УДК 514.01

Функциональные уравнения типа Йенсена-Коши от функций многих переменных[1]

И. В. Поликанова (Барнаул, Россия)

Anirix1@yandex.ru

В статье приводятся решения в классе непрерывных функций функциональных уравнений, напоминающих по виду четыре уравнения Коши. Неизвестные функции в них зависят от многих переменных. Одна часть уравнения представляет собой композицию искомой функции с мультифункцией, зависящей от произвольного гомеоморфизма. Заменой функции уравнения сводятся к уравнению Йенсена. Многочисленные следствия обусловлены возможностью подстановки в уравнения различных гомеоморфизмов.

Ключевые слова: функциональное уравнение от функций многих переменных, функциональное уравнение Йенсена, функциональные уравнения Коши, мультифункция.

Functional equations of Jensen-Cauchy type for functions of several variables[1]

I. V. Polikanova (Barnaul, Russia)

Anirix1@yandex.ru

The article presents solutions in the class of continuous functions of functional equations that resemble the four Cauchy equations in appearance. The unknown functions in them depend on many variables. One part of the equation is the composition of the desired function with a multifunction depending on an arbitrary homeomorphism. By replacing the function, the equations are reduced to the Jensen equation. Numerous consequences are due to the possibility of substituting various homeomorphisms into equations.

Keywords: functional equation of functions of several variables, Jensen functional equation, Cauchy functional equations, multifunction.

Введение

Применение мультифункций позволило существенно расширить класс функциональных уравнений, имеющих решения в явном виде. Так, ранее автор нашёл решения функциональных уравнений Коши четырёх типов, Йенсена и Лобачевского от функций многих переменных в классе непрерывных функций [1]. Известные решения аддитивного и экспоненциального уравнений Коши и Йенсена для функций многих переменных [2] автором получены принципиально новым способом.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-ая декартова степень поля действительных чисел $\mathbb{R}$, её элементы будем называть *мультиаргументами* и обозначать жирным шрифтом в отличие от вещественных координат: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. *Мультифункцией от k мультиаргументов* $\mathbf{x}_{(s)} = (x_{(s)1}, x_{(s)2}, ..., x_{(s)n})$, $s = 1, ..., k$, порождённой функцией $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, зависящей от k действительных аргументов, назовём отображение типа $\mathbb{R}^{kn} \to \mathbb{R}^n$, определённое по правилу:

$$f\left(\mathbf{x}_{(1)}, ..., \mathbf{x}_{(k)}\right) = \left(f(x_{(1)1}, x_{(2)1}, ..., x_{(k)1}),\ \dots\ , f(x_{(1)n}, x_{(2)n}, ..., x_{(k)n})\right).$$

Например: $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$, $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_n y_n), \quad \mathbf{x}^{\mathbf{b}} = (x_1^{b_1}, x_2^{b_2}, ..., x_n^{b_n}),$$

$$log_a \mathbf{x} = (log_a x_1, log_a x_2, ..., log_a x_n), \quad a^{\mathbf{x}} = (a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_n}).$$

Композиции и суперпозиции мультифункций с отображениями и мультифункциями определяются так же и при тех же условиях, как композиции и суперпозиции отображений. Мультифункции наследуют многие свойства порождающих их функций, например, инъективность, сюръективность (если они определены на декартовой степени некоторого множества), непрерывность, а также многие их специфические свойства. Кроме того, если порождающая функция $f(x)$ одного аргумента имеет обратную функцию $f^{-1}(x)$, то её мультифункция $f(\mathbf{x})$ имеет обратную мультифункцию $f^{-1}(\mathbf{x}) = (f^{-1}(x_1), ..., f^{-1}(x_n))$. Так, обратной мультифункцией к $log_a \mathbf{x}$ является $a^{\mathbf{x}}$. Поэтому $a^{log_a \mathbf{x}} = \mathbf{x}$, $\quad log_a a^{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$.

Введём обозначения:

$$\mathbf{b} * \mathbf{x} = b_1 x_1 + ... + b_n x_n, \quad \left(\mathbf{x}^{\mathbf{b}}\right)_{\odot} = x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n}.$$

В настоящей работе рассматриваются функциональные уравнения, напоминающие одновременно уравнения Коши:

$\mathbf{K}_I$. $\quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ (решения: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} * \mathbf{x}$),
$\mathbf{K}_{II}$. $\quad f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y})$ (решения: $f(\mathbf{x}) = a^{\mathbf{b} * \mathbf{x}}$),
$\mathbf{K}_{III}$. $\quad f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ (решения: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} * log_a \mathbf{x}$),
$\mathbf{K}_{IV}$. $\quad f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y})$ (решения: $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}})_{\odot}$)

и уравнение Йенсена

J. $\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)\mathbf{f}(\mathbf{y})$ (решения: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} * \mathbf{x} + b_0$),

и сводящиеся к последнему заменой неизвестной функции. Подчеркнём, что неизвестная функция в уравнениях – не мультифункция, а обычная функция n аргументов, мультифункции используются как подстановочные в неё функции.

Уравнения типа Коши-Йенсена

Всюду ниже $\lambda \in (0,1)$ – фиксированное действительное число, $k : \tilde{Q} \to Q$ – гомеоморфизм некоторого подмножества $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^n$ на подмножество $Q \subset \mathbb{R}^m$, $k^{-1} = (k_1(\mathbf{x}), ..., k_n(\mathbf{x}))$ – обратный гомеоморфизм. Решения функциональных уравнений ищутся в классе непрерывных функций, определённых на множестве Q.

Теорема 1. *Пусть $\tilde{Q}$ – замкнутое, с непустой внутренностью, выпуклое множество. Единственными решениями обобщённого аддитивного уравнения Йенсена-Коши*

$$\boldsymbol{JK}_I. \qquad f\left(k(\lambda k^{-1}(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)k^{-1}(\boldsymbol{y}))\right) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

являются аффинные функции:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0 = b_1 k_1(\boldsymbol{x}) + ... + b_n k_n(\boldsymbol{x}) + b_0 \tag{2}$$

при любом наборе $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ и $b_0 \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{Q}$ – замкнутое, с непустой внутренностью, выпуклое множество. Единственными решениями обобщённого экспоненциального уравнения Йенсена-Коши*

$$\boldsymbol{JK}_{II}. \qquad f\left(k(\lambda k^{-1}(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)k^{-1}(\boldsymbol{y}))\right) = f(\boldsymbol{x})^{\lambda} f(\boldsymbol{y})^{1-\lambda} \tag{3}$$

являются постоянная $f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ и функции вида:

$$f(\boldsymbol{x}) = a^{\boldsymbol{b} * k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0} = a^{b_1 k_1(\boldsymbol{x}) + ... + b_n k_n(\boldsymbol{x}) + b_0} \tag{4}$$

при любом наборе $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ и любых действительных числах b_0, $a > 0$, $a \neq 1$.

Теорема 3. *Пусть $\tilde{Q} = P^n \subset \mathbb{R}^n$, где P – числовой интервал одного из видов $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $(0, c]$, $[c, d]$, $[c, +\infty)$, $c, d \in \mathbb{R}_+$. Единственными решениями обобщённого логарифмического уравнения Йенсена-Коши*

$$\boldsymbol{JK}_{III}. \qquad (f \circ k)((k^{-1}(\boldsymbol{x}))^{\lambda} (k^{-1}(\boldsymbol{y}))^{1-\lambda}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{y}) \tag{5}$$

являются функции вида:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} * log_a k^{-1}(\boldsymbol{x}) + b_0 = b_1 log_a k_1(\boldsymbol{x}) + ... + b_n log_a k_n(\boldsymbol{x}) + b_0 \tag{6}$$

при любом наборе $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ и любых действительных числах b_0, $a > 0$, $a \neq 1$.

Теорема 4. *Пусть* $\tilde{Q} = P^n$, *где* P – *числовой интервал одного из видов* $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$. *Единственными решениями обобщённого степенного уравнения Йенсена-Коши*

$$\boldsymbol{JK}_{IV}. \qquad (f \circ k)((k^{-1}(\boldsymbol{x}))^{\lambda}(k^{-1}(\boldsymbol{y}))^{1-\lambda}) = f(\boldsymbol{x})^{\lambda} f(\boldsymbol{y})^{1-\lambda} \tag{7}$$

являются функции вида

$$f(\boldsymbol{x}) = c \left(k^{-1}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{b}}\right)_{\odot} = c \cdot k_1(\boldsymbol{x})^{b_1} \cdot ... \cdot k_n(\boldsymbol{x})^{b_n} \tag{8}$$

при любом наборе $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ *и* $c > 0$.

Заключение

Видоизменённые уравнения (1), (3), (5), (7) в результате замены λ и $(1 - \lambda)$ на произвольные действительные числа $p \neq 0$ и $q \neq 0$ имеют решения соответственно (2), (4), (6) при $b_0 = 0$ и (8) при $c = 1$. При $p = q = 1$ и тождественном гомеоморфизме уравнения принимают вид уравнений Коши. Подставляя в формулы различные гомеоморфизмы, получаем многочисленные следствия. Например, следующее

Следствие. *Обобщённые уравнения Йенсена-Коши* $\boldsymbol{JK}_I - \boldsymbol{JK}_{IV}$ *при тождественном гомеоморфизме и* $\lambda = \frac{1}{2}$ *принимают вид:*

$$f\left(\frac{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}}{2}\right) = \frac{f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})}{2},$$

$$f\left(\frac{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}}{2}\right) = \sqrt{f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y})},$$

$$f\left(\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}\right) = \frac{f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})}{2},$$

$$f\left(\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}\right) = \sqrt{f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y})}$$

и имеют соответственно решения:

$$\mathbf{b} * \mathbf{x} + b_0, \qquad a^{\mathbf{b} * \mathbf{x} + b_0}, \qquad \mathbf{b} * log_a \mathbf{x} + b_0, \qquad c \cdot (\mathbf{x}^{\mathbf{b}})_{\odot}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Polikanova I. V.* Functional equations of Cauchy, Jensen, Lobachevsky in functions of several variables // Международная конференция по геометрическому анализу, посвящённая памяти академика Ю.Г. Решетняка, 23-29 октября 2022 г.: Тез.докл. Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2022. С. 138.

[2] *Ацель Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 432 с.