УДК 517.538;517.518

Обобщённая формула следа и асимптотика сдвинутого определителя Форсайта для полиномов Соболева[1]

Б. П. Осиленкер (Москва,Россия)
b_osilenker@mail.ru

Изучаются системы полиномов Соболева,мера ортогональности которых содержит непрерывные и дискретные слагаемые.Для такого класса полиномов с помощью единого метода доказаны обобщенная формула следа, асимптотика сдвинутого определителя Форсайта и получена оценка порядка аппроксимации.

Ключевые слова: Полиномы Соболева, весовые пространства Соболева, обобщенная формула следа, сдвинутый определитель Форсайта..

Generalized Trace formula and asumptotics of the shifted Forsythe determinant for Sobolev polynomials[1]

B. P. Osilenker (Moscow, Russia)
b_osilenker@mail.ru

Systems of Sobolev polynomials are studied,the measure of orthogonality of which contains continuous and discrete components. Using a unified method , for this class of polynomials a generalized trace formula, asymptotics of the shifted Forsythe determinant are proved, and the estimates of the order of approximation are obtained.

Keywords: Sobolev polynomials, weighted Sobolev spaces, generalized trace formula, shifted Forsythe determinant, asymptotic of Forsythe determinant..

Рассмотрим весовое пространство Соболева $W^2_\mu(\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots \mu_n))$, в котором задано скалярное произведение

$$(f, g)_W = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\mu_k(x) \tag{1}$$

для натурального числа N, $\mu_k (0 \leqslant k \leqslant N)$– конечные положительные борелевские меры. На пространстве всех полиномов $\mathcal{P}$ существует полином $h(x), deg\, h \geqslant 1$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что выполняется

$$(hp, q)_W = (p, hq)_W \ (p, q \in \mathcal{P})$$

тогда и только тогда, когда каждая из мер $\mu_k (1 \leqslant k \leqslant N)$ чисто точечна (атомична) с конечным числом точечных масс [1], при этом $deg\, h \geqslant N+1$. Обозначим экстремальный полином через $\pi_{N+1}(x)$, способ нахождения которого дан в [1].

Пусть E – носитель меры μ_0, состоит из конечного числа непересекающихся интервалов

$$E = \cup_{k=1}^{p} (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \text{где} (-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2p} < \infty),$$

и будем считать меру μ_0 абсолютно непрерывной на E относительно меры Лебега: $d\mu_0(x)/dx = \omega(x)$.

Рассмотрим линейное пространство со скалярным произведением

$$< f, g >= \int\limits_E f(x)g(x)\omega(x)\, dx + \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{N_k} R_{k,i} f^{(k)}(a_{k,i}) g^{(k)}(a_{k,i}), \qquad (2)$$

где $R_{k,i} \geqslant 0$, $k = 0, 1, \dots N$, $N_k \in \mathbb{N}$, $a_{k,i}$– вещественные корни полинома $\pi_{N+1}(x)$ и его производных.

Пусть $\{\hat{q}_n\}_{n=0}^{\infty}$— система полиномов Соболева, ортонормированных относительно скалярного произведения (1):

$$\hat{q}_n(x) = k(\hat{q}_n)x^n + l(\hat{q}_n)x^{n-1} + \dots,\ k(\hat{q}_n) > 0, \text{ где}\, n \in \mathbb{Z}_+ = 0, 1, 2, \dots,$$

$$< \hat{q}_n, \hat{q}_m >= \delta_{n,m}\, , \text{где } n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Ортонормированные полиномы $\hat{q}_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению [1]

$$\pi_{N+1}(x)\hat{q}_n(x) = \sum_{j=0}^{N+1} d_{n,n+j}\hat{q}_{n+j}(x) + \sum_{j=1}^{N+1} d_{n,n-j}\hat{q}_{n-j}(x),$$

$$\text{где}\, n \in \mathbb{Z}_+,\ \hat{q}_{-j}(x) = 0,\ j = 1, 2, \dots;\ d_{n,s} = 0,\ s = 0, 1, \dots, n-1.$$

Следовательно, они задаются обобщенной якобиевой матрицей J порядка $2N + 3$.

Сдвинутым определителем Форсайта [2] назовем выражение

$$G_{n,r}(x) = \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=n+1}^{n+j} d_{k,k-j} d_{k-j,k-j+r} \Delta_{k,j,r}(x), \qquad (3)$$

где

$$\Delta_{k,j,r}(x) = \hat{q}_k(x)\hat{q}_{k+r-j}(x) - \frac{d_{k+r,k}}{d_{k+r-j,k-j}} \hat{q}_{k-j}(x)\hat{q}_{k+r}(x) =$$

$$= \frac{1}{d_{k+r-j,k-j}} \begin{vmatrix} \hat{q}_k(x) & d_{k+r,k}\hat{q}_{k+r}(x) \\ \hat{q}_{k-j}(x) & d_{k+r-j,k-j}\hat{q}_{k+r-j}(x) \end{vmatrix},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+,\ r = 0, 1, 2 \ldots, N+1,\ x \in E.$$

При $j = r = 1$ для ортогональных полиномов $p_n(x), n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих трехчленному рекуррентному соотношению, из соотношения (3) получаем сдвинутый определитель Турана [3].

Следующее утверждение устанавливает связь между обобщенной матрицей Якоби J и её спектральной мерой.

Теорема 1. *Пусть для ортонормированной системы полиномов Соболева $\{\hat{q}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеют место следующие предположения:*

1. *для рекуррентных коэффициентов* (2) *выполняются условия:*

$$(i) \lim_{m\to\infty} d_{m,m\pm j} = \lim_{m\to\infty} d_{m\pm j,m} = d_j^{(0)},\ j = 0, 1, \ldots, N+1,\ m \in \mathbb{Z}_+;$$

$$(ii) \sum_{j=-(N+1)}^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} (|d_{k,k+j} - d_{k+r,k+j+r}| + |d_{k,k+r} - d_{k+j,k+r+j}|) < \infty;$$

2. *система $\{\hat{q}_n\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно ограничена на любом компактном подмножестве Kиз E:*

$$|\hat{q}_n(x)| \leqslant C,\ x \in K \subset E, n \in \mathbb{Z}_+;$$

3. *существует непрерывная функция $L_n(x), n \in \mathbb{Z}_+, x \in E$ такая,что для любой непрерывной функции f и произвольных фиксированных целых k, j выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{m\to\infty} \int_E f(x) q_{m+j}(x) q_{m+k}(x) \omega(x)\, dx = \int_E f(x)[L_{k-j}(x) + L_{j-k}(x)]\, dx.$$

Тогда равномерно на $K \subset E$ справедливы следующие утверждения:

1. *имеет место "обобщенная формула следа"*

$$\sum_{j=-(N+1)}^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} [d_{k,k+r} d_{k+r,k+r+j} - d_{k+j,k+j+r} d_{k+j,k}] \hat{q}_k(x) \hat{q}_{k+r+j}(x) =$$

$$= \frac{d_r^{(0)}}{\omega(x)} \sum_{j=1}^{N+1} j d_j^{(0)} \{[L_{j-r}(x) + L_{r-j}(x)] - [L_{j+r}(x) + L_{-(j+r)}(x)]\},$$

при этом ошибка аппроксимации на K имеет вид

$$|\sum_{j=-(N+1)}^{N+1}\sum_{k=0}^{n}[d_{k,k+r}d_{k+r,k+r+j}-d_{k+j,k+j+r}d_{k+j,k}]\hat{q}_k(x)\hat{q}_{k+r+j}(x)-$$

$$-\frac{d_r^{(0)}}{\omega(x)}\sum_{j=1}^{N+1}jd_j^{(0)}\{[L_{j-r}(x)+L_{r-j}(x)]-[L_{j+r}(x)+L_{-(j+r)}(x)]\}|\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{j=-(N+1)}^{N+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}(|d_{k+r,k+r+j}-d_{k,k+j}|+|d_{k+j,k+j+r}-d_{k,k+r}|),$$

где постоянная $C>0$ зависит лишь от K;

2. *асимптотика сдвинутого определителя Форсайта* (3)

$$\lim_{n\to\infty}G_{n,r}(x)=$$

$$=\frac{d_r^{(0)}}{\omega(x)}\sum_{j=1}^{N+1}jd_j^{(0)}\{[L_{j-r}(x)+L_{r-j}(x)]-[L_{j+r}(x)+L_{-(j+r)}(x)]\},$$

при этом верхняя ошибка аппроксимации на K имеет вид

$$|G_{n,r}(x)-\frac{d_r^{(0)}}{\omega(x)}\sum_{j=1}^{N+1}jd_j^{(0)}\{[L_{j-r}(x)+L_{r-j}(x)]-[L_{j+r}(x)+L_{-(j+r)}(x)]\}|\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{j=-(N+1)}^{N+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}(|d_{k+r,k+r+j}-d_{k,k+j}|+|d_{k+j,k+j+r}-d_{k,k+r}|),$$

где постоянная $C>0$ зависит лишь от K.

В качестве следствия получаем результаты работ [3]– [6] и решение задачи из обзора [7] о распространении формулы следа на обобщенные матрицы Якоби. Полученные результаты находят важное приложение в задаче восстановления абсолютно-непрерывной составляющей меры, заданной на множестве E, по ее обобщенной матрице Якоби (прямая задача спектрального анализа) [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Evans W. ,D., Littlejohn L. L., Marcellán F., Markett C., Ronveaux A.* On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials // SIAM J. Math. Anal., 1995. T. 26, P. 446–467.

[2] *Forsythe G. E.* Second order determinants of Legendre polynomials // Duke Math. J., 1951. Vol. 18, № 2. P. 361–371.

[3] *Van Assche W.* Asymptotics for orthogonal polynomials and three-term relations // Orthogonal polynomials: Theory and Practice, Kluwer: Dordrecht, 1990. P. 435–462.

[4] *Dombrowski J., Nevai P.* Orthogonal polynomials, measures and recurrence relations. // SIAM J. Math., 1986. № 17. P. 752–759.

[5] *Осиленкер Б. П.* Формула следа для полиномов Соболева // 6-ая Международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования". М : РУДН, 2023. С. 66–67.

[6] *Osilenker B. P.* Generalized trace formula and asymptotics of the averaged Turan determinant for orthogonal polynomials // J. Approx. Theory, 2006. № 141. P. 70–94.

[7] *Садовничий В. А.,Подольский В. Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 5. С. 89–156.

[8] *Nevai P.* Orthogonal polynomials, Recurrences, Jacobi matrices and measures // Progress in Approximation Theory, Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 79–104.