УДК 517.9

Системы векторов, восстанавливающие сигнал по модулям измерений в гильбертовом пространстве[1]

С. Я. Новиков (Самара, РФ), П. А. Терехин (Саратов, РФ)

nvks@ssau.ru, terekhinpa@mail.ru

Рассмотрены системы элементов бесконечномерного гильбертова пространства, которые позволяют восстановить элемент пространства (сигнал) по модулям скалярных произведений сигнала и выбранных элементов. Выявлены различия конечномерной и бесконечномерной моделей для решения проблемы восстановления.

Ключевые слова: гильбертово пространство, системы элементов, полные системы, фреймы.

Благодарности: Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2023-931.
Работа второго автора выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №23-71-30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

Vector systems for the signal reconstruction by modules of measurements in the Hilbert space[1]

S. Ya. Novikov (Samara, Russia), P. A. Terekhin (Saratov, Russia)

nvks@ssau.ru, terekhinpa@mail.ru

Systems of elements of an infinite-dimensional Hilbert space are considered, which make it possible to reconstruct an element of space (a signal) by modules of scalar products of the signal and selected elements. The differences between finite-dimensional and infinite-dimensional models for solving the problem of reconstruction are revealed.

Keywords: Hilbert space, systems of vectors, frames.

Acknowledgements: The work of the first author was performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2023-931).
The work of the second author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-71-30001) at Lomonosov Moscow State University..

Введение

Модель восстановления сигнала по большому количеству модулей измерений может быть построена в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Сигнал будем рассматривать как элемент f сепарабельного

[1]Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

[1]This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

© Новиков С. Я., Терехин П. А., 2024

гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Наблюдателю доступны модули измерений $(|\langle f, \varphi_n\rangle|)_{n\in I}$, для некоторого счетного набора т.н. «измерительных векторов» $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in I} \subset \mathcal{H}$. Если $\tilde{f} = \alpha f$ для некоторого α с $|\alpha| = 1$, то $|\langle \tilde{f}, \varphi_n\rangle| = |\langle f, \varphi_n\rangle|$ для всех $n \in I$ независимо от выбора Φ. Будем говорить, что Φ восстанавливает сигнал по модулям измерений (ВМИ), если верно обратное утверждение: из равенств $|\langle \tilde{f}, \varphi_n\rangle| = |\langle f, \varphi_n\rangle|$ для всех $n \in I$ следует существование унимодулярного скаляра α такого, что $\tilde{f} = \alpha f$. В конечномерных евклидовых и унитарных пространствах такие модели активно изучаются, в них все (ВМИ)-наборы являются гильбертовыми фреймами (определение см. ниже) [1, 2]. Недавно появилось несколько работ, в которых такая модель рассматривается в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве [3, 4].

Определение 1. *Последовательность элементов* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется гильбертовым фреймом или фреймом Даффина-Шеффера для гильбертова пространства* $\mathcal{H}$, *если существуют константы* $0 < A \leq B < \infty$ *такие, что для всех* $f \in \mathcal{H}$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Числа A *и* B *называются фреймовыми границами, соответственно, нижней и верхней.*

Восстановление по модулям измерений и альтернативная полнота

Следующее свойство набора векторов оказалось важным для (ВМИ).

Определение 2. *Будем говорить, что набор векторов* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *гильбертова пространства* $\mathcal{H}$ *обладает свойством альтернативной полноты (АП), если для любого подмножества* $S \subseteq \mathbb{N}$ *либо* $\overline{span}\{\varphi_n\}_{n\in S} = \mathcal{H}$, *либо* $\overline{span}\{\varphi_n\}_{n\in S^C} = \mathcal{H}$.

Следующая теорема сформулирована в [3] для фреймов, хотя существование таких фреймов вызывает вопросы. Доказательство конечномерного аналога этой теоремы имеет историю [1, 2]. Получено новое доказательство части а) без предположения, что набор векторов образует фрейм.

Теорема 1. *а) Пусть* $\mathcal{H}$ *— сепарабельное гильбертово пространство, и* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— набор векторов в* $\mathcal{H}$. *Если* $\Phi \in$ *(ВМИ), то* $\Phi \in$ *(АП).*

б) Пусть $\mathcal{H}$ *— сепарабельное гильбертово пространство над полем вещественных чисел и пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— набор векторов в* $\mathcal{H}$. *Если* $\Phi \in$ *(АП), то* $\Phi \in$ *(ВМИ).*

Определение 3. *Гильбертов фрейм* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *обладает свойством* σ*-сильной альтернативной полноты, если для любого* $S \subseteq \mathbb{N}$, *либо* $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, *либо* $\{\varphi_n\}_{n\in S^C}$ *образует фрейм для* $\mathcal{H}$ *с нижней границей* $\geq \sigma$.

Пример фрейма с таким свойством в конечномерном пространстве построен в [2] .

Доказано, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве не существует фрейма с нормами, отделенными от нуля, со свойством σ-строгой альтернативной полноты.

Теорема 2.*Пусть* $\mathcal{H}$ *— бесконечномерное гильбертово пространство и* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— гильбертов фрейм для* $\mathcal{H}$ *с* $\|\varphi_n\| \geq \delta > 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и с верхней фреймовой границей* B. *Фрейм* Φ *не может обладать* σ*-строгим свойством альтернативной полноты ни для какого* $\sigma > 0$.

Системы с полным спарком

В конечномерном пространстве $\mathcal{H}^d$ спарком системы векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ называют минимальное количество линейно *зависимых* векторов. Если каждая подсистема из d векторов состоит из линейно *независимых* векторов, говорят о системе с *полным спарком*. Примеры таких систем приведены в [5].

Определение 4. [3] *Система элементов* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *бесконечномерного гильбертова пространства* $\mathcal{H}$ *называется системой с полным спарком, если каждое бесконечное подмножество полно в* $\mathcal{H}$.

Очевидно, что система с полным спарком обладает свойством альтернативной полноты, и, в силу теоремы 1, обеспечивает восстановление по модулям измерений в вещественном гильбертовом пространстве. Видимо, впервые доказательство существования систем с полным спарком в бесконечномерном гильбертовом пространстве было дано в [6].

Теорема 3.*Пусть* $\mathcal{H}$ *— бесконечномерное гильбертово пространство и* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— система элементов гильбертова пространства* $\mathcal{H}$ *с* $\|\varphi_n\| \geq \delta > 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и с конечной верхней фреймовой границей* B. *Тогда* Φ *не может быть системой с полным спарком.*

Системы дискретизированных значений ядра Сеге

Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ состоит их всех аналитических функций $f(z)$ в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Ядро Сеге

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}, \qquad z,\lambda\in\mathbb{D},$$

является воспроизводящим ядром гильбертова пространства H^2. Это означает, что для всех $f \in H^2$ и всех $\lambda \in \mathbb{D}$ справедливо равенство

$$f(\lambda) = \langle f, K_\lambda\rangle_{H^2}.$$

Пусть Λ — счетное множество точек единичного круга $\mathbb{D}$ и $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H^2$ — система значений ядра Сеге.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является системой с полным спарком в H^2;

2) $\Lambda \subset \overline{\mathbb{D}_r} = \{z\in\mathbb{C} : |z| \le r\}$ для некоторого $0<r<1$.

Пример. *Пусть счетное множество Λ состоит из точек*

$$\lambda_{k,j} = (1-\tfrac{1}{k})e^{2\pi ij/k}, \qquad j=0,\dots,k-1, \qquad k=1,2,\dots,$$

являющимся корнями k-й степени из единицы, перемещенными на окружность радиуса $1-\frac{1}{k}$. Тогда система $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ обладает свойством альтернативной полноты (АП) в пространстве Харди H^2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Balan R.,Casazza P., Edidin D.* On signal reconstruction without phase // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. V. 20. № 3. P. 345-356.

[2] *Bandeira A., Cahill J., Mixon D., Nelson A.* Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2014. V. 37. № 1, P. 106-125.

[3] *Cahill J., Casazza P. G., Daubechies I.* Phase retrieval in infinite dimensional Hilbert spaces // Transactions of the AMS, Series B. 2016. V. 3. P. 63-76.

[4] *Botelho-Andrade S., Casazza P., Cheng D., Haas J., Tran T.* Phase Retrieval in $\ell^2(\mathbb{R})$ // `http://arxiv.org/abs/math/1804.01139v1` (2018)

[5] *Novikov S. Ya.* Equiangular Tight Frames with Simplices and with Full Spark in R^d // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. № 1. P. 155-166.

[6] *Вершинин P. B.* О представляющих и абсолютно представляющих системах в банаховом пространстве // Математическая физика, анализ, геометрия. 1998. Т. 5.№ 1/2. С. 3-14.