В теореме 3 используются результаты А. П. Терехина [6]. Далее показывается точность некоторых оценок теорем 1–3. Будем писать $A_n \asymp B_n$, $n \in \mathbb{N}$, если существуют $C_1, C_2 > 0$, такие что $C_1 A_n \le B_n \le C_2 A_n$.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю и удовлетворяет условиям* (B) *и* (B_k) *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{f \in E_p(\varepsilon)} \|f - e_n^q(f)\|_p \asymp \sup_{f \in E_p(\varepsilon)} \|\widetilde{f} - e_n^q(\widetilde{f})\|_p \asymp \varepsilon_n \asymp n^{-k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \varepsilon_{i-1},$$

$n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю,* $\varepsilon_k \le C\varepsilon_{k+1}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Если* $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет также двустороннему условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/(k+1) \asymp \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\sup_{f \in E_{C_p}(\varepsilon)} \|f - e_n^q(f)\|_\infty \asymp (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_j, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\sup_{f \in E_{C_p}(\varepsilon)} \|\widetilde{f} - e_n^1(\widetilde{f})\|_\infty \asymp 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon_j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // J. Math. and Phys. 1924. Vol. 3. P. 72–94.

2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.

4. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. матем. общества. 1956. Т. 5. С. 483–522.

5. *Rempulska L., Tomczak K.* On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. Vol. 140. P. 141–153.

6. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.

УДК 517.9

ЛАПЛАСИАН ЛЕВИ НА МНОГООБРАЗИИ И ИНСТАНТОНЫ

Б. О. Волков (Москва, Россия)
borisvolkov1986@gmail.com

Лапласианами Леви называют бесконечномерные лапласианы, определенные по аналогии с оператором Лапласа для функций на

$L_2([0,1],\mathbb{R})$, введенным П. Леви (см. [1]). Одна из основных причин интереса к таким операторам заключается в их связи с калибровочными полями (см. [2-3]). В работе [5] было показано, что при некоторых условиях связность на $\mathbb{R}^4$ является инстантоном (решением уравнения автодуальности) тогда и только тогда, когда параллельный перенос, порожденный связностью, является гармоническим для специального лапласиана Леви. В настоящей работе этот результат обобщается для связности на четырехмерном римановом многообразии. В простом частном случае результаты работы были получены в [6].

Пусть (M,g) — это C^∞-гладкое риманово односвязное четырехмерное многообразие с римановой метрикой g. Пусть $\pi_E\colon E\to M$ — векторное расслоение над M со слоем $\mathbb{C}^N$. Пусть A — связность в этом расслоении, ∇ — порожденная этой связностью ковариантное дифференцирование и F — ассоциированная со связностью A кривизна. Уравнения Янга-Миллса на связность A имеют вид:

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu}=0.$$

Уравнения автодуальности на связность A имеют вид:

$$F=*F,$$

где $*$ — оператор Ходжа. Если связность является решением уравнений автодуальности, она является и решением уравнений Янга-Миллса.

Пусть $H^1_m([0,1],M)$ — гильбертово многообразие H^1-кривых на M с началом в точке $m\in M$. Для $p\in M$ пусть символ E_p обозначает слой над p в расслоении E. Пусть $\pi_{\mathcal{E}}\colon\mathcal{E}\to H^1_m([0,1],M)$ — векторное расслоение над $H^1_m([0,1],M)$, слоем которого над $\gamma\in H^1_m([0,1],M)$ является пространство линейных операторов из E_m в $E_{\gamma(1)}$. Параллельный перенос U^A, порожденный связностью A, — это гладкое сечение в расслоении $\mathcal{E}$. Пространство гладких сечений в расслоении $\mathcal{E}$ будем обозначать символом $\Gamma(\mathcal{E})$.

Пусть $Q(\gamma,t)$ — параллельный перенос в касательном расслоении TM вдоль $\gamma\in H^1_m([0,1],M)$, порожденный связностью Леви–Чивиты на M. Пусть $Z\in T_mM$ и $h\in C^1([0,1],\mathbb{R})$, причем $h(0)=0$. Пусть $S\in C^1([0,1],SO(4))$. Элемент из группы $SO(4)$ отождествляется с вращением в T_mM. Для кривой $\gamma\in H^1_m([0,1],M)$ кривая $\gamma_s^{S,Z,h}\in H^1_m([0,1],M)$, где $s\in(-\delta,\delta)$ для достаточно малого $\delta>0$, определяется формулой:

$$\gamma_s^{S,Z,h}(t)=exp_{\gamma(t)}(sh(t)Q(\gamma,t)S(t)Z),$$

где exp_p — экспоненциальное отображение в точке $p\in M$.

Пусть $\{Z_1, \ldots, Z_d\}$ — фиксированный ортонормированный базис в T_mM. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2([0,1],\mathbb{R})$. Мы считаем, что $e_n \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, $e_n(0) = e_n(1) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и базис $\{e_n\}$ является слабо равномерно плотным, т. е. для любой функции $h \in L_\infty([0,1],\mathbb{R})$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h(t) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k^2(t) - 1 \right) dt = 0.$$

В качестве базиса $\{e_n\}$, удовлетворяющего таким свойствам, можно взять $e_n(t) = \sqrt{2}\sin(\pi nt)$.

Следующее определение обобщает определение лапласиана Леви из работ [4] и [5] (для определений лапласиана Леви на многообразии см. также [3] и [7]).

Определение. Пусть $\operatorname{dom} \Delta_L^{S,\{e_n\}}$ — это пространство всех сечений $\varphi \in \Gamma(\mathcal{E})$, для которых отображение

$$\gamma \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^d \frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} \varphi(\gamma_s^{S,Z_i,e_k})$$

является сечением из $\Gamma(\mathcal{E})$. *Лапласиан Леви* $\Delta_L^{S,\{e_n\}}$ — это линейное отображение

$$\Delta_L^{S,\{e_n\}} : \ \operatorname{dom} \Delta_L^{S,\{e_n\}} \to \Gamma(\mathcal{E}),$$

определенное формулой:

$$\Delta_L^{S,\{e_n\}} \varphi(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^d \frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} \varphi(\gamma_s^{S,Z_i,e_k}),$$

Пусть S_R^3 — нормальная подгруппа Ли группы $SO(4)$, состоящая из матриц вида:

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Теорема. *Пусть $S \in C^1([0,1], S_R^3)$, причем выполняется*

$$\dim \operatorname{span}\{\dot{S}(t) S^{-1}(t)\}_{t\in[0,1]} = 3.$$

Пусть существует точка $x \in M$, в которой $F(x) = *F(x)$. Тогда связность A является решением уравнений автодуальности на всем M тогда и только тогда, когда параллельный перенос U^A является решением уравнения Лапласа для лапласиана $\Delta_L^{S,\{e_n\}}$:

$$\Delta_L^{S,\{e_n\}} U^A = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М. : Наука, 1967. 512 с.

2. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévy – Laplacian // Russ. J. Math. Phys. 1994. Vol. 2., No. 2, pp. 235–250.

3. *Leandre R., Volovich I. V.* The Stochastic Lévy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2001. Vol. 2., № 2, pp. 151–172.

4. *Accardi L., Smolyanov O. G.* Feynman formulas for evolution equations with Lévy Laplacians on infinite-dimensional manifolds // Doklady Mathematics. 2006. Vol. 73, № 2. P. 252–257.

5. *Волков Б. О.* Лапласианы Леви и инстантоны // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. С. 226–238.

6. *Волков Б. О.* Лапласиан Леви на четырехмерном римановом многообразии // Математика и математическое моделирование. 2016. Вып. 6. С. 1–14.

7. *Волков Б. О.* Лапласианы Леви на бесконечномерном многообразии // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2017. Т. 54. С. 91–94.

УДК 517.95

ПРИМЕРЫ СУПЕРУСТОЙЧИВЫХ ПОЛУГРУПП В ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Ву Нгуен Шон Тунг (Москва, Россия)
vnsontung@mail.ru

В банаховом пространстве E на отрезке $[0, T]$ рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0, \qquad u(T) = u_1, \end{cases} \tag{1}$$

с неизвестным элементом $g \in E$. Здесь A — линейный замкнутый оператор в E с плотной областью определения $D(A) \subset E$, порождающий полугруппу $U(t)$ класса C_0. Элементы u_0, u_1 заданы в $D(A)$. Решением задачи (1) назовем пару $(u(t), g)$, где $u \in C^1([0, T]; E)$, $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, T]$, и $g \in E$. Задачу (1) называют *обратной задачей с финальным переопределением* (см. [1]).