не является безразмерной). Как правило, численные значения величин представляются в стандартном виде, при этом порядок указывается в заголовке таблицы, а мантисса – в ячейках. Если, например, получены значения момента инерции I=9,2·10^{-5} кг·м^2; 9,8·10^{-5} кг·м^2; 1,21·10^{-4} кг·м^2, то в заголовке соответствующего столбца нужно написать "I·10^5, кг·м^2" (либо "I, 10^{-5}·кг·м^2") , а в соответствующих ячейках таблицы записать "9,2"; "9,8"; "12,1".

Правила оформления графиков

При построении графиков необходимо придерживаться следующих правил.

1. Все графики должны быть построены на миллиметровой бумаге и вклеены в тетрадь с отчетом.

2. На графике должна использоваться декартова система координат, при этом около осей должны быть подписаны обозначения отложенных по ним величин *с указанием единиц измерения*. На осях должны быть нанесены риски, соответствующие равномерному масштабу, *и подписаны соответствующие значения*.

3. Выбирать масштаб нужно таким образом, чтобы имеющиеся экспериментальные точки занимали как можно бóльшую часть площади графика. Если, например, все экспериментальные значения сосредоточены в интервале от 0,92 до 1,08, то на соответствующей оси необходимо откладывать значения от 0,9 до 1,1 , но не от 0 до 1,1.

4. Экспериментальные значения обозначаются на графике жирными точками, *при этом подписывать соответствующие значения на осях не нужно*.

5. Если известно, что исследуемая зависимость должна быть линейной, то необходимо провести такую прямую, сумма расстояний до которой от экспериментальных точек наименьшая. Хотя существуют строгие методы расчета такой прямой, при достижимом в лабораторных работах учебного практикума уровне точности вполне достаточным оказывается построение такой прямой «на глаз».

6. Если зависимость не является линейной, необходимо провести гладкую кривую, удовлетворяющую тому же условию, что и описанная в п.5 прямая. Следует избегать изображения на ней физически необоснованных экстремумов и изломов.

7. Если на одном графике построены несколько зависимостей, то они должны быть помечены так, чтобы читатель мог без труда их различить.

На рис. П1.1 пример оформления графика по данным таблицы.

№	l, м	T, с	T^2, с^2
1	0,8	1,76	3,10
2	0,9	1,90	3,61
3	1,0	1,98	3,92
4	1,1	2,10	4,41
5	1,2	2,15	4,62

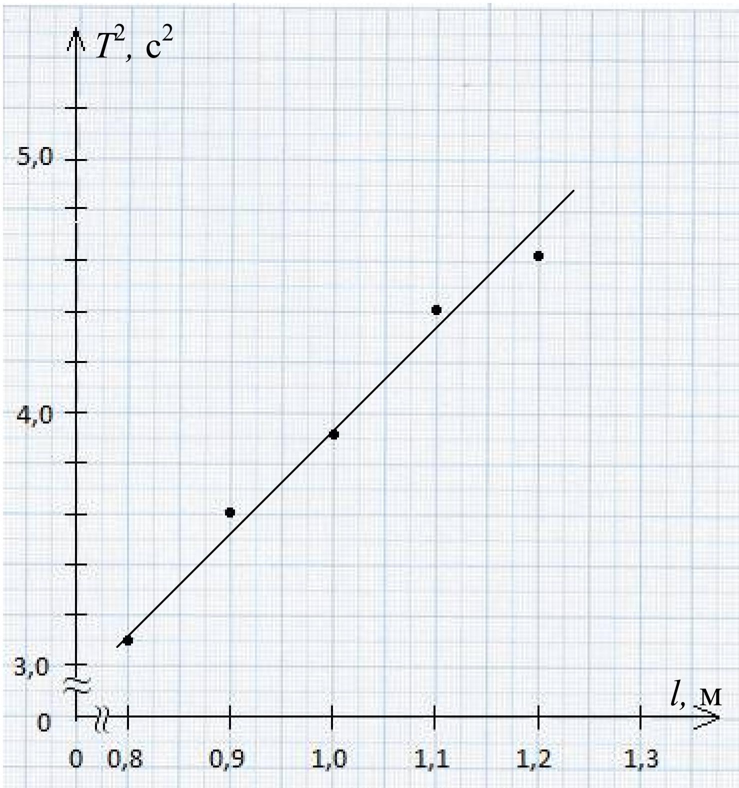


Рис. П1.1

Заметим, что более подробные рекомендации по оформлению графиков можно найти в следующем документе http://4ipho.ru/data/documents/Kultura-postroeniya-grafikov.pdf.

Приложение 2

Погрешности измерения физических величин и методы их расчета

Общие представления о погрешностях

Любое измерение физических величин происходит не абсолютно точно, а с некоторой погрешностью. Таким образом, указания полученного в результате измерений значения (например, g=9,86 м/с^2) недостаточно, необходимо также указать, насколько сильно от полученного значения может отклоняться реальное значение измерявшейся величины. Количественной характеристикой этого отклонения является *абсолютная погрешность* измерений. Принято считать, что в результате измерений получено значение величины a, равное a_0, с абсолютной погрешностью Δa, если с близкой к единице вероятностью истинное значение этой величины находится в интервале от $a\text{–}\Delta a$ до $a+\Delta a$. В этом случае принято записывать $a=a_0\pm\Delta a$; например: g=(9,86±0,25) м/с^2, или ρ=(8,75±0,58)·10^3 кг/м^3.

Обратите внимание! 1. Абсолютная погрешность – размерная величина, ее необходимо указывать в тех же единицах, что и саму величину. 2. При записи итогового результата количество знаков в записи погрешности не должно превышать количества знаков в записи самой величины. Так, запись g=(9,8±0,25) м/с^2 неверна, в этом случае нужно записать g=(9,8±0,3) м/с^2.

Понятно, однако, что абсолютная погрешность не дает представления о качестве выполненных измерений. Действительно, измерение длины стола, давшее результат 1 м с абсолютной погрешностью 1 см, можно считать вполне удовлетворительным. В то же время вряд ли можно признать удовлетворительным измерение с такой же абсолютной погрешностью толщины того же стола, равной 2 см. Поэтому для характеристики качества измерений вводят понятие *относительной погрешности*, которая равна отношению абсолютной погрешности к значению самой величины: $\varepsilon = \dfrac{\Delta a}{a}$. Относительную погрешность принято выражать в процентах. Так, в примере со столом относительная погрешность измерения его длины составит 1% (что является неплохим результатом), а толщины 50% (что, конечно, совершенно неудовлетворительно).

Иногда возникает вопрос: на какое именно значение нужно делить абсолютную погрешность, чтобы получить относительную? В действительности этот вопрос не имеет смысла, поскольку если измерения проведены качественно, то интервал, в котором находятся полученные значения, довольно узкий и принципиальной разницы в том, какую точку этого интервала выбрать в качестве значения величины, нет: результат будет примерно одинаковый. Если же интервал настолько широк, что выбор разных точек приводит к существенно разным значениям, то качество измерений неудовлетворительно, и дальнейшая обработка результатов бессмысленна.

Вообще следует четко представлять, что вся процедура оценки ошибок измерений носит вероятностный характер, поэтому не следует стремиться к излишней точности вычислений. Так, например, не следует указывать, что относительная погрешность измерений составляет 3,546%. Такая точность явно избыточна, и более корректно будет указать 3,5% (а, как правило, и просто 4%).

Оценка погрешностей прямых измерений

Возникающие в процессе проведения измерений погрешности принято классифицировать на *систематические*, *случайные* и *грубые*.

Грубые погрешности возникают в результате значительного однократного воздействия, существенно искажающего результаты измерений. Примером такой погрешности может служить неправильное считывание показания измерительного прибора или изменение периода колебаний маятника вследствие касания его рукой. При обработке измерений результаты, содержащие грубые ошибки, отбрасываются.

Систематические ошибки вызваны действием вполне определенных факторов, искажающих результат измерений, точный расчет влияния которых невозможен либо нецелесообразен при данных условиях проведения эксперимента. Примером систематической ошибки может служить влияние, например, силы трения на определение ускорения свободного падения по времени скатывания шарика с наклонной плоскости. При обсуждении результатов эксперимента полезно оценить, хотя бы качественно, степень влияния таких погрешностей.

К систематическим ошибками относят и *ошибки средств измерения*. Максимальная ошибка, вносимая сложными средствами измерения, обычно указана в их паспорте. В качестве ошибок простых средств измерений (линейка, штангенциркуль, секундомер и т.п.) принимают половину минимальной цены деления, если измерение производится при помощи шкалы, и единицу последнего разряда при цифровой индикации. Так, погрешность, вносимую линейкой с ценой деления 1 мм, оценивается как 0,5 мм. При работе с ручным секундомером целесообразно учитывать также погрешность, вносимую в результат за счет конечного времени реакции экспериментатора.

Случайные ошибки вызваны воздействием большого количества факторов, каждый из которых оказывает незначительное влияние на результат. Наличие случайных ошибок приводит к получению различных значений при измерении одной и той же величины в одних и тех же условиях.

Пусть в результате проведения N измерений одной и той же величины в одних и тех же условиях (например, времени падения тела с фиксированной высоты) получен набор ее значений a_i, i=1..N. Тогда в качестве результата измерений необходимо принять среднее арифметическое этих значений:

$$a_0 = \langle a \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{N}. \qquad (\text{П}2.1)$$

Для оценки абсолютной погрешности измерений необходимо подсчитать отклонения результатов измерений от среднего значения $\Delta a_i=|a_i-a_0|$. Тогда абсолютную погрешность можно оценить как среднее арифметическое этих отклонений:

$$\Delta a_0 = \langle \Delta a \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\Delta a_i)}{N} \qquad (\text{П}2.2)$$

(Более корректно оценивать среднюю погрешность как среднее квадратичное отклонение:

$$\Delta a_0 = \langle \Delta a \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\Delta a_i)^2}{N}}, \qquad (\text{П}2.3)$$

однако в рамках необходимой при выполнении учебного эксперимента точности обе формулы дают совпадающие результаты.)

Результаты измерений при этом рекомендуется оформлять в виде таблицы следующего вида:

Таблица П2.1

<table>
<tr><th><i>n</i></th><th><i>T</i>, с</th><th><<i>T</i>>, с</th><th>Δ <i>T</i>, с</th><th><Δ <i>T</i>>, с</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2,2</td><td rowspan="6">2,2</td><td>0</td><td rowspan="6">0,2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2,3</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2,0</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2,5</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2,2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>2,0</td><td>0,2</td></tr>
</table>

В данном случае окончательный результат измерений нужно записать в виде T=(2,2±0,2) с. Заметим, что расчет по формуле (П2.3) для этих данных приводит к тому же результату: Δa=0,173≈0,2 с.

Необходимо помнить, что усреднение результатов следует проводить только в том случае, когда измеряемая величина *должна* быть одинаковой. Полностью лишено смысла, например, применение такой процедуры к значениям периода колебаний маятника, измеренных при различных амплитудах, поскольку в этом случае период и должен получаться различным. Применив в этом случае усреднение, мы совершим грубую ошибку, поскольку вследствие такой обработки данных утратим возможность исследовать зависимость периода колебаний маятника от их амплитуды.

Таким образом, в результате прямых измерений некоторой величины получают две оценки погрешностей: случайной $\Delta_{сл}$ и систематической $\Delta_{сист}$ (как правило, средств измерений). Окончательная оценка погрешности в этом случае определяется как

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{сл}^2 + \Delta_{сист}^2}\,. \tag{П2.4}$$

Например, полагая, что в приведенном в таблице примере систематическая погрешность составила 0,3 с, получим Δ=0,363 с$\approx$0,4 с. Заметим, что поскольку складываются квадраты погрешностей, пользоваться формулой (П2.4) имеет смысл, если погрешности примерно равны. Если же, например, одна из них в 3 раза превышает другую, ее вклад в итоговый результат окажется в 3^2 раз меньше и вполне может быть отброшен.

Почему необходимо складывать квадраты погрешностей, а не, например, их модули? Точное доказательство этого факта приводится в курсе теории вероятностей, на качественном же уровне можно дать такое пояснение. В соответствии с центральной предельной теоремой в случае одновременного действия большого количества случайных воздействий, вклад каждого из которых пренебрежимо мал по сравнению с суммарным воздействием, вероятность отклонения от среднего значения на величину x пропорциональна величине e^{-x^2/σ^2}, т.е. определяется именно квадратом отклонения.

Оценка погрешностей косвенных измерений

Как правило, интересующая экспериментатора величина не измеряется непосредственно в эксперименте, а получается в результате проведения математических операций с непосредственно измерявшимися величинами. В этой случае говорят, что эта величина измеряется косвенно. При этом необходимо уметь на основании погрешностей результатов прямых измерений оценить погрешность определения данной величины.

Методика расчета погрешности косвенных измерений основывается на естественном предположении о малости абсолютной погрешности Δa всех измеряемых величин по сравнению с самими величинами, в силу которого они могут быть представлены как дифференциалы da соответствующих величин.

Если величина $y=f(x_1,x_2, \ldots, x_n)$, то ее абсолютную погрешность можно рассчитать как $\Delta y = dy = df(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$ (знак модуля стоит, поскольку погрешность не может быть отрицательной). Такой формулой удобно пользоваться, если рассчитываемая величина определяется как сумма исходных величин, либо зависит только от одной величины. Более типичен, однако, случай, при котором рассчитываемая величина является произведением исходных, тогда использование такой формулы приводит к довольно громоздким вычислениям.

В этом случае полезно использовать следующее соотношение: $d\ln a = \frac{da}{a}$. Интерпретируя da как абсолютную погрешность, получаем, что относительная погрешность величины a может быть рассчитана как дифференциал ее логарифма (при этом все производные необходимо взять по модулю).

Применение этих формул к наиболее типичным случаям позволяет составить следующую таблицу, охватывающую подавляющее большинство встречающихся типов зависимостей между физическими величинами.

Таблица П2.2

$c=a+b$	$\Delta c= \Delta a+ \Delta b$
$c=a-b$	$\Delta c= \Delta a+ \Delta b$
$c=ab$	$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$c = \frac{a}{b}$	$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$c=a^{\alpha}$	$\frac{\Delta c}{c} = \lvert\alpha\rvert\frac{\Delta a}{a}$
$c=f(a)$	$\Delta c=\lvert f'(a)\rvert\Delta a$

Далее приведем несколько примеров расчета погрешностей косвенных измерений.

Пример 1. Внешний диаметр стакана составляет $D=(6{,}0\pm0{,}1)$ см, а внутренний $d=(5{,}8\pm0{,}1)$ см. Тогда погрешность измерения толщины его стенок (при подсчете ее по формуле $h=D-d$) $\Delta h=\Delta D+\Delta d=0{,}2$ см. Отметим, что относительная погрешность в этом случае составляет 100%. Указанный пример иллюстрирует опасность применения методов, в которых искомая величина определяется как разность двух близких величин, вследствие значительного роста погрешностей. При планировании эксперимента рекомендуется избегать таких методов; если же это невозможно, необходимо измерять соответствующие величины с повышенной точностью.

Пример 2. Ускорение свободного падения g может быть определено путем измерения периода малых колебаний математического маятника по формуле $g = 4\pi^2 \dfrac{l}{T^2}$ (l – длина маятника). В этом случае относительная погрешность его измерения может быть рассчитана по формуле $\dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{\Delta l}{l} + 2\dfrac{\Delta T}{T}$.

Пример 3. Ускорение свободного падения можно определить, измерив время t скатывания шарика с наклонной плоскости длины L с углом наклона к горизонту α: $g = \dfrac{2L}{t^2 \sin\alpha}$. Относительную погрешность можно рассчитать по формуле $\dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{\Delta L}{L} + 2\dfrac{\Delta t}{t} + \dfrac{\Delta(\sin\alpha)}{\sin\alpha} = \dfrac{\Delta L}{L} + 2\dfrac{\Delta t}{t} + \dfrac{\cos\alpha\Delta\alpha}{\sin\alpha}$