УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. С. Рыхлов (Саратов, Россия)
RykhlovVS@yandex.ru

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением n-го порядка

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js}\in\mathbb{C}, \quad p_{n0}\neq 0, \quad p_{0n}\neq 0, \qquad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i=\overline{1,l}, \qquad (2)$$

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i=\overline{l+1,n}, \qquad (3)$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs}\in\mathbb{C}$, $\varkappa_i, \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $1\le l\le n-1$.

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная ($1\le m\le n$) полнота системы собственных и присоединенных или, по-другому, корневых функций (к.ф.) этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$. Историю вопроса можно посмотреть, например, в [1, 2].

В [2] рассмотрен случай, когда корни характеристического многочлена пучка расположены на двух лучах, исходящих из начала. В теореме 1 из [2] получены достаточные условия кратной полноты системы к.ф. для вроде бы более общего класса пучков вида (1)–(3) в случае полураспадающихся в широком смысле краевых условий (то есть, когда не только $2l\ge n$, но и $2l<n$ в случае $1\le l\le n-1$). Но, несмотря на то, что краевые условия (2)–(3) являются частным случаем полураспадающихся в широком смысле краевых условий из [2], тем не менее, теорема 1 о полноте из [2] не может быть непосредственно применена к случаю распадающихся краевых условий, так как соответствующие определители в этой теореме обращаются в ноль.

Видоизменив доказательство теоремы 1 из [2], удалось получить достаточные условия кратной полноты и в случае распадающихся краевых условий. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем необходимые предположения и обозначения.

Предположим, что корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ характеристического уравнения $\sum\limits_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала в количествах k и $n-k$ $(0 \le k \le n)$.

Обозначим $[q]_+ = \max\{0, q\}$, $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[p,q]_+ = \max\{p,q\}$ и положим при $j = \overline{1,n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \alpha_{i\nu s}\omega_j^{\nu},\ i = \overline{1,l}; \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \beta_{i\nu s}\omega_j^{\nu},\ i = \overline{l+1,n}.$$

Используя эти обозначения, введем условия:

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \ne 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} \ne 0 \text{ в случае } n-k \le l; \quad (4)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \ne 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} \ne 0 \text{ в случае } n-k > l; \quad (5)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} \ne 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} \ne 0, \text{ в случае } k \le l; \quad (6)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \ne 0,\ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} \ne 0 \text{ в случае } k > l. \quad (7)$$

Теорема 1. *Если* $[k, n-k]_+ \le l$ *и выполняются условия (4) и (6), то при* $m \le 2(n-l)$ *система к.ф. пучка* (1)–(3) *m-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [m-1-\varkappa_i]_+$ *в случае* $m < n$ *или в случае* $m = n$, *если по-крайней мере для одного* $i = \overline{1,n}$ *выполняется неравенство* $\varkappa_i > n-1$, *и с нулевым дефектом в случае* $m = n$ *при выполнения неравенств* $\varkappa_i \le n-1$ *для всех* $i = \overline{1,n}$.

Теорема 2. *Если* $l < [k, n-k]_-$ *и выполняются условия* (5) *и* (7), *то при* $m \le 2l$ *система к.ф. пучка* (1)–(3) *m-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=1}^{l} [m-1-\varkappa_i]_+$.

Доказательство теоремы 1 следует схеме доказательство теоремы 1 из [2]. Доказательство же теоремы 2 проводится по другой схеме, так как такого случая в теореме 1 из [2] не было выделено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыхлов И. С.* О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // СМФН. 2017. Т. 63, вып. 2. С. 340–361.

2. *Rykhlov V. S.* Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators // Results in Math. 2017. Vol. 72, iss. 1–2. P. 281–301.

УДК 517.9

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Т. А. Сафонова (Архангельск, Россия)
t.Safonova@narfu.ru

Известно, что обобщенная якобиева матрица J, возникающая при матричном представлении минимального оператора, порожденного симметрическим дифференциальным выражением с полиномиальными коэффициентами в гильбертовом пространстве $L^2(R)$, имеет ряд специфических свойств (подробнее см. [1]). Эти свойства позволяют получить подробную информацию о дефектных числах и других спектральных характеристиках операторов, порожденных матрицами J в гильбертовом пространстве последовательностей l^2, и, благодаря указанной выше связи, соответствующих дифференциальных операторов.

В данной работе приводятся примеры операторов, порожденных обобщенными якобиевыми матрицами J с известными спектральными свойствами, и устанавливаются спектральные характеристики соответствующих им дифференциальных операторов шестого порядка с полиномиальными коэффициентами.

I. Рассмотрим обобщенную якобиеву матрицу J с элементами c_{jk} такими, что

$$c_{n,n} = h_4 + h_3 n + h_2(n-1)n + h_1(n-2)(n-1)n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

где $h_k \neq 0$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ — вещественные числа и $c_{jk} = 0$ при $j \neq k$. Поэтому, диагональная матрица J, очевидно, порождает в гильбертовом пространстве l^2 самосопряжённый оператор с чисто дискретным спектром и собственными значениями $\lambda_n = c_{nn}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Эта матрица является матричным представлением минимального симметрического оператора, порожденного выражением

$$l_6^0[y] = \frac{1}{8}\{-h_1 y^{(6)} + ((2h_2 - 9h_1 + 3h_1 x^2)y'')'' +$$

$$+((-4h_3 + 8h_2 - 15h_1 + 2(-2h_2 + 9h_1)x^2 - 3h_1 x^4)y')' +$$

$$+(8h_4 - 4h_3 + 2h_2 + 3h_1 + (4h_3 - 8h_2 + 9h_1)x^2 + (2h_2 - 9h_1)x^4 + h_1 x^6)y\}.$$

Таким образом, минимальный симметрический дифференциальный оператор, порожденный выражением $l_6^0[y]$ в гильбертовом пространстве $L^2(R)$, наследует спектральные характеристики оператора, порожденного матрицей J.

II. Пусть элементы c_{jk} матрицы J таковы, что $c_{kj} = \overline{c_{jk}}$ и

$$c_{n,n+2} = \sqrt{(n+1)(n+2)}(h_3 + h_2 n + h_1(n-1)n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

где $h_k = \alpha_k + i\beta_k$ и $\alpha_k \neq 0$ $(k = 1, 2, 3)$, а $c_{jk} = 0$ при $k \neq j + 2$. Тогда

$$l_6^2[y] = \frac{1}{4}\{\alpha_1 y^{(6)} + ((-2\alpha_2 + 8\alpha_1 - \alpha_1 x^2)y'')'' +$$

$$+((4\alpha_3 - 6\alpha_2 + 11\alpha_1 - \alpha_1 x^4)y')' +$$
$$+(4\alpha_3 - 6\alpha_2 + 9\alpha_1 + 2(\alpha_2 - 4\alpha_1)x^2 + \alpha_1 x^4)x^2 y\} +$$
$$+\frac{i}{4}\{-\beta_1((xy''')'' + (xy'')''') +$$
$$+2((\beta_2 - 4\beta_1 + \beta_1 x^2)xy'')' + 2((\beta_2 - 4\beta_1 + \beta_1 x^2)xy')'' +$$
$$+(-4\beta_3 + 6\beta_2 - 9\beta_1 + 2(-\beta_2 + 4\beta_1)x^2 - \beta_1 x^4)xy' +$$
$$+((-4\beta_3 + 6\beta_2 - 9\beta_1 + 2(-\beta_2 + 4\beta_1)x^2 - \beta_1 x^4)xy)'\}.$$

III. Пусть элементы c_{jk} матрицы J таковы, что $c_{kj} = \overline{c_{jk}}$ и

$$c_{n,n+4} = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}(h_2 + h_1 n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

где $h_k = \alpha_k + i\beta_k$ и $\alpha_k \neq 0$ $(k = 1, 2)$, а $c_{jk} = 0$ при $k \neq j + 4$. Тогда

$$l_6^4[y] = \frac{1}{4}\{-\alpha_1 y^{(6)} + ((2\alpha_2 - 5\alpha_1 - 5\alpha_1 x^2)y'')'' +$$

$$+((-5\alpha_1 + 6(2\alpha_2 - 5\alpha_1)x^2 + 5\alpha_1 x^4)y')' +$$
$$+(6\alpha_2 - 15\alpha_1 + 15\alpha_1 x^2 + (2\alpha_2 - 5\alpha_1)x^4 + \alpha_1 x^6)y\} +$$
$$+\frac{i}{2}\{\beta_1((xy''')'' + (xy'')''') + (-2\beta_2 + 5\beta_1)((xy'')' + (xy')'') +$$
$$+(-2\beta_2 + 5\beta_1 - \beta_1 x^2)x^3 y' + ((2\beta_2 + 5\beta_1 - \beta_1 x^2)x^3 y)'\}.$$

IV. Пусть элементы c_{jk} матрицы J таковы, что $c_{kj} = \overline{c_{jk}}$ и

$$c_{n,n+6} = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}h, \quad n = 0, 1, \ldots$$

где $h = \alpha - i\beta$ и $\alpha \neq 0$, а $c_{jk} = 0$ при $k \neq j + 6$. Тогда

$$l_6^6[y] = \frac{\alpha}{4}\{y^{(6)} + 15(x^2 y'')'' + 15(1 + x^4)y')' + (45 + x^4)x^2 y\} +$$

$$+\frac{i\beta}{4}\{3((xy''')'' + (xy'')''') + 10((x^3 y'')' + (x^3 y')'') +$$

$$+3(((5+x^4)xy)' + (5+x^4)xy')\}.$$

Порядок всех рассматриваемых дифференциальных выражений равен 6, дефектные числа соответствующих операторов удовлетворяют условиям $n_+ = n_- = 2$ в случае II, $n_+ = n_- = 4$ в случае III и $n_+ = n_- = 6$ в случае IV, а спектры их самосопряжённых расширений являются дискретными.

Автор выражает глубокую благодарность профессору К. А. Мирзоеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kostyuchenko A. G., Mirzoev K. A.* Generalized Jacobi matrices and deficiency numbers of ordinary differential operators with polynomial coefficients // Func. Anal. and Its Appl. 1999. Vol. 33, № 1. P. 25–37.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПОРОЖДАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ ЛАКСА[1]

А. К. Свинин (Иркутск, Россия)
svinin@icc.ru

Представление Лакса интегрируемых эволюционных уравнений впервые было найдено для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ). Пусть $u = u(x,t)$ — действительная функция действительных аргументов. Уравнение КдФ $u_t = u_3 + 6uu_1$ может быть записано с помощью операторного уравнения $\partial L/\partial t = [A, L] := AL - LA$ с парой дифференциальных операторов[2] $L = \partial^2 + u$ и $A = 4\partial^3 + 6u\partial + 3u_1$. Важно отметить, что представление Лакса, по сути, возникло в рамках метода обратной задачи рассеяния [2], который существенно использует спектральную теорию опратора L [4]. С помощью этого метода впервые были найдены многосолитонные решения. В дальнейшем были найдены другие аспекты интегрируемости для уравнения КдФ. Выяснилось, что это уравнение является гамильтоновым и даже би-гамильтоновым и обладает бесконечным набором обобщенных симметрий, которые также выражаются уравнением Лакса

$$\frac{\partial L}{\partial t_{2s+1}} = [A_{2s+1}, L], \quad \forall s \geq 1,$$

[1]Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации, государственная поддержка ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-8081.2016.9).

[2]Здесь обозначается $u_k := u^{(k)}(x)$.