2. *Попов А. А. Костоусов В. Б., Бердышев В. И.* Траектория объекта, наиболее удаленная от наблюдателей // Proc. International Youth School-Conf. "SoProMat-2017". Yekaterinburg. Russia, 06-Feb.-2017. P. 129–136. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/vis3.pdf.

УДК 517.9

ТОЧКИ ЛЕБЕГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА СВЯЗНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. А. Бондарев (Минск, Беларусь)
bsa0393@gmail.com

Классическая теорема Лебега утверждает, что почти всюду для функции $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), p \geq 1$ выполнено следующее соотношение

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(t)dt, \tag{1}$$

где $B(x,r)$ — евклидов шар с центром в точке x радиуса r. Множество точек, в которых не выполнено соотношение (1), будем называть исключительным. Что если исходная функция f будет более регулярной, например будет принадлежать некоторому функциональному пространству? В частности, исследуются свойства точек Лебега для функций из классов Соболева $W^p_\alpha(X)$ на метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Пространство X предполагается связным. Мы получаем оценки на «размер» исключительного множества.

Пусть (X,d) — связное метрическое пространство с метрикой d, а регулярная борелевская мера μ удовлетворяет условию удвоения, т.е. для любых шаров $B(x,r)$ и $B(x,R)$, $R > r$, выполнено

$$\mu\big(B(x,R)\big) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu\big(B(x,r)\big)$$

для некоторых постоянных a_μ и γ. Тройка (X,d,μ) в этом случае называется пространством однородного типа, а число γ играет роль размерности. Исследуется так называемый предельный случай $\gamma = \alpha p$. Принципиальным является то, что p — произвольное положительное число (требование $p > 1$ необязательно). Для случая $\gamma > \alpha p, p > 0$ соответствующие результаты изложены в [1].

Пусть $\alpha > 0$ и $0 < p < \infty$. Пространство Соболева W^p_α на метрическом пространстве X состоит из множества функций (классов эквивалентности) $f \in L^p(X)$, для которых существует неотрицательная функция $g \in L^p(X)$, такая, что неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)] \tag{2}$$

выполнено почти всюду (более подробно см. [2]). На $W^p_\alpha(X)$ вводится (квази)норма

$$\|f\|_{W^p_\alpha(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf\{\|g\|_{L^p(X)}\},$$

где inf берется по всем неотрицательным функциям $g \in L^p(X)$, удовлетворяющим условию (2). Пространства W^p_α порождают емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\{\|f\|^p_{W^p_\alpha(X)} : f \geqslant 1 \text{ на } E \subset X\}.$$

Емкости являются «измерителями» массивности исключительных множеств в задачах теории тонких свойств функций. Такую же роль играют мера и размерность Хаусдорфа. Введем все необходимые определения. Вместимость Хаусдорфа определяется как

$$H^s_R(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), r_i < R\right\},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества E шарами радиуса не более R. Мера Хаусдорфа воодится следующим образом

$$H^s(E) = \lim_{R \to +0} H^s_R(E).$$

Наконец, определим размерность Хаусдорфа

$$\dim_H(E) = \inf\{s : H^s(E) = 0\}.$$

Поскольку при $p < 1$ подынтегральная функция в (1) может быть несуммируема, то использовать интегральные средние в определении точек Лебега уже нельзя. Для преодоления этой трудности вместо интегральных средних используется техника приближения постоянными в пространстве L^p. Пусть шар $B \subset X$ и $f \in L^p(B)$, $p > 0$. Существует $I^{(p)}_B f \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int\limits_B |f(y) - c|^p d\mu(y) = \int\limits_B |f(y) - I^{(p)}_B f|^p d\mu(y).$$

Если $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$, то для почти всех $x \in X$ существует предел

$$\lim_{r \to +0} I^{(p)}_{B(x,r)} = f^*(x).$$

Постоянные наилучшего приближения $I_B^{(p)} f$ можно использовать вместо интегральных средних в определении точек Лебега (см. [1]). Преимуществом является то, что их также можно использовать при $p < 1$. Однако они не обладают «хорошими» свойствами интегральных средних, например сублинейностью.

В случае $\gamma > \alpha p$ справедлива следующая теорема (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < \alpha p < \gamma$ *и* $f \in W_\alpha^p(X)$. *Тогда существует множество* $E \subset X$ *такое, что для* $x \in X \setminus E$ *предел*

$$\lim_{r\to+0} I_{B(x,r)}^{(p)} = f^*(x)$$

существует. Кроме того,

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}. \tag{3}$$

При этом $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *и* $\dim_H(E) \le \gamma - \alpha p$.

В случае $\gamma = \alpha p$ параметр q равен бесконечности (однако вложение $W_\alpha^p \subset L^\infty$ неверно), поэтому в (3) можно ожидать экспоненциальную скорость сходимости.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $1 < \gamma = \alpha p$ *и* $f \in W_\alpha^p(X)$, *где* X *связно. Тогда существует множество* $E \subset X$ *такое, что для* $x \in X \setminus E$ *пределы*

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f d\mu, \quad \lim_{r\to+0} I_{B(x,r)}^{(p)}$$

существуют. Кроме того,

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} \left[\exp\left\{|f - I_{B(x,r)}|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right\} - 1\right] d\mu = 0,$$

где в качестве $I_{B(x,r)}$ *можно взять и постоянную наилучшего приближения* $I_{B(x,r)}^{(p)}$, *и среднее интегральное. При этом для множества* E *выполнено* $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *и* $\dim_H(E) = 0$.

Заметим, что ограничение $\gamma > 1$ в теореме 2 является естественным, поскольку, если $\gamma < 1$, то пространство X обязательно является несвязным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bondarev S.A., Krotov V.G.* Fine properties of Functions from Hajłash–Sobolev classes M_α^p, $p > 0$ I. Lebesgue points. // J. of Contemp. Math. Anal. 2016. Vol. 51, № 6. P. 282–295.

2. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. Vol. 5, № 4. P. 403–415.

УДК 517.984

НЕПОЛНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ-ДЕРЕВЕ[1]

Н. П. Бондаренко (Самара, Саратов, Россия)
BondarenkoNP@info.sgu.ru

Рассмотрим компактный граф без циклов (дерево) G, с множеством вершин V и множеством ребер $E = \{e_j\}_{j=1}^m$. Обозначим через E_v множество ребер, инцидентных вершине v, через ∂G и $\operatorname{int} G$ — множества граничных и внутренних вершин графа G соответственно, $\operatorname{int} G = V \backslash \partial G$.

Будем считать, что все ребра дерева G имеют одинаковую длину π. Для каждого ребра e_j введем параметр $x_j \in [0, \pi]$. Функцией на дереве G называется вектор-функция $y = [y_j]_{j=1}^m$, где $y_j = y_j(x_j)$, $x_j \in [0, \pi]$, $j = \overline{1, m}$. Пусть q_j, $j = \overline{1, m}$, вещественные функции из класса $W_2^{-1}(0, \pi)$, т. е. q_j — обобщенные производные функций $\sigma_j \in L_2(0, \pi)$. Дифференциальное выражение Штурма – Лиувилля

$$\ell_j y_j := -y_j'' + q_j(x_j) y_j$$

на ребре e_j понимается в следующем смысле (см. [1]):

$$\ell_j y_j = -(y_j^{[1]})' - \sigma_j(x_j) y_j^{[1]} - \sigma_j^2(x_j) y_j,$$

где $y_j^{[1]} = y_j' - \sigma_j y_j$ — *квазипроизводная*, и функция y_j принадлежит пространству

$$\mathcal{D}(\ell_j) = \{y_j \in W_2^1[0, \pi] \colon y_j^{[1]} \in W_1^1[0, \pi],\ \ell_j y_j \in L_2(0, \pi)\}.$$

Предположим, что вершина $u \in V$ соответствует концу $x_j = 0$ ребра e_j и вершина $v \in V$ соответствует $x_j = \pi$. Введем обозначения

$$\begin{array}{ll} y_j(u) = y_j(0), & y_j(v) = y_j(\pi), \\ y_j^{[1]}(u) = -y_j^{[1]}(0), & y_j^{[1]}(v) = y_j^{[1]}(\pi). \end{array}$$

Для $u \in \partial G$ мы будем опускать индекс j и писать $y(u)$, $y^{[1]}(u)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ (проект МК-686.2017.1), Минобрнауки РФ (проект 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты 16-01-00015, 17-51-53180).