6. *Пыхтеев Г. Н.* О квадратурных формулах для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру и методах оценки их погрешности // ИАН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1969. № 5. С. 55-63.

7. *Пыхтеев Г. Н., Шешко М. А.* Приближенное вычисление интеграла Шварца и интеграла Гильберта при помощи полилогарифмов // ИАН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1973. № 2. С. 11–22.

УДК 517.9

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СВОЙСТВА ЯДРА СЕГЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ[1]

К. С. Сперанский, П. А. Терехин (Саратов, Россия)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ состоит из всех аналитических функций $f(z)$, $z \in \mathbb{D} = (|z| < 1)$, для которых конечна норма

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Известно, что пространство H^2 является функциональным гильбертовым пространством и имеет воспроизводящее ядро, которое называется ядром Сеге

$$f(\zeta) = (f, K_\zeta), \qquad K_\zeta(z) = \frac{1}{1 - \bar{\zeta} z}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Рассмотрим вопрос: возможно ли представление произвольной функции $f \in H^2$ в виде ряда по элементам системы $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^\infty$ с коэффициентами $\{x_n\}_{n=1}^\infty$

$$f = \sum_{n=1}^\infty x_n K_{\zeta_n}$$

при выполнении некоторых условий на последовательность попарно различных точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$.

Прежде всего, необходимым условием существования представления является отрицание условия Бляшке, т.е. условие

$$\sum_{n=1}^\infty (1 - |\zeta_n|) = \infty,$$

так как оно равносильно полноте в H^2 системы $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^\infty$ (см., напр., [1]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Зададим последовательность точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ специального вида, а именно, разбитую на блоки

$$\zeta_n = \zeta_{k,j} = r_k e^{2\pi i j/N_k}, \qquad j = 0, \ldots, N_k - 1, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Далее предполагаем, что последовательность «радиусов» $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < r_{k+1} < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1 \tag{2}$$

и $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что

$$\frac{a}{N_k} \le 1 - r_k \le \frac{b}{N_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

для некоторых постоянных $0 < a \le b < \infty$.

Теорема 1. *Пусть последовательность точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ вида* (1) *удовлетворяет условиям* (2) *и* (3). *Тогда система $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм в пространстве H^2 относительно модельного пространства $\ell^{1,2}$, состоящего из всех последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{k,j}\}_{k=1,j=0}^{\infty\ \ N_k-1}$, для которых конечна норма*

$$\|x\|_{1,2} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N_k}\sum_{j=0}^{N_k-1}|x_{k,j}|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Здесь используется следующее определение фрейма из работы [2]. Банахово пространство X, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется *модельным*, если система канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в X. Сопряженное пространство X^* к модельному пространству X изометрически изоморфно банахову пространству Y, состоящему из числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Соответствующий изоморфизм дается равенством $y_n = (e_n, x^*)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $x^* \in X^*$, причем $\|y\|_Y := \|x^*\|_{X^*}$.

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется *фреймом в F относительного модельного пространства X*, если существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$ такие, что для каждого непрерывного линейного функционала $g \in G = F^*$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{(f_n, g)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \le \|\{(f_n, g)\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \le B\|g\|_G.$$

Всякий фрейм $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в F относительно X является системой представления.

Следствие. *В предположениях теоремы* 1 *для любой функции* $f \in$ $\in H^2$ *существует числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{1,2}$ *такая, что справедливо представление* $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n K_{\zeta_n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Partington J.* Interpolation, Identification, and Sampling. Oxford :C larendon Press, 1997.

2. *Терехин П. А.* Системы представления и проекции базисов // Матем. заметки. 2004. Т. 75, № 6. С. 944–947.

3. *Сперанский К. С., Терехин П. А.* Фреймовые свойства ядра Сеге в пространстве Харди // Тр. Матем.атического центра им. Н. И. Лобачевского. 2017. Т. 54. С. 337–339.

УДК 517.987

О ПРОДОЛЖЕНИИ КОМПОЗИЦИОННОЙ СУБМЕРЫ ПО ЛЕБЕГУ

Т. А. Срибная (Самара, Россия)
sribnayata@mail.ru

При решении задачи о продолжении неаддитивной функции множества наряду с применением общего топологического принципа продолжения по непрерывности (см., например, [1, 2]), используется конструктивный подход ([3, 4]).

В предлагаемой работе для продолжения композиционной субмеры используется лебеговская конструкция продолжения меры ([5], [6]).

Пусть T — некоторое множество, Σ — некоторый непустой класс подмножеств множества T, $\varnothing \in \Sigma$, $R(\Sigma)$ — кольцо множеств, порожденное классом Σ.

Класс множеств, замкнутый относительно образования разности, будем называть m-классом.

Будем говорить, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(\varnothing) = 0$, — непрерывна в нуле (соответственно, непрерывна сверху в нуле) на Σ, если для любой последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$, сходящейся к пустому множеству (соответственно, $E_n \downarrow \varnothing$) справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = 0. \tag{1}$$

Будем говорить, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(\varnothing) = 0$, — исчерпывающая на Σ, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение (1).

Пусть $\mathcal{F} = \{f\}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(0) = 0$, — множество непрерывных, строго возрастающих функций, удовлетворяющих условию $f(x) \geq x$, $x \in \mathbb{R}^+$.