Теорема. *Пусть $f(\mathbf{x}) \in C^4(\overline{T})$, тогда для любой точки $\mathbf{x} \in \overline{T}$*

$$\left|\frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}^i \partial \mathbf{e}_{nl}^j \partial \mathbf{e}_{ns}^{r-i-k}}\right| \le 16 c_n M_4 d^{4-r}, \quad 1 \le r \le 3, \quad 0 \le i,j \le r, \quad i+j \le r. \tag{1}$$

Предложение. 1. *В любом тетраэдре можно найти вершину, из которой выходят по крайней мере два ребра, больших $\dfrac{d}{2}$, и в любом 4-симплексе есть вершина, из которой исходят по крайней мере три ребра, больших $\dfrac{d}{2}$.*

2. *Для любого натурального $n \ge 5$ и для всякого $c > 0$ существует такой n-симплекс, из всех вершин которого выходят по крайней мере два ребра, длина которых не больше, чем $\dfrac{d}{c}$.*

Следствие. *В случаях размерностей $n = 3$ и $n = 4$ в неравенствах (1) можно избавиться от параметра c_n и получить следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}^i \partial \mathbf{e}_{nl}^j \partial \mathbf{e}_{ns}^{r-i-k}}\right| \le 32 M_4 d^{4-r}, \quad 1 \le r \le 3, \quad 0 \le i,j \le r, \quad i+j \le r.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куприянова Ю. В.* Об одной теореме из теории сплайнов // Журн. вычисл. матем. и матем. физи. 2008. Т. 48. С. 206–211.

2. *Куприянова Ю. В.* Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы конф. Воронеж, 2007. С. 120–121.

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Г. В. Хромова (Саратов, Россия)
khromovagv@info.sgu.ru

Рассматривается уравнение

$$Au \equiv \int_0^x \left[\frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{(x-t)^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\right] u(t)dt = f(x), \tag{1}$$

где $\Gamma(*)$ — гамма-функция, $0 < \beta < 1$, $u(x) \in C[0,1]$, а функция $f(x)$ задана ее δ-приближением $f_\delta(x) : \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$.

Решается задача нахождения равномерных приближений к $u(x)$ по заданным $f_\delta(x)$ и δ.

Используется метод регуляризации [1], в котором регуляризирующие операторы R_α имеют вид: $R_\alpha = T_\alpha A^{-1}$, где применительно к нашей задаче T_α — любое семейство операторов, дающее равномерные приближения к непрерывным функциям, A^{-1} — оператор, обратный к A. В [2] этот метод был реализован для классического уравнения Абеля, при этом в качестве операторов T_α использовались разрывные операторы Стеклова

$$S_\alpha u = \begin{cases} S_{\alpha 2} u, & x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1} u, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \tag{2}$$

где $S_{\alpha 1} u = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x} u(t)dt$, $S_{\alpha 2} u = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x}^{x+\alpha} u(t)dt$.

В данном сообщении сначала находится вид оператора A^{-1}, а затем строится метод регуляризации по аналогии с [2]

Теорема 1. *Обратный оператор A^{-1} имеет вид:*

$$A^{-1} f = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t)\, dt + \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t)\, dt +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\beta) \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t)\, dt,$$

где $C_n(\beta) = [(1-\beta)(2-\beta)\dots(n-\beta)]^{-1}$.

Построим регуляризирующее семейство операторов для нахождения приближенного решения уравнения (1) по формуле $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$.

Согласно (2) операторы R_α имеют вид

$$R_\alpha f = \begin{cases} R_{\alpha 2} f = S_{\alpha 2} A^{-1} f, & x \in [0, 1/2], \\ R_{\alpha 1} f = S_{\alpha 1} A^{-1} f, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 2. *Каждый из операторов R_α в* (3) *является интегральным оператором с ядром, имеющим вид:*

$$R_\alpha(x,t) = (\alpha \Gamma(1-\beta))^{-1} \begin{cases} R_{\alpha 2}(x,t), & x \in [0, 1/2], \\ R_{\alpha 1}(x,t), & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где

$$R_{\alpha 2}(x,t)=\begin{cases}(x-t+\alpha)^{-\beta}-(x-t)^{-\beta}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{n+1}(\beta)\big[(x-t+\alpha)^{n+1-\beta}-\\ -(x-t)^{n+1-\beta}\big],\quad 0\le t\le x,\\ (x-t+\alpha)^{-\beta}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{n+1}(\beta)(x-t+\alpha)^{n+1-\beta},\quad x\le t\le x+\alpha\\ 0,\quad x+\alpha<t\le 1\end{cases} \tag{4}$$

$R_{\alpha 1}(x,t)$ *получается из* (4) *заменой* x *на* $x-\alpha$.

Теорема 3. *При* $0<\beta<\frac{1}{2}$ *операторы* R_α *являются регуляризирующими для уравнения* (1) *и для их норм выполняется двусторонняя оценка*

$$C_1^0\alpha^{-(\frac{1}{2}+\beta)}-\psi(\alpha)\le\|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty}\le\sqrt{2}C_1^0\alpha^{-(\frac{1}{2}+\beta)}+\psi(\alpha),$$

где $C_1^0=(1-2\beta)^{\frac{1}{2}}[\Gamma(1-\beta)]^{-1}$, $\psi(\alpha)=C_1^0C_1\alpha^{-\frac{1}{2}+\beta}+O(\alpha^{\frac{1}{2}-\beta})$, $C_1=$ $=(1-\beta)^{-2}[I_0(2)-1+2(e-1)^2]$, I_0 — *цилиндрическая функция.*

Перейдем к вопросу о сходимости $\|R_\alpha f_\delta-u\|_{L_\infty}\to 0$ при $\alpha\to 0$, $\delta\to 0$.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta,R_\alpha,u)=\sup\left\{\|R_\alpha f_\delta-u\|_{L_\infty}:\|f_\delta-f\|_{L_2}\le\delta\right\}.$$

На основании аналога теоремы 1 из [3], теоремы 3 и того, что

$$\|R_\alpha f-u\|_{L_\infty}=\|S_\alpha u-u\|_{L_\infty},$$

справедлива

Теорема 4. *Для сходимости* $\Delta(\delta,R_\alpha,u)\to 0$ *при* $0<\beta<1/2$ *и* $\alpha\to 0$, $\delta\to 0$ *необходимо и достаточно выполнение согласования* $\alpha=$ $=\alpha(\delta)$, *удовлетворяющего условиям:* $\alpha(\delta)\to 0$ *и* $\delta(\alpha(\delta))^{-(1/2+\beta)}\to 0$ *при* $\delta\to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромова Г. В.* Об одном способе построения методов регуляризации уравнений I рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 997–1002.

2. *Хромова Г. В.* Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 597–601.

3. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.