УДК 517.588; 517.589

Специальные классы решений для уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения[1]

С. В. Подклетнова (Самара, Россия)
podkletnova.sv@ssau.ru

В статье представлены специальные классы решений для различных значений параметров нового уравнения в частных производных гиперболического типа. Рассматриваемое уравнение является объединением известного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, заданного в характеристических координатах, и его образа относительно оси ординат. Настоящая работа является продолжением исследований уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, проведённого профессорами Волкодавовым В.Ф. и Николаевым Н.Я. в работе [1], а также автора представленной статьи в работах [2] и [3]. Решения, выведенные в поставленных классах, значительно упрощают дальнейшее изучение как рассматриваемого уравнения, так и уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, уравнение Эйлера-Дарбу, специальные классы решений, уравнение в частных производных, дифференциальное уравнение.

Special Classes of Solutions for the Euler-Darboux Equation with Two Degeneracy Lines[1]

S. V. Podkletnova (Samara, Russia)
podkletnova.sv@ssau.ru

The article presents the special classes of solutions for different parameter values of the new partial differential equation of hyperbolic type. The equation under consideration is a unification of the well-known Euler-Poisson-Darboux equation, given in characteristic coordinates, and its image with respect to the ordinate axis. This work is a continuation of the studies of the Euler-Poisson-Darboux equation conducted by Professors V.F. Volkodavov and N.Y. Nikolaev in [1], as well as by the author of this article in [2] and [3]. The solutions derived in the classes and given in the article greatly simplify the further study of both the equation under consideration and the Euler-Poisson-Darboux equation.

Keywords: hyperbolic equation, Euler-Darboux equation, special classes of solutions, partial differential equation, differential equation.

Введение

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv (\xi \cdot \operatorname{sgn} \xi - \eta) \cdot u_{\xi\eta} - b \cdot u_{\xi} + a \cdot \operatorname{sgn} \xi \cdot u_{\eta} = 0. \tag{1}$$

При $\xi > 0$ уравнение (1) является известным уравнением Эйлера-Дарбу:

$$L(u) \equiv (\xi - \eta) \cdot u_{\xi\eta} - b \cdot u_\xi + a \cdot u_\eta = 0, \tag{2}$$

а при отрицательных значениях ξ (1) тождественно уравнению

$$L(u) \equiv (\xi + \eta) \cdot u_{\xi\eta} + b \cdot u_\xi + a \cdot u_\eta = 0,$$

представляющему собой образ уравнения (2) относительно оси ординат η, поэтому назовём уравнение (1) уравнением Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения.

Для уравнения (1) в областях $G_- = \{(\xi,\eta) | \, 0 < -\xi < \eta < h\}$ и $G_+ = \{(\xi,\eta) | \, 0 < \xi < \eta < h\}$ в работах [1], [2], [3] были рассмотрены задачи Коши и видоизменённые задачи Коши, решения которых были использованы для определения и вывода специальных классов решений для уравнения (1) с различными ограничениями на параметры. Полученные классические решения компактны и имеют удобное представление для использования с целью применения для решения различных краевых задач для рассматриваемого уравнения. Ниже приведём теоремы, в которых запишем эти решения для всех возможных значений параметров уравнения (1). Первые две теоремы были опубликованы в работе [1] для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и добавлены в текст настоящей работы для полноты изложения материала, но уже для уравнения (1). Такое изменение текста теорем возможно в силу того, что уравнение (2) при указанных в теоремах 1 и 2 условиях тождественно уравнению (1). Для вывода формул и доказательства теорем были использованы определения и тождества, приведённые, например, в работе [4].

Определения специальных классов решений

В работе [1] были выведены два класса решений для уравнения Эйлера-Дарбу с параметрами одинаковых знаков. Для полноты изложения материала приведём здесь их определения, определения и доказательства теорем существования и единственности в остальных классах принадлежат автору настоящей статьи.

Определение 1. *Функция $u(\xi,\eta)$ принадлежит классу ${}_0R_+^h$ в области G_+, если она определяется формулой*

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) = &-\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)} \int\limits_\xi^\eta \frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^\alpha (\eta-t)^\beta} dt + \\ &+ \frac{(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int\limits_\xi^\eta \frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{1-\alpha}} dt, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\tau_+(\xi)=\int\limits_0^\xi T_+(t)\,(\xi-t)^{-\alpha-\beta}dt,\ T_+(\xi)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}.$$

Здесь и далее формула, через которую определяется класс решений (в данном случае формула (3)), является решением соответствующей задачи Коши для уравнения (1).

Определение 2. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса ${}_0R^+$ в области G_+, если она определяется формулой*

$$\begin{gathered} u(\xi,\eta)=\frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha+\beta)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1+\beta)}\int\limits_\xi^\eta\frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{-\beta}}dt+\\ +\frac{(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-1}}{\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)}\int\limits_\xi^\eta\frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+\\ +\frac{(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)}\int\limits_\xi^\eta\frac{\tau'_+(t)\left[(\alpha+\beta)(t-\xi)+\alpha(\xi-\eta)\right]}{\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt, \end{gathered}$$

где

$$\tau_+(\xi)=\int\limits_0^\xi T_+(t)\,(\xi-t)^{\alpha+\beta}dt,\ T_+(\xi)\in C_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}.$$

Определение 3. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса ${}_0R^h_-$ в области G_-, если она определяется формулой*

$$\begin{gathered} u(\xi,\eta)=\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^\eta\frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{\beta}}dt+\\ +\frac{(\xi+\eta)^{1-\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\int\limits_{-\xi}^\eta\frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{1-\alpha}}dt, \end{gathered}$$

где

$$\tau_-(\xi)=\int\limits_\xi^0 T_-(t)\,(t-\xi)^{-\alpha-\beta}dt,\ T_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}.$$

Определение 4. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса ${}_0R_-$*

в области G_-, если она определяется формулой

$$u\left(\xi,\eta\right)=-\frac{\alpha+\beta}{\left(1+\alpha+\beta\right)\mathrm{B}\left(1+\alpha,1+\beta\right)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\nu_-\left(-t\right)}{\left(t+\xi\right)^{-\alpha}\left(\eta-t\right)^{-\beta}}dt+$$
$$+\frac{\left(\xi+\eta\right)^{\alpha+\beta-1}}{\mathrm{B}\left(1-\alpha,1-\beta\right)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau_-\left(-t\right)}{\left(t+\xi\right)^{\beta}\left(\eta-t\right)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{\left(\xi+\eta\right)^{\alpha+\beta-1}}{\left(\alpha+\beta\right)\left(1-\alpha-\beta\right)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau'_-\left(-t\right)\left[\left(\alpha+\beta\right)\left(t+\xi\right)-\alpha\left(\xi+\eta\right)\right]}{\mathrm{B}\left(1-\alpha,1-\beta\right)\left(t+\xi\right)^{-\beta}\left(\eta-t\right)^{-\alpha}}dt,$$

где

$$\tau_-\left(\xi\right)=\int\limits_{\xi}^{0}T_-\left(t\right)\left(t-\xi\right)^{\alpha+\beta}dt,\ T_-\left(\xi\right)\in C_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}.$$

Определение 5. *Функция $u\left(\xi,\eta\right)$ называется решением класса R^h_{1+} в области G_+, если она определяется формулой*

$$u\left(\xi,\eta\right)=-\frac{1}{2\left(\alpha-\beta-1\right)\mathrm{B}\left(1-\alpha,1+\beta\right)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\nu_+\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)^{\alpha}\left(\eta-t\right)^{-\beta}}dt+$$
$$+\frac{\left(\eta-\xi\right)^{\beta-\alpha}}{\mathrm{B}\left(\alpha,1-\beta\right)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau_+\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)^{\beta}\left(\eta-t\right)^{1-\alpha1}}dt+$$
$$+\frac{\left(\eta-\xi\right)^{\beta-\alpha}}{\left(\beta-\alpha\right)\mathrm{B}\left(\alpha,1-\beta\right)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau'_+\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)^{\beta}\left(\eta-t\right)^{-\alpha}}dt,$$

где

$$\tau_+\left(\xi\right)=\int\limits_{0}^{\xi}T_+\left(t\right)\left(\xi-t\right)^{\beta-\alpha}dt,\ T_+\left(\xi\right)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}. \tag{4}$$

Определение 6. *Функция $u\left(\xi,\eta\right)$, определяемая формулой*

$$u\left(\xi,\eta\right)=\frac{1}{\left(\alpha-\beta-1\right)\mathrm{B}\left(1-\alpha,1+\beta\right)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\nu_+\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)^{\alpha}\left(\eta-t\right)^{-\beta}}dt+$$
$$+\frac{\left(\eta-\xi\right)^{\beta-\alpha}}{\mathrm{B}\left(\alpha,1-\beta\right)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau_+\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)^{\beta}\left(\eta-t\right)^{1-\alpha}}dt+$$
$$+\frac{\left(\eta-\xi\right)^{\beta-\alpha}}{\left(\beta-\alpha\right)\mathrm{B}\left(\alpha,1-\beta\right)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau'_+\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)^{\beta}\left(\eta-t\right)^{-\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{2+} в области G_+, если функция $\tau_+\left(\xi\right)$ определяется формулой (4), где $T_+\left(\xi\right)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Определение 7. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса R^h_{1-} в области G_-, если она определяется формулой*

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2(\alpha-\beta-1)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1+\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}}dt-$$
$$-\frac{(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}}{\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{1-\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau'_-(-t)}{(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}}dt,$$

где

$$\tau_-(\xi)=\int\limits_{\xi}^{0}T_-(t)\,(t-\xi)^{\beta-\alpha}dt,\ T_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}. \qquad (5)$$

Определение 8. *Функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=-\frac{1}{(\alpha-\beta-1)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1+\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}}dt-$$
$$-\frac{(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}}{\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{1-\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau'_-(-t)}{(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{2-} в области G_-, если функция $\tau_-(\xi)$ определяется формулой (5), где $T_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Определение 9. *Функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=-\frac{1}{2(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1-\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau'_+(t)}{(t-\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{3+} в области G_+, если

$$\tau_+(\xi)=\int\limits_{0}^{\xi}T_+(t)\,(\xi-t)^{\alpha-\beta}dt,\ T_+(\xi)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}. \qquad (6)$$

Определение 10. *Функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1-\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\nu_+(t)}{(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau_+(t)}{(t-\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{\tau'_+(t)}{(t-\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{4+} в области G_+, если функция $\tau_+(\xi)$ определяется формулой (6), где $T_+(\xi)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Определение 11. *Функция $u(\xi,\eta)$ называется решением класса R^h_{3-} в области G_-, если она определяется формулой*

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2\,(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau'_-(-t)}{(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt,$$

где

$$\tau_-(\xi)=\int\limits_{\xi}^{0}T_-(t)\,(t-\xi)^{\alpha-\beta}dt,\ T_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}. \tag{7}$$

называется решением класса R^h_{4+} в области G_+, если функция $\tau_+(\xi)$ определяется формулой (6), где $T_+(\xi)\in C^1_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Определение 12. *Функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=-\frac{1}{(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1-\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\nu_-(-t)}{(t+\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}}dt+$$
$$+d\tfrac{(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}}{\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau_-(-t)}{(t+\xi)^{1-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt+$$
$$+\frac{(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(1-\alpha,\beta)}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\frac{\tau'_-(-t)}{(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}}dt,$$

называется решением класса R^h_{4-} в области G_-, если функция $\tau_-(\xi)$ определяется формулой (7), где $T_-(\xi)\in C^1_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Классические решения уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения

Теорема 1. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_{-}(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_{-}(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt,$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=-\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta<1$ *класса* ${}_0R_{-}$ *в области* G_{-}, *если* $T_{-}(\xi),\ N_{-}(\xi)\in C_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 2. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{0}^{\xi}T_{+}(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}N_{+}(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt,$$

является классическим решением класса ${}_0R^{+}$ *уравнения (1) при* $a=-\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta<1$ *в области* G_{+}, *если* $T_{+}(\xi),\ N_{+}(\xi)\in C^{2}_{(0,h)}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 3. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_{-}(t)(t-\xi)^{-\alpha}(\eta+t)^{-\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_{-}(t)(\xi-t)^{-\alpha}(\eta+t)^{-\beta}dt,$$

является классическим решением класса ${}_0R^{h}_{-}$ *уравнения (1) в области* G_{-}, *если* $a=\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta<1$ $T_{-}(\xi),\ N_{-}(\xi)\in C^{1}_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 4. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_{-}(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_{-}(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt,$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=-\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta<1$ *класса* ${}_0R_{-}$ *в области* G_{-}, *если* $T_{-}(\xi),\ N_{-}(\xi)\in C_{(-h,0)}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 5. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{0}^{\xi}T_{+}(t)(\xi-t)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}N_{+}(t)(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt, \quad (8)$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta<1$ *класса* R_{1+}^{h} *в области* G_{+}, *если* $T_{+}(\xi),\ N_{+}(\xi)\in C_{(0,h)}^{1}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 6. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой (8), является классическим решением уравнения (1) при* $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,$ $\beta-\alpha<1$ *класса* R_{2+}^{h} *в области* G_{+}, *если* $T_{+}(\xi),\ N_{+}(\xi)\in C_{(0,h)}^{1}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 7. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_{-}(t)(t-\xi)^{-\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_{-}(t)(\xi-t)^{-\alpha}(\eta+t)^{\beta}dt,\quad(9)$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta<1$ *класса* R_{1-}^{h} *в области* G_{-}, *если* $T_{-}(\xi),\ N_{-}(\xi)\in C_{(-h,0)}^{1}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 8. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой (9), является классическим решением уравнения (1) при* $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,$ $\beta-\alpha<1$ *класса* R_{2-}^{h} *в области* G_{-}, *если* $T_{-}(\xi),\ N_{-}(\xi)\in C_{(-h,0)}^{1}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 9. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{0}^{\xi}T_{+}(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}N_{+}(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt,\quad(10)$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \beta-\alpha<1$ *класса* R_{3+}^{h} *в области* G_{+}, *если* $T_{+}(\xi),\ N_{+}(\xi)\in C_{(0,h)}^{1}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 10. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой (10), является классическим решением уравнения (1) при* $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\ \beta,$ $\alpha-\beta<1$ *класса* R_{4+}^{h} *в области* G_{+}, *если* $T_{+}(\xi),\ N_{+}(\xi)\in C_{(0,h)}^{1}\cap L_{[0,h]}$.

Теорема 11. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой*

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{0}T_{-}(t)(t-\xi)^{\alpha}(\eta+t)^{-\beta}dt+\int\limits_{-\eta}^{\xi}N_{-}(t)(\xi-t)^{\alpha}(\eta+t)^{-\beta}dt,\quad(11)$$

является классическим решением уравнения (1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\ \beta,\ \beta-\alpha<1$ *класса* R_{3-}^{h} *в области* G_{-}, *если* $T_{-}(\xi),\ N_{-}(\xi)\in C_{(-h,0)}^{1}\cap L_{[-h,0]}$.

Теорема 12. *Функция* $u(\xi,\eta)$, *определяемая формулой (11), является классическим решением уравнения (1) при* $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha$, β, $\alpha-\beta<1$ *класса* R_{4-}^{h} *в области* G_{-}, *если* $T_{-}(\xi)$, $N_{-}(\xi)\in C_{(-h,0)}^{1}\cap L_{[-h,0]}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Волкодавов В. Ф. Николаев Н. Я.* Краевые задачи для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу [Текст] : учебное пособие к спецкурсу "Уравнения математической физики". Куйбышев : КГПИ, 1984. 80 с.

[2] *Подклетнова С. В.* Задача Коши для некоторых значений параметров уравнения Эйлера-Дарбу // Доклады 51-й научной конференции СГПУ. Самара : СГПУ, 1997. С. 66–75.

[3] *Подклетнова С. В.* Ряд краевых задач для уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения // Материалы международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа". Уфа : 2023. С. 100–103.

[4] *Градштейн И. С. Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Физматгиз, 1962. 1108 с.