2. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. Vol. 5, № 4. P. 403–415.

УДК 517.984

НЕПОЛНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ-ДЕРЕВЕ[1]

Н. П. Бондаренко (Самара, Саратов, Россия)
BondarenkoNP@info.sgu.ru

Рассмотрим компактный граф без циклов (дерево) G, с множеством вершин V и множеством ребер $E = \{e_j\}_{j=1}^m$. Обозначим через E_v множество ребер, инцидентных вершине v, через ∂G и $\operatorname{int} G$ — множества граничных и внутренних вершин графа G соответственно, $\operatorname{int} G = V \backslash \partial G$.

Будем считать, что все ребра дерева G имеют одинаковую длину π. Для каждого ребра e_j введем параметр $x_j \in [0, \pi]$. Функцией на дереве G называется вектор-функция $y = [y_j]_{j=1}^m$, где $y_j = y_j(x_j)$, $x_j \in [0, \pi]$, $j = \overline{1, m}$. Пусть q_j, $j = \overline{1, m}$, вещественные функции из класса $W_2^{-1}(0, \pi)$, т. е. q_j — обобщенные производные функций $\sigma_j \in L_2(0, \pi)$. Дифференциальное выражение Штурма – Лиувилля

$$\ell_j y_j := -y_j'' + q_j(x_j) y_j$$

на ребре e_j понимается в следующем смысле (см. [1]):

$$\ell_j y_j = -(y_j^{[1]})' - \sigma_j(x_j) y_j^{[1]} - \sigma_j^2(x_j) y_j,$$

где $y_j^{[1]} = y_j' - \sigma_j y_j$ — *квазипроизводная*, и функция y_j принадлежит пространству

$$\mathcal{D}(\ell_j) = \{y_j \in W_2^1[0, \pi] \colon y_j^{[1]} \in W_1^1[0, \pi],\ \ell_j y_j \in L_2(0, \pi)\}.$$

Предположим, что вершина $u \in V$ соответствует концу $x_j = 0$ ребра e_j и вершина $v \in V$ соответствует $x_j = \pi$. Введем обозначения

$$\begin{array}{ll} y_j(u) = y_j(0), & y_j(v) = y_j(\pi), \\ y_j^{[1]}(u) = -y_j^{[1]}(0), & y_j^{[1]}(v) = y_j^{[1]}(\pi). \end{array}$$

Для $u \in \partial G$ мы будем опускать индекс j и писать $y(u)$, $y^{[1]}(u)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ (проект МК-686.2017.1), Минобрнауки РФ (проект 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты 16-01-00015, 17-51-53180).

Рассмотрим краевую задачу L на дереве G для системы уравнений Штурма – Лиувилля

$$(\ell_j y_j)(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0,\pi),\ y_j \in \mathcal{D}(\ell_j),\ j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

со стандартными условиями склейки

$$\left.\begin{array}{ll} y_j(v) = y_k(v), \quad e_j, e_k \in E_v & \text{(условия непрерывности)}, \\ \sum\limits_{e_j \in E_v} y_j^{[1]}(v) = 0, & \text{(условия Кирхгофа)} \end{array}\right\} \tag{2}$$

во внутренних вершинах $v \in \operatorname{int} G$, и условиями Дирихле $y(v) = 0$ или Неймана $y^{[1]}(v) = 0$ в граничных вершинах $v \in \partial G$. В разных вершинах могут быть разные типы граничных условий. Фиксируем некоторые граничные условия описанного вида и обозначим их BC.

Пусть дерево G разделено на два связных поддерева G_{known} и $G_{unknown}$, имеющих одну общую вершину $w \in \operatorname{int} G$. Обозначим их множества ребер через E_{known} и $E_{unknown}$ соответственно. Положим $\partial G_{unknown} \backslash \{w\} =: \{v_k\}_{k=1}^{b}$. Обозначим через L_k краевую задачу для системы уравнений (1) на графе G со стандартными условиями склейки (2) в вершинах $v \in \operatorname{int} G$ и условями BC в вершинах $v \in \partial G \backslash \{v_k\}$. Краевое условие в вершине v_k отличается от BC, т. е. если в задаче L было условие Дирихле $y(v_k) = 0$, то в задаче L_k будет условие Неймана $y^{[1]}(v_k) = 0$, и наоборот.

Спектры $\Lambda(L)$ и $\Lambda(L_k)$, $k = \overline{1,b}$, задач L и L_k, $k = \overline{1,b}$, соответственно представляют собой счетные множества собственных значений. Рассмотрим некоторые их подспектры $\Lambda'(L) \subseteq \Lambda(L)$ и $\Lambda'(L_k) \subseteq \Lambda(L_k)$, $k = \overline{1,b}$.

Обратная задача. *Даны потенциалы* σ_j *на ребрах* $e_j \in E_{known}$ *и подспектры* $\Lambda'(L)$, $\Lambda'(L_k)$, $k = \overline{1,b-1}$. *Найти* σ_j *на ребрах* $e_j \in E_{unknown}$.

Поставленная задача относится к классу так называемых *неполных обратных задач*, в которых коэффициенты дифференциального оператора частично известны априори. Она обобщает задачу Хохштадта-Либермана на конечном интервале (см. [2]). Заметим, что если заданы полные спектры $\Lambda(L)$, $\Lambda(L_k)$, $k = \overline{1,b-1}$, то потенциалы σ_j на ребрах $e_j \in E_{unknown}$ могут быть восстановлены методом из [3].

Цель работы — выделить некоторый класс достаточных условий на подспектры, при которых решение сформулированной обратной задачи единственно. Предложен конструктивный алгоритм решения неполной обратной задачи, основанной на сведении ее к полной задаче на поддереве $G_{unknown}$ путем использования базисности Рисса специальных систем вектор-функций. Данный метод является развитием подхода, предложенного в работе [4] для графа-звезды. Результаты настоящей работы более подробно изложены в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.

2. *Hochstadt H., Lieberman B.* An inverse Sturm – Liouville problem with mixed given data // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34. P. 676–680.

3. *Юрко В. А.* О восстановлении операторов Штурма – Лиувилля на графах // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 619–630.

4. *Bondarenko N. P.* A partial inverse problem for the Sturm – Liouville operator on a star-shaped graph // Anal. Math. Phys. 2017. Published online. DOI: 10.1007/s13324-017-0172-x.

5. *Bondarenko N. P.* An inverse problem for Sturm – Liouville operators on trees with partial information given on the potentials // arXiv:1711.05659 [math.SP].

УДК 517.518.4+517.518.8

СХОДИМОСТЬ К НУЛЮ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СУММ С ЦЕЛЫМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРИБЛИЖЕНИЕ НА ПРЯМОЙ СУММАМИ СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ

П. А. Бородин, С. В. Конягин (Москва, Россия)

pborodin@inbox.ru, konyagin23@gmail.com

Теорема 1. *Существует последовательность тригонометрических многочленов*

$$Q_\nu(x) = \sum_{s=1}^{s_\nu} n_s^{(\nu)} e^{ik_s^{(\nu)} x}$$

с целыми $k_s^{(\nu)}$ *и целыми положительными* $n_s^{(\nu)}$*, сходящаяся к нулю почти всюду.*

Существование сходящейся почти всюду к нулю последовательности ненулевых многочленов Q_ν с целыми (необязательно положительными) коэффициентами $n_s^{(\nu)}$ следует из результатов Фекете [1].

Задача о существовании указанной в теореме 1 последовательности явно возникла в [2] в связи с приближениями суммами сдвигов одной функции в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. И вот теперь с помощью теоремы 1 получается

Теорема 2. *Пусть* $2 \le p < \infty$*. В действительном пространстве* $L_p(\mathbb{R})$ *существует функция* f*, для которой суммы сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

плотны в $L_p(\mathbb{R})$*.*