При этом если $\mu_{[0,\pi]} = \pi/3 - 2\varepsilon$ *для некоторого* $\varepsilon \geqslant 0$, *то* $\mu_{[2\pi/3,\pi]} \geqslant \geqslant \pi/3 - 7\varepsilon$ *(то есть* $\mu_{[2\pi/3,\pi]} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi/3$*).*

Стоит упомянуть, что в своей работе [5] М. И. Дьяченко построил для любого $\varepsilon \in (0,\pi)$ пример такого ненулевого косинус-ряда $g_\varepsilon(x)$ с монотонными коэффициентами, что $\{x \in (0,\pi) : g_\varepsilon(x) = 0\} \supset [\varepsilon, \pi]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гапошкин В. Ф.* О нулях тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1981. Т. 172, вып. 9. С. 13–15.

2. *Дьяченко М. И.* О рядах Фурье с монотонно убывающими коэффициентами и некоторых вопросах гладкости сопряженных функций // Сообщ. АН ГрузССР. 1981. Т. 104, № 3. С. 533–536.

3. *Белов А. С.* Степенные ряды и кривые Пеано // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49, № 4. С. 675–704.

4. *Дьяченко М. И.* О тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами // Теория функций и приближений : тр. 2-й Сарат. зимн. шк. (24 января – 5 февраля 1984 г.) : в 2 ч. Ч. 2. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1986. С. 101–104.

5. *Dyachenko M. I.* On some properties of trigonometric series with monotone decreasing coefficients // Anal. Math. 1984. Vol. 10, № 3. P. 193–205.

УДК 517.929+517.983.51

РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ[1]

С. С. Орлов, В. В. Шеметова (Иркутск, Россия)
orlov_sergey@inbox.ru, valentina501@mail.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство, u — неизвестная, а f — заданная функции со значениями в E аргумента $t \geq 0$. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t-h) + f(t),\ t > 0. \tag{1}$$

Здесь A и B — линейные непрерывные операторы из E в E, $h > 0$. Для уравнения (1) поставим начальную задачу

$$u(t) = \varphi(t),\ -h \leq t \leq 0, \tag{2}$$

с начальной функцией $\varphi(t) \in \mathcal{C}([-h,\, 0]\,;\, E)$.

Определение 1. *Классическим решением задачи* (1), (2) назовем функцию $u(t) \in \mathcal{C}([-h,\, +\infty);\, E) \cap \mathcal{C}^1((0,\, +\infty);\, E)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00291).

Представляемая работа посвящена изучению вопроса однозначной разрешимости начальной задачи (1), (2). Исследования проводятся на основе теории обобщенных функций Соболева–Шварца со значениями в банаховых пространствах [1] и концепции фундаментального решения абстрактного линейного интегро-дифференциального оператора. Этот подход использовался авторами в работе [2] для специального класса дифференциально-операторных уравнений вида (1), в котором $B = \alpha A$, α — ненулевой скаляр.

Пусть $u = u(t)$ — классическое решение начальной задачи (1), (2), продолжим его нулем при $t < -h$ следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + u(t)\theta(t),$$

тогда в классе $K'_+(E)$ распределений с ограниченным слева носителем начальная задача (1), (2) сводится к сверточному уравнению

$$\big(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)\big) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t) \tag{3}$$

с правой частью $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ вида

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) - A\varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + \delta'(t) * \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + \varphi(0)\delta(t).$$

Здесь θ — *функция Хевисайда*, δ — *функция Дирака*, $\mathbb{I}$ — тождественный оператор. Единственным решением уравнения (3) в $K'_+(E)$ (*обобщенным* решением задачи (1), (2)) является распределение $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t)$, где обобщенную оператор-функцию $\mathcal{E}$ такую, что

$$\forall\ v(t) \in K'_+(E) \quad \big(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)\big) * \mathcal{E}(t) * v(t) = v(t),$$

$$\forall\ v(t) \in K'_+(E) \quad \mathcal{E}(t) * \big(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)\big) * v(t) = v(t),$$

назовем *фундаментальным решением* дифференциального оператора $\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)$ с отклоняющимся аргументом.

Теорема 1. *Пусть* A, $B \in \mathcal{L}(E)$, *тогда фундаментальное решение дифференциального оператора* $\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)$ *имеет вид*

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{A(t-kh)} U_k(t-kh)\theta(t-kh),$$

где e^{At} *— операторная экспонента, последовательность* $\{U_{k-1}(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *оператор-функций задается рекуррентно*

$$U_k(t) = \int_0^t V(s)U_{k-1}(s)ds,\ U_0(t) = \mathbb{I},$$

причем $V(t) = e^{-At}Be^{At}$.

Заметим, что $V(0) = B$, более того, операторы $V(t)$ и A образуют пару Лакса [3], т. е. удовлетворяют уравнению

$$V'(t) = \big[V(t),\, A\big].$$

По следствию из формулы Бейкера – Кемпбелла – Хаусдорфа [4] оператор-функция $V(t)$ представима операторно-функциональным рядом

$$V(t) = B + [B, A]\,\frac{t}{1!} + \big[[B, A]\,, A\big]\frac{t^2}{2!} + \big[\big[[B, A]\,, A\big], A\big]\frac{t^3}{3!} + \ldots,$$

сходящимся в $\mathcal{L}(E)$ равномерно на любом компакте. При $k \in \mathbb{N}$ имеют место дифференциальные соотношения и асимптотические формулы

$$U_k'(t) - \big[U_k(t),\, A\big] = U_{k-1}B, \quad U_{k-1}(t) \sim \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,B^{k-1},\; t \to 0.$$

Здесь $\big[B, A\big] = BA - AB$ обозначен коммутатор операторов B и A. Если их суперпозиция коммутативна, т. е. $\big[B, A\big] = \mathbb{O}$, то, как показано в [5]

$$U_{k-1}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,B^{k-1}.$$

В условиях теоремы 1 начальная задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение вида

$$\tilde{u}(t) = \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + \sum_{k=0}^{+\infty}\Bigg[e^{A(t-kh)}U_k(t-kh)\varphi(0)\theta(t-kh) +$$

$$+ \int\limits_{(k+1)h}^{t} e^{A(t-s)}U_k(t-s)B\varphi(s-(k+1)h)ds\big(\theta(t-kh) - \theta(t-(k+1)h)\big) +$$

$$+ \int\limits_{-h}^{0} e^{A(t-(k+1)h-s)}U_k(t-(k+1)h-s)B\varphi(s)ds\,\theta(t-kh) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t-kh} e^{A(t-kh-s)}U_k(t-kh-s)f(s)ds\,\theta(t-kh)\Bigg],$$

которое является регулярным распределением и порождено функцией $u = u(t)$, заданной кусочно на полуинтервалах $[(k-1)h,\, kh)$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Эта функция является классическим решением начальной задачи (1),

(2) при $f(t) \in \mathcal{C}([0, +\infty); E)$. Пусть $f(t) \in \mathcal{C}^{n-1}((0, +\infty); E)$, тогда в точках $t = kh$, где $k = 0, \ldots, n-1$, решение имеет k порядком сильной дифференцируемости, а в других точках интервала $(0; +\infty)$ он равен n. Эти факты согласуются с известными сведениями [6, с. 20] о скалярных $(E = \mathbb{R})$ уравнениях с отклоняющимся аргументом.

Предлагаемый подход применим к исследованию более общей задачи с начальными условиями $u(t) = \varphi(t)$, $-h \leq t < 0$, $u(0) = u_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publ., 2002. 568 p.

2. *Орлов С. С.* Построение решений в классе распределений дифференциально-операторных уравнений с отклоняющимся аргументом // Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посв. памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск : Изд-во «Удмуртский университет», 2015. С. 107–108.

3. *Абловиц Д., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М. : Мир, 1987. 479 с.

4. *Hall B. C.* Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introductions. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 222. N. Y. : Springer, 2015. 453 p.

5. *Шеметова В. В.* Фундаментальное решение одного функционально-дифференциального оператора в банаховом пространстве // Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы : материалы междунар. молодеж. науч. шк. Ч. I. Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2017. С. 213–214.

6. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971. 296 с.

УДК 517.538.3

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Б. П. Осиленкер (Москва, Россия)
b_osilenker@mail.ru

Введение

Рассмотрим нестандартное скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx + A_1 f(1)g(1) + B_1 f(-1)g(-1) +$$

$$+ A_2 f'(1)g'(1) + B_2 f'(-1)g'(-1), \qquad (1)$$