УДК 517.9

К продолжению решений уравнений с аналитическими коэффициентами вдоль подмногообразий[1]

Н. А. Шананин (Москва, Россия)
nashananin@inbox.ru

В статье указан класс линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами, ростки обобщенных решений которых однозначно продолжаются вдоль интегральных подмногообразий дифференциальных систем, порожденных главными символами уравнений.

Ключевые слова: обобщенная функция, росток функции, однозначное продолжение решения.

To along submanifolds continuation of solutions of equations with analytical coefficients [1]

N. A. Shananin (Moscow, Russia)
nashananin@inbox.ru

A class of linear differential equations with analytical coefficients, the sprouts of generalized solutions of which uniquely continue along integral submanifolds of the differential systems generated by the main symbols of the equations, is specified in the article.

Keywords: distribution, function germ, unique solution continuation.

Введение

Из теоремы Ф. Джона (см. [1], теорема 8.6.8) следует, что две обобщенные функции, определенные на открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами $P(D)u = 0$ и равные в окрестности точки $x^0 \in \Omega$, равны в некоторой окрестности связной компоненты пересечения Ω с перечением всех характеристических гиперполкостей, проходящих через точку x^0.

Ниже указан класс линейных дифференциальных уравнений с комплексными, вещественно аналитическими коэффициентами, решения которых обладают близкими свойствами продолжения вдоль интегральных подмногообразий, порожденных дифференциальной системой, индуцированной главным символом оператора.

Голономный случай

Пусть

$$P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},\ i^2 = -1, \tag{1}$$

— линейный дифференциальный оператор с комплексными, вещественно аналитическими коэффициентами $a_\alpha(x)$, $T^*\Omega$ — кокасательное расслоение над Ω. В каждой точке $x \in \Omega$ главный символ оператора

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,\ (x,\xi) \in T^*\Omega,$$

определяет симметрическую m-линейную форму

$$\mathcal{F}_x(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^m) = \frac{1}{m!}\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_m = 1}^{n} \frac{\partial^m p_m}{\partial \xi_{j_1} \ldots \partial \xi_{j_m}}(x,\xi)\eta^1_{j_1}\ldots\eta^m_{j_m},\ \eta^j \in T^*_x\Omega.$$

Предположим, что ядро $K_x(P) \subset T^*_x\Omega$ формы $\mathcal{F}_x$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\bigcup\limits_{x\in\Omega}(x, K_x(P)) = \{(x,\xi) \mid p_m(x,\xi) = 0\}$;

(2) коразмерность ядра $K_x(P)$ не зависит от x и равна k.

В этом случае множество $\bigcup\limits_{x\in\Omega}(x, K_x(P))$ образует подрасслоение $K(P)$ расслоения $T^*\Omega$ коразмерности k, которое в касательном расслоении $T\Omega$ индуцирует гладкое k-мерное подрасслоение:

$$L(P) = \{(x,\tau) \in T\Omega \,|\, x \in \Omega \text{ и } \xi(\tau) = 0\ \forall \xi \in K_x(P)\}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(P)$ дифференциальную систему, порожденную $L(P)$, то есть подмодуль C^∞-сечений подрасслоения $L(P) \subset T\Omega$ модуля C^∞-сечений $\mathcal{T}\Omega$ касательного расслоения $T\Omega$. Если коммутатор $[X,Y]$ двух любых векторных полей X и Y, принадлежащих $\mathcal{L}(P)$, также принадлежит $\mathcal{L}(P)$, то дифференциальную систему называют *инволютивной или голономной.* Если система $\mathcal{L}(P)$ является гололномной, то в силу теоремы Фробениуса через каждую точку $x^0 \in \Omega$ проходит максимальное связное, k-мерное, интегральное подмногообразие $M_{\mathcal{L},x^0}$.

Говорят, что ростки обобщенных функций $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равны в точке $x^0 \in \Omega$ и пишут $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$, если существует открытая окрестность $V \subset \Omega$ точки x^0, в которой $u^1(x) = u^2(x)$, то есть для любой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset V$ выполняется равенство $\langle u^1, \varphi\rangle = \langle u^2, \varphi\rangle$. Заметим, что из равенства ростков $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ следует равенство ростков образов $(Pu^1)_{x^0} \cong (Pu^2)_{x^0}$.

Теорема 1. *Пусть P — оператор вида* (1) *с аналитическими коэффициентами, удовлетворяющий условиям* (1), (2), *система $\mathcal{L}(P)$ которого голономна, функции $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда из равенства ростков $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ в точке $x^0 \in \Omega$ следует, что $u^1_x \cong u^2_x$ во всех точках x связной компоненты множества $M_{\mathcal{L}(P),x^0} \cap \{y \in \Omega \mid (Pu^1)_y \cong (Pu^2)_y\}$, содержащей x^0.*

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\Big(D_1^m + iD_2^m + \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x) D^\alpha\Big) u = f(x), x \in \mathbb{R}^3,\, m \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Тогда m-линейная форма $\mathcal{F}_x(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^m) = \prod_{j=1}^{m} \eta_1^j + i \prod_{j=1}^{m} \eta_2^j$ и

$$\bigcup_{x\in\Omega} (x, K_x(P)) = \{(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1 = \xi_2 = 0\} = \{(x, \xi) \mid p_m(x, \xi) = 0\}.$$

Таким образом условия (1) и (2) выполнены и $k = 2$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ является C^∞-модулем, порожденным векторными полями ∂_1 и ∂_2, где $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ (кратко, $\mathcal{L} = \mathcal{L}in\big(\partial_1, \partial_2\big)$). Поскольку коммутатор $[\partial_1, \partial_2] = 0$, то $\mathcal{L}(P)$ — голономная система и максимальное интегральное подмногообразие $M_{\mathcal{L}(P),x^0}$, содержащее точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, имеет вид

$$M_{\mathcal{L}(P),x^0} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = x_3^0\}.$$

Из теоремы 1 следует, что равенство двух обобщенных решений уравнения (2) в окрестности точки x^0 влечет их равенство в некоторой окрестности гиперплоскости $x_3 = x_3^0$.

Неголономный случай

Если дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ не является голономной, то она порождает в C^∞-модуле $\mathcal{T}\Omega$ сечений касательного расслоения фильтрацию C^∞-подмодулей $\mathcal{H}^j$, в которой первый элемент $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$, а последующие подмодули $\mathcal{H}^{j+1}$ порождаются векторными полями из $\mathcal{L}(P)$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$. Систему $\mathcal{L}$ называют *неголономной*, если найдется такое число r, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}^1 \subsetneqq \mathcal{H}^2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathcal{H}^r = \mathcal{H}^{r+1} \subsetneqq \mathcal{T}\Omega.$$

Предположим, что

(3) дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ неголономна и подпространство $\mathcal{H}_x^r \subset T_x\Omega$ имеет размерность m, не зависящую от точки $x \in \Omega$, причем $k < m < n$.

В этом случае подмодуль $\mathcal{H}^r$ является голономной дифференциальной системой и в силу теоремы Фробениуса через каждую точку x^0 проходит максимальное, связное, интегральное подмногообразие $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$.

Теорема 2. *Пусть* P *– оператор вида* (1) *с аналитическими коэффициентами, удовлетворяющий условиям* (1), (2) *и* (3), *функции* $u^1(x)$ *и* $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Тогда из равенства ростков* $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ *в точке* $x^0 \in \Omega$ *следует* $u^1_x \cong u^2_x$ *во всех точках* x *связной компоненты* $\mathcal{F}_{x^0}$ *множества* $M_{\mathcal{H}^r,x^0} \cap \{y \in \Omega \,|\, (Pu^1)_y \cong (Pu^2)_y\}$, *содержащей* x^0.

В каждой точке $x \in \Omega = \mathbb{R}^4 \setminus \{x_2 = x_3 = 0\}$ ядро $K_x(P)$ $2m$-линейной формы $\mathcal{F}_x$, ассоциированной с уравнением

$$\Big(D_1^{2m} + (x_3D_2 - x_2D_3 + x_1D_4)^{2m} + \sum_{|\alpha|<2m} a_\alpha(x)D^\alpha\Big)u = f(x),\ m \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

задается системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 & = 0, \\ \quad x_3\xi_2 - x_2\xi_3 + x_1\xi_4 & = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что условия (1) и (2) выполнены, $k = 2$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)(= \mathcal{H}^1) = \mathcal{L}in\big(\partial_1, x_3\partial_2 - x_2\partial_3 + x_1\partial_4\big)$ не является голономной. Подмодуль $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^3 = \mathcal{L}in\big(\partial_1, x_3\partial_2 - x_2\partial_3, x_1\partial_4\big) \neq \mathcal{T}\Omega$ имеет размерность 3. Условие (3) выполнено. Интегральное многообразие дифференциальной системы $\mathcal{H}^2$, проходящее через $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ имеет вид: $M_{\mathcal{H}^2,x^0} = \{(x_1, r\cos(\phi), r\sin(\phi), x_4) \mid x_1, x_4 \in \mathbb{R}, \phi \in [0, 2\pi)\}$, где $r = \big((x_2^0)^2 + ((x_3^0)^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Из теоремы 2 следует, что два решения уравнения (3), совпадающие в некоторой окрестности точки x^0, равны в некоторой окрестности множества $M_{\mathcal{H}^2,x^0} = \mathbb{R}^2_{x_1,x_4} \times \{(x_2, x_3) \mid x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$.

Доказательства теорем приведены в статье [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов. (т. 1) Москва : Мир, 1986. 464 с.

[2] *Шананин Н. А.* О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами // Матем. заметки. 2022. Т. 111, № 6. С. 921–928.