УДК 517.51

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

А. Г. Бабенко (Екатеринбург, Россия)
babenko@imm.uran.ru

Доклад посвящен экстремальным задачам для полиномов и целых функций с ограничениями на их значения и коэффициенты (преобразование Фурье). А именно задачам, которые возникают как в теории приближений функций на некоторых классических многообразиях, так и задачам оптимального расположения точек на этих многообразиях.

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДНЫМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА СИМПЛЕКСАХ В СЛУЧАЯХ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ[1]

Н. В. Байдакова (Екатеринбург, Россия)
baidakova@imm.uran.ru

Пусть Δ — d-симплекс ($d = 3, 4$) с вершинами $a_1, \ldots, a_{d+1}$, H — наибольшее ребро этого симплекса. Рассмотрим задачу интерполяции функции f из $W^{n+1}M$ (множество функций, у которых все производные до порядка $n+1$ включительно существуют и непрерывны на Δ, и производные порядка $n+1$ ограничены по модулю константой M) многочленом P_n^d степени не выше n в узлах

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_{d+1}} = \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \ldots, \frac{i_{d+1}}{n}\right),$$

$$i_k \in \{0, \ldots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \ldots + i_{d+1} = n.$$

Будем писать, что величины ψ_1 и ψ_2 находятся в отношении $\psi_1 \underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}{\lesssim} \psi_2$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — некоторые числовые параметры, если найдется неотрицательное число $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, зависящее от $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, такое, что $\psi_1 \le C(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\psi_2$.

Известно [1], что для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathbb{R}^d$ имеет место оценка

$$\left\| D^s_{\xi_1,\ldots,\xi_s} \left(f - P_n^d\right) \right\|_\infty \underset{n,d}{\lesssim} M \frac{H^{n+1-s}}{(\cos\theta)^s}\,, \quad s = 0, \ldots, n, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00702П).

где характеристика θ определяется следующим образом: если $E_d = \{e_s\}_{s=1}^d$ — множество единичных линейно независимых векторов; ξ — произвольный единичный вектор из $\mathbb{R}^d$; $\mathcal{E}_N = \{e_s\}_{s=1}^N$ — множество всех единичных векторов, параллельных ребрам d-симплекса Δ, θ_s — угол между ξ и прямой с направляющим вектором e_s (т. е. $0 \leq \theta_s \leq \pi/2$), то

$$\theta = \theta(\Delta) = \min_{E_d \subset \mathcal{E}_N} \max_{\xi \in \mathbb{R}^d} \min_{e_s \in E_d} \{\theta_s\}.$$

Известно также [2], что оценка (1) близка к неулучшаемой.

Введем геометрическую характеристику симплекса, которая более просто определяется и качественно ведет себя аналогично $\cos\theta$. Обозначим через T_i $(i = 0, \ldots, d)$ грани размерности $d-1$ симплекса Δ, для которых соответственно $a_i \notin T_i$; τ_{ij} — единичные векторы, направленные от a_i к a_j. Пусть γ_{ij} — угол между τ_{ij} и T_i; γ_i и γ — такие углы, что

$$\sin\gamma_i = \max_{\substack{1 \leq j \leq d+1 \\ j \neq i}} \sin\gamma_{ij} \ ,$$

$$\sin\gamma = \min_{1 \leq i \leq d+1} \sin\gamma_i \ .$$

Теорема 1. *Если $d = 3, 4$, то имеет место соотношение*

$$\cos\theta \lesssim \sin\gamma \lesssim \sqrt[d]{\cos\theta}.$$

Таким образом, для $d = 3, 4$ теорема позволяет перейти от оценок (1) к оценкам

$$\left\| D^s_{\xi_1,\ldots,\xi_s}\left(f - P^d_n\right)\right\| \underset{n}{\lesssim} M \frac{H^{n+1-s}}{(\cos\gamma)^{sd}} \ , \quad s = 0, \ldots, n.$$

Однако можно получить более точные оценки с использованием характеристики γ.

Теорема 2. *При $d = 3, 4$ для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathbb{R}^d$, s=0,$\ldots$,n, имеет место оценка*

$$\left\| D^s_{\xi_1,\ldots,\xi_s}\left(f - P^d_n\right)\right\|_\infty \underset{n,d}{\lesssim} M \frac{H^{n+1-s}}{(\cos\gamma)^{s}} \ , \quad s = 0, \ldots, n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jamet P.* Estimation d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés // RAIRO Anal. Numer. 1976. Vol. 10, № 1. P. 43–60.

2. *Байдакова Н. В.* Об оценках П. Жамэ для конечных элементов с интерполяцией в равномерных узлах симплекса // Матем. тр. 2017. Т. 20, № 1. С. 43–74.