3. *Vasilyev V. B.* Potential like operators in the theory of boundary value problems in non-smooth domains // Azerb. J. Math. 2012. Vol. 2, № 2. P. 117–128.

4. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, вып. 5. С. 642–649.

5. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Difference equations in a multidimensional space // Math. Model. Anal. 2016. Vol. 21, № 3. P. 336–349.

УДК 517.9

# ЭНТРОПИЙНЫЕ ЧИСЛА ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА: НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СЛУЧАЯ[1]

**А. А. Васильева (Москва, Россия)**
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $T : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Энтропийные числа оператора $T$ для $k \in \mathbb{N}$ определяются равенством

$$e_k(T) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \ \exists y_1, \, \dots, \, y_{2^{k-1}} \in Y : \ T(B_X) \subset \cup_{i=1}^{2^{k-1}} (y_i + \varepsilon B_Y) \right\}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $g$, $v : \Omega \to (0, \infty)$ — измеримые функции. Обозначим через $l_{r,d}$ число компонент обобщенной вектор-функции $\nabla^r f$ и положим

$$W^r_{p,g}(\Omega) = \left\{ f : \ \Omega \to \mathbb{R} \middle| \ \exists \psi : \ \Omega \to \mathbb{R}^{l_{r,d}} : \ \|\psi\|_{L_p(\Omega)} \le 1, \, \nabla^r f = g \cdot \psi \right\}$$

$\left(\text{соответствующую функцию } \psi \text{ обозначим через } \dfrac{\nabla^r f}{g}\right)$,

$$\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)} = \|f\|_{q,v} = \|fv\|_{L_q(\Omega)}, \qquad L_{q,v}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} | \ \|f\|_{q,v} < \infty \}.$$

Для $x \in \mathbb{R}^d$ и $a > 0$ обозначим через $B_a(x)$ замкнутый евклидов шар в $\mathbb{R}^d$ радиуса $a$ с центром в точке $x$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Мы скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если существует точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существуют число $T(x) > 0$ и число $\gamma_x : [0, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами: 1) $\gamma_x$ имеет натуральную параметризацию, 2) $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$, 3) $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$ для любого $t \in [0, T(x)]$.

Область $\Omega$ удовлетворяет условию Джона, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустой компакт, $h : (0, 1] \to (0, \infty)$ неубывающая функция. Скажем, что $\Gamma$ является $h$-множеством, если существуют число

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

$c_* \geq 1$ и конечная счетно-аддитивная мера $\mu$ на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\operatorname{supp}\mu = \Gamma$ и

$$c_*^{-1}h(t) \leq \mu(B_t(x)) \leq c_* h(t)$$

для любого $x \in \Gamma$ и $t \in (0,\, 1]$.

Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ — ограниченная область, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — $h$-множество, где $h \in \mathbb{H}$ имеет следующий вид в окрестности нуля:

$$h(t) = t^\theta |\log t|^\gamma \tau(|\log t|), \quad 0 < \theta < d,$$

где $\tau : (0,\, +\infty) \to (0,\, +\infty)$ — абсолютно непрерывная функция такая, что

$$\frac{t\tau'(t)}{\tau(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Пусть $1 < p < q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$, $\beta_g$, $\beta_v \in \mathbb{R}$, $g(x) = \varphi_g(\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma))$, $v(x) = \varphi_v(\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma))$,

$$\varphi_g(t) = t^{-\beta_g}|\log t|^{-\alpha_g}\rho_g(|\log t|), \;\; \varphi_v(t) = t^{-\beta_v}|\log t|^{-\alpha_v}\rho_v(|\log t|),$$

где $\rho_g$ и $\rho_v$ — абсолютно непрерывные функции, такие что

$$\frac{t\rho_g'(t)}{\rho_g(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0, \;\; \frac{t\rho_v'(t)}{\rho_v(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Без потери общности можно считать, что $\overline{\Omega} \subset \left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)^d$.

Обозначим через $\mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)$ пространство полиномов на $\mathbb{R}^d$ степени не выше $r-1$. В основной теореме условия на веса окажутся такими, что $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и существуют $M > 0$ и линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такие, что для любой функции $f \in$ $\in W^r_{p,g}(\Omega)$

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega)} \leq M \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Обозначим $\mathcal{W}^r_{p,g}(\Omega) = \operatorname{span} W^r_{p,g}(\Omega)$, $\hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega) = \{f - Pf : \;\; f \in$ $\in \mathcal{W}^r_{p,g}(\Omega)\}$. Введем на $\hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega)$ норму $\|f\|_{\hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega)} := \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}$. Обозначим через $I : \hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega) \to L_{q,v}(\Omega)$ оператор вложения. Тогда он непрерывен.

Положим для $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\overline{u}_j = 2^{j\left(\beta_g - r + \frac{d}{p}\right)}(j+1)^{-\alpha_g}\rho_g(j+1), \quad \overline{w}_j = 2^{j\left(\beta_v - \frac{d}{q}\right)}(j+1)^{-\alpha_v}\rho_v(j+1).$$

Пусть $\beta_g + \beta_v = \delta$ и существуют $C \geq 1$ и монотонная функция $\omega$ : $(0, \infty) \to (0, \infty)$ такие, что $\frac{t\omega'(t)}{\omega(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ и для любого $j_0 \in \mathbb{Z}_+$

$$C^{-1}(j_0+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\omega(j_0+1) \leq \sup_{j\geq j_0} \overline{u}_j \left(\sum_{i=j}^{\infty} \overline{w}_i^q \frac{h(2^{-j})}{h(2^{-i})}\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq C(j_0+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\omega(j_0+1).$$

Обозначим $\mathfrak{Z} = (r, d, p, q, g, v, h, a, c_*, C)$, $\mathfrak{Z}_* = (\mathfrak{Z}, R)$, где $R = \operatorname{diam}\Omega$.

**Теорема 1.** *Выполнено равенство*

$$e_n(I : \hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega) \to L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \max\{\omega(n), \omega(\log n)\}.$$

УДК 517.9

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СДВИГОВ В ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ [1]

**А. М. Водолазов, С. Ф. Лукомский (Саратов, Россия)**
vam21@yandex.ru, LukomskiiSF@info.sgu.ru

В работе [1] С. Кзырев построил ортогональные системы всплесков на полях $p$-адических чисел. В [2] S. Albeverio, С. Евдокимов и М. Скопина доказали, что если система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))$ ступенчатой функции $\varphi$ ортонормирована и функция $\varphi$ порождает ортогональный $p$-адический кратномасштабный анализ (КМА), то носитель ее преобразования Фурье лежит в единичном шаре. То есть два условия на функцию: ортогональность системы сдвигов и маштабирующее уравнение дают в качестве решения только систему Хаара. В 2015 году С. Евдокимов и М. Скопина [3] доказали, что для поля $\mathbb{Q}_p$ любой ортогональный вейвлет-базис в $L_2(\mathbb{Q}_p)$, который состоит из локально-постоянных (периодических) функций, является модификацией базиса Хаара. В работе [4] С.Евдокимов построил ортогональные базисы всплесков, которые состоят из функций с финтным преобразованием Фурье. Эти базисы также ассоциированы с КМА Хаара.

В связи с работой [2] в [5] было доказано, что при $p = 2$ и $M = 1$ требование «$\varphi$ порождает КМА» (маштабирующее уравнение), можно

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант (проект № 16-01-00152).