3. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Курс высшей математики и математической физики. Кратные интегралы и ряды. М. : Наука, 1965. 608 с.

4. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 171. С. 3–122.

УДК 517.518.87

К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю. С. Солиев (Москва, Россия)
su1951@mail.ru

Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов рассматривалась в работах И. В. Бойкова, Б. Г. Габдулхаева, И. К. Лифанова, А. М. Линькова и их последователей. Некоторый обзор работ по этой тематике содержится в работе [1]. Из зарубежных работ отметим работу [2], где построены квадратурные формулы типа Гаусса для гиперсингулярного интеграла с весовой функцией.

Ниже рассматривается приближенное вычисление гиперсингулярного интеграла [3, 4]

$$Af = A(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2}dt, x \in (-\infty;+\infty), \tag{1}$$

понимаемого в смысле конечной части по Коши – Адамару, где $f(x)$ — плотность интеграла.

Будем придерживаться обозначений классов функций как в работах [5–7].

Пусть $L_nf = L_n(f;x)$ — дробно-рациональная функция, интерполирующая $f(x)$ по узлам

$$x_k = \mathrm{tg}(k\pi/N), \quad k = \overline{-[(N-1)/2], n}, \quad n = [N/2], \tag{2}$$

где $[\xi]$ — целая часть числа ξ.

Аппроксимируя плотность интеграла (1) выражением L_nf получим квадратурную формулу

$$Af = A(L_nf;x) + R_nf = \frac{1}{N}\sum_{k=-[(N-1)/2]}^{n} a_k^{(n)}(x)f(x_k) + R_nf, \tag{3}$$

где

$$a_k^{(n)}(x)=\begin{cases}-\frac{2}{p(x)}\sum\limits_{v=1}^{n}v(C_v(x)C_v(x_k)+S_v(x)S_v(x_k)), \quad N=2n+1;\\ -\frac{2}{p(x)}\sum\limits_{v=1}^{n-1}v(C_v(x)C_v(x_k)+S_v(x)S_v(x_k))-\frac{n}{p(x)}C_n(x)C_n(x_k),\ N=2n,\end{cases}$$

а $R_nf=R_n(f;x)$ — остаточный член.

Теорема 1. *Если* $f(x)\in H_{\beta,p}^{(r)}(A)$, $0<\beta\le 1$, $r\ge 1$, *то для остаточного члена квадратурной формулы* (3) *справедлива оценка*

$$\|R_nf\|_C=O(n^{-r-\beta+1}\ln n),\quad r+\beta>1.$$

Если же $f(x)\in W_p^{(r)}(M)$, $r>1$, *то* $\|R_nf\|_C=O(n^{-r+1}\ln n)$, $r>1$. *Пусть* $P_nf=P_n(f;x)$ *— дробно-рациональная функция, интерполирующая* $f(x)\in W_m,\ p^{(r)}\ \ (M,\delta,-\infty,+\infty)$, $r>1$, *по узлам* (2).

Теорема 2. *Если* $f(x)\in W_{m,p}^{(r)}\ \ (M,\delta,-\infty,+\infty)$, $r>1$, *то справедлива оценка*

$$\|R_nf\|_C=\|A(f-P_nf)\|_C=O(n^{-r+1}\ln n),\quad r>1.$$

Пусть $H_nf=H_n(f;x)$ — дробно-рациональная функция, интерполирующая $f(x)$ по узлам (2) в том смысле, что $H_n(f;x_k)=f(x_k)$, $H_n'(f;x_k)=f'(x_k)$.

Теорема 3. *Если* $f(x)\in H_{\beta,p}^{(r)}(A)$, $0<\beta\le 1$, $r\ge 1$, *то справедлива оценка*

$$\|R_nf\|_C=\|A(f-H_nf)\|_C=O(n^{-r-\beta+2}\ln n), r+\beta>2.$$

Если же $f(x)\in W_p^{(r)}(M), r>1$, *то* $||R_nf||_C=||A(f-H_nf)||_C=O(n^{-r+2}\ln n)$, $r>2$.

Приводятся явные виды интерполяционных и квадратурных формул.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойков И. В.* Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов : монография в 2 ч. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы. Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. 252 с.

2. *Tsamasphyros G., Dimou G.* Gauss quadrature rules for finite part integrals // Int. Journal for numerical methods in engineering. 1990. Vol. 30. P. 13–26.

3. *Анфиногенов А. Ю., Лифанов И. К., Лифанов П. И.* О некоторых гиперсингулярных одномерных и двумерных интегральных уравнениях // Матем. сб., 2001, т.192, № 8, с.3–46.

4. *Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М. : Янус-К, 2001. 508 с.

5. *Онегов Л. А.* Дробно-рациональная аппроксимация сингулярных интегралов по действительной оси // Изв. вузов. Матем. 1976. № 3. С. 43–55.

6. *Пыхтеев Г. Н.* О квадратурных формулах для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру и методах оценки их погрешности // ИАН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1969. № 5. С. 55-63.

7. *Пыхтеев Г. Н., Шешко М. А.* Приближенное вычисление интеграла Шварца и интеграла Гильберта при помощи полилогарифмов // ИАН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1973. № 2. С. 11–22.

УДК 517.9

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СВОЙСТВА ЯДРА СЕГЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ[1]

К. С. Сперанский, П. А. Терехин (Саратов, Россия)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ состоит из всех аналитических функций $f(z)$, $z \in \mathbb{D} = (|z| < 1)$, для которых конечна норма

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Известно, что пространство H^2 является функциональным гильбертовым пространством и имеет воспроизводящее ядро, которое называется ядром Сеге

$$f(\zeta) = (f, K_\zeta), \qquad K_\zeta(z) = \frac{1}{1 - \bar{\zeta} z}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Рассмотрим вопрос: возможно ли представление произвольной функции $f \in H^2$ в виде ряда по элементам системы $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^\infty$ с коэффициентами $\{x_n\}_{n=1}^\infty$

$$f = \sum_{n=1}^\infty x_n K_{\zeta_n}$$

при выполнении некоторых условий на последовательность попарно различных точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$.

Прежде всего, необходимым условием существования представления является отрицание условия Бляшке, т.е. условие

$$\sum_{n=1}^\infty (1 - |\zeta_n|) = \infty,$$

так как оно равносильно полноте в H^2 системы $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^\infty$ (см., напр., [1]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).