вектор-функций. Данный метод является развитием подхода, предложенного в работе [4] для графа-звезды. Результаты настоящей работы более подробно изложены в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.

2. *Hochstadt H., Lieberman B.* An inverse Sturm – Liouville problem with mixed given data // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34. P. 676–680.

3. *Юрко В. А.* О восстановлении операторов Штурма – Лиувилля на графах // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 619–630.

4. *Bondarenko N. P.* A partial inverse problem for the Sturm – Liouville operator on a star-shaped graph // Anal. Math. Phys. 2017. Published online. DOI: 10.1007/s13324-017-0172-x.

5. *Bondarenko N. P.* An inverse problem for Sturm – Liouville operators on trees with partial information given on the potentials // arXiv:1711.05659 [math.SP].

УДК 517.518.4+517.518.8

СХОДИМОСТЬ К НУЛЮ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СУММ С ЦЕЛЫМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРИБЛИЖЕНИЕ НА ПРЯМОЙ СУММАМИ СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ

П. А. Бородин, С. В. Конягин (Москва, Россия)

pborodin@inbox.ru, konyagin23@gmail.com

Теорема 1. *Существует последовательность тригонометрических многочленов*

$$Q_\nu(x) = \sum_{s=1}^{s_\nu} n_s^{(\nu)} e^{ik_s^{(\nu)}x}$$

с целыми $k_s^{(\nu)}$ и целыми положительными $n_s^{(\nu)}$, сходящаяся к нулю почти всюду.

Существование сходящейся почти всюду к нулю последовательности ненулевых многочленов Q_ν с целыми (необязательно положительными) коэффициентами $n_s^{(\nu)}$ следует из результатов Фекете [1].

Задача о существовании указанной в теореме 1 последовательности явно возникла в [2] в связи с приближениями суммами сдвигов одной функции в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. И вот теперь с помощью теоремы 1 получается

Теорема 2. *Пусть $2 \le p < \infty$. В действительном пространстве $L_p(\mathbb{R})$ существует функция f, для которой суммы сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

плотны в $L_p(\mathbb{R})$.

Теорема 1 доказана С. В. Конягиным, теорема 2 — П. А. Бородиным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fekete M.* Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Zeitschrift. 1923. Bd. 17. S. 228–249.

2. *Бородин П. А.* Плотность полугруппы в банаховом пространстве // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 6. С. 21–48.

УДК 517.521

ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА И ЕЕ ОБРАЩЕНИЕ

Г. Г. Брайчев (Москва, Россия)
Braichev@mail.ru

Теорема Штольца [1] является дискретным аналогом теоремы Бернулли – Лопиталя. Приведем ее в общей форме — с верхними и нижними пределами вместо обычных (см., например, [2]).

Теорема Штольца. *Пусть x_n и y_n — вещественные последовательности, причем y_n строго монотонна. Если обе последовательности являются бесконечно малыми или y_n — бесконечно большая, а x_n — произвольная, то выполняются неравенства*

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n},\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}. \tag{1}$$

Представим сначала равномерные оценки рассматриваемых отношений двух последовательностей.

Теорема 1. *Пусть последовательность x_n выпукла, а последо- вательность y_n положительна и строго возрастает. Пусть, далее, с неотрицательными константами m, M, $m\le M$, выполнено условие*

$$m\le\frac{x_n}{y_n}\le M,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$M\,s_1^+(\theta)\le\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\le M\,s_2(\theta),\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

где $\theta=\dfrac{m}{M}$, *а величины $s_1(\theta)$, $s_2(\theta)$ определяются формулами*

$$s_1(\theta)=\inf_{n\ge2}\frac{1}{y_n-y_{n-1}}\sup_{k<n}\frac{y_k-\theta y_n}{k-n},$$