УДК 517.5

# Периодические интерполяционно-ортогональные $n$-раздельные базисы всплесков[1]

**Е. А. Плещева (Екатеринбург, Россия)**
eplescheva@gmail.com

В работе рассматриваются ортонормированный КМА на основе нескольких масштабирующих функций и соответствующие всплески. На основе такого КМА по ортогональным маскам масштабирующих функций строятся маски новых масштабирующих функций, удовлетворяющие условию интерполяционности. Сформулированы условия на маски масштабирующих функций, необходимые и достатоточные для того, чтобы сдвиги полученной с использованием таких масок масштабирующих функций образовывали интерполяционно-ортогональную систему на $\mathbb{R}$. Построены $n$-раздельные интерполяционно-ортогональные базисы кратномасштабного анализа и всплесков на периоде.

*Ключевые слова:* ортогональный всплеск, интерполяционный всплеск, масштабирующая функция, базис, кратномасштабный анализ, маска масштабирующей функции.

# Periodic interpolating-orthogonal $n$-separate wavelet bases[1]

**E. A. Pleshcheva (Ekaterinburg, Russia)**
eplescheva@gmail.com

The paper considers an orthonormal MRA based on several scaling functions and the corresponding wavelets. We construct the masks of new scaling functions satisfying the interpolation condition. The conditions for masks of scaling functions are formulated, which are necessary and sufficient to ensure that the shifts of scaling functions obtained using such masks form an interpolation-orthogonal system on $\mathbb{R}$. The interpolation-orthogonal bases of $n$-separate multiresolution analysis and wavelets on the period are constructed.

*Keywords:* orthogonal wavelet, interpolating wavelet, scaling function, basis, multiresolution analysis, mask of scaling function.

## Введение

В работе рассматривается построение периодических интерполяционно-ортогональных базисов всплесков на основе нескольких масштабирующих функций. Построение базисов всплесков, как и в классическом случае, начнем с построения кратномасштабного анализа.

**Определение.** *Рассмотрим $n$ последовательностей вложенных друг в друга замкнутых подпространств пространства $L^2(\mathbb{R})$*

$$\ldots \subset V_{-1}^n \subset V_0^1 \subset V_1^2 \subset V_2^3 \subset \cdots \subset V_{n-1}^n \subset V_n^1 \subset V_{n+1}^2 \subset \cdots , \qquad (1)$$

$$\cdots \subset V_{-1}^1 \subset V_0^2 \subset V_1^3 \subset V_2^4 \subset \cdots \subset V_{n-1}^1 \subset V_n^2 \subset V_{n+1}^3 \subset \cdots \qquad (2)$$

$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$

$$\cdots \subset V_{-1}^{n-1} \subset V_0^n \subset V_1^1 \subset V_2^2 \subset \cdots \subset V_{n-1}^{n-1} \subset V_n^n \subset V_{n+1}^1 \subset \cdots , \qquad (3)$$

*Назовем эту конструкцию $n$-раздельным кратномасштабным анализом ($n$-КМА) пространства $L^2(\mathbb{R})$, если она удовлетворяет следующим условиям:*
*а)* $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^1} = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^2} = \cdots = \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^n} = L^2(\mathbb{R})$;
*б)* $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^1 = \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^2 = \cdots = \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_{nj}^n = \{0\}$;
*в)* $f(x) \in V_j^s \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in V_j^s \ \ \forall j, l \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;
*г)* $f(x) \in V_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j^s \ \ \forall j \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;
*д) найдутся такие функции $\varphi^s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, что множества их сдвигов $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированные базисы пространств $V_0^s$, а $\{\varphi_{j,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированные базисы пространств $V_j^s, j \in \mathbb{Z}, s = 1, \ldots, n$.*

Применение $n$-раздельных масштабирующих функций к решению систем дифференциальных уравнений рассматривается в статье [1].

Вложения (1)–(3) выполняются при выполнении масштабирующих соотношений:

$$\varphi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x), \qquad (4)$$

где ряд $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x)$ сходится в $L^2(\mathbb{R})$, $\{\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$p_s = \begin{cases} s+1, & s = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1, & s = n; \end{cases}$$

Подпространства всплесков $W_j^s$, удовлетворяющие условиям:
1) $V_j^s \bigoplus W_j^s = V_{j+1}^{p_s}$; 2) $V_j^s \perp W_j^s$, $j \in \mathbb{Z}$, $s = 1, \ldots, n$, порождаются функциями-всплесками $\{\psi_{j,k}^s(x) = 2^{j/2}\psi^s(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где

$$\psi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^{\nu-1} \overline{h_{1-\nu}^{s,p_s}} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x), \quad s = 1, \ldots, n.$$

Для того, чтобы система $\{\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ была ортонормированной, а система $\{2^{-j/2}\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega - k)|^2 = 1, \ \ \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\omega - k) = 1.$$

В работе [2] Ю.Н. Субботин и Н.И. Черных получили способ преобразовать масштабирующую функцию Мейера таким образом, чтобы новая масштабирующая функция порождала интерполяционно-ортогональную систему сдвигов. В статье [3] нами получен способ модификации масок масштабирующих функций, образующих $n$-раздельный КМА, таким образом, чтобы новые построенные по ним масштабирующие функции порождали интерполяционно-ортогональные базисы.

## Необходимые и достаточные условия интерполяционности

Приведем необходимые условия интерполяционности и ортогональности систем сдвигов масштабирующих функций. Преобразование Фурье масштабирующих соотношений (4) выглядит следующим образом:

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) = m^{s,p_s}(\frac{\omega}{2})\widehat{\varphi^{p_s}}(\frac{\omega}{2}), s = 1, \ldots, n,$$

где маски $m^{s,p_s}(\omega)$ масштабирующих функций определяются следующей формулой:

$$m^{s,p_s}(\omega) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s} e^{2\pi i \nu \omega}_, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Если системы $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированные и интерполяционные, то для масок выполняются соотношения:

$$|m^{s,p_s}(\omega)|^2 + |m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 1, \; m^{s,p_s}(\omega) + m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2}) = 1, s = 1, \ldots, n.$$

Пусть имеется ортонормированный $n$-раздельный КМА с масками $m^{s,p_s}(\omega), \; s = 1, \ldots, n$. Преобразуем маски следующим образом:

$$m_I^{s,p_s}(\omega) = |m^{s,p_s}(\omega)|^2 + i \cdot sign(\sin 2\pi\omega)|m^{s,p_s}(\omega) m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2})|. \qquad (5)$$

Обозначим через $M_I^s(\omega)$ следующие произведения:

$$M_I^1(\omega) = m_I^{1,2}(2^{n-1}\omega) \cdot m_I^{2,3}(2^{n-2}\omega) \cdot \ldots \cdot m_I^{n-1,n}(2\omega) \cdot m_I^{n,1}(\omega),$$

$$\ldots,$$

$$M_I^n(\omega) = m_I^{n,1}(2^{n-1}\omega) \cdot m_I^{1,2}(2^{n-2}\omega) \cdot \ldots \cdot m_I^{n-2,n-1}(2\omega) \cdot m_I^{n-1,n}(\omega).$$

Приведем достаточные условия интерполяционности:

**Теорема.** *Пусть для масок* $m^{s,p_s}(\omega), s = 1,\dots,n,$ *выполняются условия*:

$$|m^{s,p_s}(\omega)|^2 + |m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 1, s = 1,\dots,n.$$

*Определим маски* $m_I^{s,p_s}(\omega), s = 1,\dots,n,$ *формулами* (5). *Пусть при этом функции* $\widehat{\varphi^s}(\omega) := \prod_{j=1}^{\infty} M^s(\frac{\omega}{2^{nj}}) \in L(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$, $|m^{s,p_s}(\omega)| \geq C_0 > 0$ *при* $|\omega| \leq 1/6$ *и имеют конечное число нулей на* $[-1/4;1/4]\backslash[-1/6;1/6]$. *Тогда при целых* $j$ *и* $s = 1,\dots,n$ *системы функций* $\{\varphi_{I,j,k}^s : k \in \mathbb{Z}\}$, *где* $\widehat{\varphi_I^s} := \prod_{j=1}^{\infty} M_I^s(\frac{\omega}{2^{nj}})$, *являются ортонормированными в пространстве* $L^2(\mathbb{R})$, *интерполяционными на сетке* $\{x_{j,r} = r/2^j : r \in \mathbb{Z}\}$. *Последовательности* $V_j^s$ *образуют* $n$*-раздельный КМА пространства* $L^2(\mathbb{R})$.

## Периодизация $n$-раздельных масштабирующих функций и всплесков

Построим по системам $\{\varphi_{I,j,k}^s(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}, \{\psi_{I,j,k}^s(x)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}, s = 1,\dots,n$, периодические масштабирующие функции и всплески:

$$\Phi_{j,k}^{I,s}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_{I,j,k}^s(x-\nu);\ \Psi_{j,k}^{I,s}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \psi_{I,j,k}^s(x-\nu).$$

Пространства $\mathcal{V}_j^{I,s}$, $\mathcal{W}_j^{I,s}$ определим следующим образом:

$$\mathcal{V}_j^{I,s} := \overline{Span\{\Phi_{j,k}^{I,s}(x), k = 0,1,\dots,2^j-1\}},$$

$$\mathcal{W}_j^{I,s} := \overline{Span\{\Psi_{j,k}^{I,s}(x), k = 0,1,\dots,2^j-1\}},\ s = 1,\dots,n.$$

Пространства $\mathcal{V}_j^{I,s}$ образуют периодический $n$-раздельный интерполяционно-ортогональный КМА.

Функции $\Phi_{j,k}^{I,s}(x), \Psi_{j,k}^{I,s}(x), j = 0,1,2,\dots,k = 0,\dots,2^j-1$ могут быть представлены в виде:

$$\Phi_{j,k}^{I,s}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{-j/2}\widehat{\varphi}_I^s(\frac{\nu}{2^j})e^{2\pi i\nu(x-k/2^j)};\ \Psi_{j,k}^{I,s}(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{-j/2}\widehat{\psi}_I^s(\frac{\nu}{2^j})e^{2\pi i\nu(x-k/2^j)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Zakharov V.G.* Reproducing solutions to PDEs by scaling functions// International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2020. Vol. 19, No. 02. 2050017.

[2] *Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных* Интерполяционно-ортогональные системы всплесков// Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14. № 3. С. 153—161.

[3] *Е. А. Плещева* Интерполяционно-ортогональные базисы n-раздельных КМА и всплесков// Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28. № 4. С. 154—163.