2. *Шеина А. М.* О сходимости орторекурсивного разложения по гладкой системе типа Фабера – Шаудера // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 107–111.

УДК 517.53

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ф. А. Шамоян (Брянск, Россия)
shamoyanfa@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

1. Пусть $\mathbb{C}^n_+ = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \ \operatorname{Im} z_j > 0,\ j = 1, \ldots, n\}$, $N(\mathbb{C}^n_+) = \{f : f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)},\ h_j(z) \in H^\infty(\mathbb{C}^n_+),\ j = 1, 2, h_2(z) \neq 0,\ z \in \mathbb{C}^n_+\}$ — класс функций ограниченного вида в$\mathbb{C}^n_+$. В одномерном случае класс $N(\mathbb{C}^n_+)$ совпадает с классом $\mathbb{P}$. Неванлинны в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ := \mathbb{C}^1_+$ (см. [1]), при $n \geq 2$ класс Неванлинны, т.е класс функций f, для которых $ln|f|$ имеет n — гармоническую мажоранту и $N(\mathbb{C}^n_+)$ совершенно разные (см. [2, 3]).Известно, что если f принадлежит классу В. И. Смирнова $N^+(\mathbb{C}^n_+)$ (см. [2, 4]) и ее граничные значения на $\mathbb{R}^n$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}^n)$, то f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}^n_+)$ и тем самым преобразование Фурье этой функции $f(\hat{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) \exp^{-itx} dt$ обращается в нуль на $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^n_+$. Простой пример функции

$$f_a(z) = \prod_{j=1}^{n} e^{(-ia_j z_j)} \frac{1}{(i + z_j)^2}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n_+, \tag{1}$$

$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, показывает, что такое утверждение не верно для $N(\mathbb{C}^n_+)$. При $n = 1$ в работе [5] было установлено, что если $f(\hat{x}) \to 0$, при $x \to -\infty$, достаточно сильно, то функция $f(\hat{x})$ равна нулю тождественно на $\mathbb{R}_-$. При этом найдено необходимое и достаточное условие на скорость этого убывания при которых справедливо упомянутое утверждение. Для доказательства указанного результата существенную роль сыграло факторизационное представление функции из класса $N(\mathbb{C}_+)$ (см. [1]).

При $n \geq 2$ хорошо известно, что такие представления отсутствуют (см. [2, 3]). Здесь мы предложим другой подход для доказательства таких результатов при $n \geq 2$. Кроме того, приведем, на наш взгляд, ряд интересных приложений в теории квазианалитических классов функций.

2.Пусть $M(r) = M(r_1, \ldots, r_{j-1}, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ положительная, монотонно растущая функция по каждой переменной $r_j \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq j \leq$ $\leq n$, при фиксированных $r^{'} = (r_1, \ldots, r_{j-1}, r_{j+1}, r_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+$, такая что

$\lim\limits_{|r|\to\infty} \frac{ln(r_1^2+\cdots+r_n^2)}{\ln M(r)} = 0$, $|r| = \sqrt{r_1^2+\cdots+r_n^2}$, положим

$$M_m^{(j)} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \frac{x^m}{M(r_1,\ldots,r_{j-1},x,r_{j+1},\ldots,r_n)},\ m\in\mathbb{Z}_+,\ j=1,\ldots,n,$$

$$T_j(r) = \sup_{m\geq 1} \frac{r^m}{M_m(j)}. \tag{2}$$

Пусть далее $\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ — класс функций $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, для которых интеграл типа Коши тождественно равен нулю на множестве $\mathbb{C}_n\backslash\{\mathbb{C}_+^n \bigcup \mathbb{C}_-^n\}$

Теорема 1. *Пусть $f\in N(\mathbb{C}_+^n)$, при этом граничные значения f на $\mathbb{R}_+^n$ принадлежат классу $\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$,*

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{ln|f(iy)|}{|y|} \leq 0. \tag{3}$$

Пусть далее преобразование Фурье функции f удовлетворяет оценке

$$|\hat{f}(-x)| \leq \frac{1}{M(x)}, \quad x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n. \tag{4}$$

Тогда если

$$\int\limits_1^\infty \frac{T_j(r)}{r^{\frac{3}{2}}}dr = +\infty, \quad 1\leq j\leq n, \tag{5}$$

то $\hat{f}(x)=0$, при всех $x\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{R}_+^n$, при этом функция f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}_+^n)$.

Обратно, если $M(x_1,\ldots,x_n) = e\left(\sum\limits_{j=1}^n P_j(x_j)\right)$, $\frac{P_j'(t)t}{P_j(t)} \uparrow +\infty (t\to+\infty)$, $j=1,\ldots,n$ и хотя бы один из интегралов в (5) сходится, то можно построить функцию $f\in N(\mathbb{C}_+^n)\bigcap \mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\hat{f}$ удовлетворяет оценке (4) в тоже время $\hat{f}\neq 0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $f\notin H^1(\mathbb{C}_+^n)$.

Пример функции f_a показывает, что существуют функции $g\in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^n\bigcap N(\mathbb{C}_+^n)\bigcap L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{\partial^k g(x)}{\partial x^k} = 0$, $\forall\ k=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, такие что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x+iy)|dx \geq c_0\exp(a\cdot y)$, $a=(a_1,\ldots,_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)\in$ $\in\mathbb{R}^n$, $c_0>0$.

Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $M=\{M_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел*

$$C^\infty(M) = \{g\in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |\frac{\partial^{|k|}g(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}}| \leq A^{|k|}M_{|k|}, \tag{6}$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$, $f \in N(\mathbb{C}^n_+) \bigcap \mathbb{R}P(\mathbb{R}^n) \bigcap C^\infty(M)$. Тогда если выполняются условия (3) и (5), где T — построенная функция Карлемана – Островского по последовательности M, то $f \in H_1(\mathbb{C}^n_+)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$ при всех $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Обратно, если интеграл (5) сходится или не выполняется условие (3), то можно построить функцию f, удовлетворяющую условию (6), но $f \notin H^1(\mathbb{C}^n_+)$

Следующее утверждение при $n = 1$, уточняет классическую теорему Р. Салинаса (см. [6]).

Теорема 3. *Пусть $g \in C^\infty(M)$,при этом существует функция $f \in N(\mathbb{C}^n_+) \bigcap \mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяющая условию (3), такая что $\lim\limits_{|y| \to 0} f(x+iy) = g(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$. Пусть далее $T(r) = \sup\limits_{k \ge 1} \frac{r_k}{M_k}$, $r \in \mathbb{R}_+$, если*

$$\int\limits_1^\infty \frac{T(r)}{r^{\frac{3}{2}}} dr = +\infty, \tag{7}$$

и при некотором $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial^{|k|} g(x_0)}{\partial x^k} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{8}$$

тогда $g(x) = 0$, при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Обратно, если интеграл (7) сходится, то можно построить функцию $g \in C^\infty_A(M) = C^\infty(\mathbb{C}^n_+ \bigcup \mathbb{C}^n_-) \bigcap H(\mathbb{C}^n_+)$ такую, что выполняется условие (8), но g тождественно отлична от нуля на $\mathbb{R}^n$, где $H(\mathbb{C}^n_+)$ — множество всех аналитических функций в $\mathbb{C}^n_+$.

Замечание. Пример функции $f(z_1, z_2) = \dfrac{\varphi(z_1)}{(i+z_1)^2(i+z_2)^2 S(z)}$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2_+$, где $\varphi \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, S — произвольная внутренняя функция в $\mathbb{C}_+$, показывает, что принадлежность граничных значений функции f классу $\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ в известном смысле является необходимым для справедливости утверждений теорем 1–3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. М. : Мир, 1984.

2. *Рудин У.* Теория функций в полукруге. М. : Мир, 1974.

3. *Александров А. Б.* Теория функций в шаре // Итоги наук и техники, Современные проблемы математики, фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ, 1985. Т. 8. С. 115–190.

4. *Aleksandrov A. B.* // Lecture Notes in Math. 1981. Vol. 864. P. 1–90.

5. *Шамоян Ф. А.* // Алгебра и анализ. 2008. Vol. 20, iss. 4. P. 218–240.

6. *Salinas R. B.* // Rev. Acad. Ciencias. Madrid, 1955. Vol. 49. P. 331–368.