УДК 517.9

О ПОСТРОЕНИИ И ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИНДЕКСА $(K, 0)$ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ[1]

С. В. Свинина (Иркутск, Россия)
gaidamak@icc.ru

При описании поведения сплошной среды (газ, жидкость, твердое тело) возникают различные модели, которые приводят как правило к нелинейным системам уравнений в частных производных, к интегро-дифференциальным уравнениям с частными производными или к нелинейным дифференциально-алгебраическим системам уравнений в частных производных [1, 2]. Под нелинейной дифференциально-алгебраической системой уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными понимают систему вида

$$\mathcal{F}_s\left(x, t, u^1, u^2, \ldots, u^n, p^1, p^2, \ldots, p^n, q^1, q^2, \ldots, q^n\right) = 0, \qquad (1)$$

$$p^s = \partial_t u^s, \quad q^s = \partial_x u^s, \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

в которой предполагается, что матрицы Якоби

$$\partial_p \mathcal{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{s_1}}{\partial p^{s_2}}\right), \quad \partial_q \mathcal{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{s_1}}{\partial q^{s_2}}\right), \quad s_1 = 1, 2, \ldots, n, \quad s_2 = 1, 2, \ldots, n,$$

тождественно вырождены в области определения $\mathcal{U}$. Если в каждой точке области $\mathcal{U}$ пучок матриц $\partial_p \mathcal{F} + \lambda \partial_q \mathcal{F}$ при любом значении u является регулярным, то его индекс или индекс системы (1) определяется парой чисел $(k, 0)$, где k – это максимальная степень элементарных делителей пучка $\partial_p \mathcal{F} + \lambda \partial_q \mathcal{F}$, соответствующих нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена $\det\left(\partial_p \mathcal{F} + \lambda \partial_q \mathcal{F}\right)$ во всей области $\mathcal{U}$. Второй параметр индекса равен нулю, поскольку пучок $\partial_p \mathcal{F} + \lambda \partial_q \mathcal{F}$ не содержит сингулярной составляющей. При численном решении линейных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных определенного вида классическими методами, возникают «пограничные слои ошибок» [3, 4], а при решении линейных систем общего вида или более того квазилинейных систем дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных, применение классических методов вовсе

[1]Работа выполнена в рамках проекта СО РАН Качественная теория и численный анализ дифференциально-алгебраических уравнений (проект № 0348-216-0009).

невозможно. В настоящей работе предлагается новый алгоритм, который основан на расщеплении матричного пучка системы и решает проблему численного решения квазилинейных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных индекса $(k, 0)$ [5]. Предлагаемый алгоритм состоит в следующем. Выполняется расщепление матричного пучка, построенного по коэффициентам диффренциально-алгебраической системы, на два пучка: один из них имеет только простые элементарные делители, соответствующие нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена, а другой не имеет регулярного ядра. В соответствующей расщепленной системе производные, относящиеся к регулярному пучку аппроксимируются сплайном произвольного порядка, а производные, относящиеся к сингулярному пучку аппроксимируются сплайном меньшего порядка по каждой переменной. В результате строится нелинейная разностная схема. Такая разностная схема называется сплайн-коллокационной разностной схемой с расщепленным пучком. Она является достаточно эффективной и дает высокую точность во всей области решения. В настоящем докладе ограничимся частным случаем нелинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных, а именно квазилинейной системой вида

$$A(x,t,u)\partial_t u + B(x,t,u)\partial_x u + F(x,t,u) = 0, \tag{2}$$

в которой $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$ — заданные квадратные матрицы порядка n, тождественно-вырожденные в области определения, $F(x,t,u)$ — известная n-мерная вектор-функция, $u \equiv u(x,t)$ — искомая n-мерная вектор-функция. Элементы матриц $A(x,t,u)$, $B(x,t,u)$ и вектора $F(x,t,u)$ из пространства $C^1(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U} = \{(x,t,u)| \quad (x,t) \in \in U, \quad \|u(x,t)\|_{C(U)} < \mathcal{Q}\}$, $\mathcal{Q}$ — некоторая постоянная величина, $U = = \{(x,t)|\ x \in [x_0; X],\ t \in [t_0; T]\}$.

Зададим для системы (2) начально-краевые условия

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad u(x,t_0) = \phi(x), \tag{3}$$

где $\psi(t)$ и $\phi(x)$ — известные n-мерные вектор-функции, согласованные в точке (x_0,t_0) вместе со своими производными. Будем предполагать, что для пучка $\mathcal{P}(\lambda,x,t,u) = A(x,t,u) + \lambda B(x,t,u)$ системы (2) выполнены все условия теоремы о канонической структуре из [6]. В этом случае найдутся невырожденные матрицы $P(x,t,u)$ и $Q(x,t,u)$, которые преобразуют его к канонической форме

$$\mathrm{diag}\{E_d, M(x,t,u), E_p\} + \lambda \mathrm{diag}\{J(x,t,u), E_l, N(x,t,u)\},$$

где E_d — единичная матрица порядка d; $M(x)$ и $N(x)$ — верхние (правые) треугольные блоки с нулевой диагональю порядка l и p, соответственно; $\mathcal{O}_l$ — квадратная нулевая матрица порядка l; $J(x,t,u)$ — невырожденная блочно-диагональная матрица порядка d. Матрицы $M(x,t,u)$ и $N(x,t,u)$ являются нильпотентными в $\mathcal{U}$. Пусть $\operatorname{ind} M(x,t,u) = k_1$ и $\operatorname{ind} N(x,t,u) = k_2$ в $\mathcal{U}$, т.е. $k_1 = \min\{\bar{k} : \ M(x,t,u)^{\bar{k}} = 0 \ \ \forall\, (x,t,u) \in \mathcal{U}\}$. Аналогично определяется k_2. Тогда $\operatorname{ind} \mathcal{P}(\lambda,x,t,u) = (k,0)$, где $k = \max\{k_1,k_2\}$ и, соответственно, индекс системы (2) также равен $(k,0)$. Построим в прямоугольной области U равномерную сетку U_Δ с шагами h и τ соответственно по пространственной и временной переменным

$$U_\Delta = \{x_i = x_0 + ih,\ t_j = t_0 + j\tau, \ \ i = 0,1,\ldots,n_1,\ j = 0,1,\ldots,n_2\},$$

тогда в области $\mathcal{U}$ будем иметь соответствующее сеточное пространство

$$\mathcal{U}_\Delta = \{x_i = x_0 + ih,\ t_j = t_0 + j\tau,\ u_{i,j} = u(x_i,t_j),\ i = 0,\ldots,n_1,\ j = 0,\ldots,n_2\}.$$

Будем искать решение $u(x,t)$ задачи (2), (3) в виде сплайна $\delta^{m_1,m_2}(x,t) \in C^1(\mathcal{U})$ со старшими степенями равными m_1 и m_2 по каждой независимой переменной, соответственно. Разделяя пучок $\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)$ на регулярную и сингулярную составляющие и выполняя соответствующую аппроксимацию производных, входящих в систему (1), мы получим разностную схему

$$A_{1,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=0}^{m_2}\gamma_{l_2,l_3}u_{i+l_1,j+l_3} + B_{1,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=0}^{m_1}\bar{\gamma}_{l_1,l_3}u_{i+l_3,j+l_2} = F_{i+l_1,j+l_2} -$$

$$-A_{2,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=0}^{m_2-1}\beta_{l_2-1,l_3}u_{i+l_1,j+l_3+1} - B_{2,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=0}^{m_1-1}\bar{\beta}_{l_1-1,l_3}u_{i+l_3+1,j+l_2},$$

$$u_{0,j} = \psi_j, \ \ u_{i,0} = \phi_i, \ \ i = 0,1,\ldots,n_1-1,\ j = 0,1,\ldots,n_2-1, \tag{4}$$

где γ_{l_2,l_3}, $\bar{\gamma}_{l_1,l_3}$, β_{l_2,l_3} – известные коэффициенты. Разностную схему (4) назовем нелинейной сплайн-коллокационной разностной схемой с расщеплением. Система (4) представляет собой целый набор нелинейных разностных схем, порядки аппроксимации которых определяются порядками сплайнов и составляют величину, равную $O(h^{m_1-1}) + O(\tau^{m_2-1})$. С помощью замены переменной $w_{i,j} = Q_{i,j}^{-1}v_{i,j}$, где $Q_{i,j} = Q(x_i,t_j,u_{i,j})$ — невырожденная матрица из [5], при условии, что якобиан

$$\frac{\partial[w_1,w_2,\ldots,w_n]}{\partial[v_1,v_2,\ldots,v_n]} \neq 0 \quad \forall\ (x,t) \in U$$

разностную схему (4) можно записать в нормальной форме разностного оперраторного уравнения

$$\mathcal{V} = \Pi(\mathcal{V}), \tag{5}$$

где $\Pi(\mathcal{V}) = L^{-1}(\mathcal{V}) \left[\tau\bar{g} - H(\mathcal{V})w_0 - Q(\mathcal{V})w^0\right] + \delta(\mathcal{V}, h, \tau)$ и $\delta(\mathcal{V}, h, \tau)$ — вектор, для которого $\|\delta(\mathcal{V}, h, \tau)\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = O(h) + O(\tau)$. В (5) $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3)^\top$ и $\mathcal{V}^s = (\bar{w}^s_{1,1}, \bar{w}^s_{2,1}, \ldots, \bar{w}^s_{n_1,1}, \bar{w}^s_{1,2}, \bar{w}^s_{2,2}, \ldots, \bar{w}^s_{n_1,2}, \ldots, \bar{w}^s_{1,n_2}, \bar{w}^s_{2,n_2}, \ldots, \bar{w}^s_{n_1,n_2})^\top$ — искомый вектор. Матрица $L(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{L^1(\mathcal{V}), L^2(\mathcal{V}), L^3(\mathcal{V})\}$ невырожденная, каждый ее блок является блочно-двухдиагональной матрицей $L^s(\mathcal{V}) = \left(L^s_{i,j}(\mathcal{V})\right)$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n_1$. Блоки $L^s_{i,i}(\mathcal{V})$, расположенные на главной диагонали имеют вид

$$L^s_{i,i}(\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} E_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} \\ \mathcal{K}^k_{2,i} & E_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} \\ \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{K}^k_{3,i} & E_{\nu^s} & \ldots & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \ldots & E_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} \\ \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathcal{K}^k_{n_1,i} & E_{\nu^s} \end{pmatrix},$$

где ν^s принимает значения: m_1m_2d, m_1m_2l и m_1m_2p, соответственно $s = 1, 2, 3$. Блоки $L^s_{i,j}(\mathcal{V})$, расположенные под главной диагональю имеют вид $L^s_{i,j}(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{\mathcal{F}^s_{1,i},\ \mathcal{F}^s_{2,i}, \ldots, \mathcal{F}^s_{n_1,i}\}$, где $i = 2, 3, \ldots, n_1$, $j = i - 1$. В (5) $\bar{g} = (\bar{g}^1, \bar{g}^2, \bar{g}^3)$ — известный вектор размера $\bar{n} = \tilde{n}n$, $\tilde{n} = n_1n_2m_1m_2$, который определяется по вектору $F(x, t, u)$. Блоки $\bar{g}^s$ имеют размеры $\tilde{n}d$, $\tilde{n}l$ и $\tilde{n}p$, соответственно значениям $s = 1, 2, 3$,

$$\bar{g}^s = (g^s_{1,1}, g^s_{2,1}, \ldots, g^s_{n_1,1}, g^s_{1,2}, g^s_{2,2}, \ldots, g^s_{n_1,2}, \ldots, g^s_{1,n_2}, g^s_{2,n_2}, \ldots, g^s_{n_1,n_2})^\top.$$

Матрица $H(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{H^1, H^2, H^3\}$ имеет блоки $H^s = \operatorname{diag}\{H^s_{1,1}, \mathcal{O}_s\}$, где $H^s_{1,1} = \operatorname{diag}\{\mathcal{F}^s_{1,1}, \mathcal{F}^s_{2,1}, \ldots, \mathcal{F}^s_{n_1,1}\}$, $\mathcal{O}_{\nu^s}$ — нулевой квадратный блок порядка $\nu^s = (n_2 - 1)n_1m_1m_2\nu$, где ν принимает значения d, l и p, соответственно значениям $s = 1, 2, 3$. Матрица $Q(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{Q^1, Q^2, Q^3\}$ с блоками $Q^s = \operatorname{diag}\{Q^s_{1,1}, Q^s_{1,2}, \ldots, Q^s_{1,n_2}\}$, где $Q^s_{1,j} = \operatorname{diag}\{\mathcal{K}^s_{1,j}, \mathcal{O}_{\nu^s}\}$, $\nu^s = (n_1 - 1)m_1m_2\nu$. Векторы $w_0 = (w^1_0, w^2_0, w^3_0)^\top$ и $w^0 = (w^{0,1}, w^{0,2}, w^{0,3})^\top$ имеют блоки: $w^s_0 = e_{n_2} \otimes (\bar{w}^s_{1,0}, \bar{w}^s_{2,0}, \ldots \bar{w}^s_{n_1,0})^\top$ и $w^{0,s} = (e_{n_1} \otimes w^s_{0,1}, e_{n_1} \otimes w^s_{0,2}, \ldots, e_{n_1} \otimes w^s_{0,n_2})^\top$, которые определяются по начально-краевым условиям (3).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) собственные значения $\xi^{s_1}_{\bar{\gamma}_{m_1}}$, $\xi^{s_2}_{\gamma_{m_2}}$ и $\xi^{s_3}_{J_{i,j}}$ матриц $\bar{\gamma}_{m_1}$, γ_{m_2} и $J_{i,j}$, соответственно, в каждом узле разностной сетки $\mathcal{U}_\Delta$ удовлетворяют условию

$$r\xi^{s_1}_{\bar{\gamma}_{m_1}} \cdot \xi^{s_3}_{J_{i,j}} \neq -\xi^{s_2}_{\gamma_{m_2}} \quad \forall s_1, s_2, s_3,$$

где $s_1 = 1, 2, \ldots, m_1$, $s_2 = 1, 2, \ldots, m_2$, $s_3 = 1, 2, \ldots, k$;

2) собственные значения $\xi^s_{J_{i,j}}$ положительные в сеточном пространстве $\mathcal{U}_\Delta$;

3) отношение шагов разностной сетки τ/h является постоянной величиной.

Тогда разностная схема (5) в сеточном пространстве $\mathcal{U}_\Delta$ имеет решение равномерно-ограниченное по начально-краевым условиям и по правой части, для которого справедлива оценка

$$\|\mathcal{V}\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \leq \mathcal{M}_1\|\tilde{F}_{i,j}\|_{C(U_\Delta)} + \mathcal{M}_2\|\phi_i\|_{C(U_\Delta)} + \mathcal{M}_3\|\psi_j\|_{C(U_\Delta)},$$

где $\mathcal{M}_\nu$ — постоянные величины, $i = 1, \ldots, n_1$, $j = 1, \ldots, n_2$.

Предложенный в работе метод позволяет с высокой точностью, которая на единицу меньше порядка сплайна, численно решать рассмотренные квазилинейные дифференциально-алгебраические системы индекса $(k, 0)$. Особенность этого метода носит аналитический характер и заключается в предварительном расщеплении матричного пучка системы $\mathcal{P}(\lambda, x, t, u)$. Отметим также, что если система (2) полулинейная, т. е. коэффициенты $A(x, t)$ и $B(x, t)$ не зависят от искомой функции $v(x, t)$, то с помощью замены переменной $w(x, t) = Q^{-1}(x, t)v(x, t)$ всегда можно привести разностную схему (4) к каноническому виду (5). Для квазилинейной системы (2) это преобразование можно выполнить не всегда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М. : Наука, Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. 668 с.

2. *Рущинский В. М.* Пространственные линейные и нелинейные модели котлогенераторов // Вопросы идентификации и моделирования. 1968. С. 8—15.

3. *Бормотова О. В., Чистяков В. Ф.* О методах численного решения и исследования систем не типа Коши – Ковалевской // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 8. С. 1380–1387.

4. *Гайдомак С. В.* Об одной краевой задаче для линейной параболической системы первого порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, № 4. С. 73–83.

5. *Гайдомак С. В.* Об одном алгоритме численного решения линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных произвольного индекса // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 9. С. 1530–1544.

6. *Гайдомак С. В.* О канонической структуре пучка вырожденных матриц-функций // Изв. вузов. Матем. 2012. № 2. С. 23–33.