$$+3(((5+x^4)xy)' + (5+x^4)xy')\}.$$

Порядок всех рассматриваемых дифференциальных выражений равен 6, дефектные числа соответствующих операторов удовлетворяют условиям $n_+ = n_- = 2$ в случае II, $n_+ = n_- = 4$ в случае III и $n_+ = n_- = 6$ в случае IV, а спектры их самосопряжённых расширений являются дискретными.

Автор выражает глубокую благодарность профессору К. А. Мирзоеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kostyuchenko A. G., Mirzoev K. A.* Generalized Jacobi matrices and deficiency numbers of ordinary differential operators with polynomial coefficients // Func. Anal. and Its Appl. 1999. Vol. 33, № 1. P. 25–37.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПОРОЖДАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ ЛАКСА[1]

А. К. Свинин (Иркутск, Россия)
svinin@icc.ru

Представление Лакса интегрируемых эволюционных уравнений впервые было найдено для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ). Пусть $u = u(x,t)$ — действительная функция действительных аргументов. Уравнение КдФ $u_t = u_3 + 6uu_1$ может быть записано с помощью операторного уравнения $\partial L/\partial t = [A, L] := AL - LA$ с парой дифференциальных операторов[2] $L = \partial^2 + u$ и $A = 4\partial^3 + 6u\partial + 3u_1$. Важно отметить, что представление Лакса, по сути, возникло в рамках метода обратной задачи рассеяния [2], который существенно использует спектральную теорию опратора L [4]. С помощью этого метода впервые были найдены многосолитонные решения. В дальнейшем были найдены другие аспекты интегрируемости для уравнения КдФ. Выяснилось, что это уравнение является гамильтоновым и даже би-гамильтоновым и обладает бесконечным набором обобщенных симметрий, которые также выражаются уравнением Лакса

$$\frac{\partial L}{\partial t_{2s+1}} = [A_{2s+1}, L], \ \ \forall s \geq 1,$$

[1]Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации, государственная поддержка ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-8081.2016.9).

[2]Здесь обозначается $u_k := u^{(k)}(x)$.

где A_{2s+1} — соответствующий дифференциальный оператор порядка $2s+1$, а $(t_1, t_3, \ldots)$ — бесконечный набор эволюционных параметров. Способ построения операторов A_{2s+1} был найден в работе [3]. Если эволюционное уравнение обладает бесконечным набором обобщенных симметрий, то говорят, что это уравнение включается в интегрируемую иерархию. В частности, само уравнение КдФ соответствует эволюционному параметру t_3.

Рассмотрим искомую функцию $T = T(i, t)$ от $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ и уравнение

$$\dot{T}(i) = T(i)\left(T(i+1) - T(i-1)\right)$$

известное как цепочка Вольтерра или дискретное уравнение Кортевега-де Фриза. Это уравнение, по всей видимости, было первым дискретным уравнением проинтегрированным с помощью метода обратной задачи, который использует спектральную теорию дискретных операторов. Важной характеристикой цепочки Вольтерра, как и уравнения КдФ, является наличие бесконечного набора обобщенных симметрий. Пусть $(t_1, t_2, \ldots)$ — бесконечный набор эволюционных параметров. В работе [5] было показано, что иерархию высших симметрий для цепочки Вольтерра можно записать в явном виде

$$\partial_s T(i) = T(i)\left(S_s^s(i-s+2) - S_s^s(i-s)\right), \quad \forall\ s \geq 1,$$

где $\partial_s := \partial/\partial t_s$. Здесь в правые части уравнений входят дискретные многочлены, определяемые по формуле[1]

$$S_s^r(i) = \sum_{0\leq\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_r\leq s-1} T(i+\lambda_1+r-1)\cdots T(i+\lambda_{r-1}+1)T(i+\lambda_r). \quad (1)$$

У цепочки Вольтерра и ее интегрируемой иерархии, как известно существует интегрируемое обобщение [1], а именно, счетный класс уравнений вида

$$\dot{T}(i) = T(i)\left(\sum_{j=1}^{n} T(i+j) - \sum_{j=1}^{n} T(i-j)\right). \quad (2)$$

О. И. Богоявленским в работе [1], было показано, что уравнение (2), при любом $n \geq 1$ допускает непрерывный предел к уравнению КдФ. В работе автора [5], был найден явный вид интегрируемой иерархии обобщенных симметрий эволюционного уравнения (2). В работе [6], являющейся естественным продолжением [5], автором был предложен подход, позволяющий представить многие известные интегрируемые эволюционные

[1]В частности, мы полагаем $S_s^0(i) := 1$.

дифферениально-разностные уравнения (системы уравнений) допускающие представление Лакса в явной форме. Определим класс дискретных многочленов вида

$$S_s^r(i) = \sum_{0\le\lambda_1\le\cdots\le\lambda_r\le s-1} T(i+\lambda_1+(r-1)n)\cdots T(i+\lambda_{r-1}+n)T(i+\lambda_r),$$

которые очевидно обобщают (1).

Теорема 1. *Интегрируемая иерархия обобщенных симметрий цепочки Богоявленского* (1) *определяется по формуле*

$$\partial_s T(i) = T(i)\left(S_{sn}^s(i-sn+n+1) - S_{sn}^s(i-sn)\right), \quad s\ge 1. \tag{3}$$

Теорема 2. *Уравнения интегрируемой иерархии* (2) *допускают представление Лакса* $\partial_s L = [A_s, L]$ *с дискретными операторами*

$$L = \Lambda^{-1} + T(i-1)\Lambda^{-1-n}, \quad A_s = \Lambda^{sn} + \sum_{q=1}^{s} S_{sn}^q(i-(q-1)n)\Lambda^{(s-q)n},$$

где Λ *— элементарный оператор сдвига действующий по правилу* $\Lambda(f(i)) = f(i+1)$ *для произвольной функции дискретного аргумента.*

Замечание. В работе [7], используя явное представление (2) эволюционных уравнений интегрируемой иерархии цепочки Богоявленского, была найдена их би-гамильтонова структура.

Явное представление (3) имеет свои преимущества, например при исследовании непрерывного предела. Разобьем числовую ось $\mathbb{R}$ на малые интервалы одинаковой длины ϵ. Пусть $u_i := u(x)|_{x=i\epsilon}$, где $u(x)$ — искомая функция непрерывного аргумента. Для построения непрерывного предела интегрируемой иерархии (3), рассмотрим подстановку вида

$$T(i) = 1 + \frac{\kappa}{2}u_i, \quad \kappa := n(n+1) \tag{4}$$

Заметим, что эта подстановка хорошо известна [1]. Возьмем линейную комбинацию потоков $\dot{T}(i) = \sum c_q\partial_q T(i)$. Как результат, подстановка (4) дает

$$\dot{u} = \sum_{j\ge 0}\epsilon^{2j+1}F_{2j+1}, \tag{5}$$

где F_{2j+1} — некоторые дифференциальные многочлены. В частности,

$$F_1 = \frac{\kappa^2}{2}\left(\sum_{k\ge1} g_k c_k\right)u_1, \quad F_3 = \frac{\kappa^3}{24}\left(\sum_{k\ge1} k g_k c_k\right)(u_3+6uu_1),$$

$$F_5 = \frac{\kappa^4}{960}\left(\sum_{k\geq 1} P(k) g_k c_k\right) u_5 + \frac{\kappa^4}{48}\left(\sum_{k\geq 1} k^2 g_k c_k\right) u u_3$$

$$+\frac{\kappa^4}{24}\left(\sum_{k\geq 1} k(k-1) g_k c_k\right) u_1 u_2 + \frac{\kappa^4}{16}\left(\sum_{k\geq 1} k(k-1) g_k c_k\right) u^2 u_1,$$

где

$$P(k) := k\left(2k - \frac{2(\kappa+1)}{3\kappa}\right), \quad g_k := \frac{k}{(k-1)!}\prod_{q=1}^{k-1}(kn+q)\,.$$

Разумеется, что мы можем брать только конечные линейные комбинации потоков. Подходящим преобразованием координат типа Галилея мы можем исключить F_1, так чтобы сумма (5) начиналась с $u_3 + 6uu_1$. Тогда в непрерывном пределе при $\epsilon \to 0$, мы получаем уравнение КдФ. Если мы наложим условие $\sum_{k\geq 1} k g_k(n) c_k = 0$, так чтобы $F_3 = 0$, то

$$F_5 = \frac{\kappa^4}{480}\left(\sum_{j\geq 1} k(k-1) g_k(n) c_k\right)(u_5 + 10uu_3 + 20u_1u_2 + 30u^2u_1)$$

и в этом случае, также с использованием преобразования независимых аргументов, в непрерывном пределе мы получаем «высшее» уравнение КдФ .

$$\dot{u} = u_5 + 10uu_3 + 20u_1u_2 + 30u^2u_1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Интегрируемые динамические системы, связанные с уравнением КдВ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51, № 6 С. 1123–1141.

2. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg-deVries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19, № 19 P. 1095.

3. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Дробные степени операторов и гамильтоновы системы // Функциональный анализ и его приложения. 1976. Т. 10, № 4. С. 13-29.

4. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М. : Наука, 1980.

5. *Svinin A. K.* On some class of homogeneous polynomials and explicit form of integrable hierarchies of differential-difference equations // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. Vol. 44, № 16. Art. No. 165206.

6. *Svinin A. K.* On some classes of discrete polynomials and ordinary difference equations // J. Phys. A: Math. Theor. 2014. V. 47. No. 15. Art. No. 155201.

7. *Wang J. P.* Recursion operator of the Narita-Itoh-Bogoyavlensky lattice // Stud. Appl. Math. 2012. V. 129. No. 3. P. 309-327.