Лемма 4. *Зафиксируем номер* $k \in \mathbb{N}$, *множество* $S := D_{k-1}(F, \rho_{k-1}(\cdot))$ *из* (7) *и число* $\vartheta = \vartheta_k$ *из* (5). *Существует непрерывное отображение* $f : D_{k-1}(F, \rho_{k-1}(\cdot)) \to D_k(F, \rho_k(\cdot))$ *такое, что для любого* $x(\cdot) \in S$ *при всех* $t \in T$ *справедливы неравенства*

$$\int_0^t \|f'(x(\cdot))(\tau) - x'(\tau)\| d\tau \le \frac{3}{4}\vartheta + \int_0^t \varrho(x'(\tau), F(\tau, x(\tau)))d\tau,$$

$$\int_0^t \varrho(f'(x(\cdot))(\tau), F(\tau, f(x(\cdot))(\tau)))d\tau \le \frac{1}{2}\vartheta + \int_0^t l(\tau)\|f(x(\cdot))(\tau) - x(\tau)\|d\tau.$$

Теорема 1. *Для произвольной функции* $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$, *удовлетворяющей неравенству* (6), *задано множество* $S_0 := D_0(F, \rho_0(\cdot))$ *(см.* (3)*). Пусть заданы число* $a \in (0, \varepsilon]$, *число* $\delta_1 > 0$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\delta_1 \le \frac{a}{64(m(1)+1)}e^{-2m(1)},$$

и непрерывная функция $d : B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(0)) \to E$ *такая, что* $\|d(x) - x\| < \delta_1$ *при всех* $x \in B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(0))$. *Тогда существует непрерывное отображение* $r \colon S_0 \to \mathcal{R}_T(F, d(B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(0))) \cap C_0)$, *удовлетворяющее для любого* $x(\cdot) \in S_0$ *соотношениям:*

$$r(x(\cdot))(0) = d(x(0)),$$

$$\|r(x(\cdot))(t) - x(t)\| \le \int_0^t e^{m(t)-m(\tau)}\rho_0(\tau)d\tau + \frac{a}{2(m(1)+1)}, \quad \forall t \in T.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988.

2. *Clarke, F. H.* Necessary Conditions in Dynamic Optimization. AMS. Vol. 173, № 816. Providence. 2005.

3. *Половинкин Е. С.* Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 121–141.

4. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М. : Физматлит, 2014.

УДК 517.518

ОЦЕНКИ СНИЗУ МИНИМУМА МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ[1]

А. Ю. Попов (Москва, Россия)

mysfed@rambler.ru

Доказана теорема об оценке снизу наибольшего значения минимума модуля аналитической функции на окружностях, радиусы которых про-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).

бегают отрезок с фиксированным отношением концов. Оценка дается через отрицательную степень интегральной нормы на большей окружности.

Возьмем произвольные числа $q \in (0,1)$ и $d > 0$. Положим

$$s = s(q) = \frac{1+q}{1-q},$$
$$A_+(q,d) = \frac{1-q}{4}\left(\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^{\frac{d+1}{d}} + \left(s-\sqrt{s^2-1}\right)^{\frac{d+1}{d}}\right) + \frac{1+q}{2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что всегда верно неравенство $A_+(q,d) > 1$. Через $H^1(\mathcal{R})$ обозначим пространство функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\mathcal{R}} = \sup_{0<x<\mathcal{R}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|f(xe^{i\varphi})\right| d\varphi.$$

Положим также $m(f,r) = \min_{|z|=r}|f(z)|$.

Теорема 1. *Даны три числа $q \in (0,1)$, $d > 0$, $R > 0$ и произвольная функция $f(z) = \sum_{k=\nu}^{\infty} b_k z^k \in H^1(\mathcal{R})$, $b_\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, где $\mathcal{R} \geqslant A_+(q,d)R$. Тогда найдется такое число $r \in (qR, R)$, что справедлива оценка снизу*

$$m(f,r) > c\|f\|_{\mathcal{R}}^{-d}, \qquad c = 4^{-d-1}q^{\gamma+1}|b_\nu|^{1+d}A_+^{\nu d}(q,d)R^{\nu(1+d)}.$$

Верна ли подобная оценка, если $\mathcal{R} < A_+(q,d)R$? Пока доказано, что если $\mathcal{R} \leqslant A_-(q,d)R$, где $A_-(q,d) = A_+(q,d) - q - 1$, то наибольший из минимумов модуля на окружностях радиусов $r \in [qR, R]$ нельзя оценить снизу через $\|f\|_{\mathcal{R}}^{-d}$. Поставим экстремальную задачу о нахождении в пространстве $H^1 = H^1(1)$ точной нижней грани

$$\inf\{\|f\|_1^d \max_{qR\leqslant r\leqslant R} m(f,r) \mid f \in H^1, f(0) = 1\}. \tag{1}$$

Теорема 2. *Если пара чисел q, d такова, что $A_-(q,d) > 1$, то при $1/A_-(q,d) \leqslant R < 1$ точная нижняя грань (1) равна нулю. Если же $0 < R \leqslant 1/A_+(q < d)$, то точная нижняя грань (1) положительна.*

Замечание. При любом фиксированном $d > 0$ величина $A_-(q,d)$ возрастает по $q \in (0,1)$ и $\lim_{q\to 1-} A_-(q,d) = +\infty$. В частности, имеем

$$A_-(q,1) = \frac{q^2+3q}{1-q}, \qquad A_+(q,1) = \frac{1+3q}{1-q}.$$

В теории целых функций доказан ряд теорем (см. [1]) о том, что на некотором «достаточно обширном» или хотя бы имеющем предельную точку ∞ множестве значений $r \in \mathbb{R}_+$ (своем для каждой целой функции f) минимум модуля $m(f,r)$ допускает оценку снизу через какую-либо степень $M(f,r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. В известных автору работах по этой тематике максимум модуля, через степень которого оценивался минимум, брался на той же окружности, что и минимум. Выяснилось, что оценки $m(f,r)$ через постоянную степень $M(f,r)$ возможны, вообще говоря, для целых функций f конечного порядка (или, более общо, конечного нижнего порядка). Хэйман [2] построил целую функцию F бесконечного порядка, для которой

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln m(F,r)}{\ln M(F,r)} = -\infty.$$

Вопрос о значении точной нижней грани

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln m(f,r)}{\ln M(f,r)},$$

взятой по всем целым функциям $f \neq 0$ порядка не выше ρ, решен достаточно давно при $\rho \in [0,1]$ ($\cos \pi\rho$), но при $\rho > 1$ до сих пор открыт. Хэйман [2] нашел порядок $(-\ln\rho)$ этой величины при $\rho \to +\infty$. Теорема 1 дает возможность эффективно оценивать снизу наибольшее по $r \in [qR, R]$ значение $m(f,r)$ через любую (например, минус первую) степень максимума модуля на окружности некоторого радиуса, большего R. Приведем несколько следствий из теоремы 1.

Следствие 1. *Для любой целой функции $f \not\equiv 0$ существует постоянная $c = c(f) > 0$ такая, что справедливо следующее утверждение.*

Для любого $R \geqslant 1$ существует такая точка $r \in (R/3, R)$, что выполняется неравенство

$$m(f,r) > \frac{c}{M(f,3R)}.$$

В частности, существует такая последовательность положительных чисел r_n, что

$$1) \lim_{n\to\infty} r_n = +\infty, \quad 2)\ r_n < r_{n+1} < 3r_n + 3, \quad 3)\ m(f,r_n) > \frac{c}{M(f,9r_n)}.$$

Теорема 3. *Если $q \in (0,1)$, $d > 0$, $a < A_-(q,d)$ то существуют целая функция F и последовательность положительных чисел $R_n \to +\infty$ такие, что справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \left(M^d(F, aR_n) \max_{qR_n \leqslant r \leqslant R_n} \big(m(F,r)\big) \right) = 0.$$

В заключение отметим, что оценки снизу наибольшего из минимумов модуля целой функции на окружностях, радиусы которых пробегают отрезок с постоянным отношением, встречались весьма редко. Автору известны три такие работы [3–5]. В [3] и [4] рассматривались весьма узкие подклассы целых функций. В [5] в рассуждениях имеются неисправимые ошибки, повлекшие за собой неверный результат (следствие 3 на с. 236).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hayman W. K.* Subharmonic functions. London, New York, San Francisco : Academic Press, 1990. Vol. 2.

2. *Hayman W. K.* The minimum modulus of large integral functions // Proc. London Math. Soc. 1952. № 2. P. 469–512.

3. *Гельфонд А. О.* Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 42–67.

4. *Гайсин А. М.* Решение проблемы Пойа // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 39–60.

5. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М. : Наука, 1979. 320 с.

УДК 517.518

ОЦЕНКИ СУММ РЯДОВ ПО СИНУСАМ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ [1]

А. Ю. Попов, А. П. Солодов (Москва, Россия)
mysfed@rambler.ru, apsolodov@mail.ru

В работе изучается асимптотическое поведение при $x \to 0+$ сумм рядов по синусам

$$g(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,, \tag{1}$$

последовательности коэффициентов которых не только монотонно стремятся к нулю, т. е.

$$b_1 > 0, \qquad b_{k+1} \leqslant b_k \quad (\forall k \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0, \tag{2}$$

но и принадлежат следующим двум специальным классам.

Один класс — обозначим его $\mathcal{B}\downarrow$ — состоит из всех последовательностей $\boldsymbol{b} = \{b_k\}$, удовлетворяющих условию (2) и, кроме этого, условию

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).