УДК 517.5

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L^p И C

А. М. Седлецкий (Москва, Россия)
sedlet@mail.ru

Пусть $B = B[-\pi, \pi]$ — какое-нибудь из пространств $L^p(-\pi, \pi)$, $1 \leq$ $\leq p < \infty, p \neq 2, C[-\pi, \pi]$, пусть $B_a = B[-a+\pi, a+\pi]$, $a \in \mathbb{R}$. Получен ряд условий (как необходимых, так и достаточных) для того, чтобы «возмущённая тригонометрическая система» $e^{i(n+\alpha_n)t}$, $n \in \mathbb{Z}$ была эквивалентна тригонометрической системе e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$ в B_a при любом $a \in \mathbb{R}$. Вот один из результатов. Если $(\alpha_n) \in l^s$, где $1/s = |1/p - 1/2|$, то указанная эквивалентность имеет место, причём показатель s является точным. С использованием (в том числе) его доказано существование в $L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < 2$ базисов из экспонент, не являющихся эквивалентными тригонометрическому базису.

Доказательства основаны на применении мультипликаторов Фурье.

УДК 517.5

СВОЙСТВА ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО СИНУСАМ И КОСИНУСАМ[1]

Б. В. Симонов, И. Э. Симонова (Волгоград, Россия)
simonov-b2002@yandex.ru, simonova-vstu@mail.ru

В данной работе исследованы суммы двойных тригонометрических рядов по синусам и косинусам с кратно монотонными коэффициентами по подпоследовательностям.

Будем рассматривать двойные тригонометрические ряды вида

$$\frac{1}{2}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1,0} \sin n_1 x_1 + \sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2. \quad (1)$$

Пусть $r_1 \in N$, $r_2 \in N$, $j_1 = 1, 2$, $j_2 = 1, 2$, $[a]$ — целая часть числа a, $k_1 = 0, 1, ..., [\frac{r_1}{2}]$, $k_2 = 0, 1, ..., [\frac{r_2}{2}]$. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_{10}^{(r_1,0)}(a_{n_1 n_2}) = a_{n_1 n_2} - a_{n_1+r_1 n_2},$$
$$\Delta_{01}^{(0,r_2)}(a_{n_1 n_2}) = a_{n_1 n_2} - a_{n_1 n_2+r_2},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 16-01-00350).

$$\Delta_{20}^{(r_1,0)}(a_{n_1n_2}) = \Delta_{10}^{(r_1,0)}(\Delta_{10}^{(r_1,0)}(a_{n_1n_2})),$$
$$\Delta_{02}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2}) = \Delta_{01}^{(0,r_2)}(\Delta_{01}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2})),$$
$$\Delta_{i_1i_2}^{(r_1,r_2)}(a_{n_1n_2}) = \Delta_{i_10}^{(r_1,0)}(\Delta_{0i_2}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2})),$$
$$\delta_{(r_1,k_1;0)}^{(j_1,0)}(a_{n_1,n_2}) = a_{r_1n_1,r_2n_2} + (-1)^{j_1+1}a_{r_1n_1+(r_1-k_1)\mathrm{sign}k_1,r_2n_2},$$
$$\delta_{(0;r_2,k_2)}^{(0,j_2)}(a_{n_1,n_2}) = a_{r_1n_1,r_2n_2+k_2} + (-1)^{j_2+1}a_{r_1n_1,r_2n_2+(r_2-k_2)\mathrm{sign}k_2},$$
$$\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2}) = \delta_{(r_1,k_1;0)}^{(j_1,0)}(\delta_{(0;r_2,k_2)}^{(0,j_2)}(a_{n_1,n_2})),$$
$$\sum(r_1,r_2,p,\{a_{n_1n_2}\}) =$$
$$= \Big(\sum_{k_2=0}^{[\frac{r_2}{2}]}\sum_{k_1=0}^{[\frac{r_1}{2}]}\sum_{j_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{2}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1-\mathrm{sign}k_1}^{\infty} |\Delta_{j_1-1,2-j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2}))|^p\times$$
$$\times(n_1+1)^{j_1p-2}(n_2+1)^{(3-j_2)p-2}\Big)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \Big(\sum_{k_2=0}^{[\frac{r_2}{2}]}\sum_{k_1=0}^{[\frac{r_1}{2}]}\sum_{j_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{2}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1-\mathrm{sign}k_1}^{\infty} A(k_1,k_2,j_1,j_2,r_1,r_2)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема. *Пусть* $0 < p < \infty$, $r_1 \in N$, $r_2 \in N$, *последовательность* $\{a_{n_1n_2}\}$ *такова, что* $a_{n_1n_2} \to 0$ *при* $n_1 + n_2 \to \infty$ *и для каждого* $k_1 = 0,1,...,[\frac{r_1}{2}]$, *каждого* $k_2 = 0,1,...,[\frac{r_2}{2}]$, *каждого* $j_1 = 1,2$, *каждого* $j_2 = 1,2$ *справедливы следующие неравенства*

$\Delta_{j_1,3-j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2})) \geq 0$ *для всех* n_1,n_2 *или*

$\Delta_{j_1,3-j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}(a_{n_1,n_2}^{(i_1,i_2)})) \leq 0$ *для всех* n_1,n_2.

Тогда

$$C_1\cdot\sum(r_1,r_2,p,\{a_{n_1n_2}\}) \leq \|\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_1,0}\sin n_1x_1+$$
$$+\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2\|_p \leq C_2\cdot\sum(r_1,r_2,p,\{a_{n_1n_2}\}), \qquad (2)$$

где положительные постоянные C_1, C_2 *не зависят от последовательности* $\{a_{n_1n_2}\}$.

Доказательство. Для $r_1 = r_2 = 1$ оценка (2) доказана в работе [1].

При доказательстве теоремы будут использованы обозначения: $B_0^0(x) = \frac{1}{2}$, $B_n^0(x) = \cos nx, n \in \mathbb{N}$. Пусть $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $B_l^1(x) = \sum\limits_{m=0}^{l}B_m^0(x)$, $B_l^2(x) = \sum\limits_{m=0}^{l}B_m^1(x)$, $BC_l^0(x) = \cos((2l+1)x)$, $BC_l^1(x) = \sum\limits_{m=0}^{l}BC_m^0(x)$,

$BC_l^2(x)=\sum\limits_{m=0}^{l} BC_m^1(x)$, $\overline{BC}_l^0(x)=\sin((2l+1)x)$, $\overline{BC}_l^1(x)=\sum\limits_{m=0}^{l}\overline{BC}_m^0(x)$.

Приведем доказательство для случая, когда $r_1=2$, $r_2=3$, а коэффициенты $a_{n_1n_2}$ ряда (1) удовлетворяют следующим условиям: для каждого $k_1=0,1$, каждого $k_2=0,1$, каждого $j_1=1,2$, каждого $j_2=1,2$ справедливы неравенства $\Delta_{j_1,3-j_2}^{(2,3)}(\delta_{(2,k_1;3,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2}))\geq 0$ для всех n_1,n_2. Аналогично доказательству из [1] получаем, что ряд (1) сходится по Прингсхейму, т.е. существует функция $f(x_1,x_2)-$ сумма ряда (1). Рассмотрим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x_1,x_2)|^p\,dx_1dx_2=\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2+$$
$$+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1,x_2+2\pi/3)|^p dx_1dx_2+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1,x_2-2\pi/3)|^p dx_1dx_2+$$
$$+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1-\pi,x_2-2\pi/3)|^p dx_1dx_2+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1-\pi,x_2)|^p dx_1dx_2+$$
$$+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1-\pi,x_2+2\pi/3)|^p dx_1dx_2=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6,$$

т.е. $\|f\|_p^p$ есть сумма шести интегралов I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6.

Оценим I_1. Почти всюду справедливо представление:

$$f(x_1,x_2)=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2})\overline{B}_{n_1}^1(2x_1)B_{n_2}^2(3x_2)+$$
$$+\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2})\overline{BC}_{n_1}^1(x_1)B_{n_2}^2(x_2)+$$
$$+\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}(\cos(x_2/2)\Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2+1}+a_{2n_1,3n_2+2})\overline{B}_{n_1}^1(2x_1)BC_{n_2}^2(3x_2/2)-$$
$$-\sin(x_2/2)\Delta_{11}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2+1}-a_{2n_1,3n_2+2})\overline{B}_{n_1}^1(2x_1)\overline{BC}_{n_2}^1(3x_2/2))+$$
$$+\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(\cos(x_2/2)\Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2+1}+a_{2n_1+1,3n_2+2})\overline{BC}_{n_1}^1(2x_1)\times$$
$$\times BC_{n_2}^2(3x_2/2)-\sin(x_2/2)\Delta_{11}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2+1}-a_{2n_1+1,3n_2+2})\times$$
$$\times\overline{BC}_{n_1}^1(x_1)\overline{BC}_{n_2}^1(3x_2/2))).$$

Тогда

$$I_1 \le C_3\Big(\int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2}) \overline{B}_{n_1}^1(2x_1) B_{n_2}^2(3x_2)|^p dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2}) \overline{BC}_{n_1}^1(x_1) B_{n_2}^2(x_2)|^p dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2+1} + a_{2n_1,3n_2+2}) \overline{B}_{n_1}^1(2x_1) \times$$

$$\times BC_{n_2}^2(3x_2/2)|^p dx_1 dx_2 + \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{11}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2+1} - a_{2n_1,3n_2+2}) \times$$

$$\times \overline{B}_{n_1}^1(2x_1) \overline{BC}_{n_2}^1(3x_2/2)|^p dx_1 dx_2 + \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2+1} +$$

$$+ a_{2n_1+1,3n_2+2}) \overline{BC}_{n_1}^1(2x_1) BC_{n_2}^2(3x_2/2)|^p dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{11}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2+1} - a_{2n_1+1,3n_2+2}) \overline{BC}_{n_1}^1(x_1) \times$$

$$\times \overline{BC}_{n_2}^1(3x_2/2)|^p dx_1 dx_2 \Big) = C_3(I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15} + I_{16}),$$

где постоянная C_3 не зависит от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Оценим сверху каждый из полученных шести интегралов.

Оценим I_{11}. Проводя доказательство аналогично доказательству теоремы А из [1], будем иметь $I_{11} \le C_4(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$. Аналогично оцениваются $I_{12}, ..., I_{16}$. Наконец, объединяя оценки для $I_{11}, .., I_{16}$, получаем, что $I_1 \le C_5(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$. Аналогично проверяется , что каждый из интегралов I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 не превосходит $C_6(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$. Тогда их сумма не превосходит $C_7(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$, то есть оценка (2) сверху верна. Эта же схема доказательства применима и для остальных значений $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Для доказательства снизу строятся специальные функции, которые получаются преобразованием функции $f(x_1, x_2)$. Сумма $(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$ при $r_1 = 2, r_2 = 3$ будет иметь шесть следующих слагаемых: $A(0,0,1,1,2,3)$, $A(0,1,1,1,2,3)$, $A(0,1,1,2,2,3)$, $A(1,0,1,1,2,3)$, $A(1,1,1,1,2,3)$, $A(1,1,1,2,2,3)$.

Покажем, например, что $\|f\|_p^p \ge C_8 \cdot A(0,0,1,1,2,3)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)+\frac{1}{2}\sum_{m_2=1}^{2}(f(x_1,x_2+m_2\frac{2\pi}{3})+$$

$$+f(x_1,x_2-m_2\frac{2\pi}{3}))+f(x_1+\pi,x_2)+\frac{1}{2}\sum_{m_2=1}^{2}(f(x_1+\pi,x_2+m_2\frac{2\pi}{3})+$$

$$+f(x_1+\pi,x_2-m_2\frac{2\pi}{3}))=6\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}2^{\operatorname{sign}n_2-1}a_{2n_1,3n_2}\sin(2n_1x_1)\cos(3n_2x_2).$$

Отсюда следует, что $C_9\|f\|_p\geq\|f_1\|_p$. Так как

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f_1(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2=$$

$$=\int\limits_0^{6\pi}\int\limits_0^{4\pi}\left|\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}2^{\operatorname{sign}n_2-1}a_{2n_1,3n_2}\sin(n_1x_1)\cos(n_2x_2)\right|^p dx_1dx_2,$$

то, применяя теорему A из [1], имеем: $\|f_1\|_p^p\geq C_{10}\cdot A(0,0,1,1,2,3)$, где положительная постоянная C_{10} не зависит от последовательности $\{a_{n_1n_2}\}$. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Замечание. Свойства сумм двойных рядов по синусам, а также двойных рядов по косинусам с кратно монотонными коэффициентами по подпоследовательностям рассматривались в работах [2] и [3] соответственно.

Свойства сумм одномерных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами рассматривались в [4].

Свойства сумм одномерных тригонометрических рядов с коэффициентами, монотонными по подпоследовательностям, рассматривались в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вуколова Т. М., Дьяченко М. И.* Оценки норм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1994. № 7. С. 20–28.

2. *Симонов Б. В., Симонова И. Э.* Оценки норм сумм одного класса двойных тригонометрических рядов по синусам // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж : ВГУ, 2017. С. 178–179.

3. *Симонов Б. В., Симонова И. Э.* Оценки норм сумм одного класса двойных тригонометрических рядов по косинусам // Современные проблемы теории краевых задач. Воронеж : ВГУ, 2017. С. 152–153.

4. *Вуколова Т. М., Дьяченко М. И.* О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1995. № 3. С. 22–32.

5. *Симонов Б. В.* О рядах по синусам и косинусам в классах L_φ // Изв. вузов. Матем. 2013. № 10. С. 24–42.

УДК 517.17+517.51

ОБ ОСНОВНЫХ ПЕРИОДАХ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. К. Соколова, С. С. Орлов (Иркутск, Россия)
98gal@mail.ru, orlov_sergey@inbox.ru

Математическое моделирование самоподобных объектов и их свойств, а также различных процессов и явлений, повторяющихся во времени и пространстве, естественным образом приводит к понятию периодической функции нескольких переменных. В частности, оно возникает в зонной теории твердого тела [1], когда на волновую функцию ψ, описывающую состояние кристалла, накладывают условия Борна – Кармана

$$\psi(\bar{r} + N_i\bar{a}_i) = \psi(\bar{r}),\ i = 1, \ldots, d,$$

где $\bar{a}_i$ — элементарные трансляционные векторы решётки Браве́, d — её размерность, N_i — целые числа. В этих исследованиях предполагается существование у периодической функции $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *базисных* периодов $\bar{a}_i$ таких, что любой её период является трансляционным вектором, т. е. линейной комбинацией с целыми коэффициентами периодов $\bar{a}_i$. Данные условия продиктованы спецификой рассматриваемой задачи и следуют из структуры множества, на котором задана волновая функция, нежели из самого нелокального свойства периодичности.

Известно, что у произвольной периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не всегда существует основной период. Это имеет место даже в одномерном случае, т. е. при $n = 1$. Примерами таких функций служат постоянная функция, имеющая периодом любое действительное число, индикатор множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел или функция Дирихле с множеством периодов $\mathbb{Q}$ и многие другие. Критериев существования у периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ основного периода авторам работы неизвестно. Достаточные условия доставляет теорема, которая приведена в книгах [2, с. 8] и [3, с. 450].

Теорема 1. *Если периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной, то она имеет основной период.*

Другой более известный факт состоит в том, что, если периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет основной период T_0, то любой её период T