2. *Штейников Ю. Н.* Оценки тригонометрических сумм по подгруппам и некоторые их приложения // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 4. С. 606–625.

3. *Murphy B., Rudnev M., Shkredov I. D. , Shteinikov Yu. N.* On the few products, many sums problem. https://arxiv.org/abs/1712.00410.

УДК 519.652

К ЗАДАЧЕ МНОГОМЕРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЭРМИТА ОТ N ПЕРЕМЕННЫХ

В. В. Шустов (Москва, Россия)
vshustov@gosniias.ru

Необходимость использования многомерной интерполяции часто возникает в реальных приложениях, в частности при обработке цифровых изображений или создании моделей полей скоростей в потоке жидкости или газа, а также в электронной картографии с использованием цифровой модели поверхности Земли.

Для случая одной переменной разработаны множество методов интерполяции, основанных на использовании многочленов Лагранжа, сплайн-функций, кривых Безье, B-сплайнов и др. Задача многомерной, в частности, двумерной интерполяции рассматривались в ряде работ, там же отмечены трудности, возникающие при решении этой задачи [1, с. 181; 2, с. 47]. Метод, сводящий многомерную интерполяцию к последовательности одномерных, возможен, но трудоемкость его реализации резко возрастает с увеличением числа переменных $n = 2, 3, 4$ и т.д.

Предлагаемый подход к многомерной интерполяции сеточной функции, заданной на регулярной сетке узлов, относится к локальным методам: значение функции в точке, попадающей в ячейку сетки, определяется значениями сеточной функции и ее производных только в вершинах этой ячейки. Метод основан на использовании двухточечных интерполяционных многочленов Эрмита, рассмотренных в [3], применительно к пространственной задаче многомерной интерполяции.

Для построения многомерной интерполяции требуется обобщение представления двухточечных многочленов Эрмита со случая одной переменной до общего случая n переменных.

Теорема. *Пусть в n-мерной области $\mathbf{D}^n \subset E^n$ задана регулярная сетка узлов* $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \left\{x^1_{i^1}\right\}^1_{i^1=0} \times ... \times \left\{x^n_{i^n}\right\}^1_{i^n=0},$$

являющаяся декартовым произведением одномерных сеток вида $C^s = [x^s_0, x^s_1]$, $s = 1, 2...n$. Индекс вверху s означает номер координаты, индекс *внизу i означает номер узла. Пусть в узлах сетки заданы значения функции и всех ее частных производных до порядка m включительно*

$$\nabla^{(j)} f_{i^1,\dots,i^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{(j)} f_{i^1,\dots,i^n}, \quad j = 0, 1 \dots m.$$

Тогда существует многочлен $H(x)$ от n переменных, $x = (x^1, \dots x^n)$, определенный в области $\mathbb{D}^n$, степени не выше $2m+1$ по каждой переменной, удовлетворяющий условиям, наложенным на значения многочлена и его производных в узлах сетки

$$\nabla^{(j)} H(x^1_{i^1}, \dots x^n_{i^n}) = \nabla^{(j)} f_{i^1,\dots i^n}, \quad i^s = \{0, 1\}, \quad s = 1, 2 \dots n$$

и который может быть представлен в виде

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{1} \dots \sum_{i^n=0}^{1} \sum_{j=0}^{m} \frac{\varphi^m_j(\xi^1_{i^1}) \dots \varphi^m_j(\xi^n_{i^n})}{j!} (\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,\dots,i^n},$$

где функции влияния $\varphi^m_j(\xi^s_{i^s})$ определены соотношением

$$\varphi^m_j(\xi^s_{i^s}) = (\xi^s_{1-i^s})^{m+1} \sum_{k=0}^{m-j} c^k_{m+k} \xi^k_{i^s},$$

выражение $(\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,\dots,i^n}$ есть соответствующий член многочлена Тейлора для функции n переменных [4, с. 10], который представляется формулой

$$(\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,,\dots,i^n} = \left((x^1 - x^1_{i^1})\frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + (x^n - x^n_{i^n})\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{(j)} f_{i^1,\dots,i^n},$$

относительные переменные ξ^s_0 и ξ^s_1связаны с исходными переменными x^s, соотношениями

$$\xi^s_0 = \frac{x^s - x^s_0}{x^s_1 - x^s_0}, \quad \xi^s_1 = 1 - \xi^s_0, \quad s = 1, 2 \dots, n.$$

Рассмотрены частные случаи представления многомерного двухточечного многочлена.

1. Пусть $m = 0$. Двухточечный многочлен $H(x)$ имеет вид:

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{1} \dots \sum_{i^n=0}^{1} \xi^1_{1-i^1} \dots \xi^n_{1-i^n} f_{i^1,\dots,i^n},$$

что соответствует случаю n-линейной интерполяции.

2. Пусть $m = 1$. Двухточечный многочлен $H(x)$ представляется в виде:

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{1} ... \sum_{i^n=0}^{1} (\xi^1_{1-i^1})^2 ... (\xi^n_{1-i^n})^2 [(1 + 2\xi^1_{i^1}) ... (1 + 2\xi^n_{i^n}) f_{i^1,...,i^n} +$$

$$+ (\Delta x * \nabla) f_{i^1,...,i^n}],$$

что соответствует случаю n-гладкой интерполяции.

В случае, когда область, в которой задана сеточная функция, состоит из множества ячеек, на первом этапе необходимо определить номер i_0 ячейки, в которую попадает точка x в соответствии с условиями

$$x^s_{i^s_0} \leq x^s < x^s_{i^s_0+1}, \qquad s = 1, 2, ...n,$$

а затем определить значение интерполяционной функции $H(x)$ по заданным значениям сеточной функции и ее производных в вершинах этой ячейки.

В качестве примера на рис. 1 и рис. 2 представлены графики интерполяционных функций, построенные на сетке 3×3 с использованием кусочно-линейной ($m = 0$) и гладкой ($m = 1$) двумерной интерполяции ($n = 2$), соответственно.

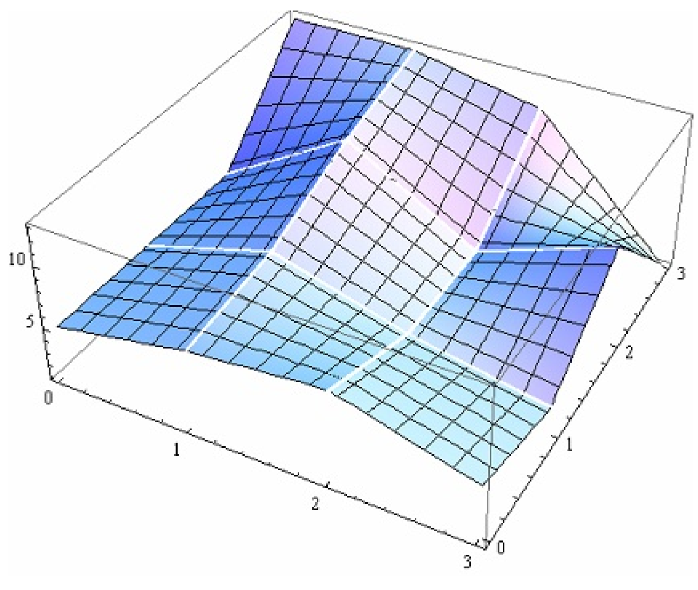

Рис. 1

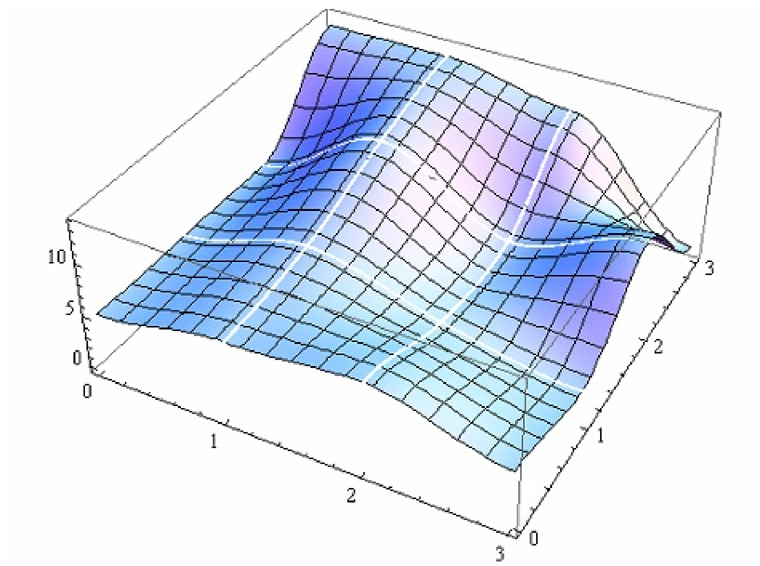

Рис. 2

Из рис. 1, 2 видно, что при использовании формул гладкой интерполяции наклон поверхности меняется плавно, что важно во многих приложениях.

Многомерные двухточечные многочлены Эрмита наряду с задачами интерполяции сеточных функций могут использоваться для аппроксимации функций многих переменных, облададающих требуемым уровнем гладкости, определяемой непрерывностью производных соответствующего порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1. М. : Физматлит, 1962. 464 с.

2. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

3. *Шустов В. В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1091–1108

4. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 2. М. : Высш. шк., 1981. 584 с.

УДК 517.52

О НЕУЛУЧШАЕМОСТИ S-МАЖОРАНТЫ ДЛЯ ПОТОЧЕЧНОГО ПРИЗНАКА СХОДИМОСТИ ДИНИ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША

В. И. Щербаков (Жуковский, Россия)

kafmathan@mail.ru

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Всякое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$