СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асташкин С. В.* О сравнении систем случайных величин с последовательностью Радемахера // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81, № 6. С. 5–22.

2. *Bednorz W., Latała R.* On the suprema of Bernoulli Processes // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. 2013. Vol. 351. P. 131–134.

3. *Bednorz W., Latała R.* On the boundedness of Bernoulli processes // Annals Math. 2014. Vol. 180, № 3. P. 1167–1203.

4. *Bourgain J., Lewko M.* Sidonicity and variants of Kaczmarz's problem // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 2017. Vol. 67, № 3. P. 1321–1352.

УДК 517.9

ДРОБНЫЙ ХАОС РАДЕМАХЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА[1]

С. В. Асташкин, К. В. Лыков (Самара, Россия)

astash56@mail.ru, alkv@list.ru

Работа продолжает исследования [1-7] по поведению в симметричных пространствах на $[0,1]$ системы Радемахера и производных от нее систем.

Как обычно, функции Радемахера определяются следующим образом: если $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $r_j(t) := \operatorname{sign}(\sin(2^j \pi t))$, $j = 1, 2, \ldots$. Напомним классические неравенства Хинчина [1, 8]: для любого $p \geqslant 1$ и произвольных $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right)^{1/2} \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j r_j \right\|_{L_p[0,1]} \leqslant \sqrt{p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right)^{1/2}.$$

Эти соотношения вызвали большое количество исследований и обобщений, нашли многочисленные применения в различных разделах анализа. А. Я. Хинчин доказал их, «преследуя цель выяснения правильной скорости сходимости в усиленном законе больших чисел Э. Бореля» [9]. С точки зрения геометрии банаховых пространств неравенства Хинчина показывают, что пространства $L_p[0,1]$, не являясь гильбертовыми при $p \neq 2$, тем не менее, содержат подпространства, изоморфные ℓ_2. Вопрос о том, в каких симметричных пространствах X последовательность $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ эквивалентна каноническому базису в ℓ_2, был решен в работе Родина и Семенова [2], показавших, что последнее имеет место тогда и только тогда, когда X содержит сепарабельную часть пространства Орлича $\mathrm{Exp}L^2$, построенного по функции $M(u) = e^{u^2} - 1$. В работе [3] аналогичный вопрос изучался для системы $\{r_{j_1}(t) \cdot r_{j_2}(t)\}_{j_1 > j_2}$ произведений функций Радемахера, именуемой хаосом Радемахера второго порядка.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00138 а и № 16-41-630676 р_а) и Министерства образования и науки РФ (проект 5-100).

Там было доказано, что такая система эквивалентна в X каноническому базису в ℓ_2 тогда и только тогда, когда X содержит сепарабельную часть пространства Орлича Exp$L$, построенного по функции $M(u) = e^u - 1$. Кроме того, эквивалентность системы $\{r_{j_1} r_{j_2}\}_{j_1 > j_2}$ в X каноническому базису в ℓ_2 оказалась равносильной формально более слабому свойству безусловной базисности [4]. Отметим, что система $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ является безусловной (и даже симметричной) базисной последовательностью в любом симметричном пространстве [10]. В настоящей работе вопросы о справедливости неравенств Хинчина и свойства безусловности исследуются для подсистем хаоса Радемахера, индексное множество которых допускает определенные ниже плотностные оценки, связанные с понятием комбинаторной размерности из [11].

Определение 1. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что множество $\mathcal{A}$ является (α, β)-*множеством*, если:

1) для некоторого $c_{\mathcal{A}} > 0$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся множества $B_1, B_2, \ldots, B_d$ такие, что $|B_j| = n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, и

$$|\mathcal{A} \cap (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_d)| \geqslant c_{\mathcal{A}} n^{\alpha};$$

2) для некоторого $C_{\mathcal{A}} > 0$, каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых множеств $B_1, B_2, \ldots, B_d$, $|B_j| = n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, выполняется неравенство

$$|\mathcal{A} \cap (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_d)| \leqslant C_{\mathcal{A}} n^{\beta}.$$

Ясно, что если $\mathcal{A}$ является (α, β)-множеством, то $\alpha \leqslant \beta$. Любое множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^d$, удовлетворяющее условию 1) определения 1, является (α, d)-множеством.

Следующее определение, взятое нами из [12], ослабляет известное свойство безусловности.

Определение 2. Базисная последовательность $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ в банаховом пространстве X называется *RUD последовательностью*, если для некоторого $D > 0$ и любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|_X \leqslant D \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(u) a_j x_j \right\|_X du.$$

Положим $\jmath := (j_1, j_2, \ldots, j_d)$ и $\mathbf{r}_\jmath(t) := r_{j_1}(t) \cdot r_{j_2}(t) \cdot \ldots \cdot r_{j_d}(t)$. Через $\triangle^d$, $d \in \mathbb{N}$, будем обозначать «нижнетреугольную» часть $\mathbb{N}^d$, т.е.

$$\triangle^d := \{(j_1, j_2, \ldots, j_d) \in \mathbb{N}^d : \ j_1 > j_2 > \ldots > j_d\}.$$

Отметим, что система $\{\mathbf{r}_\jmath\}_{\jmath\in\triangle^d}$, рассматриваемая в лексикографическом порядке, является базисной в любом симметричном пространстве [7].

Теорема 1. *Пусть X — симметричное пространство функций на отрезке $[0,1]$. Предположим также, что $d\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}\subset\triangle^d$ является (α,β)-множеством и $\alpha+1/\beta>2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\{\mathbf{r}_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}$ — RUD последовательность в X;

2) для некоторой константы C_X и произвольных $a_\jmath\in\mathbb{R}$

$$C_X^{-1}\|\{a_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}\|_{\ell_2(\mathcal{A})}\leqslant\left\|\sum_{\jmath\in\mathcal{A}}a_\jmath\mathbf{r}_\jmath\right\|_X\leqslant C_X\|\{a_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}\|_{\ell_2(\mathcal{A})}.$$

В классе пространств Орлича и для множеств $\mathcal{A}$ *точной* комбинаторной размерности теорему 1 можно уточнить.

Теорема 2. *Пусть X — пространство Орлича функций на отрезке $[0,1]$. Предположим также, что $d\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}\subset\triangle^d$ является (α,α)-множеством и $\alpha>1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\{\mathbf{r}_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}$ — RUD последовательность в X;

2) для некоторой константы C_X и произвольных $a_\jmath\in\mathbb{R}$

$$C_X^{-1}\|\{a_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}\|_{\ell_2(\mathcal{A})}\leqslant\left\|\sum_{\jmath\in\mathcal{A}}a_\jmath\mathbf{r}_\jmath\right\|_X\leqslant C_X\|\{a_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}\|_{\ell_2(\mathcal{A})}.$$

3) $X\supset\mathrm{Exp}L^{2/\alpha}$, где $\mathrm{Exp}L^{2/\alpha}$ — пространство Орлича, построенное по выпуклой функции $M(u)\sim e^{u^{2/\alpha}}-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khintchine A.* Über dyadische Brüche // Math. Zeitschrift. 1923. Vol. 18. P. 109–116.

2. *Semyonov E. M., Rodin V. A.* Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math. 1975. Vol. 1, № 3. P. 207–222.

3. *Astashkin S. V.* Rademacher chaos in symmetric spaces // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. P. 311–336.

4. *Astashkin S. V.* Rademacher chaos in symmetric spaces, II // East J. Approx. 2000. V. 6, № 1. P. 71–86.

5. *Асташкин С. В.* Функции Радемахера в симметричных пространствах // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 32. С. 3–161.

6. *Асташкин С. В.* Система Радемахера в функциональных пространствах. М. : Физматлит, 2017. 550 с.

7. *Асташкин С. В., Лыков К. В.* Разреженный хаос Радемахера в симметричных пространствах // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 1. С. 3–31.

8. *Szarek S. J.* On the best constant in the Khinchin inequality // Studia Math. 1976. Vol. 58, № 2. P. 197–208.

9. *Пешкир Г., Ширяев А. Н.* Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия // УМН. 1995. Т. 50, № 5(305). С. 3–62.

10. *Braverman M. Sh.* Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1994. 116 p.

11. *Blei R.* Analysis in Integer and Fractional Dimensions / Cambridge Studies in Advanced Mathematics 71. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2001. 577 p.

12. *Lopez-Abad J., Tradacete P.* Bases of random unconditional convergence in Banach spaces // Transactions of the AMS. 2016. Vol. 368, № 12. P. 9001–9032.

УДК 517.5

СИСТЕМЫ СЖАТИЙ И СДВИГОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

С. В. Асташкин (Самара, Россия),
П. А. Терехин (Саратов, Россия)
astash56@mail.ru, terekhinpa@mail.ru

Пусть $f \in L^1[0,1]$ и $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Системой $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сжатий и сдвигов функции f называется последовательность

$$f_n(t) := \begin{cases} f(2^k t - j), & \text{если } t \in [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $n = 2^k + j$, $k = 0, 1, \ldots$ и $j = 0, \ldots, 2^k - 1$. В частности, если $f = h_1 = \chi_{(0,\frac{1}{2})} - \chi_{(\frac{1}{2},1)}$, то получаем систему Хаара $\{h_n\}_{n=1}^\infty$, нормированную в L^∞ (без функции $h_0(t) = 1$).

Рассмотрим (линейный) оператор T_f, определяемый равенствами $T_f h_n = f_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Под нормой $\|T_f\|_{X \to Y}$ будем понимать обычную норму оператора $T_f : \overline{\operatorname{span}}_X \{h_n\}_{n=1}^\infty \to Y$.

Заметим, что оператор T_f перестановочен с операторами

$$V_0 f(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < t \le 1, \end{cases} \qquad V_1 f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ f(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Кроме того, имеем $\{f_n\}_{n=1}^\infty = \{V^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$, где

$$V^\alpha = V_{\alpha_1} \ldots V_{\alpha_k}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{A} := \bigcup_{k=0}^\infty \{0,1\}^k,$$

причем $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{A}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии, определяемом двоичным разложением $n = 2^k + \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu 2^{k-\nu}$. Обозначим через $|\alpha| = k$ длину индекса α, а через $\alpha\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l)$ конкатенацию индексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (проект 1.1470.2016/1.4) и РФФИ (проект 17-01-00138) (первый автор), а также РФФИ (проект № 16-01-00152) (второй автор).