УДК 517.518

ОПЕРАТОРЫ НА ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ И СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ [1]

Д. В. Фуфаев (Москва, Россия)
fufaevdv@rambler.ru

Классическая теорема Лебега гласит, что производная неопределенного интеграла суммируемой на отрезке функции почти всюду существует и совпадает с исходной функцией. В терминах теории меры эту теорему можно свести к следующему результату.

Пусть (X, μ) — пространство с мерой, а оператор T действует из $L^0(X, \mu)$ в $L^0(X, \mu)$. Назовем T выпуклым, если из существования Tf_1 и Tf_2 следует существование $T(f_1 + f_2)$ и при этом $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq$ $\leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$. Будем говорить, что выпуклый оператор T имеет слабый тип $(1, 1)$ с константой C, если для любого $\lambda > 0$ и для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выполняется следующее неравенство:

$$\mu\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}||f||_{L^1(X,\mu)}.$$

Пусть $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность линейных операторов, переводящих $L^0(X, \mu)$ в себя. Максимальным оператором относительного данного семейства операторов называется оператор $T : f(x) \mapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |T_n f(x)|$. Оператор T оказывается выпуклым.

Теорема 1. *Пусть (X, μ) — пространство конечной меры, последовательность непрерывных линейных операторов $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что соответствующий максимальный оператор T имеет слабый тип $(1, 1)$, и пусть для любой функции ϕ из всюду плотного в $L^1(X, \mu)$ множества выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} T_n\phi(x) = \phi(x)$ μ-почти всюду . Тогда для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x) = f(x)$ μ-почти всюду .*

При этом, теорема Лебега остается верной, если рассматривать локально интегрируемые функции на всей прямой. Теорема 1 теперь оказывается бесполезной — действительная прямая не является пространством конечной меры, и при этом отсутствует понятие локальной интегрируемости для случая абстрактных пространств с мерой. В этой ситуации, одним из вариантов адаптации теоремы Лебега может быть следующий подход.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).

Пространство с мерой (X,μ) назовем разложимым ([1, 211E]), если $X=\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $\mu(X_\lambda)<\infty$. При этом множество $E\subset X$ измеримо тогда и только тогда, когда измеримо каждое $E\bigcap X_\lambda$, множество имеет меру ноль тогда и только тогда, когда его пересечение с каждым X_λ имеет меру ноль, и выполнено равенство $\mu(E)=\sum\limits_{\lambda}\mu(E\bigcap X_\lambda)$. Само разложение будем обозначать как $\widetilde{\Lambda}$. Если $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ — конечный набор элементов Λ, то через $X_{\lambda_1,\dots,\lambda_r}$ будем обозначать множество $\bigsqcup\limits_{j=1}^{r} X_{\lambda_j}$.

Измеримую функцию f на разложимом пространстве X будем называть локально интегрируемой относительно разложения $\widetilde{\Lambda}$, если для любого $\lambda\in\Lambda$ выполнено $||f||_\lambda=||f||_{L^1(X_\lambda)}=\int\limits_{X_\lambda}|f(x)|d\mu(x)<\infty$. Это понятие зависит от выбора разложения, так, в случае функции $1/x$ на интервале $(0,1)$ со стандартной мерой Лебега можно выбрать два разложения так, что относительно одного эта функция будет локально интегрируемой, относительно другого — нет. Пространство локально интегрируемых относительно разложения $\widetilde{\Lambda}$ функций на X будем обозначать $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$ или $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X)$. Функции $||\cdot||_\lambda$ задают на этом пространстве систему полунорм, определяющих топологию пространства. Функцию $f\in L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X)$ можно представить в виде суммы $f(x)=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}f(x)|_{X_\lambda}$, которая для каждого $x\in X$ конечна. Отсюда, пространство $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X)$ представляется в виде прямого произведения $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}L^1(X_\lambda)$, причем введенная топология совпадает с тихоновской топологией на произведении.

Для локально интегрируемых функций следует обобщить понятие операторов слабого типа, а именно, будем говорить, что выпуклый оператор $T:L^0(X,\mu)\to L^0(X,\mu)$ имеет $\widetilde{\Lambda}$-локально слабый тип $(1,1)$, если для любых $\lambda\in\Lambda$, $t>0$ и для любой функции $f\in L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$ найдутся такое число C_λ и конечный набор индексов $\lambda_1,\dots,\lambda_{r(\lambda)}$, что справедливо следующее неравенство:

$$\mu\{x\in X_\lambda:|Tf(x)|>t\}\le\frac{C_\lambda}{t}||f||_{L^1(X_{\lambda_1,\dots,\lambda_{r(\lambda)}},\mu)}.$$

Теорема 2. *Пусть (X,μ) — разложимое пространство с выбранным разложением $\widetilde{\Lambda}$, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность непрерывных линейных операторов, действующих из $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$ в $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$, такая, что максимальный оператор T имеет $\widetilde{\Lambda}$-локально слабый тип $(1,1)$ и, кроме того, для любой функции ϕ из всюду плотного в $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$ множества выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}T_n\phi(x)=\phi(x)$ $\mu-$почти всюду.*

Тогда для любой $f \in L^1_{\tilde{\Lambda}-loc}(X)$ *выполнено* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x) = f(x)$ $\mu-$ *почти всюду.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fremlin D. H.* Measure theory. Vol. 2. Colchester :Torres Fremlin, 2001. 563 p.

УДК 517.518.66

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМИ ПРОПУСКАМИ

Ю. Х. Хасанов, Ф. М. Талбаков (Душанбе, Таджикистан)

yukhas60@mail.ru

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$ периодическая функция и имеет ряда Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos ntdt, \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin ntdt.$$

Определение. *Ряд Фурье функции* $f(x)$ *имеет пропуски, если* $a_n^2 + b_n^2 > 0$ *только для* $n = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *где* $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ *натуральные числа.*

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция или функция с ограниченным изменением на отрезке $[-\pi,\pi]$, где $0 < \eta < \pi$, а последовательность n_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию малых пропусков, т.е.

$$n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta}. \tag{2}$$

М. Нобль [1] показал, что если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\omega(\frac{1}{n}, f)} < \infty,$$

и, кроме того, если при $k \to \infty$, выполняется соотношения

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{\log n_k} \to \infty,$$