Для рядов по системе Уолша в аналогичном случае получается совсем другой результат, а именно, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда найдется функция ограниченной вариации, для которой существенная верхняя грань величины*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x) \Big|$$

равна бесконечности.

Для каждой последовательности эта верхняя грань достигается на характеристической функции некоторого отрезка $[0,\xi]$, зависящего от последовательности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Telyakovskii S. A.* Some properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10, № 1–2. P. 215–218.
2. *Trigub R. M.* A note on the paper of Telyakovski “Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation” // East J. Approx. 2007. Vol. 13, № 1. P. 1–6.
3. *Белов А. С., Теляковский С. А.* Усиление теорем Дирихле–Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Матем. сб. 2007 Т. 198, № 6. С. 25–40.
4. *Теляковский С. А.* Некоторые свойства рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 168–174.
5. *Малыхин Ю. В., Теляковский С. А., Холщевникова Н. Н.* Интегрируемость суммы модулей блоков рядов Фурье-Уолша функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. С. 323–334.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

Т. Е. Тилеубаев (Астана, Казахстан)
Tileubaev@mail.ru

Пусть $1 \le p \le \infty, \alpha > -\frac{1}{2}$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $[0,\infty)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^{\infty} |f|^p x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(x)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $[0,\infty)$.

Норма в пространстве определяется

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{x\in[0,\infty)} |f|.$$

Рассмотрим в пространстве $L_{p,\alpha}(1 \le p \le \infty)$ оператор обобщенного сдвига [1] функции $f(x)$

$$T^h f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})$$

$$\int_0^\pi f(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos\varphi})(\sin\varphi)^{2\alpha}d\varphi.$$

Отметим, что некоторые свойства оператора $T^h : L_{p,\alpha} \to L_{p,\alpha}$ (см.[2])

$$T^h j_\alpha(\lambda x) = j_\alpha(\lambda x) j_\alpha(\lambda h),$$

$$j_\alpha(u) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{u^\alpha} J_\alpha(u),$$

где $J_\alpha(u)$ — функция Бесселя первого рода порядка α,

$$\left\|T^h(f)\right\|_{p,\alpha} \le C\|f\|_{p,\alpha}, 1 \le p \le \infty$$

$$\int_0^\infty T^h f(x) g(x) x^{2\alpha+1} dx = \int_0^\infty f(x) T^h g(x) x^{2\alpha+1} dx.$$

Известно [4] если $\frac{4(\alpha+1)}{2(\alpha+3)} < p < \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}$, то

$$\|f - S_n f\|_{p,\alpha} \to 0, n \to \infty, f \in L_{p,\alpha}.$$

Теорема 1. *1. Пусть $f \in L_{p,\alpha}, 1 < p \le 2, \alpha > -\frac{1}{2}$. Если $\hat{f}(k)$ — коэффициенты Фурье –Бесселя для f по системе $(j_\alpha(\lambda_k x))$, то*

$$\left\{\sum_{k=1}^\infty |\hat{f}(k)|^p k^{p-2}\right\}^{\frac{1}{p}} \le C_p M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_{p,\alpha}.$$

2. Пусть (c_k) последовательность для которой $\left(\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1} > q \ge 2\right)$

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^q k^{q-2} < \infty,$$

тогда существует функция $f \in L_{q,\alpha}$ имеющая (c_k)– своими коэффициентами Фурье–Бесселя по системе $(j_\alpha(\lambda_k x))$ такая, что

$$\|f\|_{q,\nu} \le C_q M^{\frac{q-2}{q}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^q k^{q-2} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

функция $f = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$ в $L_{q,\alpha}$, где $S_n(f) = S_n(f,x) = c_1 j_\alpha(\lambda_1 x) + c_2 j_\alpha(\lambda_2 x) + \dots + c_n j_\alpha(\lambda_n x)$.

Доказательство. Пусть ν — мера равная $\frac{1}{n^2}$ для множества, состоящегося из отдельной точки $n, n = 1, 2, \dots$ и равная нулью для множеств не содержащих ни одной из этих точек.

Определим оператор $h = Tf = \{n\hat{f}(n)\}$ на всю $L_{p,\alpha}$, $1 < p < 2$, $\alpha > -\frac{1}{2}$ с нормой

$$\|h\|_{p,\nu} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |n\hat{f}(n)|^p n^{-2} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Из неравенства Бесселя

$$\|Tf\|_{2,\nu}^2 = (\frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)})^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \le \int_0^\infty |f(x)|^2 x^{2\alpha+1} dx$$

следует, что оператор T имеет сильный тип $(2,2)$, а значить имеет слабый тип $(2,2)$.

Покажем, что оператор T имеет тип $(1,1)$, а точнее покажем, что

$$\nu(E_y(h)) \le \frac{2M}{y} \|f\|_{1,\alpha}, \quad \nu(E_y(h)) = \sum_{n:|n\hat{f}(n)|>y} \frac{1}{n^2}.$$

Если $|n\hat{f}(n)| > y$, то учитывая следующее неравенство $|j_\alpha(\lambda_n x)| \le 1$ имеем

$$y < |n\hat{f}(n)| = n \int_0^\infty |f(x) j_\alpha(\lambda_n x)| x^{2\alpha+1} dx \le$$

$$\le n \int_0^\infty |f(x)| x^{2\alpha+1} dx = n \|f\|_{1,\alpha},$$

откуда $n > \frac{y}{\|f\|_{1,\alpha}}$. Поэтому

$$\nu(E_y(h)) = \sum_{n:|n\hat{f}(n)|>y} \frac{1}{n^2} \le \frac{2y}{\|f\|_{1,\alpha}}$$

и нам нужное неравенство установлено.

Применяя интерполяционную теорему типа Марцинкеевича с параметром $\gamma = \frac{2-p}{p}$ и с учетом результата S. Herz из[4] получим

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p n^{p-2}\right\}^{\frac{1}{p}} = \|Tf\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\alpha}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 при $\alpha = -\frac{1}{2}$ сводиться к теореме Харди–Литтлвуда [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 6:2, вып. 1. С. 102–143.
2. *Платонов С. С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
3. *Зигмунд. А.* Тригонометрические ряды. М. : Мир, 1965. 569 с.
4. *Carl S. Herz* On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms // Proc. Nat. Acad. Sci USA. 1954. Vol. 40, № 10. P. 969–999.

УДК 517.9

ВЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

И. В. Тихонов (Москва, Россия)

ivtikh@mail.ru

Давно известно (см. [1]), что задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

имеет нетривиальные решения $u(x,t) \not\equiv 0$ из класса $C^\infty(\mathbb{R} \times [0,1])$. Соответствующий пример можно получить в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{(k)}(t)\, \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \tag{2}$$

при подходящем выборе неквазианалитической функции $\gamma(t) \not\equiv 0$ в пространстве $C^\infty[0,1]$. Более того, общая теория (см. [2, с. 32]) гарантирует существование нужных функций со свойствами

$$\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(1) = 0, \qquad |\gamma^{(k)}(t)| \leqslant Mq^k\,(k!)^p, \qquad 0 < t < 1, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).