УДК 517.9

О СРАВНЕНИИ ДВУХ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

В. А. Беднаж (Брянск, Россия),
Ф. А. Шамоян (Саратов, Россия)
vera.bednazh@mail.ru, shamoyanfa@yandex.ru

Пусть $\mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$ — единичная окружность, $\triangle := \{t : 0 < t < 1\}$.

Обозначим через Ω — класс неотрицательных суммируемых функций ω на $\triangle$, для которых существуют неотрицательные числа q_ω, $0 < g_\omega < 1$, m_ω, M_ω такие, что

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega, \quad \lambda \in [q_\omega, 1], \quad r \in \triangle.$$

Простейшими примерами таких функций являются функции вида

$$\omega(x) = x^\alpha \left(\ln \ldots \ln \frac{c}{x}\right)^\beta, \quad x \in \triangle, \quad \text{где } \alpha > -1,\ \beta \in \mathbf{R}.$$

В дальнейшем нам потребуются также следующие обозначения: $H(\mathbf{D})$ — множество всех аналитических в $\mathbf{D}$ функций, $M(\mathbf{D})$ — пространство всех мероморфных в $\mathbf{D}$ функций. Если $f \in M(\mathbf{D})$, то через $T(r, f)$ обозначим характеристику Р. Неванлинны функции f, т.е.

$$T(r,f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \int_0^r \frac{n(t,\infty) - n(0,\infty)}{t} dt, \quad r \in \triangle,$$

где $\ln^+|a| = \max(0, \ln|a|)$.

Если ω_1, $\omega_2 \in \Omega$, $0 < p < +\infty$, то

$$N^p_{\omega_1,\omega_2} := \left\{ f \in M(\mathbf{D}) : \int_0^1 \omega_2(1-r) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \omega_1(1-t) \ln|f(rte^{i\theta})| dt \right)^+ d\theta \right)^p dr < +\infty \right\}.$$

Для удобства будем обозначать функцию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \omega_1(1-t) \ln|f(rte^{i\theta})| dt \right)^+ d\theta + \int_0^1 \omega_1(1-t) n(tr,\infty) dt$$

через $T_{\omega_1}(r,f)$. Характеристика такого типа была впервые введена М. М. Джрбашяном в работе [2] при $\omega_1(t)=t^{\alpha}$, $\alpha>-1$.

Обозначим также через S^p_ω следующий класс мероморфных функций

$$S^p_\omega:=\left\{f\in M(\mathbf{D}):\int\limits_0^1\omega(1-r)T^p(r,f)dr<+\infty\right\},$$

где $\omega\in\Omega,\quad 0<p<+\infty$.

Основная цель статьи — сравнить классы $N^p_{\omega_1,\omega_2}$ and S^p_ω. Доказано, что при некоторых ограничениях на веса ω_1, ω_2 справедливо вложение:

$$S^p_{\omega_p}\subset N^p_{\omega_1,\omega_2},\quad 0<p<+\infty,$$

где $\omega_p(r)=\omega_2(r)\omega_1^p(r)r^p$, $r\in\triangle$. Таким образом, если $\omega_1=t^\alpha$, $\omega_2=t^\beta$, $t\in\triangle$, $\alpha,\beta>-1$, то $S^p_{\omega_p}=N^p_{\omega_1,\omega_2}$, $0<p<+\infty$.

Как доказано в [3], если $f\in S^p_{\omega_p}$ или $f\in N^p_{\omega_1,\omega_2}$, то функция f представима

$$f(z)=\frac{h_1(z)}{h_2(z)},\quad z\in\mathbf{D},$$

где $h_j\in H(\mathbf{D})$, $j=1,2$. Поэтому будем предполагать, что классы $N^p_{\omega_1,\omega_2}$ и S^p_ω состоят только из голоморфных функций.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть* ω_1, $\omega_2\in\Omega$, $f\in N^p_{\omega_1,\omega_2}$, $0<p<+\infty$, $f(z_k)=0$, $k=1,2,\ldots$, $f(0)=1$, $n_k=card\left\{z_m:|z_m|\le 1-\frac{1}{2^k}\right\}$, $k=1,2,\ldots$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{{n_k}^p\,\omega_2(\frac{1}{2^k})\omega_1^p(\frac{1}{2^k})}{2^{k(2p+1)}}<+\infty.$$

Теорема 2. *Пусть* ω_1, $\omega_2\in\Omega$, $0<p<+\infty$, *тогда справедливо вложение* $S^p_{\omega_1,\omega_2}\subset N^p_{\omega_1,\omega_2}$. *Причем выполняется оценка*

$$\int\limits_0^1\omega_2(1-t)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^1\omega_1(1-u)\ln|f(ute^{i\theta})|du\right)^+d\theta\right)^p dt\le$$

$$\le c_1\int\limits_0^1\omega_2(1-t)\omega_1^p(1-t)(1-t)^pT^p(t,f)dt,\ f\in H(\mathbf{D}),\ 0<p<+\infty,$$

где c_1 *положительное число, не зависящее от* f.

Доказательство теоремы основано на следующем вспомогательном утверждении:

Лемма 1. *Пусть $f \in H(\mathbf{D})$, тогда для любой неотрицательной функции $\omega \in L^1(\Delta)$ справедлива оценка*

$$T_\omega(f,r) \le \int\limits_0^1 \omega(1-t)T(f,rt)dt, \quad r \in [0,1]$$

Теорема 3. *Пусть $0 < p < +\infty$, $\alpha, \beta > -1$. Тогда классы $N^p_{\alpha,\beta}$ и $S^p_{\alpha,\beta}$ совпадают.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хейман У.* Мероморфные функции. М. : Мир, 1966. 287 с. (англ. Hayman W. K. Meromorfhic functions. Oxford, 1964. 287 p.)

2. *Джрбашян М. М.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге // Доклады АН СССР. 1964. Т. 157. № 5. С. 1024–1027.

3. *Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций / Брянский государственный университет, 2009. 152 с.

4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. : Мир, 1973. 342 с.

5. *Джрбашян М. М.* Интегральное преобразование и представление функций в комплексной области. М. : Наука, 1966. 670 с.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК ШТЕЙНЕРА ПЯТИЭЛЕМЕНТНОГО ПОДМНОЖЕСТВА ПРОСТРАНСТВА ЛИНДЕНШТРАУССА[1]

Б. Б. Беднов (Москва, Россия)

noriiii@inbox.ru

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\mathrm{st}|(M).$$

Пространство X называется предуальным к L_1 или пространством Линденштраусса, если X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-08335).