УДК 517.9

Факторизационные представления и свойства корневых множеств некоторых весовых классов аналитических функций в круге [1]

Ф. А. Шамоян (Саратов, Россия)
shamoyanfa@yandex.ru

В работе исследуется факторизационное представление классов аналитических функций в круге, логарифм модуля которых принадлежит L_p весовым пространствам.

Ключевые слова: бесконечные произведения, факторизация, аналитические функции, класс Неванлинны.

Factorization representations and properties of root sets of some weight classes of analytic functions in the disk [1]

F. A. Shamoyan (Saratov, Russia)
shamoyanfa@yandex.ru

In the paper studies the factorization of classes of analytic functions in the unit disc for which logarithm of modulus belongs in L_p spaces.

Keywords: infinite product, factorisation ,analytic function, Nevanlinna class.

Пусть D – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ – множество всех аналитических функций в D, N – класс функций ограниченного вида в D. По теореме Р. Неванлинны (см. [1]) класс N совпадает с классом аналитических функций в D, допускающих представление

$$f(z) = cz^m B(z, z_k) \exp\left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta) \right\}, z \in D, m \in Z_+, \qquad (1)$$

где B – произведение Бляшке, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – нули функции f, удовлетворяющие условию Бляшке, μ – функция конечной вариации на $[-\pi;\pi]$.

Естественно возникает вопрос о построении факторизационного представления для классов аналитических в круге функций типа (1), не имеющих ограниченного вида.

В работе строится представление типа (1) для классов аналитических в D функций f, для которых $\ln|f|$ принадлежит L^p-весовым классам при довольно общих условиях на весовую функцию.

Пусть Ω – класс положительных функций из $L^1(0,1)$, для которых выполняется оценка $m_\omega \leq \dfrac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M_\omega$, $\forall x \in (0,1), \lambda \in [q_\omega, 1]$, где $m_\omega, M_\omega, q_\omega$ – положительные числа, причем $q_\omega \in (0;1]$, которые зависят только от ω; $\omega \in \Omega$.

Обозначим для $0 < p < +\infty$

$$N_\omega^p = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_D \left(\ln^+|f(z)|\right)^p \omega(1-|z|)dm_2(z) < +\infty \right\},$$

где dm_2 – плоская мера Лебега на D.

При $\omega(t) = t^\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$ и $p = 1$ класс $N_\omega^1 = N_\alpha$ совпадает с классом Неванлинны-Джрбашяна (см. [2], [3]).

Далее, при $k \in Z_+, l = -2^k, ..., 2^k - 1$, положим

$$\Delta_{k,l} := \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^k} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{\pi l}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}$$

и

$$n_{k,l} := card\left\{z_m \in \Delta_{k,l}\right\}, k \in Z_+, l = -2^k, ..., 2^k - 1.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in H(D)$, $\ln|f| \in L_\omega^p$, $0 < p < +\infty$, *тогда*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{n_{k,l}^p}{2^{2k}} \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) < +\infty. \tag{2}$$

Обратно, если $Z = \{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность из* D, *для которой ряд (2) сходится, то произведение М. Джрбашяна с этими нулями (см. [4])*

$$\pi_s(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \frac{s+1}{\pi} \int\limits_D \frac{\left(1 - |\zeta|^2\right)^s ln\left|1 - \frac{\zeta}{z_k}\right|}{\left(1 - \overline{\zeta} z\right)^{s+2}} dm_2(\zeta)$$

при достаточно больших ꟹравномерно сходится в D и принадлежит классу N^p_ω, $0 < p < +\infty, \omega \in \Omega$.

Замечание. При $p = 1$ теорема 1 и полный аналог факторизационного представления (1) построен в работах автора (см. [2], [3]).

Теорема 2. *Пусть $\omega(t) = t^\alpha, 0 < t < 1$, $-1 < \alpha < +\infty$, $N^p_\alpha := N^p_\omega$ и выполняются все условия теоремы 1, тогда при достаточно больших β функцию f можно представить в виде*

$$f(z) = cz^m \pi_\beta(z, z_k) \exp \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})}{(1 - e^{-i\theta}z)^{\beta+1}} d\theta,$$

где $\psi(\theta)$ – функция из класса О. Бесова $B^s_p, 0 < p < +\infty, s = \beta - \dfrac{\alpha+1}{p}$, причем каждый из сомножителей в представлении (1) принадлежит классу N^p_α.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.

[2] *Шамоян Ф. А.* Несколько замечаний к параметрическому представлению классов Неванлинны-Джрбашяна // Математические заметки. 1992. Т. 52, вып. 1. С. 128-140.

[3] *Шамоян Ф. А. Шубабко Е. Н.* Введение в теорию L^p-классов мероморфных функций. Брянск : Изд-во БГУ, 2009. 153 с.

[4] *Джрбашян М. М.* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщения института математики и механики. 1948. Т. 3, №. 1. С. 3-40.