5. *Creutz D., Mazo M., Preda C.* Superstability and finite time extinction for C_0-Semigroups // arXiv:0907.4812. Submitted 2013. P. 1–12.

6. *Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.* Метод решения обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 51–58.

УДК 517.521

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СУММ ФУРЬЕ – МЕЙКСНЕРА

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, Россия)
ramis3004@gmail.com

Пусть $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = \frac{1}{N}$, $N > 0$. В настоящей работе для произвольной функции, заданной на множестве Ω_δ построены ряды Фурье по полиномам Мейкснера и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В частности, получена оценка сверху для функции Лебега частичных сумм ряда Фурье по полиномам Мейкснера $M_{n,N}^\alpha(x)$.

Отметим некоторые сведения о полиномах Мейкснера.

Для $q \neq 0$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ классические полиномы Мейкснера [1–3] можно определить с помощью равенства

$$M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x, q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$

где $x^{[k]} = x(x-1)\ldots(x-k+1)$, $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$. Хорошо известно [1–3], что при $\alpha > -1$ и $0 < q < 1$ полиномы Мейкснера $M_n^\alpha(x)$ образуют ортогональную систему на сетке $\{0, 1, \ldots\}$ с весом $\rho(x) = \rho(x, \alpha, q) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}$, а более точно имеет место следующее равенство

$$\sum_{x=0}^{\infty} m_n^\alpha(x) m_k^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{nk}, \quad 0 < q < 1, \alpha > -1,$$

где $m_n^\alpha(x) = m_n^\alpha(x, q) = \{h_n^\alpha(q)\}^{-1/2} M_n^\alpha(x)$, $h_n^\alpha(q) = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n} \Gamma(\alpha+1)$.

Пусть $N > 0$, $\delta = 1/N$, $q = e^{-\delta}$. Многочлены $M_{n,N}^\alpha(x) = M_n^\alpha(Nx, e^{-\delta})$ и $m_{n,N}^\alpha(x) = m_n^\alpha(Nx, e^{-\delta}) = \left\{h_n^\alpha(e^{-\delta})\right\}^{-1/2} M_{n,N}^\alpha(x)$ в случае $\alpha > -1$ образуют ортогональную и ортонормированную на Ω_δ системы с весом $\rho_N(x) = \rho(Nx; \alpha, e^{-\delta})$.

В дальнейшем, при оценке функции Лебега, важную роль играет следующая формула Кристоффеля – Дарбу

$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,x) = \sum_{k=0}^{n} m_{k,N}^{\alpha}(t) m_{k,N}^{\alpha}(x).$$

Неравенство Лебега для частичных сумм Фурье – Мейкснера

Обозначим через $C(\Omega_\delta)$ пространство дискретных функций $f(x)$ вида $f : \Omega_\delta \to \mathbb{R}$ и таких, что

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)| e^{-x/2} = 0. \tag{1}$$

Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|f\|_{C(\Omega_\delta)} = \sup_{x\in\Omega_\delta} e^{-x/2} |f(x)|. \tag{2}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha > -1$, $1 < p < 2$, $\rho_N(x) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1 - e^{-\delta})^{\alpha+1}$, $l_{\rho_N}^p$ *– пространство функций, заданных на* Ω_δ *и таких, что*

$$\|f\|_{l_{\rho_N}^p} = \left(\sum_{x\in\Omega_\delta} |f(x)|^p \rho_N(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

Тогда $C(\Omega_\delta) \subset l_{\rho_N}^p$.

Далее пусть $f \in l_{\rho_N}^p$. Тогда для f мы можем определить коэффициенты Фурье – Мейкснера

$$f_k^\alpha = \sum_{t\in\Omega_\delta} f(t) m_{k,N}^{\alpha}(t) \rho_N(t)$$

и ряд Фурье – Мейкснера

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha m_{k,N}^{\alpha}(x). \tag{3}$$

Через $S_{n,N}^\alpha(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (3):

$$S_{n,N}^\alpha(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^\alpha m_{k,N}^{\alpha}(x). \tag{4}$$

Будем рассматривать $S^{\alpha}_{n,N}(f,x)$ как аппарат приближения функций, принадлежащих $l^p_{\rho_N}$. Поскольку $C(\Omega_\delta)\subset l^p_{\rho_N}$ при $1<p<2$, поэтому для функции $f\in C(\Omega_\delta)$ мы можем определить ряд Фурье – Мейкснера (3) и частичную сумму (4). Через $p_n(f,x)$ обозначим алгебраический полином степени n наилучшего приближения к функции f в метрике (2):

$$E_n(f)=\|f-p_n\|_{C(\Omega_\delta)}.$$

Тогда

$$\left|f(x)-S^{\alpha}_{n,N}(f,x)\right|=\left|f(x)-p_n(f,x)+p_n(f,x)-S^{\alpha}_{n,N}(f,x)\right|\le$$

$$\le\left|f(x)-p_n(f,x)\right|+\left|S^{\alpha}_{n,N}(p_n-f,x)\right|.$$

Отсюда

$$e^{-\frac{x}{2}}\left|f(x)-S^{\alpha}_{n,N}(f,x)\right|\le e^{-\frac{x}{2}}\left|f(x)-p_n(f,x)\right|+e^{-\frac{x}{2}}\left|S^{\alpha}_{n,N}(p_n-f,x)\right|\le$$

$$\le E_n(f)(1+\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)), \tag{5}$$

где

$$\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)=\sum_{t\in\Omega_\delta}e^{-\frac{t+x}{2}}\frac{\Gamma(Nt+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|\mathcal{K}^{\alpha}_{n,N}(t,x)\right|.$$

В связи с неравенством (5) возникает задача об оценке функции Лебега $\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)$ на $[0,\infty)$ при $n\le\lambda N$, $\lambda>0$. В настоящей работе мы ограничимся исследованием величины $\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)$ на множествах $G_1=[0,\frac{3}{\theta_n}]$ и $G_2=[\frac{3}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\alpha>-1$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $1\le n\le\lambda N$. Тогда имеют место следующие оценки:*

1) если $x\in G_1=[0,\frac{3}{\theta_n}]$, то

$$\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)\le c(\alpha,\lambda)\begin{cases}1, & -1<\alpha<-\frac{1}{2},\\ \ln(n+1), & \alpha=-\frac{1}{2},\\ n^{\alpha+\frac{1}{2}}, & \alpha>-\frac{1}{2};\end{cases}$$

2) если $x\in G_2=[\frac{3}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$, то

$$\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)\le c(\alpha,\lambda)\begin{cases}\ln(nx+1), & -1<\alpha\le-\frac{1}{2},\\ \ln(n+1)+\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \alpha>-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 297 с.

2. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные многочлены дискретной переменной. М. : Наука, 1985. 216 с.

3. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997. 255 с.

УДК 517.518.3

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий
(Москва, Россия)
vgalat@imscs.msu.ru, lukashenko@mail.ru, info@rector.msu.ru

Орторекурсивные разложения [1, 2] являются естественным обобщением классических ортогональных разложений. При этом в случае определенных классов переполненных систем орторекурсивные разложения обеспечивают абсолютную устойчивость как к ошибкам в вычислении коэффициентов, так и к малым изменениям системы [3].

Напомним определение орторекурсивных разложений. Пусть H — пространство со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ (для определенности будем рассматривать пространства над $\mathbb{R}$), $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ — произвольная система ненулевых элементов, $f \in H$ — раскладываемый элемент. Определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0 = f;$$

$$\widehat{f}_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{\|e_{n+1}\|^2}, \qquad r_{n+1} = r_n - \widehat{f}_{n+1} e_{n+1}.$$

Орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n e_n$.

Легко видеть, что если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна, то орторекурсивное разложение по ней совпадает с классическим рядом Фурье. Даже при нарушении ортогональности системы для орторекурсивных разложений выполняются классические свойства ортогональных разложений,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).