УДК 517.986.62

ПОСТРОЕНИЕ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСОЙ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА[1]

Г. С. Бердников (Саратов, Россия)
evrointelligent@gmail.com

Пусть $(G, \dot{+})$ – локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots), \quad x_j = \overline{0, p-1},$$

где p — любое простое число. Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p, т.е. $x\dot{+}y = (x_j\dot{+}y_j)(x_j+y_j \bmod p)$. Пусть

$$G_n = \{x \in G : \ x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, X_{n+1}, \dots)\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

основная цепочка подгрупп, $G_n^{\perp}$ — совокупность аннуляторов, $\mathcal{A}$ — оператор растяжения. Базисные элементы мультипликативной группы характеров будем обозначать r_n и называть функциями Радемахера.

Пусть $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^{\perp})$ — множество функций, постоянных на $G_{-N}^{\perp}\zeta$ с носителем в $G_M^{\perp}$. Аналогично, обозначим $\mathfrak{D}_{-N}(G_{\infty}^{\perp})$ — множество функций с неограниченным носителем и теми же промежутками постоянства.

На группах Виленкина возможно построить ортогональный кратномасштабный анализ. Задача построения кратномасштабного анализа сводится к нахождению масштабирующей функции φ, которая удовлетворяет равенству $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) = \prod\limits_{n=0}^{\infty} m_0(\chi\mathcal{A}^{-n})$, где $\mathcal{A}$ - оператор растяжения, а функция $m_0(\chi)$ называется маской. Само равенство называется масштабирующим уравнением в частотном виде.

Необходимое и достаточное условие масштабирующей функции с компактным носителем самой функции и преобразования Фурье впервые было найдено в работах Ю. А. Фаркова [1, 2], однако для нахождения функции, пользуясь им, требуется перебор всех возможных вариантов. Алгоритм представленный в работах С. Ф. Лукомского, Ю. С. Крусс и автора [3, 4] не обладает этим недостатком, при этом также являясь необходимым и достаточным условием (см. [5]). Алгоритм использует особым образом построенные ориентированные графы без контуров. Однако этот алгоритм пригоден только для нахождения функций с ограниченной частотной полосой (компактным носителем преобразования Фурье).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152-а).

Первой попыткой строить масштабирующие функции с неограниченной частотной полосой при помощи методов теории графов можно считать работу автора [4], где выяснилось, что добавляя в орграфы один контур (ориентированный цикл) можно добиться неограниченности носителя преобразования Фурье, при этом сама функция будет удовлетворять масштабирующему уравнению. Представленная здесь работа является обобщением работы [4], и результаты, описанные ниже, позволяют строить функции более широкого класса.

Будем строить масштабирующую функцию φ такую, что $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-1}(G_{\infty}^{\perp})$ следующим образом.

Рассмотрим ориентированный граф Γ, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вершинами являются все числа $\alpha_i = \overline{0, p-1}$. Каждая такая вершина присутствует в графе ровно один раз;

2) из вершины 0 нет исходящих дуг;

3) в графе присутствует хотя бы один контур.

Следующая теорема описывает алгоритм построения преобразования Фурье масштабирующей функции по такому графу.

Теорема 1. *Пусть дан граф Γ, удовлетворяющий вышеописанным условиям. Построим функцию $m_0(\chi)$ следующим образом. Пусть $m_0(G_{-1}^{\perp}) = 1$. Также по каждой дуге $\alpha_{-1} \to \alpha_0$ графа Γ построим значение $m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}) \neq 0$ так, чтобы выполнялось необходимое условие маски масштабирующей функции:*

$$\sum_{\alpha_0=1}^{p-1} |m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2 = 1, \quad \forall\ \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}.$$

По каждому пути графа Γ вида $\alpha_{-1} \to \alpha_0 \to \dots \to \alpha_s \to 0$ определим все ненулевые значения преобразования Фурье масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\chi)$ так, чтобы $\hat{\varphi}(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \dots r_s^{\alpha_s}) = \prod_{n=0}^{s} m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{n-1}} r_0^{\alpha_n})$.

Тогда функция $\hat{\varphi}(\chi)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению, причем $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-1}(G_{\infty}^{\perp})$ и система сдвигов $\varphi(x \dot{-} h)_{h \in H_0}$ ортонормирована.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фарков Ю. А* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных Абелевых группах // Изв.РАН. Сер.матем. 2005. V. 69. № 3. C. 193-220.

2. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Vol. 82, № 6. C. 934–952.

3. *Бердников Г. С., Лукомский С. Ф., Крусс Ю. С.* Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина // Матем. заметки. 2015. Т. 9, № 2. С. 310–313.

4. *Бердников Г. С.* Графы с контурами в кратномасштабном анализе на группах Виленкина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 377–388. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388.

5. *Бердников Г. С.* Графы в кратномасштабном анализе на группах Виленкина // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 51. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции. 2015. С. 70–72.

УДК 517.5

НАВИГАЦИЯ ПО ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ПОЛЯМ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов (Екатеринбург, Россия)
bvi@imm.uran.ru, vkost@imm.uran.ru

Доклад посвящен задачам, которые возникают при исследовании проблем навигации по геофизическим полям [1] и при планировании маршрутов движущихся объектов [2]. Автономная навигация по геофизическим полям является альтернативой спутниковой навигации и все более привлекает внимание исследователей в последнее время.

В докладе формулируется ряд задач, связанных с проблемой навигации:

– простейшие модели процесса навигации;

– задача определения местоположения автономного аппарата с использованием информации о поле в целом и фрагмента поля, снятого при движении;

– задача о наилучшей аппроксимации поля в целом с целью экономного хранения его на борту и быстрого восстановления;

– проблема оценки информативности поля и задача построения наиболее информативного маршрута, т.е. наилучшего маршрута с точки зрения точности навигации при движении по этому маршруту;

– задача планирования траектории движения объекта в условиях наблюдения. Предполагается наличие у объекта скоростного средства поражения, что заставляет наблюдателя для обеспечения безопасности придерживаться определенной тактики движения;

– экстремальная задача поиска оптимальной траектории, минимизирующей максимум видимости объекта при движении по ней;

– задача планирования маршрута при условии, когда наблюдатели неподвижны. Для двух последних постановок предложены эффективные численные методы для их решения, основанные на модификации алгоритма Дейкстры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердышев В. И., Костоусов В. Б.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург : УрО РАН, 2007.