

Замечание. Аналогичные результаты в классах аналитических в круге функций типа Р. Неванлинны были получены автором в [4] и [5]. Мультипликаторы из пространств Π_q ($q > 1$) в классы Харди H^p ($p > 0$) описаны в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Привалов И. И. Граничные свойства однозначных аналитических функций. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. 206 с.
2. Неванlinna Р. Однозначные аналитические функции. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.
3. Гаврилов В. И., Субботин А. В., Ефимов Д. А. Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад). М. : Изд-во Моск. ун-та, 2012. 264 с.
4. Родикова Е. Г. Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводской междунар. конф. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУб 2012. С. 64–69.
5. Родикова Е. Г. О коэффициентных мультипликаторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций // Вестн. Брянск. гос. ун-та. Сер. Точные и естественные науки. 2012. № 4. С. 61–69.

УДК 517.9

О S_∞ СИСТЕМАХ

А. И. Рубинштейн (Москва, Россия)

rubinstein_aleksandr@mail.ru

Система $\{\varphi_k(x)\}$ определенных на $[0, 1]$ функций называется *слабо мультипликативной*, если для любых номеров $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s$, $s \geq 2$

$$\int_0^1 \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) \dots \varphi_{k_s}(x) dx = 0 \quad (1)$$

(см. работу В. Ф. Гапошкина [1]). При $s = 2$ из (1) следует ортогональность системы $\{\varphi_k(x)\}$. Будем считать функции $\varphi_k(x)$ нормированными в $L_2(0, 1)$.

В [1] для ортонормальных слабо мультипликативных систем доказано неравенство Хинчина: при любом $2 < p < \infty$

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq A_p \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{1/2}. \quad (2)$$

ОНС, удовлетворяющие (2) при любом $2 < p < \infty$ и называются S_∞ системами.

А. Я. Хинчин установил (2) для первой S_∞ системы — системы Радемахера

$$r_k(x) = \operatorname{sgn} \sin(2^k \pi x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Как установлено, S_∞ системы обладают рядом замечательных свойств: при $\{c_n\} \in l_2$ ряды $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ безусловно сходятся во всех $L_p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, безусловно сходятся почти всюду на $(0, 1)$, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ на множестве положительной меры следует принадлежность $\{c_k\}$ пространству l_2 , выполняется неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right| dx \geq C \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{1/2}$$

$(\{\varphi_k(x)\})$ — система Банаха).

Для системы Радемахера подобные результаты (частично) установлены Радемахером, Хинчиным и Колмогоровым.

В предлагаемой работе определяется достаточно богатое множество S_∞ систем.

Пусть $\Phi(x)$ — произвольная измеримая ограниченная на $(0, 1/4)$ функция. Определим с ее помощью две функции

$$\Psi^{(1)}(x) = \begin{cases} \Phi(x) & 0 < x < \frac{1}{4}, \\ \Phi\left(\frac{1}{2} - x\right) & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ -\Phi\left(x - \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ -\Phi(1 - x) & \frac{3}{4} < x < 1; \end{cases} \quad \Psi^{(2)}(x) = \begin{cases} \Phi(x) & 0 < x < \frac{1}{4}, \\ -\Phi\left(\frac{1}{2} - x\right) & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ -\Phi\left(x - \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ \Phi(1 - x) & \frac{3}{4} < x < 1. \end{cases}$$

В точках $0, 1/4, 1/2, 3/4$ функции $\Psi^{(1;2)}(x)$ произвольны. Пусть далее

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{(1;2)}(x) &= \left\| \Psi^{(1;2)}(x) \right\|_2^{-1} \cdot \Psi^{(1;2)}(x), \quad 0 \leq x < 1, \\ \varphi_1^{(1;2)}(x+1) &= \varphi_1^{(1;2)}(x). \end{aligned} \right\}$$

Определим две ОНС

$$\varphi_k^{(1)}(x) = \varphi_1^{(1)}(2^{k-1}x), \quad \varphi_k^{(2)}(x) = \varphi_1^{(2)}(2^{k-1}x), \quad k = 1, 2, \dots$$

При $\Phi(x) = 1$ система $\{\varphi_k^{(1)}(x)\}$ есть система Радемахера, при $\Phi(x) = 4x$ система $\{|\varphi_k^{(1)}(x)|\}$ — подсистема системы Фабера–Шаудера, при $\Phi(x) = \sin 2\pi x$ система $\{\varphi_k^{(1)}(x) = \sin 2^k \pi x\}$. При $\Phi(x) = 1$ система $\{\varphi_k^{(2)}(x)\}$ — подсистема Уолша–Пэли, состоящая из произведений двух соседних функций Радемахера, при $\Phi(x) = 1 - 4x$ система $\{\varphi_k^{(2)}(x)\}$ — линейно преобразованная система Фабера–Шаудера, при $\Phi(x) = \cos 2\pi x$ — $\{\varphi_k^{(2)}(x) = \cos 2^k \pi x\}$.

Утверждение 1. Системы $\{\varphi_k^{(1)}(x)\}, \{\varphi_k^{(2)}(x)\}$ — слабо мультипликативные системы и, естественно, S_∞ — системы.

Утверждение 2. Ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k^{(1)}(x), \quad \{c_k\} \in l_2$$

наилучше сходятся во всех $L_p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, то есть

$$\inf_{\{a_m\}} \left\| \sum_{k \geq \nu} c_k \varphi_k^{(1)}(x) + \sum_{m=1}^{\nu-1} a_m \varphi_m^{(1)}(x) \right\|_p = \left\| \sum_{k \geq \nu} c_k \varphi_k^{(1)}(x) \right\|_p,$$

где $1 \leq p < \infty$, $\nu = 1, 2, \dots$. Понятие наилучше сходящегося ряда для тригонометрической системы и $\mathbb{C}(0, 2\pi)$ введено в 1937 г. С. Н. Бернштейном [2].

Практически дословно повторяя рассуждения из [3] можно установить следующее утверждение.

Утверждение 3. Для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$ такого, что $\overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} = +\infty$ существуют функции

$$f_\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{n_k}^{(1;2)}(x),$$

где $\varphi_k^{(1;2)}(x)$ — абсолютно непрерывные, такие, что

$$\begin{aligned} |f_\omega(x+h) - f_\omega(x)| &\leq C_1 \omega(h) \\ \overline{\lim}_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f_\omega(x+h) - f_\omega(x)|}{\omega(|h|)} &\geq C_2 > 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Дело в том, что для $g(t)$ — нечетной системы $\{g(\varphi_k^{(1;2)}(x))\}$ также слабо мультипликативны и $\{\int \varphi_k^{(1;2)}(x) dx, \text{ с нулевым средним по } (0, 1)\}$ тоже слабо мультипликативны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гапошкин В. Ф. О сходимости рядов по слабо мультипликативным системам функций // Матем. сб. 1972. Т. 89, № 3. С. 355–365.
2. Бернштейн С. Н. О периодических функциях, для которых наилучше сходящимся рядом является ряд Фурье // Собрание сочинений. Т. 2. Конструктивная теория функций [1905–1930]. М. : АН СССР, 1952. С. 178–183.
3. Рубинштейн А. И. Об ω -лакунарных рядах и о функциях классов H^ω // Матем. сб. 1964. Т. 65, № 2. С. 239–271.