Применяя интерполяционную теорему типа Марцинкеевича с параметром $\gamma = \frac{2-p}{p}$ и с учетом результата S. Herz из[4] получим

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p n^{p-2}\right\}^{\frac{1}{p}} = \|Tf\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\alpha}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 при $\alpha = -\frac{1}{2}$ сводиться к теореме Харди–Литтлвуда [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 6:2, вып. 1. С. 102–143.
2. *Платонов С. С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
3. *Зигмунд. А.* Тригонометрические ряды. М. : Мир, 1965. 569 с.
4. *Carl S. Herz* On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms // Proc. Nat. Acad. Sci USA. 1954. Vol. 40, № 10. P. 969–999.

УДК 517.9

ВЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

И. В. Тихонов (Москва, Россия)

ivtikh@mail.ru

Давно известно (см. [1]), что задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

имеет нетривиальные решения $u(x,t) \not\equiv 0$ из класса $C^\infty(\mathbb{R} \times [0,1])$. Соответствующий пример можно получить в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{(k)}(t)\, \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \tag{2}$$

при подходящем выборе неквазианалитической функции $\gamma(t) \not\equiv 0$ в пространстве $C^\infty[0,1]$. Более того, общая теория (см. [2, с. 32]) гарантирует существование нужных функций со свойствами

$$\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(1) = 0, \qquad |\gamma^{(k)}(t)| \leqslant Mq^k\,(k!)^p, \qquad 0 < t < 1, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

при всех $k = \mathbb{N} \cup \{0\}$ со значениями $M > 0$, $q > 0$ и $p \in (1, 2)$. Нетрудно видеть, что (3) обеспечивает сходимость ряда (2) и выполнение условий

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \\ u(x,0) = 0, & u(x,1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

еще более специфичных, чем (1). Система (4) представляет интерес для теории обратных задач (см. [3]). Другие применения похожих конструкций к обратным задачам для эволюционных уравнений указаны в [4, 5].

Возникает естественный вопрос: можно ли наглядно «увидеть» нетривиальные решения задач типа (1) и (4), или же существование таких решений надо принять лишь умозрительно?

Теоретические соображения показывают, что соответствующие функции $u(x,t)$ должны обладать исключительным ростом при $|x| \to +\infty$ в полосе $\mathbb{R} \times [0,1]$ в том смысле, что ни оценка сверху

$$u(x,t) \leqslant C \exp\left(\sigma |x|^2\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \tag{5}$$

ни оценка снизу

$$u(x,t) \geqslant -C \exp\left(\sigma |x|^2\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \tag{6}$$

не могут быть выполненными ни с какими константами $C > 0$ и $\sigma > 0$. Точнее, из выполнения любой оценки (5) или (6) для классического решения задачи (1) следует, что $u(x,t) \equiv 0$ всюду в полосе $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Несмотря на отмеченный феноменальный рост, современные системы компьютерной математики позволяют проводить (хотя и достаточно условное) построение искомых решений. Так, для получения нетривиального решения задачи Коши (1) можно взять функцию $\gamma(t) = \exp(-1/t^2)$, обеспечивающую должную сходимость ряда (2). Результат удается вычислить на множестве $|x| \leqslant R$, $\varepsilon \leqslant t \leqslant 1$ при не слишком больших значениях $R > 0$ и существенно отделенных от нуля значениях $\varepsilon \in (0,1)$. Возникающее решение $u(x,t)$ обладает интересными геометрическими особенностями, некоторые из которых еще ждут своего теоретического объяснения. Особенно трудны для обработки малые значения $t_0 > 0$, когда проявляется истинный «взрывной» характер решения — ведь в простой линейной задаче (1) из начального состояния $u(x,0) \equiv 0$ возникает ненулевое состояние $u(x,t_0)$ сверхэкспоненциального роста.

Конструкция подобных «взрывных» решений допускает перенос на общее эволюционное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{7}$$

взятое в пространстве Фреше. Надо только, чтобы линейный замкнутый оператор A в уравнении (7) обладал собственным значением $\lambda = 0$ с бесконечной цепочкой присоединенных векторов. Эти присоединенные векторы должны достаточно быстро стремиться к нулю по мере возрастания номера в цепочке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Матем. сб. 1935. Т. 42. № 2. С. 199–216.

2. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М. : Мир, 1986. 464 с.

3. *Тихонов И. В., Гаврисъ Ю. В., Аджиева Т. З.* Структура решений модельной обратной задачи теплопроводности в классах функций экспоненциального роста // Челябинский физ.-матем. журн. 2016. Т. 1. Вып. 3. С. 38–63.

4. *Тихонов И. В.* Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения // Интегр. преобр. и спец. функции. Информ. бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 119–128.

5. *Тихонов И. В., Эйдельъман Ю. С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 2. С. 273–290.

УДК 517

РЕЗУЛЬТАТЫ КАЗАХСТАНСКОЙ ПОДШКОЛЫ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ П. Л. УЛЬЯНОВА[1]

Н. Темиргалиев (Астана, Казахстан)
ntmath10@mail.ru

Казахстанская подшкола научной школы П. Л. Ульянова в составе Мирбулат Сихов, Алшынбаева Есентай, Жайнибекова Мехрибану, Кудайбергенов Сабит, Айдосов Еркара, Баилов Едил, Шерниязов Кайрат, Ажгалиев Орынбасар, Ажгалиев Шапен, Утесов Адилжан, Ковалева Ирина, Шангереев Ержан, Ташатов Нурлан, Альжанова Нуржан, Сарсекеев Абдрахман, Берикханова Маржан, Нурмолдин Ерик, Абикенова Шолпан, Шоманова Анар, Ибатуллин Ибрагим, Сулейменов Кенесары, Наурызбаев Нурлан, Таугынбаева Галия, Жубанышева Аксауле ведет исследования по следующим темам и направлениям:

1. Компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П) как синтез известного и нового в численном анализе, который, согласно К. Флетчеру, «включает в себя в качестве составных частей формулировку задачи, математический анализ, построение алгоритма и доведение компьютерной программы до того, чтобы она давала результаты»;

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).