УДК 517.518.224

Колмогоровские поперечники пересечения семейства конечномерных шаров в смешанной норме[1]

А. А. Васильева (Москва, Российская Федерация)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Получены порядковые оценки колмогоровских поперечников пересечения произвольного семейства конечномерных шаров в смешанной норме в пространстве $l^{m,k}_{q,\sigma}$ при $2\le q,\, \sigma<\infty$.

Ключевые слова: Колмогоровские поперечники, пересечения шаров, смешанные нормы.

Kolmogorov widths of an intersection of a family of finite-dimensional balls in a mixed norm[1]

A. A. Vasil'eva (Moscow, Russian Federation)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Order estimates for the Kolmogorov widths of an intersection of an arbitrary family of finite-dimensional balls in a mixed norm in the space $l^{m,k}_{q,\sigma}$ for $2\le q,\, \sigma<\infty$ are obtained.

Keywords: Kolmogorov widths, intersections of balls, mixed norms.

Для $N\in\mathbb{N}$, $1\le s\le\infty$, $(x_i)_{i=1}^N\in\mathbb{R}^N$ полагаем $\|(x_i)_{i=1}^N\|_{l_s^N} = \left(\sum\limits_{i=1}^N |x_i|^s\right)^{1/s}$ при $s<\infty$, $\|(x_i)_{i=1}^N\|_{l_s^N} = \max_{1\le i\le N}|x_i|$ при $s=\infty$.

Пусть $m,\, k\in\mathbb{N}$, $1\le p\le\infty$, $1\le\theta\le\infty$. Через $l^{m,k}_{p,\theta}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^{mk}=\{(x_{i,j})_{1\le i\le m,\, 1\le j\le k}:\ x_{i,j}\in\mathbb{R}\}$ с нормой

$$\|(x_{i,j})_{1\le i\le m,\,1\le j\le k}\|_{l^{m,k}_{p,\theta}} = \left\| \left(\|(x_{i,j})_{i=1}^m\|_{l_p^m}\right)_{j=1}^k \right\|_{l_\theta^k}.$$

Через $B^{m,k}_{p,\theta}$ обозначим единичный шар пространства $l^{m,k}_{p,\theta}$.

Пусть A — непустое множество, для каждого $\alpha\in A$ заданы числа $p_\alpha\in[1,\infty]$, $\theta_\alpha\in[1,\,\infty]$, $\nu_\alpha>0$, при этом $(p_\alpha,\,\theta_\alpha)\ne(p_\beta,\,\theta_\beta)$ при $\alpha\ne\beta$. Обозначим

$$M=\cap_{\alpha\in A}\nu_\alpha B^{m,k}_{p_\alpha,\,\theta_\alpha}. \qquad (1)$$

Исследуется задача об оценке колмогоровского n-поперечника $d_n(M,\, l^{m,k}_{q,\sigma})$.

Для $1\le p\le q$ положим

$$\omega_{p,q}=\begin{cases}\min\left\{\frac{1/p-1/q}{1/2-1/q},\, 1\right\}, & \text{если } q>2,\\ 1, & \text{если } q=2.\end{cases}$$

Определим величины $\Phi(p,\,\theta)=\Phi(p,\,\theta;\,q,\,\sigma,\,m,\,k,\,n)$ следующим образом:

1. при $p\ge q$, $\theta\ge\sigma$ положим $\Phi(p,\,\theta)=m^{1/q-1/p}k^{1/\sigma-1/\theta}$;
2. при $p\ge q$, $\theta\le\sigma$ положим $\Phi(p,\,\theta)=\min\left\{m^{1/q-1/p},\, m^{1/q-1/p}(n^{-\frac12}m^{\frac12}k^{\frac1\sigma})^{\omega_{\theta,\sigma}}\right\}$;
3. при $\theta\ge\sigma$, $p\le q$ положим $\Phi(p,\,\theta)=\min\left\{k^{1/\sigma-1/\theta},\, k^{1/\sigma-1/\theta}(n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac12})^{\omega_{p,q}}\right\}$;
4. при $2\le p\le q$, $1\le\theta\le\sigma$, $\omega_{p,q}\le\omega_{\theta,\sigma}$ положим
$\Phi(p,\,\theta)=\min\left\{1,\,(n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac1\sigma})^{\omega_{p,q}},\, m^{1/q-1/p}(n^{-\frac12}m^{\frac12}k^{\frac1\sigma})^{\omega_{\theta,\sigma}}\right\}$;
5. при $2\le\theta\le\sigma$, $1\le p\le q$, $\omega_{\theta,\sigma}\le\omega_{p,q}$ положим
$\Phi(p,\,\theta)=\min\left\{1,\,(n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac1\sigma})^{\omega_{\theta,\sigma}},\, k^{1/\sigma-1/\theta}(n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac12})^{\omega_{p,q}}\right\}$;
6. при $1\le p\le 2$, $1\le\theta\le 2$ положим $\Phi(p,\,\theta)=\min\{1,\, n^{-\frac12}m^{\frac1q}k^{\frac1\sigma}\}$.

Для $\alpha,\,\beta,\,\gamma\in A$ через $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим треугольник с вершинами $(1/p_\alpha,\,1/\theta_\alpha)$, $(1/p_\beta,\,1/\theta_\beta)$, $(1/p_\gamma,\,1/\theta_\gamma)$. Будем писать $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathcal{R}$, если вершины этого треугольника не лежат на одной прямой.

Определим множества $\mathcal{N}_j$ $(1\le j\le 7)$ и величины Ψ_j $(0\le j\le 7)$ следующим образом:

$$\mathcal{N}_1=\left\{(\alpha,\,\beta)\in A\times A:\ p_\alpha\ne q,\ \exists\hat\lambda_{\alpha,\beta}\in(0,\,1):\ \tfrac1q=\tfrac{1-\hat\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\alpha}+\tfrac{\hat\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\beta}\right\},$$
$$\tfrac{1}{\hat\theta_{\alpha,\beta}}:=\tfrac{1-\hat\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha}+\tfrac{\hat\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta},\quad (\alpha,\,\beta)\in\mathcal{N}_1, \tag{2}$$

$$\mathcal{N}_2=\left\{(\alpha,\,\beta)\in A\times A:\ \theta_\alpha\ne \sigma,\ \exists\hat\mu_{\alpha,\beta}\in(0,\,1):\ \tfrac1\sigma=\tfrac{1-\hat\mu_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha}+\tfrac{\hat\mu_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta}\right\},$$
$$\tfrac{1}{\hat p_{\alpha,\beta}}:=\tfrac{1-\hat\mu_{\alpha,\beta}}{p_\alpha}+\tfrac{\hat\mu_{\alpha,\beta}}{p_\beta},\quad (\alpha,\,\beta)\in\mathcal{N}_2, \tag{3}$$

$$\mathcal{N}_3 = \Big\{(\alpha,\, \beta) \in A \times A:\; p_\alpha \ne 2,\; \exists \tilde\lambda_{\alpha,\beta} \in (0,\, 1):\; \tfrac{1}{2} = \tfrac{1-\tilde\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\alpha} + \tfrac{\tilde\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\beta}\Big\},$$
$$\tfrac{1}{\tilde\theta_{\alpha,\beta}} := \tfrac{1-\tilde\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha} + \tfrac{\tilde\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta}, \quad (\alpha,\, \beta) \in \mathcal{N}_3, \tag{4}$$

$$\mathcal{N}_4 = \Big\{(\alpha,\, \beta) \in A \times A:\; \theta_\alpha \ne 2,\; \exists \tilde\mu_{\alpha,\beta} \in (0,\, 1):\; \tfrac{1}{2} = \tfrac{1-\tilde\mu_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha} + \tfrac{\tilde\mu_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta}\Big\},$$
$$\tfrac{1}{\tilde p_{\alpha,\beta}} := \tfrac{1-\tilde\mu_{\alpha,\beta}}{p_\alpha} + \tfrac{\tilde\mu_{\alpha,\beta}}{p_\beta}, \quad (\alpha,\, \beta) \in \mathcal{N}_4, \tag{5}$$

$$\mathcal{N}_5 = \{(\alpha,\, \beta) \in A \times A:\; \exists \lambda_{\alpha,\beta} \in (0,\, 1),\; p_{\alpha,\beta} \in (2,\, q),\; \theta_{\alpha,\beta} \in (2,\, \sigma):$$
$$\tfrac{1}{p_{\alpha,\beta}} = \tfrac{1-\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\alpha} + \tfrac{\lambda_{\alpha,\beta}}{p_\beta},\; \tfrac{1}{\theta_{\alpha,\beta}} = \tfrac{1-\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\alpha} + \tfrac{\lambda_{\alpha,\beta}}{\theta_\beta},\; \tfrac{1/p_{\alpha,\beta}-1/q}{1/2-1/q} = \tfrac{1/\theta_{\alpha,\beta}-1/\sigma}{1/2-1/\sigma},$$
$$\text{при этом } \tfrac{1/p_\alpha-1/q}{1/2-1/q} \ne \tfrac{1/\theta_\alpha-1/\sigma}{1/2-1/\sigma}\Big\}, \tag{6}$$

$$\mathcal{N}_6 = \{(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in A \times A \times A:\; \exists \tau_\alpha,\, \tau_\beta,\, \tau_\gamma > 0:\; \tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma = 1,$$
$$\tfrac{1}{q} = \tfrac{\tau_\alpha}{p_\alpha} + \tfrac{\tau_\beta}{p_\beta} + \tfrac{\tau_\gamma}{p_\gamma},\; \tfrac{1}{\sigma} = \tfrac{\tau_\alpha}{\theta_\alpha} + \tfrac{\tau_\beta}{\theta_\beta} + \tfrac{\tau_\gamma}{\theta_\gamma},\; \Delta_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathcal{R}\Big\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{N}_7 = \{(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in A \times A \times A:\; \exists \overline{\tau}_\alpha,\, \overline{\tau}_\beta,\, \overline{\tau}_\gamma > 0:\; \overline{\tau}_\alpha + \overline{\tau}_\beta + \overline{\tau}_\gamma = 1,$$
$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{\overline{\tau}_\alpha}{p_\alpha} + \tfrac{\overline{\tau}_\beta}{p_\beta} + \tfrac{\overline{\tau}_\gamma}{p_\gamma},\; \tfrac{1}{2} = \tfrac{\overline{\tau}_\alpha}{\theta_\alpha} + \tfrac{\overline{\tau}_\beta}{\theta_\beta} + \tfrac{\overline{\tau}_\gamma}{\theta_\gamma},\; \Delta_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathcal{R}\Big\}, \tag{8}$$

$$\Psi_0 = \inf_{\alpha \in A} \nu_\alpha \Phi(p_\alpha,\, \theta_\alpha), \quad \Psi_1 = \inf_{(\alpha,\,\beta) \in \mathcal{N}_1} \nu_\alpha^{1-\hat\lambda_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\hat\lambda_{\alpha,\beta}} \Phi(q,\, \hat\theta_{\alpha,\beta}),$$

$$\Psi_2 = \inf_{(\alpha,\,\beta) \in \mathcal{N}_2} \nu_\alpha^{1-\hat\mu_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\hat\mu_{\alpha,\beta}} \Phi(\hat p_{\alpha,\beta},\, \sigma), \quad \Psi_3 = \inf_{(\alpha,\,\beta) \in \mathcal{N}_3} \nu_\alpha^{1-\tilde\lambda_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\tilde\lambda_{\alpha,\beta}} \Phi(2,\, \tilde\theta_{\alpha,\beta}),$$

$$\Psi_4 = \inf_{(\alpha,\,\beta) \in \mathcal{N}_4} \nu_\alpha^{1-\tilde\mu_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\tilde\mu_{\alpha,\beta}} \Phi(\tilde p_{\alpha,\beta},\, 2), \; \Psi_5 = \inf_{(\alpha,\,\beta) \in \mathcal{N}_5} \nu_\alpha^{1-\lambda_{\alpha,\beta}} \nu_\beta^{\lambda_{\alpha,\beta}} \Phi(p_{\alpha,\beta},\, \theta_{\alpha,\beta}),$$

$$\Psi_6 = \inf_{(\alpha,\,\beta,\,\gamma) \in \mathcal{N}_6} \nu_\alpha^{\tau_\alpha} \nu_\beta^{\tau_\beta} \nu_\gamma^{\tau_\gamma} \Phi(q,\, \sigma), \; \Psi_7 = \inf_{(\alpha,\,\beta,\,\gamma) \in \mathcal{N}_7} \nu_\alpha^{\overline{\tau}_\alpha} \nu_\beta^{\overline{\tau}_\beta} \nu_\gamma^{\overline{\tau}_\gamma} \Phi(2,\, 2)$$

(считаем, что инфимум пустого множества равен $+\infty$); здесь числа $\hat\theta_{\alpha,\beta}$, $\hat\lambda_{\alpha,\beta}$ и т. д. определены в формулах (2)–(8).

Теорема. *Пусть* $2 \le q < \infty$, $2 \le \sigma < \infty$, m, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \le \frac{mk}{2}$, *множество* M *определено формулой* (1). *Тогда*

$$d_n(M,\, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\asymp} \min_{0 \le j \le 7} \Psi_j.$$