УДК 517.9

Разложение первой компоненты вектор-функции по собственным функциям одной дифференциальной оператор-функции[1]

М. С. Пастухов (Саратов, Россия)

ritson67@outlook.com

В статье рассматривается обобщенная начально-граничная задача гиперболического типа. Находятся собственные значения и собственные функции соответствующей обыкновенной дифференциальной оператор функции. После проводится линеаризация рассматриваемой задачи и находится её резольвента. Строится функция Грина. В заключении формулируется теорема о разложении.

Ключевые слова: обобщенная начально-граничная задача гиперболического типа, функция Грина, теорема о разложении.

Благодарности: Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

Decomposition of the first component of a vector function by eigenfunctions of a differential operator function[1]

M. S. Pastukhov (Saratov, Russian)

ritson67@outlook.com

The article considers a generalized initial boundary value problem of hyperbolic type. The eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding ordinary differential operator of the function are found. After that, the linearization of the problem under consideration is carried out and its resolvent is found. The Green's function is being constructed. In conclusion, the decomposition theorem is formulated.

Keywords: generalized initial boundary value problem of hyperbolic type, Green's function, decomposition theorem.

Acknowledgements: This work was implemented in Saratov State University and supported by the Russian Science Foundation (project № 21-71-10001), https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Введение

Рассмотрим обобщенную начально-граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u_x(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{3}$$

где $(x,t) \in Q$, где $Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функции φ, ψ, f комплекснозначные, $\varphi, \psi \in L_1[0,1]$, $f \in L_1(Q_T)$ для любого фиксированного $T > 0$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ при $T > 0$.

Далее используем определения и факты из [1], не оговаривая этого особо. Предполагается, что уравнение (1) гиперболического типа, то есть выполняется следующее условие $p_1^2 - 4p_2 > 0$, при этом корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0 \tag{4}$$

являются вещественными и различными, также предполагается, что

$$\omega_1 < 0 < \omega_2$$

в данном случае оператор-функция (5) будет регулярной [1]. История рассматриваемого вопроса приведена в работах [2]-[3].

Теорема о разложении

С задачей (1)–(3) тесно связана оператор-функция $L(\lambda)$, действующая в $L_2[0,1]$

$$l(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y, \qquad y(0) = y'(1) = 0. \tag{5}$$

Для оператор-функции (5) найдём собственные функции и собственные значения. Для этого рассмотрим следующую задачу

$$L(\lambda)y = 0. \tag{6}$$

Общее решение, уравнения $l(y,\lambda) = 0$ задачи (6) имеет вид

$$y(x,\lambda) = C_1 e^{x\omega_1\lambda} + C_2 e^{x\omega_2\lambda}. \tag{7}$$

Учитывая краевые условия (5), находим собственные значения и собственные функции для оператор-функции $L(\lambda)$

$$\lambda_k = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \ln\frac{|\omega_1|}{\omega_2} + \frac{(2k+1)\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k \in Z, \tag{8}$$

$$y_k(x) = \left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2}\right)^{\frac{x\omega_1}{\omega_2-\omega_1}} e^{\frac{(2k+1)\pi i x\omega_1}{\omega_2-\omega_1}} - \left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2}\right)^{\frac{x\omega_2}{\omega_2-\omega_1}} e^{\frac{(2k+1)\pi i x\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}. \tag{9}$$

Линеаризуем задачу (6), как это сделано в [4]. Пусть $z_1 = y$, $z_2 = \lambda z_1$, тогда краевая задача (6) перейдет в задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = 0$, где $\mathcal{L}$ — линейный оператор в пространстве вектор-функций $Z = (z_1, z_2)^T$, определяемый выражением

$$AZ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}\frac{d^2}{dx^2} & -\frac{p_1}{p_2}\frac{d}{dx} \end{pmatrix} Z,$$

и имеющий следующую область определения

$$D_{\mathcal{L}} = \{Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \ : \ z_1'', z_2' \in L_1[0,1], \ \ z_1(0) = z_1'(0) = 0\}.$$

Найдём резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda E)^{-1}$ оператора $\mathcal{L}$. Для этого решим задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = F$, где $F = (f_1, f_2)^T$, где $f_1, f_2 \in L_2[0,1]$. Первая компонента $Z = \mathcal{R}_\lambda F$ является решением следующей краевой задачи:

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = f_\lambda, \qquad z(0) = z'(1) = 0, \tag{10}$$

где $f_\lambda := -p_2 f_2 - p_1 f_1' - \lambda p_2 f_2$.

Для функции Грина задачи (10) справедлива формула

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)\Delta(\lambda)}\Big(\omega_2 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} +$$

$$+\omega_1 e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_1(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))}\Big) - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_1(x-\xi)}\chi(x-\xi) -$$

$$-\frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-\xi)}\chi(\xi - x), \tag{11}$$

где $\Delta(\lambda) = \omega_2 e^{\lambda\omega_2} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1}$, а $\chi(x)$ есть функция Хевисайда.

Если обозначить через R_λ резольвенту оператор-функцию $L(\lambda)$, а через $G(x,\xi,\lambda)$ её функцию Грина, то получим

$$z_1(x,\lambda) = (R_\lambda f_\lambda)(x) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f_\lambda(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\big(-p_2 f_2(\xi) - p_1 f_1'(\xi) - p_2\lambda f_1(\xi)\big)\, d\xi. \tag{12}$$

Обозначим через γ_k (как это было сделано в [5]) окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Обозначим

$$I_n = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-n}^{n}\int_{\gamma_k}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f_\lambda(\xi)\,d\xi\,d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f_\lambda(\xi)\,d\xi\,d\lambda, \qquad (13)$$

где $\Gamma_n,\ n \in \mathbb{N}$, есть кусочно круговые контуры, отстоящие от чисел λ_k на расстояние не меньшее некоторого достаточно малого фиксированного числа $\delta_1 > 0$, между соседними контурами лежит ровно одно число λ_k и имеют место оценки:

$$C_1 n < \text{длина } \Gamma_n < C_2 n \quad (0 < C_1 < C_2 < +\infty). \qquad (14)$$

Из формул (8) следуют, что такие константы в оценках (14) действительно существуют.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $f_1 \in W_p^1[0,1]$ $(p > 1)$, $f_2 \in L_p[0,1]$, $f_1(0) = 0$, *то*

$$I_n(x) = f_1(x) + o_n(1), \qquad (15)$$

где $o_n(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *равномерно по* $x \in [0,1]$.

Теорема 1 используется для доказательства теоремы о единственности классического решения для задачи (1)–(3) и получении формулы для этого решения в виде контурного интеграла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы // М. : Наука, 1969. — 528 с.

[2] *Рыхлов В. С.* Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, №2. С. 342–363.

[3] *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2023, том 226, С. 89–107

[4] *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф. — 2013. — Т. 13. — № 1. — С. 21–26.

[5] *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 183–194.