

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ  
МЕХАНИКА. КОЛЕБАНИЯ

Сборник заданий для проведения лабораторных работ  
для студентов физического и других естественных факультетов

Саратов

2017

Составитель: *Л.А. Романченко*

**Физический практикум. Механика. Колебания** : сборник заданий для проведения лабораторных работ для студентов физического и других естественных факультетов / сост. : Л.А. Романченко. – 2017. 36 с. : ил.

Сборник заданий для проведения лабораторных работ содержит описания к двум лабораторным работам: «Определение ускорение свободного падения с помощью физического маятника», «Изучение колебаний связанных маятников».

Для студентов физического и других естественных факультетов.

Рекомендовано кафедрой общей физики.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник заданий для проведения лабораторных работ «Физический практикум. Механика. Колебания» предназначен для студентов физического и других естественных факультетов. Сборник подготовлен на кафедре общей физики ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского».

В сборнике заданий представлено руководство к двум лабораторным работам, связанным с колебательным движением маятников, имеющих две степени свободы.

В лабораторной работе «Определение ускорение свободного падения с помощью физического маятника» изучаются колебания физического маятника-стержня в вертикальной плоскости относительно неподвижной горизонтальной оси.

В лабораторной работе «Изучение колебаний связанных маятников» два маятника в виде стержней с закрепленными на них массивными грузами и соединенными между собой пружиной могут совершать гармонические колебания с различными частотами, определяемыми начальными условиями. При определенных условиях колебания носят характер биений.

Во всех лабораторных работах физические маятники совершают движение по траектории, представляющей собой дугу окружности. Для описания такого движения необходимо знание теории вращательного движения твердого тела.

## Общие теоретические замечания

### *Кинематика вращательного движения твердого тела*

Вращательным движением называется такое движение, во время которого все точки тела описывают концентрические окружности, центры которых лежат на одной прямой – оси вращения (рис. 1).

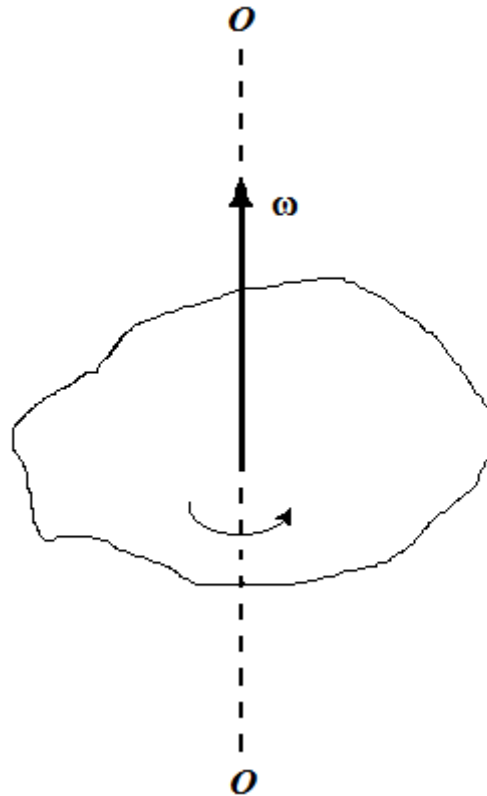


Рис. 1

Векторная величина

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

(где  $\Delta t$  – время, за которое совершается поворот  $\Delta\varphi$ ) называется угловой скоростью тела. Угловая скорость  $\omega$  направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело, в сторону, определяемую правилом правого винта (рис.1), и представляет собой псевдовектор. Модуль угловой скорости равен  $\frac{d\varphi}{dt}$ . Вращение с постоянной угловой скоростью называется равномерным.

Если вращение является равномерным, то  $\omega = \frac{\varphi}{t}$ , где  $\varphi$  – конечный угол поворота за время  $t$ . Таким образом, при равномерном вращении  $\omega$  показывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени.

Равномерное вращение можно охарактеризовать периодом обращения  $T$ , под которым понимают время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол  $2\pi$ . Поскольку промежутку времени  $\Delta t = T$  соответствует угол поворота  $\Delta\varphi = 2\pi$ , то

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (1)$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2)$$

Число оборотов в единицу времени  $\nu$ , очевидно, равно

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что угловая скорость равна  $2\pi$ , умноженному на число оборотов в единицу времени:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (4)$$

Понятия периода обращения и числа оборотов в единицу времени можно сохранить и для неравномерного вращения, понимая под мгновенным значением  $T$  то время, за которое тело совершило бы один оборот, если бы оно вращалось равномерно с данным мгновенным значением угловой скорости, а под  $\nu$  понимая то число оборотов, которое совершило бы тело за единицу времени при аналогичных условиях.

Вектор  $\omega$  может изменяться как за счет изменения скорости вращения тела вокруг оси (в этом случае он изменяется по модулю), так и за счет поворота оси вращения в пространстве (в этом случае  $\omega$  изменяется по направлению). Пусть за время  $\Delta t$  вектор  $\omega$  получает приращение  $\Delta\omega$ .

Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуется величиной

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \quad (5)$$

которую называют угловым ускорением. Угловое ускорение, как и угловая скорость, является псевдовектором.

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости  $\mathbf{v}$ . Скорость каждой из точек непрерывно изменяет свое направление. Модуль скорости  $v$  определяется скоростью вращения тела  $\omega$  и расстоянием  $R$  рассматриваемой точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени тело повернулось на угол  $\Delta\varphi$  (рис.2). Точка, находящаяся на расстоянии  $R$  от оси, проходит при этом путь  $\Delta s = R\Delta\varphi$ . Линейная скорость точки равна

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Таким образом,

$$v = \omega R. \quad (6)$$

Формула (6) связывает модули линейной и угловой скоростей. Найдём выражение, связывающее векторы  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ . Положение рассматриваемой точки тела будем определять радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным из лежащего на оси вращения начала координат  $O$  (рис. 3).

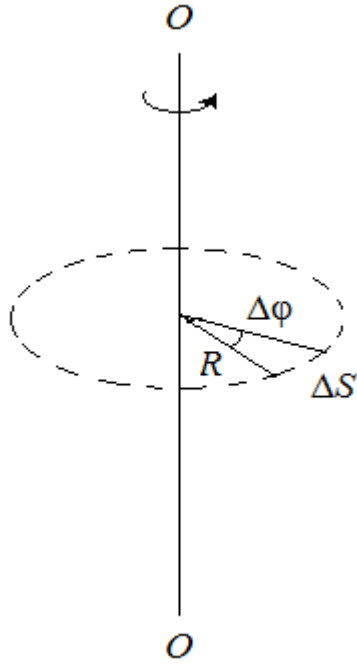


Рис. 2

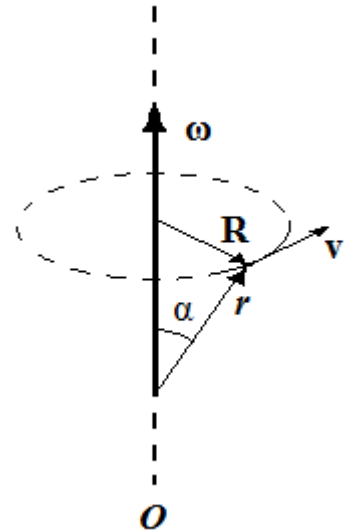


Рис. 3

Из рисунка видно, что векторное произведение  $[\vec{\omega} \times \vec{r}]$  совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{v}$  и имеет модуль, равный  $\omega r \sin \alpha = \omega R$ . Следовательно,

$$\mathbf{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (7)$$

Модуль нормального ускорения точек вращающегося тела равен  $|\vec{w}_n| = \frac{v^2}{R}$ .

Подставив сюда значение  $v$  из (7), получим

$$|\vec{a}_n| = \omega^2 R \quad (8)$$

Если ввести перпендикулярный к оси вращения вектор  $\mathbf{R}$ , проведенный в данную точку тела (см. рис. 1.3), соотношению (8) можно придать векторный вид:

$$\mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{R}. \quad (9)$$

Минус в этой формуле указывает на то, что векторы  $\mathbf{a}_n$  и  $\mathbf{R}$  имеют противоположные направления.

Предположим, что ось вращения тела не поворачивается в пространстве.

Модуль тангенциального ускорения равен  $\frac{dv}{dt}$ . Воспользовавшись

соотношением (6) и учтя, что расстояние рассматриваемой точки тела от оси вращения  $R=\text{const}$ , можно записать

$$|a_\tau| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R\beta,$$

где  $\beta$  – модуль углового ускорения. Следовательно, модуль тангенциального ускорения связан с модулем углового ускорения соотношением

$$|a_\tau| = \beta R \quad (10)$$

Таким образом, нормальное и тангенциальное ускорения растут линейно с увеличением расстояния от точки до оси вращения.

### ***Динамика вращательного движения твердого тела***

Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси (рис.4).

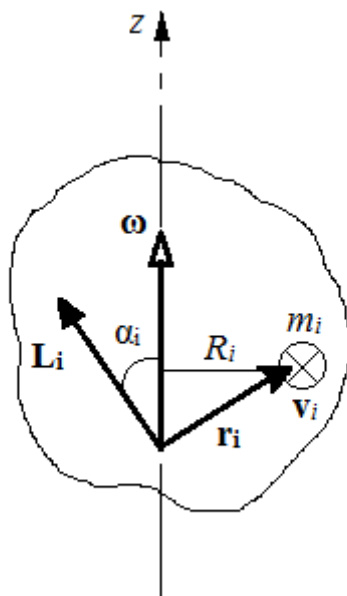


Рис. 4

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек с неизменным расстоянием между ними. Для всякой системы частиц справедливо уравнение



$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum \vec{M}_{\text{внеш}} . \quad (11)$$

Это уравнение справедливо и для твердого тела. В последнем случае  $\mathbf{L}$  – момент импульса тела, справа в (11) стоит сумма моментов внешних сил, действующих на тело.

Возьмем на оси вращения точку  $O$  и будем характеризовать положение образующих тело частиц с помощью радиус-векторов  $\mathbf{r}$ , проведенных из этой точки. На рис.4 показана  $i$ -я частица с массой  $m_i$ ; скорость частицы  $\mathbf{v}_i$  направлена за плоскость рисунка «от нас». По определению момент импульса  $i$ -й частицы относительно точки  $O$  равен

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i] \quad (12)$$

Векторы  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  для всех частиц тела взаимно перпендикулярны. Поэтому модуль вектора момента импульса равен

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i, \quad (13)$$

где  $R_i$  – расстояние частицы от оси вращения.

Отметим, что согласно (13) модуль вектора  $\mathbf{L}_i$  пропорционален скорости вращения тела  $\omega$ ; направление же вектора  $\mathbf{L}_i$  от  $\omega$  не зависит – этот вектор лежит в плоскости, проходящей через ось вращения и частицу  $m_i$ , и перпендикулярен к  $\mathbf{r}_i$ . Легко убедиться, что угол между векторами  $\mathbf{L}_i$  и  $\omega$  является острым для всех частиц, составляющих тело. Поэтому проекции этих векторов на совпадающую с осью вращения ось  $z$  имеют одинаковые знаки. С учетом этого можно написать, что

$$L_{zi} = L_i \cos \alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos \alpha_i = m_i (r_i \cos \alpha_i) R_i \omega = m_i R_i^2 \omega_z. \quad (14)$$

Здесь  $\alpha_i$  – угол между вектором  $\mathbf{L}_i$  и осью  $z$ . При изменении направления оси  $z$  на обратное обе проекции – и  $L_{zi}$ , и  $\omega_z$  – изменяют знак, при этом равенство (14) остается справедливым.

Просуммировав выражение (14) по всем частицам, получим момент импульса тела относительно совпадающей с осью вращения оси  $z$ :

$$L_z = \sum L_{zi} = \sum m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum m_i R_i^2. \quad (15)$$

Величина  $I$ , равная сумме произведений элементарных масс на квадраты расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно данной оси:

$$I = \sum m_i R_i^2. \quad (16)$$

Суммирование производится по всем элементарным массам  $m_i$ , на которые можно разбить тело.

Приняв во внимание формулу (16), выражение (15) можно представить в виде

$$L_z = I\omega_z. \quad (17)$$

Полученная формула аналогична формуле  $p_z = mv_z$ . Роль массы играет момент инерции, роль линейной скорости – угловая скорость.

В общем случае вектор  $\mathbf{L}$  не совпадает по направлению с осью вращения тела  $z$  и поворачивается вместе с телом вокруг этой оси, описывая конус (рис. 5).

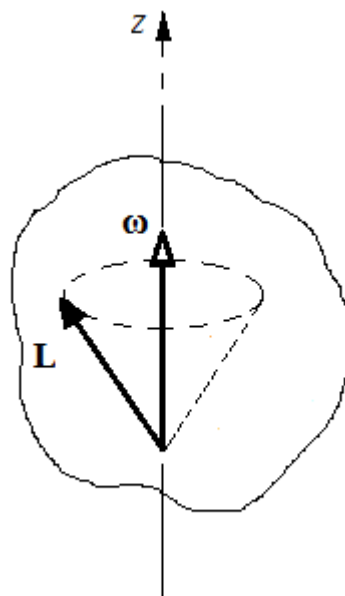


Рис. 5

Из соображений симметрии ясно, что для однородного тела, симметричного относительно оси вращения, момент импульса относительно точки  $O$ , лежащей на оси вращения, совпадает по направлению с вектором  $\omega$ .

В этом случае модуль момента импульса  $L$  равен  $|L_z|$  - модулю проекции  $L$  на ось  $z$ . Тогда, с учетом того, что векторы  $L$  и  $\omega$  имеют одинаковое направление

$$L = I\omega. \quad (18)$$

В отличие от соотношения (17), справедливого для любого тела, выражение (18) имеет место лишь в тех случаях, когда симметричное тело вращается вокруг оси симметрии и когда несимметричное тело вращается вокруг одной из своих главных осей инерции.

## ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

### Лабораторная работа № 1

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

*Цель работы:* определение ускорения свободного падения с помощью маятника-стержня, оценка точности измерения.

*Оборудование:* установка, маятник - стержень.

#### *Теоретические замечания и вывод рабочей формулы*

Физическим маятником называется твердое тело произвольной формы, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести. Такой маятник изображен на рис.6, где т.*O* – точка, принадлежащая горизонтальной оси, т.*C* – центр масс маятника,  $\varphi$  – угол отклонения центра масс от вертикали,  $a$  – расстояние между т.*O* и т.*C*,  $m\vec{g}$  – сила тяжести.

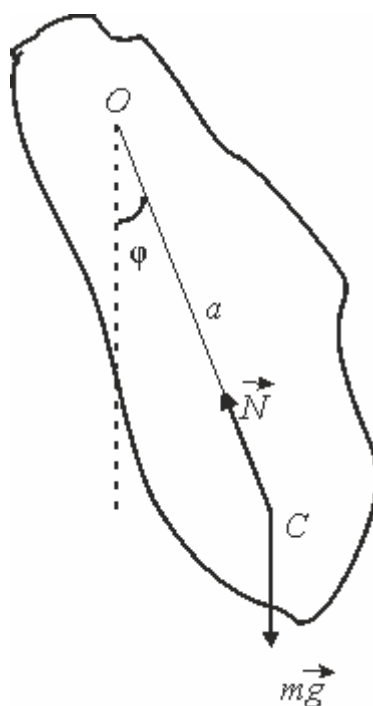


Рис.6 Физический маятник произвольной формы

Математическим маятником называется маятник, вся масса которого практически сосредоточена в одной точке - в центре масс маятника. Т.е. он является частным случаем физического маятника. Его можно представить как небольшой шарик, подвешенный на длинной нити (рис.7).

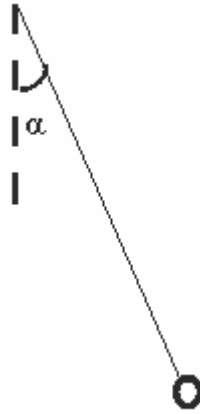


Рис.7 Математический маятник

Для измерения ускорения свободного падения  $\vec{g}$  можно использовать оба эти маятника. Но так как нить математического маятника должны быть очень длинной и нерастяжимой, то в лабораторных условиях более точным и удобным является измерение  $\vec{g}$  с помощью физического маятника.

Рассмотрим колебания физического маятника, представленного в виде маятника-стержня (рис. 8).

На тело действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила сопротивления воздуха, действием которой пренебрегаем.

В соответствии с основным уравнением вращательного движения тел проекцию общего вращающего момента  $\vec{M}$  относительно оси можно связать с угловым ускорением  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  соотношением

$$M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (19)$$

где  $I$  – момент инерции физического маятника относительно оси вращения.

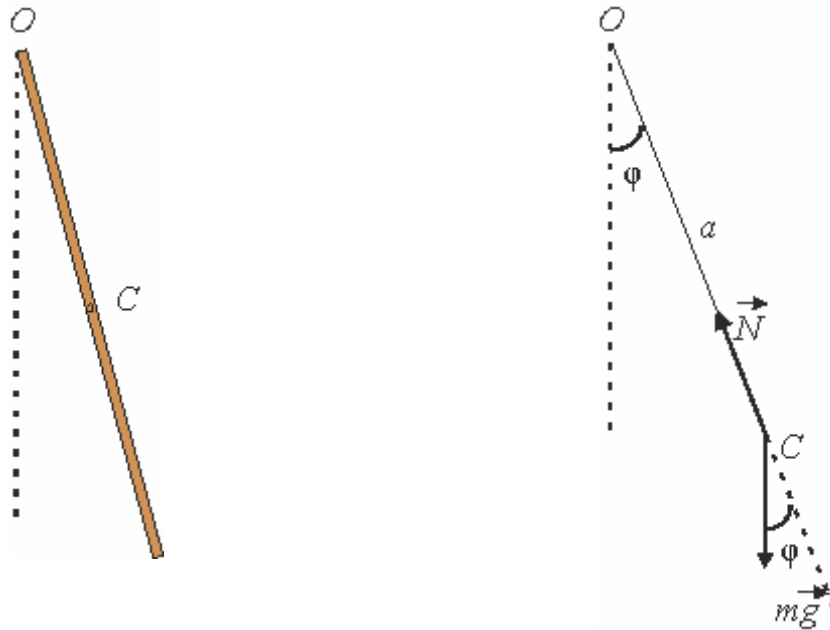


Рис.8

Общий вращающий момент  $\vec{M}$  складывается из моментов сил, действующих на маятник: силы тяжести, силы реакции опоры.

Момент, создаваемый силой тяжести  $m\vec{g}$ , можно записать в виде

$$M_{mg} = a \cdot mg \cdot \sin(\pi + \varphi) = -a \cdot mg \cdot \sin \varphi. \quad (20)$$

где  $a$  — расстояние от оси вращения до центра тяжести тела  $\varphi$  — угол отклонения маятника от положения равновесия. Если этот угол мал (до  $10^\circ$ ), то  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

Момент силы реакции опоры

$$M_N = a \cdot N \cdot \sin 180^\circ = 0.$$

С учетом всего этого уравнение (19) можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{M}{I} = -\frac{mga\varphi}{I},$$

или

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga\varphi}{I} = 0 \quad (21)$$

Это дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания. Его решением является периодическая функция

$$\varphi = \varphi_0 \left( \sin \left( \sqrt{\frac{mga}{I}} t + \alpha_0 \right) \right), \quad (22)$$

в которой величина  $\varphi_0$  представляет максимальный угол отклонения маятника от положения равновесия,  $\alpha_0$  — начальную фазу колебаний. (Значения  $\varphi_0$  и  $\alpha_0$  определяются из начальных условий).

Система будет возвращаться в исходное состояние через такое время  $T$ , за которое аргумент под знаком синуса изменится на величину

$$2\pi = \left( \sqrt{\frac{mga}{I}} \right) T. \quad (23)$$

Из равенства (23) получим выражение для периода колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (24)$$

Круговая частота колебаний физического маятника соответственно равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}.$$

Необходимо отметить, что соотношения (23)—(24) справедливы лишь для малых углов отклонения ( $5 - 10^\circ$ ). В противном случае период колебания будет зависеть от угла  $\varphi$ .

#### *Вывод рабочей формулы*

По теореме Штейнера-Гюйгенса момент инерции тела  $I$  можно представить следующим образом:

$$I = I_0 + ma^2,$$

где  $I_0$  — момент инерции тела относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр тяжести тела.

В этом случае формула (6) примет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}}. \quad (25)$$

Увеличение  $a$  приводит, с одной стороны, к увеличению момента силы, возвращающей маятник в положение равновесия, благодаря чему период колебания стремится уменьшиться, и, с другой стороны – к росту момента инерции системы  $I = I_0 + ma^2$ , который наоборот способствует увеличению периода колебаний.

Характерная зависимость  $T = f(a)$  для физического маятника-стержня приведена на рис. 9.

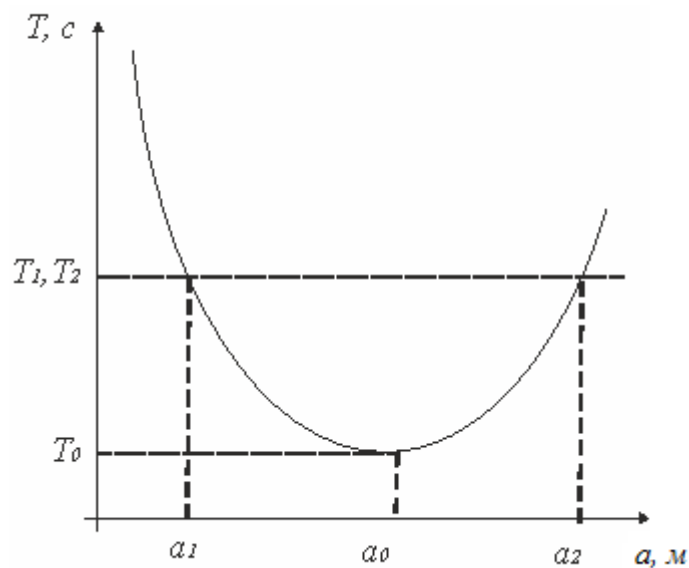


Рис. 9

При достаточно малых значениях расстояния  $a$ , когда выполняется условие  $ma^2 \ll I_0$  из равенства (25) имеем

$$T \cong 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga}} \sim a^{-1/2}. \quad (26)$$



Следовательно, с увеличением значения  $a$  значение периода колебания  $T$  будет уменьшаться. Ход кривой качественно можно объяснить следующим образом: подвесу маятника в центре тяжести ( $a = 0$ ) должен соответствовать бесконечно большой период колебаний, так как в этом случае величина возвращающего момента  $F \cdot a \cdot \varphi$  равна нулю. Реально это означает, что колебания маятника в этом случае отсутствуют.

При небольших значениях  $a$  рост момента инерции не оказывает решающего влияния на изменение периода колебаний, и наблюдается спад кривой. Но, начиная с  $a = a_0$ , рост момента инерции оказывает большее влияние на период колебаний, чем влияние возвращающего момента  $M$ , и имеет место подъем кривой

При сравнительно больших значениях  $a$  имеет место неравенство  $ma^2 \gg I_0$ . Тогда из равенства (26) получим

$$T \cong 2\pi \sqrt{\frac{ma^2}{mga}} \sim a^{1/2}. \quad (27)$$

Очевидно, точка  $a_0$  соответствует положению, когда рост момента инерции и возвращающего момента оказывают одинаковые противоположные действия.

Один и тот же период колебаний может быть у маятника при различных расстояниях  $a$  от центра тяжести до точки подвеса.

Если маятник подвешен сначала на расстоянии  $a_1$  от центра тяжести, а затем на расстоянии  $a_2$  то соответствующие периоды колебаний будут иметь вид

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma_1^2}{mga_1}}, \\ T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma_2^2}{mga_2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из системы (28), исключив  $I_0$  можно определить ускорение свободного падения  $g$ :

$$g = \frac{4\pi^2(a_1^2 - a_2^2)}{a_1T_1^2 - a_2T_2^2}. \quad (29)$$

В частном случае, когда периоды колебаний, соответствующие точкам подвеса  $a_1$  и  $a_2$  совпадают, то есть  $T_1=T_2=T_0$  (см. рис. 9), соотношение (29) упрощается и сводится к виду:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot (a_1 + a_2)}{T_0^2}. \quad (30)$$

Ускорение свободного падения можно определить из экспериментально снятой кривой зависимости  $T=f(a)$ . Для этого на построенном графике надо найти такие точки  $a_1$  и  $a_2$ , которым соответствует один и тот же период колебаний  $T_0$ , а для вычисления  $g$  воспользоваться выражением (30). Однако, эта формула применима в случае, когда маятник представляет собой стержень, не имеющий дополнительных деталей. При наличии в конструкции маятника дополнительных частей формула для расчета ускорения свободного падения будет иметь другой вид.

Общий вид установки, используемой в работе, представлен на рис. 10. Физическим маятником служит металлический стержень **1** с нанесенными на нем расстояниями 1 см друг от друга делениями. Вдоль стержня могут перемещаться две треугольные призмы **2**, которые необходимо закреплять на стержне симметрично относительно его середины во избежание смещения центра тяжести. На конце горизонтальной части **3** кронштейна **4** имеются небольшие углубления, в которые упирается основание верхней призмы при колебаниях маятника. Установка позволяет считать периоды колебаний и время в автоматическом режиме, для этого предусмотрены кнопки «Сброс» и «Стоп».

При выводе рабочей формулы для определения ускорения силы тяжести с помощью данной установки необходимо учитывать массы и моменты

инерции опорных призм относительно оси качания маятника. В этом случае выражение для периода колебаний маятника-стержня примет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{01} + m_1 a^2 + I_{02} + m_2 b^2 + I_3}{(m_1 + m_2 + m_3)ga}}, \quad (31)$$

где  $m_1, m_2, m_3$  – массы стержня, нижней и верхней призм соответственно;  $I_{01}$ — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести стержня и параллельной оси качания маятника;  $I_{02}$  – момент инерции верхней призмы относительно оси качания маятника;  $b$  – расстояние от центра тяжести нижней призмы до точки подвеса маятника (рис.11).



Рис. 10 Внешний вид установки

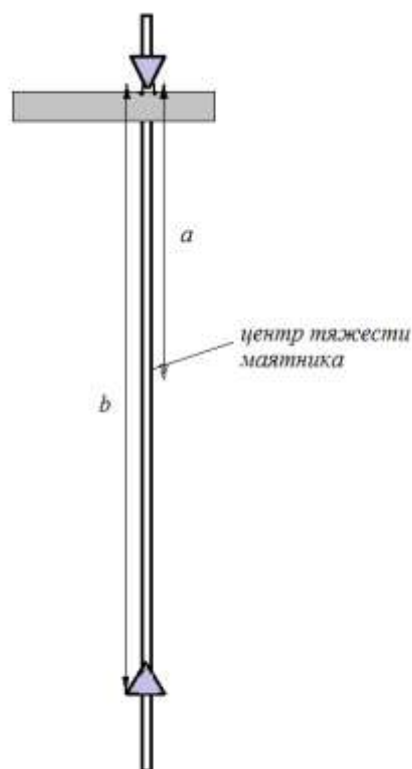


Рис. 11

Записав соотношение (31) для случаев  $a_1, b_1, T_1$  и  $a_2, b_2, T_2$  и исключив из уравнений величину  $\frac{I_{01} + I_{02} + I_{03}}{m_1 + m_2 + m_3}$ , при  $T_1 = T_2 = T_0$  имеем

$$g = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( 1 + \frac{b_1^2 - b_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \cdot \frac{m_2}{m_1} \right) 4\pi^2 \frac{a_1 + a_2}{T_0^2}. \quad (32)$$

Поскольку можно положить  $b_1 \approx 2a_1, b_2 \approx 2a_2$ , то окончательно получим рабочую формулу для определения ускорения свободного падения с помощью маятника стержня

$$g = \frac{m_1 + 4m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot 4\pi^2 \frac{a_1 + a_2}{T_0^2}. \quad (33)$$

$$m_3 = m_2 \ll m_1 \text{ и } \frac{m_1 + 4m_2}{m_1 + 2m_2} \approx 1 + 2\frac{m_2}{m_1}.$$

Если не учитывать наличие опорных призм и пользоваться более простой формулой (32), то это приведет к появлению систематической погрешности. Величину этой погрешности можно оценить по формуле, которая получена вычитанием выражения (32) из выражения (33):

$$\Delta g_{\text{сист}} = \left( \frac{m_1 + 4m_2}{m_1 + m_2 + m_3} - 1 \right) \cdot \frac{4\pi^2 \cdot (a_1 + a_2)}{T_0^2} = \frac{3m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot \frac{4\pi^2 \cdot (a_1 + a_2)}{T_0^2}. \quad (34)$$

### ***Порядок выполнения работы***

1. Измерить длину стержня и определить положение центра тяжести стержня.
2. Установить призмы симметрично у концов стержня.
3. Измерить с точностью до 1 мм расстояние  $a$  между точкой подвеса и центром тяжести стержня.
4. Подвесить стержень, за одну из призм, поместив ее в верхней части установки. Вывести маятник-стержень из положения равновесия на угол не более  $15^{\circ}$ , проследив, чтобы возникшие в результате колебания происходили в одной плоскости.
5. Нажать на установке кнопку «Пуск». После этого встроенные секундомер и счетчик периодов начнут отсчет времени  $t$  и количества периодов  $N$ . Прекратить отсчет нажатием кнопки «Стоп» при достижении количества периодов  $N = 20$ .
6. Занести в таблицу 1 значения  $a$  и соответствующие ему значения  $t$  и  $N$ .
7. Вычислить период колебаний  $T$  и занести в таблицу 1.
8. Переместить призмы друг к другу симметрично на 1 см с каждой стороны и повторить измерение  $t$ ,  $N$  и вычислить  $T$ . Результаты занести в таблицу 1.
9. Продолжая перемещать призмы по 1 см с каждой стороны к центру тяжести, проводить аналогичные измерения и вычисления до тех пор, пока призмы не сблизятся настолько, что период колебаний резко возрастет, и колебаний практически прекратятся.
10. По полученным данным построить график зависимости периода колебаний  $T$  от расстояния  $a$ .

Таблица 1

№	$a$ , м	$N$	$t$ , с	$T$ , с
1				
2				
3				
4				
5				
...				

11. На графике найти несколько точек со значениями периода  $T_0$ , каждому из которых соответствуют по 2 значения расстояния  $a_1$  и  $a_2$ . Найденные значения занести в таблицу 2.

12. Рассчитать значение ускорения свободного падения  $g$  по формуле (32). Результаты вычислений занести в таблицу 2.

Таблица 2

Сечение графика	$T_0$ , с	$a_1$ , см	$a_2$ , см	$g$ , см/с <sup>2</sup>	$g_{cp}$ , см/с <sup>2</sup>	$\Delta g$ , см/с <sup>2</sup>	$\Delta g_{cp}$ , см/с <sup>2</sup>
1							
2							
3							
4							
5							

13. Вычислить среднее значение ускорения свободного падения  $g_{cp}$ , абсолютную погрешность измерений  $\Delta g$ , среднюю абсолютную погрешность измерений  $\Delta g_{cp}$ . Результаты занести в таблицу 2.

14. Вычислить относительную погрешность измерений по формуле

$$\delta = \frac{\Delta g_{cp}}{g_{cp}} \cdot 100\%.$$

15. Сравнить полученный результат с табличным значением для ускорения свободного падения в данной местности. Расхождение оценить с помощью формулы

$$\frac{g_{cp} - g_{табл}}{g_{табл}} \cdot 100\%.$$

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое ускорение свободного падения и от чего оно зависит?
2. Что называется физическим маятником?
3. От чего зависит период колебаний физического маятника?
4. Объясните ход выполнения работы.
5. Какие факторы будут влиять на точность эксперимента?

## Лабораторная работа № 2

### ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

*Цель работы:* изучение движения двух слабо связанных физических маятников, измерение нормальных частот и периода биений маятников.

Принадлежности: установка, секундомер, набор пружин.

#### *Теоретические замечания и вывод рабочей формулы*

Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух идентичных физических маятников, точки подвеса которых расположены на одной горизонтальной прямой (рис. 12). Точки этих маятников, отстоящие на расстоянии  $h$  от точек подвеса, соединены между собой пружиной, которая находится в нерастянутом состоянии, когда маятники занимают вертикальное положение. Конфигурация описанной системы, очевидно, определяется заданием двух координат:  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – углов отклонения маятника от устойчивого положения равновесия, соответствующего  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  и, следовательно, рассматриваемая система обладает двумя степенями свободы.

Каждую систему с двумя степенями свободы можно рассматривать как возникшую в результате связи двух систем, из которых каждая имеет одну степень свободы.

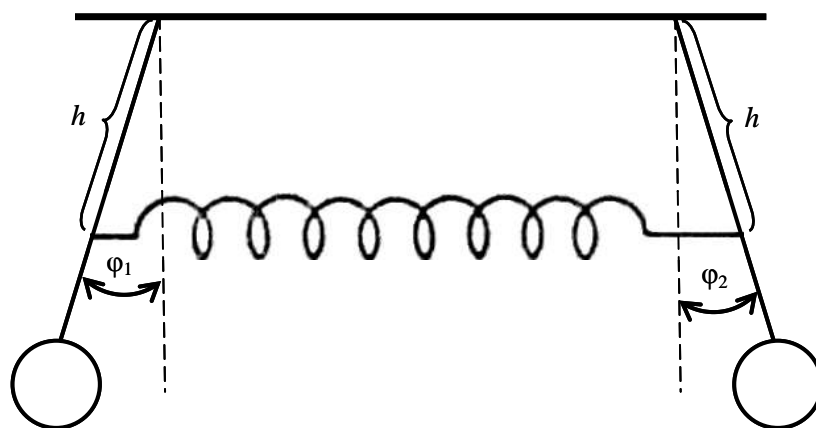


Рис.12

Парциальные системы получаются из данной системы с двумя степенями свободы при «закреплении» одной из координат (наложение связи, обеспечивающее  $\varphi_1 = 0$



или  $\varphi_2 = 0$ ), то есть при закреплении того или иного маятника в положении равновесия (рис.13).

Полагая  $\varphi_2 = 0$  (13а) или  $\varphi_1 = 0$  (рис 13б) (закрепляя один из маятников), получаем парциальные системы.

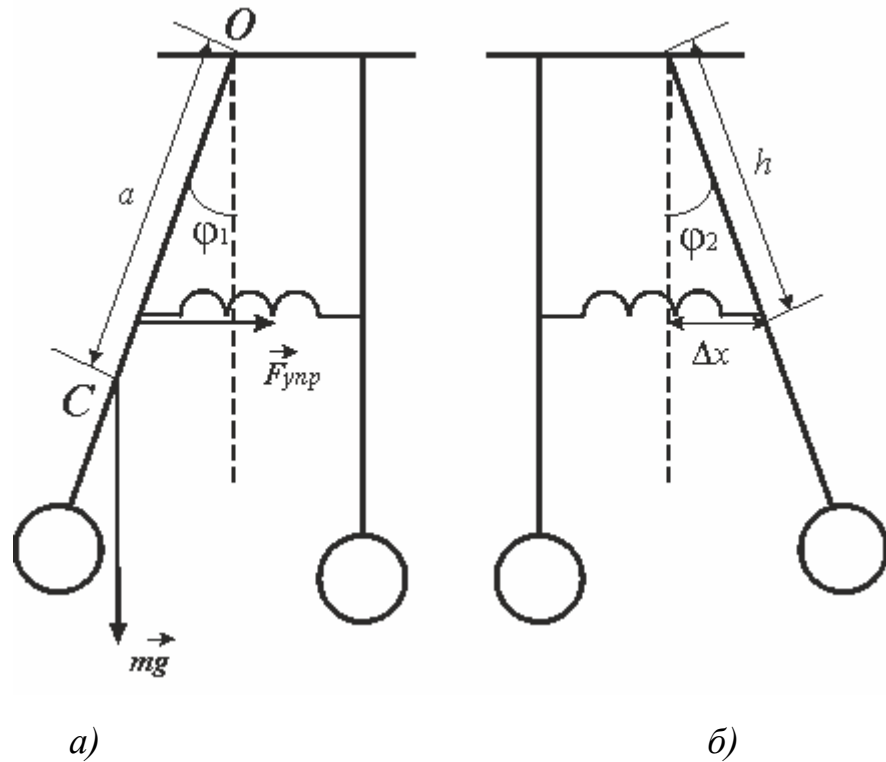


Рис. 13

Определим частоты колебаний парциальных систем, которые для идентичных маятников будут одинаковыми. Будем рассматривать малые углы отклонения маятников от положения равновесия, когда  $\sin\varphi \ll 1$  и, следовательно,  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

На маятник действуют момент составляющей силы тяжести  $(m\vec{g}) M_1$ , и момент силы упругости  $(\vec{F}_{упр}) M_2$  возвращающие маятник в положение равновесия (рис. 13а). Уравнение вращательного движения для парциальной системы запишется в виде:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M_1 - M_2, \quad (35)$$

где  $I$  – момент инерции маятника относительно точки подвеса,  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  – угловое ускорение.

Момент силы тяжести:

$$M_1 = mg \cdot a \cdot \sin \varphi \approx mg \cdot a \cdot \varphi,$$

где  $a$  – расстояние от центра тяжести маятника (т.  $C$ ) до оси вращения (т.  $O$ ),  $m$  – масса маятника.

Момент силы упругости пружины

$$M_2 = k \Delta x \cdot h \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = k \Delta x \cdot h \cdot \cos \varphi \approx k \Delta x \cdot h,$$

т.к.  $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \approx 1$  при условии, что угол  $\varphi$  мал.

Здесь  $h$  – расстояние от точки подвеса маятника до точки закрепления пружины,  $\Delta x$  – деформация пружины,  $k$  – коэффициент жесткости пружины.

Деформацию пружины  $\Delta x$  можно представить как  $\Delta x = h \cdot \sin \varphi$  (см. рис. 13а).

Тогда

$$M_2 = k \cdot h^2 \cdot \sin \varphi \approx k \cdot h^2 \varphi.$$

И моменты силы тяжести и силы упругости можно представить как

$$M_1 = mg \cdot a \cdot \varphi, \quad (36)$$

$$M_2 = k \cdot h^2 \cdot \varphi \quad (37)$$

Уравнение (35) с учетом выражений для моментов сил (36) и (37) запишется:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \cdot a \cdot \varphi - k \cdot h^2 \cdot \varphi = -\varphi \cdot (mg \cdot a - k \cdot h^2) \quad (38)$$

Введем обозначения:

$$\lambda = k \cdot h^2, \quad n^2 = \frac{mg \cdot a + \lambda}{I}.$$

При этом уравнение (38) примет вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + n^2 \varphi = 0. \quad (39)$$

Решением уравнения (39) является гармоническая функция  $\varphi = \varphi_0 \sin nt$ , где  $n$  – собственная частота колебаний парциальной системы (парциальная частота).

Установим характер движения связанных маятников. В данном случае при малых углах  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  удлинение пружины будет равно

$$\Delta x = h \cdot (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \approx h \cdot (\varphi_1 - \varphi_2),$$

а момент силы упругости

$$M_2 = (k \cdot \Delta x) \cdot h = kh^2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Уравнения движения маятников примут вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + n^2\varphi_1 - \frac{\lambda}{I}\varphi_2 = 0 \\ \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + n^2\varphi_2 - \frac{\lambda}{I}\varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Вычитая одно уравнение из другого, и складывая эти уравнения, получим два независимых уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{Y} + \left(n^2 + \frac{\lambda}{I}\right)Y = 0 \\ \ddot{X} + \left(n^2 + \frac{\lambda}{I}\right)X = 0 \end{cases}, \quad (41)$$

где  $X = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $Y = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\ddot{X} = \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2$ ,  $\ddot{Y} = \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2$ .

Решением уравнений (41) являются функции:

$$Y = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$X = B_1 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где  $\omega_1^2 = n^2 + \frac{\lambda}{I}$ ,  $\omega_2^2 = n^2 - \frac{\lambda}{I}$ .

Знание  $X$  и  $Y$  позволяет определить  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то есть найти общие решения уравнений (40):

$$\begin{cases} \varphi_1 = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ \varphi_2 = -A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases}, \quad (42)$$

где  $A = \frac{A_1}{2}$ ,  $B = \frac{B_1}{2}$ .

Смысл этого решения следующий: если вывести систему с двумя степенями свободы из состояния равновесия ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ), то каждая

координата выразится как функция времени в виде суммы двух синусоидальных (или нормальных) колебаний.

$$\text{Частоты} \quad \omega_1 = \sqrt{\left(n^2 + \frac{\lambda}{I}\right)} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{\left(n^2 - \frac{\lambda}{I}\right)} \text{ (нормальные частоты)}$$

определяются только параметрами системы, а  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  определяются из начальных условий.

При специальном выборе начальных условий мы можем заставить обе массы совершать гармонические колебания с одной из двух нормальных частот.

Пусть, например, начальные условия таковы:  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ ,  $\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = 0$  при  $t = 0$ .

Подстановкой указанных начальных условий в уравнение (42) и при дальнейшем дифференцировании получим:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$A = 0$$

$$B = \varphi_0$$

В результате уравнения (42) принимают вид:

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \omega_2 t$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega_2 t$$

Таким образом, в рассматриваемом случае имеют место гармонические колебания двух идентичных маятников с частотой  $\omega_2 < n$  (рис. 14).

Если начальные условия несколько видоизменить ( $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$ ), то уравнения (42) в результате аналогичных действий принимают вид:

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \omega_1 t$$

$$\varphi_2 = -\varphi_0 \cos \omega_1 t$$

В этом случае маятники колеблются с нормальной частотой  $\omega_1 > n$  (рис. 15).

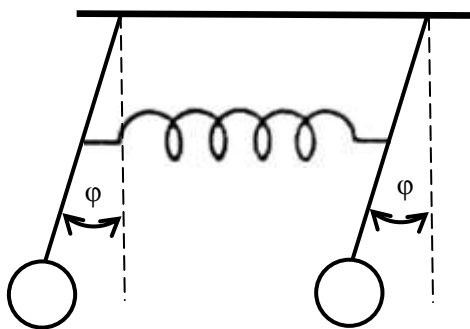


Рис. 14

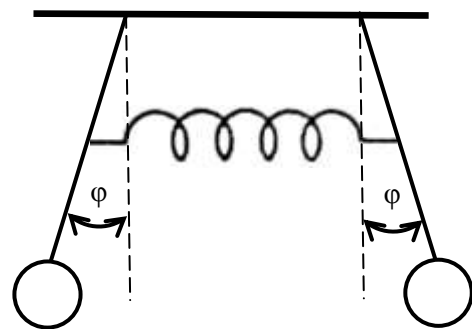


Рис. 15

Интересно рассмотреть колебания маятников при начальных условиях вида

$$\varphi_1 = \varphi_0,$$

$$\varphi_2 = 0,$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0.$$

Это возможно при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Подстановка этих начальных условий в уравнения (42) даёт:

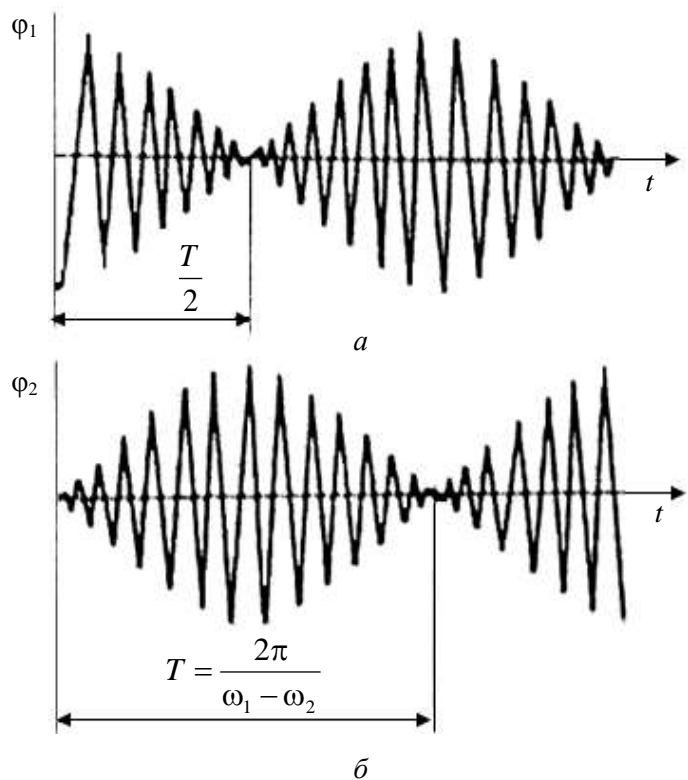


Рис. 16

$$A + B = \varphi_0,$$

$$-A + B = 0,$$

откуда  $A = B = \frac{\varphi_0}{2}$

В результате уравнения (42) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \varphi_0 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ \varphi_2 &= \frac{\varphi_0}{2} (\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = \varphi_0 \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \end{aligned} \quad (43)$$

Из уравнений (43) следует, что оба маятника совершают гармонические колебания с пульсирующей амплитудой, зависящей от разности частот  $\omega_1 - \omega_2$ .

В случае слабой связи маятников (коэффициент жесткости пружины  $k \ll 1$ ) их колебания будут мало различаться по частоте, т. е.  $\omega_1 \cong \omega_2$ . Тогда  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  и колебания имеют характер биений. На рис. 16а, б показана зависимость от времени  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Период биений

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (44)$$

Уравнения (43) дают ответ на вопрос о том, как передается энергия от первого маятника ко второму, если вначале возбужден первый маятник. Переменная, медленно меняющаяся амплитуда  $\varphi_2$  достигнет максимального значения тогда, когда множитель  $\sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$  равен единице, при этом  $\varphi_{2\max} = \varphi_0$ , т. е. максимальное отклонение второго маятника равно начальному отклонению. Это означает, что вся энергия передается через

некоторое время второму маятнику. Время перекачки энергии называется полупериодом биений.

Установка состоит из двух идентичных физических маятников 1, представляющих собой стержни, вдоль которых может перемещаться груз (рис. 17). Маятники в верхней части имеют призму. Призма устанавливается на два горизонтальных стержня. Маятники соединены пружиной 2, которая может перемещаться в вертикальной плоскости.



Рис. 17 – Внешний вид установки



### Порядок выполнения работы

1. Соединить маятники пружиной вблизи точек подвеса на одинаковых расстояниях  $h$  (рис. 1).
2. Отвести маятники от положения равновесия **в одну сторону** на 3–5 см и измерить время  $t$ , в течение которого связанные маятники совершат  $N$  полных колебаний ( $N_1 = 20–30$ ).
3. Рассчитать период колебаний  $T_1 = \frac{t_1}{N_1}$  и частоту  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  колебаний связанных маятников.
4. Операции, указанные в п.п. 2–3, провести для других значений параметра  $h$ .
5. Результаты прямых измерений и расчетов (п.п. 1 – 3) занести в таблицу 1:

Таблица 1

Номер опыта	$h$ , см	$t_1$ , с	$N_1$	$T_1$ , с	$\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	$t_2$ , с	$N_2$	$T_2$ , с	$\omega_2$ , с <sup>-1</sup>	$T$ , с
1										
2										
3										

6. Операции, указанные в п.п. 1–6, провести для колебаний связанных маятников, когда в начальный момент маятники отводят от положения равновесия **в разные стороны**, и определить значения величин  $T_2$  и  $\omega_2$  для различных значений  $h$ . Данные измерений и вычислений занести в таблицу 1.
7. Вычислить период биений по формуле (44) для различных значений  $h$  и результаты занести в таблицу 1.
8. Отвести один из связанных маятников от положения равновесия на 3–5 см и измерить время, в течение которого амплитуда колебаний этого

маятника станет равной нулю. Если в течение времени  $t$  амплитуда  $N$  раз обращалась в нуль, то период биений определится по формуле  $T = \frac{t}{N}$ .

9. Измерения, указанные в п. 8, повторить для других значений параметра  $h$ .

10. Результаты измерений и вычислений занести в табл. 2:

Таблица 2

Номер опыта	$h$ , см	$t$ , с	$N$	$T$ , с
1				
2				
3				

11. По данным таблицы 1 построить: график зависимости периода колебаний  $T_1$  от значения параметра  $h$ , график зависимости вычисленного периода биений  $T(h)$ .

12. По данным таблицы 2 построить график зависимости  $T = f(h)$ .

13. Сравнить значения периода биений, полученные непосредственно из эксперимента (п. 8-9) со значениями периода биений, полученных по формуле (44).

### **Контрольные вопросы**

1. Какая колебательная система называется системой с двумя степенями свободы?

2. Приведите уравнения движения двух связанных маятников и охарактеризуйте их решения.

3. Что называется парциальными и нормальными частотами связанных систем?

4. При каких условиях возникает явление биения маятников и чем определяется частота биений?

### ***Список рекомендуемой литературы***

#### *а) основная литература*

*Сивухин Д.В.* Общий курс физики: учеб. пособие в 5 т. Т. 1: Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010 – 560 с.

#### *б) дополнительная литература*

*Савельев И.В.* Курс общей физики: учеб. пособие для ВТУЗов в 5 кн. Кн. 1 Механика. М.: Астрель, АСТ, 2006 – 336с. (и более ранние издания до 2002г.)

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Общие теоретические замечания.....	4
Кинематика вращательного движения твердого тела.....	4
Динамика вращательного движения твердого тела .....	8
<b>ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ</b>	
<i>Лабораторная работа № 1</i>	
<b>Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника.....</b>	<b>12</b>
Теоретические замечания и вывод рабочей формулы.....	12
Порядок выполнения работы.....	21
Контрольные вопросы.....	23
<i>Лабораторная работа № 2</i>	
<b>Исследование колебаний связанных маятников.....</b>	<b>24</b>
Теоретические замечания и вывод рабочей формулы.....	32
Порядок выполнения работы.....	33
Контрольные вопросы.....	34
<i>Список рекомендуемой литературы.....</i>	<i>35</i>